Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 3 (28) ’ 2015

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-61826 от 18.05.2015

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2015, No. 3

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический Вестник Информатики и Математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В.И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению ученого совета Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского.
Протокол № 18 от 14 декабря 2015 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

ОТ РЕДАКЦИИ

В данном номере журнала собраны работы участников XXVI Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ — 2015). Конференция проводится сотрудниками факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского каждый год осенью с 1990 года на южном побережье Крыма. Конференция КРОМШ — 2015, организованная сотрудниками кафедры математического анализа Таврической академии КФУ им. В. И. Вернадского при участии Российского фонда фундаментальных исследований, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, проходила с 17 по 29 сентября 2015 в пос. Батилиман (база отдыха “Чайка”).

В конференции приняло участие 167 человек из России, Казахстана, Белоруссии, Украины, Узбекистана и Польши, среди которых действительных членов академий — 1, докторов наук — 45, кандидатов наук — 70, аспирантов, соискателей, студентов и др. — 42. Было прочитано 40 лекций, сделано 104 доклада и сообщения, 24 стендовых доклада.

Российская Федерация была представлена, в-частности, такими учебными и научными заведениями: Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский физико-технический институт, Российский университет дружбы народов, Институт системного программирования РАН, Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН, Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, НИУ Высшая Школа Экономики, Московский государственный областной гуманитарный институт (г. Орехово-Зуево), Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского (г. Симферополь), Крымский инженерно-педагогический университет (г. Симферополь), Филиал МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Севастополе, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (г. Архангельск), Белгородский государственный университет, Воронежский государственный университет, Вологодский государственный педагогический университет, Институт Математики с ВЦ УНЦ РАН (г. Уфа), Санкт-Петербургский Государственный Университет, Петербургское отделение Математического института им. Стеклова, Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Южный Федеральный Университет (г. Ростов-на-Дону), Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского, Самарский государственный университет, Институт прикладной физики РАН (г. Нижний Новгород).

УДК: 517.9:532

MSC2010: 35P10, 35P20

СЛУЧАЙ МАЛОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

© О. А. Андронова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Академия строительства и архитектуры
кафедра высшей математики и информатики факультета водных ресурсов и энергетики
пр. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *o.andronova@list.ru*

The case of weak intensity in spectral problems with the internal dissipation of an energy.

Andronova O. A.

Abstract. We consider the following spectral problem:

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u - \triangle u = 0 \text{ (in } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (on } \Gamma), \quad K = K^* \gg 0. \tag{1}$$

Here $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ is an domain with Lipschitz boundary $\Gamma = \partial\Omega$. The parameter $\beta > 0$ imitates the power of the internal dissipation of an energy.

The problem (1) can be reduce to study another spectral problem seeing in sum of Hilbert spaces:

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(K),\ \zeta \in \mathscr{D}(A^{1/2}),\ A \gg 0. \tag{2}$$

The methods of the spectral theory of the operator bundles and the theory of the self-adjoint operators in idefinite metric spaces are used.

Here we study the case, when $\beta K := 2\beta A^{\delta}$, $\beta > 0$, $\delta \geqslant 0$. Then we have

$$\begin{pmatrix} 2\beta A^{\delta} & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \delta \geqslant 0,\ u \in \mathscr{D}(A^{\delta}) \cap \mathscr{D}(A^{1/2}),\ \zeta \in \mathscr{D}(A^{1/2}). \tag{3}$$

We consider here, that $0 < A^{-1} \in \mathscr{S}_\infty(E)$.

This problem contains two parameters: $\beta > 0$ и $\delta \geqslant 0$. The aim of consideration of this problem is a desire to trace, as spectrum mutates when δ grows at different positive β and to obtain the statements about localization of the spectrum and the properties of own and joined elements.

It is found out that behavior of spectrum depends on intensity of internal dissipation in the system. It can be weak, middle and strong. The case of small intensity of internal dissipation is studied, so cases $\delta = 0$, $0 < \delta < 1/2$ and frontier case $\delta = 1/2$ are considered.

We investigate that connection between operators $\beta K = 2\beta A^{\delta}$ both confirms the results got before and opens new effects in a spectral problem. The spectrum substantially depends on parameter δ, so when $0 \leqslant \delta < 1/2$ it locates near imaginary semiaxis.

The detailed structure of spectrum depends on the parameter of internal dissipation β. In particular, in frontier case $\delta = 1/2$ the spectrum structure substantially depends on β: when $0 < \beta < 1$ it is imaginary and when $\beta > 1$ — real and positive.

In the case of weak intensity of internal dissipation in all range of change δ and β the systems of eigenfunctions form basis Rissa in some Hilbert spaces.

Keywords: *Hilbert space, compact self-adjoint operator, classes of compact operators, characteristic equation, dynamics of the eigenvalues' motion.*

Введение

Термин "диссипация энергии" (лат. dissipatio) означает рассеяние, переход части энергии упорядоченных процессов (кинетической энергии движущегося тела, энергии электрического тока и т. п.) в энергию неупорядоченных процессов, в конечном счете — в теплоту. Системы, в которых энергия упорядоченного движения с течением времени убывает за счёт диссипации, переходя в другие виды энергии, например в теплоту или излучение, называются диссипативными. Примерами диссипативных систем являются: твердое тело, движущееся по поверхности другого при наличии трения, жидкость или газ, между частицами которых при движении действуют силы вязкости, и т. п.

Диссипативные системы формируют важный класс задач, который в настоящее время является предметом активного исследования. Главная особенность таких задач заключается в наличии механизмов "перераспределения" и выделения энергии. Взаимодействие этих двух механизмов ведет за собой появление особых режимов в системе. Рост интереса к диссипативным системам был стимулирован попыткой найти адекватные математические модели для объяснения турбулентности в жидкости, основанные на понятии аттрактора.

Настоящая работа касается исследования спектральных задач, порожденных начально-краевыми задачами с внутренней диссипацией энергии, а также некоторым модельным примерам. Отметим, что этим исследованиям предшествовало детальное изучение эволюционных и спектральных проблем с поверхностной диссипацией энергии. Автор данной работы и его научный руководитель проф. Копачевский Н. Д. познакомились с проблемой исследования эволюции динамических систем с поверхностной диссипацией энергии на лекции проф. Чуешова И. Д. на 15 Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ — 2004, Ласпи — Батилиман). Ранее и другими авторами исследовались задачи с диссипацией на границе. Так, Лагнез Дж. в работе [1] исследовал вопрос затухания решений волнового уравнения в ограниченной области при наличии диссипации на границе. Работа [2] посвящена изучению равномерной стабилизации решений на границе области для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе.

Работы Чуешова И. Д. с соавторами и его монография (см. [3] — [4]) посвящены изучению бесконечномерных диссипативных динамических систем, в частности, систем с поверхностной диссипацией энергии. Так, в [3] исследуется проблема существования конечномерного аттрактора для полулинейного волнового уравнения с нелинейной диссипацией на границе области. В [4] изучается глобальные аттракторы для уравнения Кармана с нелинейной поверхностной диссипацией. Отметим еще, что исследованием аттракторов (притягивающих множеств) динамических систем занимались многие другие ученые. Упоминаем лишь монографию Бабина А. В. и Вишика М. И.(1992), работы Ладыженской О. А.(1985), Темама (1988).

Результатом исследования линейной начально-краевой задачи с поверхностной диссипацией энергии стала работа автора и его научного руководителя Копачевского Н. Д. [13]. В работе методами функционального анализа изучается линейная начально-краевая задача математической физики с поверхностной диссипацией энергии, а также ее абстрактный аналог с использованием абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств. Рассматриваются также спектральные проблемы, порожденные этими задачами. Далее, в работе [14] исследовались начально-краевые и спектральные задачи при различной интенсивности внутренней диссипацией энергии. Оказалось, что при некоторых дополнительных соотношениях между операторами, входящими в постановку задачи, появляются новые эффекты. Здесь, в статье, приведен такой пример спектральной задачи с внутренней диссипацией энергии. Он подробно разобран для случая малой интенсивности внутренней диссипации. Случаи средней и сильной интенсивности еще требуют детального исследования и будут отражены в последующих публикациях автора.

1. Простейшая спектральная задача с внутренней диссипацией энергии

Рассматривается начально-краевая задача математической физики с внутренней диссипацией энергии. Ее формулировка такова. В области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ требуется найти функцию $u = u(t,x)$, для которой выполнено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta K \frac{\partial u}{dt} - \triangle u = f(t,x)\,(\text{в}\,\Omega), \quad \beta > 0, \tag{4}$$

а также граничные и начальные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + u = 0\,(\text{на}\,\Gamma), \quad u(0,x) = u^0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u^1(x)\ (\text{в}\,\Omega). \tag{5}$$

Здесь слагаемое $\beta K(\partial u/\partial t)$, $\beta > 0$, появляется вследствие наличия в динамической системе внутренней диссипации энергии; при $\beta = 0$ задача (4) — (5) является гиперболической, т. е. консервативной.

Далее изучаются нормальные движения системы, т. е. такие решения однородной задачи (4) – (5) без начальных условий, для которых

$$u(t, x) = exp(-\lambda t)u(x),\ x \in \Omega,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{6}$$

Тогда для амплитудных элементов $u(x)$ возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u - \triangle u = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (на } \Gamma). \tag{7}$$

Далее вводятся, как в работах [13], [14], гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$, $\widetilde{\mathscr{H}^1}(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v)_{1,\Omega} = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v}\, d\Omega + \int\limits_{\Gamma} u \cdot \overline{v}\, d\Gamma$$

и $L_2(\Gamma)$, а также порождающий оператор A гильбертовой пары $\left(\widetilde{\mathscr{H}^1}(\Omega); L_2(\Omega)\right)$,

$$Au := -\triangle u,\ \mathscr{D}(A) := \left\{u \in \widetilde{\mathscr{H}^1}(\Omega) :\ \frac{\partial u}{\partial n} + u = 0 \text{ (на } \Gamma), \mathscr{R}(-\triangle) = L_2(\Omega)\right\}.$$

Тогда задачу (7) можно переписать в виде

$$L_\beta(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda\beta K + A)u = 0, \tag{8}$$

где $L_\beta(\lambda)$ — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами A и K. Далее будем считать, что $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого “сравнима”, с $\mathscr{D}(A)$, т. е. выполнено одно из условий: $\mathscr{D}(A) \subset \mathscr{D}(K)$, либо $\mathscr{D}(A) \supset \mathscr{D}(K)$. Отметим, что оператор A также обладает свойствами $A = A^* \gg 0$.

Спектральная задача (7) допускает обобщение на случай тройки пространств E, F, G и оператора следа γ, для которых справедлива абстрактная формула Грина (см. [6], [7]). Её формулировка такова: требуется найти элемент $u \in F$ такой, что выполнены уравнение и граничное условие:

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + L u = 0 \text{ (в } E), \quad \partial u = 0 \text{ (в } G\,). \tag{9}$$

Введя здесь оператор A гильбертовой пары $(F; E)$,

$$Au := Lu,\ \mathscr{D}(A) := \{u \in F :\ \partial u = 0 \text{ (в } G\,), \mathscr{R}(L) = E\} \subset F, \tag{10}$$

снова приходим к проблеме (8), рассматриваемой теперь в пространстве F.

Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + Au = 0 \text{ (в } E), \quad u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(K) \subset F. \tag{11}$$

Так как $A \gg 0$, то число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (11). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по λ операторного пучка. Именно: введем в (11) новый искомый элемент ζ согласно формуле $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$. Тогда задача (11) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathscr{D}(A) \cap \mathscr{D}(K),\ \zeta \in \mathscr{D}(A^{1/2}), \quad A \gg 0, \tag{12}$$

которая рассматривается в пространстве $E^2 := E \oplus E$.

Ранее в работе [14] были показано, что собственные значения задач (11), (12) расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. При $\beta = 0$ спектр задачи дискретен, расположен на мнимой оси. Более точные свойства спектра и системы корневых элементов зависят от интенсивности внутренней диссипации. Так, если диссипация в динамической системе достаточно мала, то спектр задачи (11) локализован в окрестности мнимой оси, а корневые элементы имеют свойства двукратной полноты и двукратной базисности по Абелю – Лидскому. В случае средней интенсивности внутренней диссипации спектр задачи локализован в окрестности положительной полуоси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы задачи образуют полную систему либо базис Абеля – Лидского в пространстве E^2. В случае большой внутренней диссипации происходит новая перестройка спектра задачи, он имеет две положительных ветви собственных значений с предельными точками не только на бесконечности, но и в нуле. Таким образом, в динамической системе имеются не только как угодно быстро затухающие апериодические нормальные движения, отвечающие собственным значениям $\lambda_k^+ \to +\infty$, $(k \to \infty)$ и множителям $\exp(-\lambda_k^+ t)$, но и как угодно медленно затухающие, отвечающие собственным значениям λ_k^- и множителям $\exp(-\lambda_k^- t)$, $\lambda_k^- \to +0\,(k \to \infty)$. Собственные элементы, отвечающие каждой ветке, образуют базис Рисса в пространстве E.

Рассмотрим задачу (12) при условии, что $\beta K := 2\beta A^{\delta}, \quad \beta > 0, \quad \delta \geqslant 0$. Тогда возникает спектральная проблема

$$\begin{pmatrix} 2\beta A^{\delta} & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathscr{D}(A^{\delta}) \cap \mathscr{D}(A^{1/2}),\ \zeta \in \mathscr{D}(A^{1/2}), \tag{13}$$

содержащая два параметра: $\beta > 0$ и $\delta \geqslant 0$. Цель дальнейших рассмотрений — проследить, как видоизменяется спектр задачи при возрастании δ и различных положительных β. При этом считаем, что $0 < A^{-1} \in \mathscr{S}_\infty(E)$.

Пусть $\{u_k(A)\}_{k=1}^\infty$ — собственные элементы оператора A, а $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^\infty$ — его (конечнократные) собственные значения, $0 < \lambda_1(A) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k(A) \leqslant \ldots$, $\lambda_k(A) \to +\infty$ $(k \to \infty)$, пронумерованные с учетом их кратностей. Отметим, что при $\beta = 0$ задача (13) имеет решения

$$\lambda_k^\pm = \pm i\lambda_k^{1/2}(A), \quad z_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm u_k(A); u_k(A))^t, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

при этом собственные элементы

$$\{z_k^+\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-\}_{k=1}^\infty \tag{15}$$

образуют ортогональный базис в пространстве E^2.

1^0. Будем сначала считать, что $\delta = 0$, $\beta > 0$. Тогда

$$\mathscr{A}_\beta := \begin{pmatrix} 2\beta I & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2i\beta A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

и проблема (13) сводится к задаче на собственные значения слабовозмущенного самосопряженного оператора.

Собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^\pm(\beta) = \begin{cases} \beta \pm i\sqrt{\lambda_k(A) - \beta^2}, & \beta^2 < \lambda_k(A), \\ \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \lambda_k(A)}, & \beta^2 \geqslant \lambda_k(A), \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{16}$$

Если, в частности, $\beta^2 < \lambda_1(A)$, то все собственные значения $\lambda_k^\pm$ невещественные и расположены на окружностях

$$|\mathrm{Re}\,\lambda_k^\pm(\beta)|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda_k^\pm(\beta)|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{1/2}(A). \tag{17}$$

В этом случае собственные элементы $z_k^\pm$ таковы:

$$z_k^+(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_k(A) \\ \\ i\varepsilon_k(\beta)u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^-(\beta) = \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k(\beta)u_k(A) \\ \\ u_k(A) \end{pmatrix}. \tag{18}$$

$$\varepsilon_k(\beta) := \beta\lambda_k^{-1/2}(A) - i\sqrt{1 - \beta^2\lambda_k^{-1}(A)}, \quad |\varepsilon_k(\beta)| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Они обладают следующими свойствами:

$$(z_k^\pm(\beta), z_l^\pm(\beta))_{E^2} = \delta_{kl}, \quad (z_k^+(\beta), z_l^-(\beta))_{E^2} = i\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_k(\beta)\delta_{kl},$$

и потому при $\beta > 0$ уже не образуют ортогональную систему элементов в E^2. Заметим еще, что по отношению к индефинитному скалярному произведению с оператором $\mathscr{J} = \operatorname{diag}(I; -I) = \mathscr{J}^* = \mathscr{J}^{-1}$, когда оператор $\mathscr{A}_\beta$ $\mathscr{J}$-симметричен, все собственные элементы (18), отвечающие невещественным собственным значениям $\lambda_k^\pm$, являются $\mathscr{J}$-нейтральными:

$$(\mathscr{J} z_k^\pm, z_k^\pm)_{E^2} =: [z_k^\pm, z_k^\pm] = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \tag{19}$$

Пусть теперь для заданного $\varkappa \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\lambda_\varkappa(A) < \beta < \lambda_{\varkappa+1}(A)$.

Тогда собственные значения $\lambda_k^\pm(\beta)$ с номером $j < \varkappa + 1$ вещественны, положительны и определяются формулами

$$\lambda_j^\pm(\beta) = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}, \quad j = 1, \dots, \varkappa. \tag{20}$$

Этим номерам $j = \overline{1, \varkappa} := 1, \dots, \varkappa$ отвечают $\mathscr{J}$-положительные (для $\lambda_j^+(\beta)$) и соответственно $\mathscr{J}$-отрицательные (для $\lambda_j^-(\beta)$) собственные элементы задачи (13).

В самом деле, для этих номеров j имеем вместо (18) следующие формулы собственных элементов:

$$z_j^+(\beta) = \begin{pmatrix} u_j(A) \\ \\ i\widetilde{\varepsilon}_j(\beta)u_j(A) \end{pmatrix}, \quad z_j^-(\beta) = \begin{pmatrix} -i\widetilde{\varepsilon}_j(\beta)u_j(A) \\ \\ u_j(A) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, \varkappa}, \tag{21}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_j(\beta) := (\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)})/\lambda_j^{1/2}(A) > 0, \quad j = \overline{1, \varkappa}. \tag{22}$$

Покажем, что собственные элементы $z_j^+(\beta)$ из (21) являются $\mathscr{J}$-положительными, а $z_j^-(\beta)$ — $\mathscr{J}$-отрицательными. Действительно,

$$[z_j^+, z_j^+] := (\mathscr{J} z_j^+, z_j^+)_{E^2} = \|u_j(A)\|_E^2 - |\widetilde{\varepsilon}_j(\beta)|^2 \cdot \|u_j(A)\|_E^2 = (1 - |\widetilde{\varepsilon}_j(\beta)|^2) =$$

$$= \left(1 - \frac{\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}\right)^2}{\lambda_j(A)}\right) = 2\frac{\sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}}{\lambda_j(A)} \left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}\right) > 0; \tag{23}$$

$$[z_j^-, z_j^-] := (\mathscr{J} z_j^-, z_j^-)_{E^2} = |\widetilde{\varepsilon}_j(\beta)|^2 \cdot \|u_j(A)\|_E - \|u_j(A)\|_E =$$
$$= |\widetilde{\varepsilon}_j(\beta)|^2 - 1 < 0, \quad j = \overline{1, \varkappa}. \tag{24}$$

Отметим еще одно важное обстоятельство: собственные элементы $z_k^\pm(\beta)$ выражаются через собственные элементы $z_k^\pm(0)$, т. е. через элементы (14) ортонормированного базиса в E^2, посредством следующих формул:

$$z_k^+(\beta) = \operatorname{diag}(I; iK_+)z_k^+(0), \ z_k^-(\beta) = \operatorname{diag}(iK_+; I)z_k^-(0), \ \beta^2 < \lambda_1(A), \tag{25}$$

$$K_+ := \beta A^{-1/2} - i(I - \beta^2 A^{-1})^{1/2}, \quad \|K_+\| = 1. \tag{26}$$

В самом деле, для $u = u_k(A)$ имеем

$$iK_+ u_k(A) = i(\beta\lambda_k^{-1/2}(A) - i\big(1 - \beta^2\lambda_k^{-1}(A)\big)^{1/2})u_k(A) = i\varepsilon_k(\beta)u_k(A). \tag{27}$$

Лемма 1. *Если выполнено условие $\beta^2 < \lambda_1(A)$, то собственные элементы* (18) *задачи* (13) *образуют базис Рисса в пространстве E^2.*

Доказательство. Докажем сначала, что эти элементы образуют полную систему в E^2. Пусть $z_0 := (u_0; \zeta_0)^t \in E^2$ — элемент, ортогональный всем элементам системы (18). Тогда выполнены условия

$$(z_0, z_k^+) = 0, \quad (z_0, z_k^-) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. имеют место соотношения (см. (18))

$$\begin{aligned} &(u_k(A), u_0)_E + i\varepsilon_k(\beta)(u_k(A), \zeta_0)_E = 0, \\ &-i\varepsilon_k(\beta)(u_k(A), u_0)_E + (u_k(A), \zeta_0)_E = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{28}$$

Так как $|\varepsilon_k(\beta)| = 1$, то $\varepsilon_k^{-1}(\beta) = 1/\overline{\varepsilon_k}(\beta)$, и вторая совокупность уравнений (28) дает

$$(u_k(A), u_0)_E + i\overline{\varepsilon}_k(\beta)(u_k(A), \zeta_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из первых соотношений (28) получаем

$$(\operatorname{Im}\varepsilon_k(\beta))(u_k(A), \zeta_0)_E = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и так как $\operatorname{Im}\varepsilon_k(\beta) \neq 0$ при любом k, то в силу ортогональной базисности системы $\{u_k(A)\}_{k=1}^\infty$ в E получаем, что $\zeta_0 = 0$. Но тогда $(u_k(A), u_0)_E = 0$, что и дает свойство $u_0 = 0$. Таким образом, система элементов $\{z_k^+(\beta)\}_{k=1}^\infty \cup \{z_k^-(\beta)\}_{k=1}^\infty$ полна в пространстве E^2.

Воспользуемся теперь тем фактом, что в представлении (25), (26) оператор K_+ ограниченно обратим и

$$K_+^{-1} = K_+^* = \beta A^{-1/2} + i(I - \beta^2 A^{-1})^{1/2}, \tag{29}$$

т. е. K_+ — унитарный оператор, действующий в пространстве E. Отсюда следует, что оператор $\operatorname{diag}(I; iK_+)$ и $\operatorname{diag}(iK_+; I)$ имеют ограниченные обратные операторы:

$$(\operatorname{diag}(I; iK_+))^{-1} = \operatorname{diag}(I; -iK_+^*), \quad (\operatorname{diag}(iK_+; I))^{-1} = \operatorname{diag}(-iK_+^*; I). \tag{30}$$

Таким образом, элементы $z_k^+(\beta)$ получаются применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathscr{K}_+ := \operatorname{diag}(I; iK_+)$, примененного в части $\{z_k^+(0)\}_{k=1}^\infty$ ортогонального базиса (15), а элементы $\{z_k^-(\beta)\}_{k=1}^\infty$ — применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора

$$\mathscr{K}_- := \operatorname{diag}(iK_+; I), \tag{31}$$

к элементам $\{z_k^-(0)\}_{k=1}^{\infty}$. Отсюда следует, что совокупность собственных элементов задачи (13) при выполнении условия $\beta^2 < \lambda_1(A)$ образует базис Рисса в пространстве E^2. □

Подведем итоги рассмотрения спектральной задачи (13) при $\delta = 0$.

а) Эта задача имеет дискретный спектр (16) с предельной точкой $\lambda = \infty$. Все невещественные собственные значения $\lambda_k^{\pm}$ расположены на прямой $\mathrm{Re}\lambda = \beta > 0$ и получаются при пересечении этой прямой с полуокружностью (17) при $\mathrm{Re}\lambda > 0$.

б) Если выполнены условия $\lambda_{\varkappa}(A) < \beta < \lambda_{\varkappa+1}(A)$, то задача имеет ровно $\varkappa$ пар вещественных положительных собственных значений $\lambda_j^{\pm}(\beta)$, которые находятся по формулам (20). Отвечающие этим значениям собственные элементы (21) образуют равномерно дефинитные подпространства

$$\mathscr{L}_1^+ := \operatorname{span}\{z_j^+(\beta)\}_{k=1}^{\varkappa}, \quad \mathscr{L}_1^- := \operatorname{span}\{z_j^-(\beta)\}_{k=1}^{\varkappa}. \tag{32}$$

Докажем последнее утверждение для подпространства $\mathscr{L}_1^+$. Имеем (23)

$$[z_j^+(\beta), z_j^+(\beta)] = (\mathscr{J} z_j^+(\beta), z_j^+(\beta))_{E^2} = 2\frac{\sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}}{\lambda_j(A)}\left(\beta - \sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}\right) =$$

$$= 2\frac{\sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \lambda_j(A)}} \geqslant 2\frac{\sqrt{\beta^2 - \lambda_{\varkappa}(A)}}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \lambda_1(A)}} =: c^2 > 0, \quad j = \overline{1, \varkappa}. \tag{33}$$

Так как подпространства, натянутые на собственные элементы z_j^+, $\mathscr{J}$-ортогональны для несовпадающих между собой собственных значений λ_j^+, то отсюда, разлагая любой элемент из $\mathscr{L}_1^+$ по $\mathscr{J}$-ортогональному базису $\{z_j^+(\beta)\}_{j=1}^{\varkappa}$ и используя неравенство (33), приходим к выводу, что

$$[z, z] \geqslant c^2 \|z\|_{E^2}^2, \quad c^2 > 0, \quad \forall z \in \mathscr{L}_1^+, \tag{34}$$

т. е. $\mathscr{L}_1^+$ — равномерно положительное подпространство.

Аналогично можно доказать, что $\mathscr{L}_1^-$ — равномерно отрицательное подпространство. Поэтому $\mathscr{L}_1^{\pm}$ — равномерно дефинитные подпространства.

в) Введем теперь неотрицательное подпространство

$$\mathscr{L}^+ := \mathscr{L}_1^+ \dotplus \mathscr{L}_0^+, \quad \mathscr{L}_0^+ := \operatorname{span}\left\{z_k^+ : \operatorname{Im}\lambda_k^+ > 0, \, k = \varkappa + 1, \ldots\right\}, \tag{35}$$

а также соответствующее неположительное подпространство

$$\mathscr{L}^- := \mathscr{L}_1^- \dotplus \mathscr{L}_0^-, \quad \mathscr{L}_0^- := \operatorname{span}\left\{z_k^- : \operatorname{Im}\lambda_k^- < 0, \, k = \varkappa + 1, \ldots\right\}. \tag{36}$$

Тогда при условиях $\lambda_\varkappa(A) < \beta < \lambda_{\varkappa+1}(A)$ пространство E^2 допускает разложение $E^2 = \mathscr{L}^+ \dotplus \mathscr{L}^-$, где $\mathscr{L}^\pm$ — подпространства (35) и (36).

Будем сначала считать, что выполнено свойство $\beta^2 < \lambda_1(A)$, и докажем этот факт. В самом деле, так как в E имеется ортонормированный базис $\{u_k(A)\}_{k=1}^\infty$, то любой элемент $z = (u;\zeta)^t \in E^2$ можно представить в виде

$$z = (u;\zeta)^t = \left(\sum_{k=1}^\infty \alpha_{1k}u_k(A); \sum_{k=1}^\infty \alpha_{2k}u_k(A)\right)^t, \ \alpha_{1k} = (u, u_k(A)),\ \alpha_{2k} = (\zeta, u_k(A)). \quad (37)$$

Тогда соотношение $z = z^+ + z^-$, $z^\pm \in \mathscr{L}^\pm$, приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^\infty c_k^+(\beta)\begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\varepsilon_k(\beta)u_k(A)\end{pmatrix} + \sum_{k=1}^\infty c_k^-(\beta)\begin{pmatrix} -i\varepsilon_k(\beta)u_k(A) \\ u_k(A)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^\infty \alpha_{1k}u_k(A) \\ \sum_{k=1}^\infty \alpha_{2k}u_k(A)\end{pmatrix}, \quad (38)$$

откуда получаем, что должны выполняться условия

$$c_k^+(\beta) - i\varepsilon_k(\beta)c_k^-(\beta) = \alpha_{1k}, \quad c_k^+(\beta)i\varepsilon_k(\beta) + c_k^-(\beta) = \alpha_{2k}, \quad k = 1,2,\ldots. \quad (39)$$

Отсюда имеем

$$c_k^+(\beta) = \frac{\alpha_{1k} + i\varepsilon_k(\beta)\alpha_{2k}}{1-\varepsilon_k^2(\beta)}, \quad c_k^-(\beta) = \frac{\alpha_{2k} - i\varepsilon_k(\beta)\alpha_{1k}}{1-\varepsilon_k^2(\beta)}, \quad k = 1,2,\ldots. \quad (40)$$

Так как здесь

$$1-\varepsilon_k^2(\beta) = 1 - \left[\beta\lambda_k^{-1/2}(A) - i\sqrt{1-\beta^2\lambda_k^{-1}(A)}\right]^2 \sim 1-(-i)^2 = 2 \quad (k\to\infty), \quad (41)$$

то ряды в средней части (38) сходятся, и утверждение при $\beta^2 < \lambda_1(A)$ доказано.

Если вместо этого условия выполнено условие $\lambda_\varkappa(A) < \beta < \lambda_{\varkappa+1}(A)$, то все те же рассуждения можно провести в подпространстве пространства E^2 коразмерностью $2\varkappa$, а в конечномерном ($2\varkappa$-мерном) дополнении утверждение очевидно.

г) Отметим, наконец, что при возрастании β количество вещественных собственных значений увеличивается, они получаются из комплексно сопряженных пар собственных значений $\{\lambda_k^+;\lambda_k^-\}$ путем слияния при $\beta = r_k = \lambda_k^{1/2}(A)$, $k=1,2,\ldots$; появляется кратный корень, который затем расходится при дальнейшем увеличении β, принимая значения $\lambda_k^\pm$ вида (20). При этом выполнены неравенства

$$\lambda_k^-(\beta) < \beta < \lambda_k^+(\beta), \quad \beta > r_k = \lambda_k^{1/2}(A). \quad (42)$$

2^0. Рассмотрим теперь вариант, когда в задаче (13) выполнены условия

$$0 < \delta < 1/2, \quad \beta > 0. \tag{43}$$

Здесь, как и в случае 1^0, имеет место факторизация

$$\mathscr{A}_{\beta,\delta} = \begin{pmatrix} I & -2i\beta A^{\delta-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$\mathscr{D}(\mathscr{A}_{\beta,\delta}) = \mathscr{D}(A^{1/2}) \oplus \mathscr{D}(A^{1/2}),$$

и так как $A^{\delta-1/2} \in \mathscr{S}_\infty$, то снова возникает задача на собственные значения слабовозмущенного самосопряженного оператора. Общие результаты исследования задачи изложены в [14], однако конкретный вид оператора диссипации позволяет уточнить их.

Собственные значения $\lambda_k^\pm$ задачи

$$\mathscr{A}_{\beta,\delta} z = \lambda z, \quad z \in \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\beta,\delta}), \tag{45}$$

в этом случае таковы:

$$\lambda_k^\pm(\beta) = \begin{cases} \lambda_k^{1/2}(A) \left[\beta\lambda_k^{\delta-1/2}(A) \pm i\sqrt{1-\beta^2\lambda_k^{2\delta-1}(A)}\right], & \beta^2 < \lambda_k^{1-2\delta}(A), \\ \beta\lambda_k^{\delta}(A) \pm \sqrt{\beta^2\lambda_k^{2\delta}(A) - \lambda_k(A)}, & \beta^2 \geqslant \lambda_k^{1-2\delta}(A). \end{cases} \tag{46}$$

Невещественные собственные значения, как легко подсчитать, расположены на окружностях

$$|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{1/2}(A). \tag{47}$$

Кроме того, исключая $t_k := \lambda_k(A)$ из соотношений

$$\mathrm{Re}\,\lambda_k^\pm = \beta\lambda_k^\delta(A), \quad \mathrm{Im}\,\lambda_k^\pm = \pm\sqrt{\lambda_k(A) - \beta^2\lambda_k^{2\delta}(A)}, \tag{48}$$

приходим к выводу, что эти собственные значения расположены на кривых, уравнение которых имеет вид

$$|\mathrm{Im}\,\lambda|^2 = (\mathrm{Re}\,\lambda/\beta)^{1/\delta} - (\mathrm{Re}\,\lambda)^2, \quad \mathrm{Re}\,\lambda \geqslant \beta^{1/(1-2\delta)}. \tag{49}$$

Таким образом, $\lambda_k^\pm$ расположены на пересечении кривых (47) и (49), что позволяет получить характер спектра $\lambda_k^\pm = \lambda_k^\pm(\beta)$ при изменении $k \in \mathbb{N}$ и возрастании параметра $\beta \geqslant 0$ от нуля до $\beta = +\infty$.

Собственные элементы $z_k^\pm$ задачи (45) таковы:

а) если $\lambda_k^\pm$ невещественны, то

$$z_k^+ = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\varepsilon_k(\beta;\delta)u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_j^- = \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k(\beta;\delta)u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \tag{50}$$

$$\varepsilon_k(\beta;\delta) := \beta\lambda_k^{\delta-1/2}(A) - i\sqrt{1-\beta^2\lambda_k^{2\delta-1}(A)}, \quad |\varepsilon_k(\beta;\delta)| = 1. \tag{51}$$

б) для вещественных $\lambda_k^{\pm}$ имеем

$$z_k^+ = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\widetilde{\varepsilon}_k(\beta;\delta)u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_j^- = \begin{pmatrix} -i\widetilde{\varepsilon}_k(\beta;\delta)u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \tag{52}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_k(\beta;\delta) := \left[\beta\lambda_k^{\delta}(A) - \sqrt{\beta^2\lambda_k^{2\delta}(A) - \lambda_k(A)}\right] \Big/ \left(\lambda_k^{1/2}(A)\right). \tag{53}$$

Опираясь на эти факты и проводя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы в разобранном выше случае 1^0, приходим к следующим выводам относительно решений задачи (45) при условиях (43).

а) Эта задача имеет дискретный спектр (46) с предельной точкой $\lambda = \infty$. Все невещественные собственные значения расположены на пересечении кривых (49) и окружностей (47).

б) Если выполнены условия

$$\lambda_{\varkappa}^{1/2-\delta}(A) < \beta < \lambda_{\varkappa+1}^{1/2-\delta}(A), \tag{54}$$

для некоторого $\varkappa \in \mathbb{N}$, то задача имеет ровно $\varkappa$ пар вещественных положительных собственных значений $\lambda_j^{\pm}(\beta;\delta)$, которые находятся по формулам (46). Отвечающие этим собственным значениям собственные элементы образуют равномерно дефинитные подпространства.

в) Если выполнено условие

$$\beta < \lambda_1^{1/2-\delta}(A), \tag{55}$$

то все собственные значения задачи невещественные (см. (46)), а отвечающие им собственные элементы (50) образуют базис Рисса в пространстве E^2.

При доказательстве последнего утверждения, как и при доказательстве леммы 1, используется тот факт, что

$$z_k^+ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & iK_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^- = \begin{pmatrix} iK_+ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

$$K_+ := \beta A^{\delta-1/2} - i\big(I - \beta^2 A^{2\delta-1}\big)^{1/2}, \quad K_+^* = K_+^{-1}. \tag{57}$$

Если вместо (55) выполнено условие (54), то упомянутое выше свойство базисности Рисса сохраняется.

г) При возрастании β количество вещественных собственных значений увеличивается, а невещественные собственные значения $\lambda_k^{\pm}(\beta;\delta)$ проходят при возрастании β по окружностям (47) "быстрее", чем в случае 1^0, когда $\delta = 0$.

3^0. Пусть теперь выполнено пограничное условие

$$\delta = \frac{1}{2} \tag{58}$$

и по прежнему $\beta > 0$. Здесь

$$\mathscr{A}_{\beta,1/2} = \begin{pmatrix} I & -2i\beta I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{D}(\mathscr{A}_{\beta,1/2}) = \mathscr{D}(A^{1/2}) \oplus \mathscr{D}(A^{1/2}), \tag{59}$$

и потому $\mathscr{A}_{\beta,1/2}$ не является слабым возмущением оператора

$$\mathscr{A}_0 := i \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{60}$$

отвечающего случаю $\beta = 0$ в задаче (45) при $\delta = 1/2$. Поэтому свойство локализации спектра в окрестности мнимой оси, которое имело место в разобранных выше вариантах 1^0 и 2^0, здесь не выполнено.

Собственные значения оператора $\mathscr{A}_{\beta,1/2}$ таковы:

$$\lambda_k^{\pm}(\beta) = \begin{cases} \lambda_k^{1/2}(A)\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}\right), & \beta \geqslant 1, \\ \lambda_k^{1/2}(A)\left(\beta \pm i\sqrt{1 - \beta^2}\right), & 0 \leqslant \beta < 1. \end{cases} \tag{61}$$

Собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^{+}(\beta) = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\varepsilon u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^{-}(\beta) = \begin{pmatrix} -i\varepsilon u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad \varepsilon := \beta - i\sqrt{1 - \beta^2}, \tag{62}$$

а собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_k^{+}(\beta) = \begin{pmatrix} u_k(A) \\ i\widetilde{\varepsilon} u_k(A) \end{pmatrix}, \quad z_k^{-}(\beta) = \begin{pmatrix} -i\widetilde{\varepsilon} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\varepsilon} := \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}. \tag{63}$$

Отправляясь от формул (61) — (63), сформулируем общие свойства решений задачи на собственные значения для оператора $\mathscr{A}_{\beta,1/2}$.

а) Собственные значения $\lambda_k^{\pm}(\beta)$ образуют дискретный спектр с предельной точкой $\lambda = \infty$. Если выполнено условие $0 < \beta < 1$, то собственные значения $\lambda_k^{\pm}$ невещественны, расположены на пересечении окружностей

$$|\mathrm{Re}\,\lambda|^2 + |\mathrm{Im}\,\lambda|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{1/2}(A),$$

а также прямых

$$\operatorname{Im}\lambda = \pm\left(\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}\right)\operatorname{Re}\lambda, \quad \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0. \tag{64}$$

б) Если выполнено условие $\beta > 1$, то собственные значения $\lambda_k^{\pm}$ вещественны, положительны и образуют две ветви

$$\lambda_k^{\pm} = \lambda_k^{1/2}(A)\left(\beta \pm \sqrt{\beta^2-1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{65}$$

причем каждая из ветвей имеет предельную точку $+\infty$ при $k \to \infty$.

Собственные элементы, $\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^{\infty}$, являются $\mathscr{J}$-положительными:

$$[z_k^+, z_k^+] = (\mathscr{J} z_k^+, z_k^+)_{E^2} = 1 - \widetilde{\varepsilon}^2 = \ldots = \frac{2\sqrt{\beta^2-1}}{1+\sqrt{\beta^2-1}} > 0. \tag{66}$$

Соответственно, собственные элементы $\{z_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, являются $\mathscr{J}$-отрицательными:

$$[z_k^-, z_k^-] = (\mathscr{J} z_k^-, z_k^-)_{E^2} = \widetilde{\varepsilon}^2 - 1 < 0. \tag{67}$$

в) При выполнении условия $0 < \beta < 1$ собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{z_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие невещественным собственным значениям $\{\lambda_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$, образуют базис Рисса в пространстве E^2. При этом

$$z_k^+(\beta) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & i\varepsilon I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \; z_k^-(\beta) = \begin{pmatrix} i\varepsilon I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -u_k(A) \\ u_k(A) \end{pmatrix}, \; k = 1, 2 \ldots . \tag{68}$$

г) При $\beta > 1$ собственные элементы $\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{z_k^-\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие (вещественным) собственным значениям $\{\lambda_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$, образуют $\mathscr{J}$ - ортогональный базис в пространстве E^2.

Заключение

Подводя итоги рассмотрения простейшей спектральной задачи в случае малой интенсивности внутренней диссипации, отметим следующие важные обстоятельства.

1. При учете внутренней диссипации, когда операторы основной задачи связаны соотношением $\beta K = 2\beta A^{\delta}$, спектр задачи существенно зависит от δ: при $0 \leqslant \delta < 1/2$ имеет место малая диссипация и локализация спектра в окрестности мнимой оси; наперед скажем, что при $1/2 \leqslant \delta < 1$ — средняя диссипация и локализация спектра в окрестности положительной полуоси, а также наличие лишь одной предельной

точки на бесконечности; при $1 \leqslant \delta < \infty$ — большая диссипация и наличие двух предельных точек на положительной полуоси. Случай средней и сильной интенсивности находится в стадии исследования, результаты будут опубликованы позже.

2. Детальная структура спектра зависит от коэффициента диссипации β. В частности, при $\delta = 1/2$ (пограничный случай) структура спектра существенно зависит от β: при $0 < \beta < 1$ спектр невещественный, а при $\beta > 1$ — вещественный и положительный.

3. В случае малой интенсивности внутренней диссипации во всем диапазоне изменения параметров δ и β собственные элементы задачи образуют базис Рисса.

Таким образом, на примере разобранной спектральной задачи были как подтверждены общие выводы, полученные в работе [14], так и установлены новые факты, одним из которых является наличие базисности Рисса системы собственных элементов в случае малой диссипации.

Автор благодарит проф. Н. Д. Копачевского за руководство написанием статьи.

Список литературы

1. LAGNESE, J. (1983) Decay of the solution of the wave equation in a bounded region wiyh boundary dissipation. *J. Diff. Equations.* 50. p. 163-182.

2. LASIECKA, I.& TARATU, D. (1993) Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation. *Diff. Integral Equations.* 6. p. 507-533.

3. CHUESHOV, I.& ELLER, M. & LASIECKA, I. (2004) Finite Dimensionality of the Attractor for a Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Dissipation. *Comunications in Partial Differential Equations.* 29 (11-12). p. 1847-1876.

4. CHUESHOV, I.& LASIECKA, I. (2004) Global attractors for von Karman evolutions with a nonliner boundary dissipations. *J. Diff. Equations.* 198. p. 196-231.

5. CHUESHOV, I. (2006) *Introduction to the Theory of Infinite-Dimensional Dissipative Systems.* Kharkov: Acta. http://www.emis.de/monographs/Chueshov

6. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский // Украинский математический вестник. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 69–97.

   KOPACHEVSKY, N. (2004) Abstract Creen's for the triple of hilbert spaces, abstract boundary value and spectral and problems. *Ukrainian mathematical Herald.* Vol. 1, № 1. p. 69-97.

7. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса / Н. Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2004. — № 2. — С. 52–80.

   KOPACHEVSKY, N. (2004) Abstract Creen's for the triple of hilbert spaces and it's applications in Stock's problem. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* № 2. p. 52-80.

8. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И. Ц. Гохберг. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

   GOHBERG I. (1965) *Introduction in the theory of liner selfadjoint operators.* Moscow: Nauka.

9. Копачевский, Н. Д. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

   KOPACHEVSKY, N. and KREIN S. (1967) *Linear differential equations in Banach space.* Moscow: Nauka.

10. Крейн, С. Г. Функциональный анализ. Серия "Справочная математическая библиотека" / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1972. — 544 с.

    KREIN S. (1972) *Functional analysis. Series "Mathematical Reference library".* Moscow: Nauka.

11. Маркус, А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А. С. Маркус. — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

    MARKUS A. (1986) *Introduction in the spectral theory of polynomial operator bundles.* Kishenev: Shiintsa.

12. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Зуй Кан Нго. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

    KOPACHEVSKY, N. and KREIN S. and Ngo Z. (1989) *Operator methods in linear hydrodynamics. Evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

13. Андронова, О. А., Копачевский, Н. Д. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии // О. А. Андронова, Н. Д. Копачевский / Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — Том 29. — С. 11–28.

    ANDRONOVA, O. and KOPACHEVSKY, N. (2008) About liner problems with surface dissipation of an energy. *Modern mathematics. Fundamental direction.* Vol. 29. p. 11-28.

14. Андронова, О. А. Начально-краевые и спектральные задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии // О. А. Андронова / Ученые записки Таврического Национального Университета им. В. И. Вернадского, серия Математика. Механика. Информатика и Кибернетика. — 2009, Т. 22 (61). 1. — С. 1 – 13.

    ANDRONOVA, O. (2009) Boundary-value and spectral problems with surface and initial dissipation of an energy. *Scientific notes of Tavrida National University named after V. I. Vernadsky, series Mathematics. Mechanics. Informatics and Cybernetics.* Vol. 22(61).1. p. 1-13.

Статья поступила в редакцию 01.12.2015

УДК: 51(09)
MSC2010: 01A60

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ ОБ ИСТОРИИ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

© Е. М. Богатов

Старооскольский технологический институт (филиал)
Национального исследовательского технологического университета "МИСиС"
мкр. Макаренко, 42, г. Старый Оскол, Белгородская обл., 309516, Российская федерация,
e-mail: *embogatov@inbox.ru*

Some notes on the history of Orlicz spaces.

Bogatov E. M.

Abstract. This work is devoted to the history of the Orlicz spaces L_M, which are widely used in mathematics and its applications. They consist of integrable functions with a convex function *M(u)*, for which the integral $\rho_M(u) = \int_a^b M(u(x))dx$ is finite. Previously unseen features of this history are revealed.

The analysis of the state of mathematics near the beginning of the theory of functions, when there was a reassessment of the relationship between the computational and ideological aspects, is performed. The influence of the ideas of the major European mathematicians - E. Landau, who got necessary and sufficient conditions for the convergence of products of sequences series; F. Riesz as creator of space L^p; William Young, as the author bearing his name inequality and classes of " supersummable" functions; S. Banach, as the founder of the theory of complete normed spaces and other scientists is investigated. W. Orlicz relied on their results in 1932-1936, when he created Banach space with the norm

$$\|u\|_{L_M}^O = sup_{\rho_N(v)\leq 1} \int_a^b uvdx, \qquad (*)$$

where *N(v)* — complementary to *M(u)* convex function, such that the Young inequality $uv \leq M(u) + N(v)$ holds, and function *u(x)* satisfies condition $\rho_M(ku) < \infty$ for some $k > 0$.

It is noted that an important condition for the introduction of a new space (a generalization of the space L^p) were results, obtained by W. Orlicz together with Z. Birnbaum and published in 1931, including

a) necessary and sufficient conditions for the integrability of functions product using convex functions;

b) definition of the role of functions, growing no faster than power functions (these functions satisfy so-called Δ_2 - condition for integrability and convergence in the classes *M(u)*-integrable functions. A convex function *M(u)* satisfies Δ_2 - condition for large u, if

$\exists k \in R : M(2u) \leq kM(u)$ for $|u| \geq a$.

It is alleged that the starting point of the norm (*) introduction in the space L_M by W. Orlicz was determination of linear functional view in L_M due to the scheme, proposed by S.

Banach for the space L^p. Other variants of the space L_M norm equipment - Amemiya norm and Luxembourg norm are also given.

Orlicz spaces role in modern mathematics and its applications are briefly indicated. The most famous representatives of the Soviet and post-Soviet science, specializing on the Orlicz spaces are also listed.

Keywords: *History of functional analysis, generalization of L^p, Orlicz spaces L_M, W. Orlicz, Z. Birnbaum, Banach spaces, classes of integrable functions, Orlicz norm, Polish mathematics, soviet mathematics.*

Введение

Функциональный анализ, возникший в начале прошлого века, уже давно превратился из просто новой области математики в универсальную математическую доктрину, стал важнейшей частью математической “идеологии” [1, с. 82]. В нём сошлись и переплелись идеи и подходы классического анализа, линейной алгебры, теории множеств, топологии [2].

Основная цель настоящей работы — проследить, как проблемы, связанные с обоснованием классического анализа, потребовавшие рассмотрения различных видов сходимости, среди других достижений привели к классическому результату — классам Орлича и пространствам Орлича. Здесь будут выделены некоторые особенности, не замеченные другими авторами, проводившими исследования по данному вопросу: Ф. А. Медведевым [3, Гл. 3], Л. Малиграндой и В. Внуком[4] – [6], А. Питчем [7, Гл. 6], а также обозначен вклад советских математиков в развитие теории пространств Орлича.

Предыстория

После выделения понятия функции как самостоятельного объекта исследования насущным стал вопрос о представлении её в виде некоторого аналитического выражения, в том числе в виде ряда. Математики XVII – XVIII вв. главным образом интересовались вычислительной стороной, мало задумываясь над вопросом о смысловом содержании представления функций рядами. Но на следующем этапе, к началу XIX в, когда началась глубокая реформа математики, заложившая основы математической строгости и обоснованности, с утверждением методологии, направленной на выявление условий и пределов истинности и границ каждого математического утверждения, положение изменилось, вышеуказанное осмысление вышло на первый план [3, Гл. 3], [8]. Новая идейная атмосфера стала характерной для всей математики XIX в.

Одним из истоков функционального анализа явилась теоретико-множественная топология, и совершенно не случайно, что различные формы предельного перехода заняли центральное место в функциональном анализе. Здесь нас будут интересовать некоторые виды сходимости, мотивированные поисками решений линейных интегральных уравнений. В частности, к Д. Гильберту восходит задача поиска необходимых и достаточных условий для того, чтобы числа a_i

$$a_i = \int\limits_a^b f(x)\varphi_i(x)dx$$

можно было рассматривать, как коэффициенты Фурье неизвестной функции *f(x)* по рассматриваемой системе $\{\varphi_i(x)\}$. Сам Д. Гильберт решил данную задачу для непрерывной функции *f(x)*. Обобщение результата Гильберта привело к знаменитой теореме Рисса – Фишера, авторы которой рассматривали задачу в пространстве $L^2[a, b]$ [3, с. 130–132].

Венгерский математик Фридьеш Рисс (1880-1956) — одна из главных фигур в создании функционального анализа. Ему принадлежит целый ряд основополагающих результатов в период становления данной дисциплины (этот отрезок времени был назван А. М. Вершиком периодом "бури и натиска" [1, с.86]. Статью Рисса [9] можно считать одной из вех в истории функционального анализа. В ней было введено пространство L^p как естественное обобщение пространства L^2, но это обобщение оказалось совершенно не тривиальным и имело далеко идущие последствия.

Рисс исходил из работы Э. Ландау [10], который обобщил неравенство Гёльдера на бесконечномерный случай и получил необходимое и достаточное условия сходимости рядов от произведений последовательностей. Рисс усилил условия интегрируемости произведения функций $f(x)\varphi_i(x)$, введя в предположении о том, что функция $|f(x)|$ интегрируема со степенью *p>1*. Здесь он столкнулся с трудностью, которая отсутствовала в случае *p=2*. Дело в том, что из интегрируемости двух функций по отдельности не всегда следует интегрируемость их произведения. Для преодоления этой трудности Риссу пришлось ввести сопряжённое с L^p пространство L^q, где $1/p + 1/q = 1$. В итоге оказалось, что каждое из пары пространств L^p, L^q состоит из тех (и только тех) функций, которые при умножении на любую функцию из сопряжённого пространства дают интегрируемое произведение. Рисс также установил полноту пространств L^p [9, с. 449 – 451], [3, с. 136 – 138].

Английский математик Уильям Юнг (1863 – 1942) независимо от Рисса пришёл к пространствам L^p и сделал дальнейшие шаги. Из его значительного научного наследия нас будет интересовать работа 1912 г. [11]. Рассматривая некоторые задачи теории рядов Фурье, Юнг заинтересовался нахождением условий того, чтобы функция представлялась неопределённым интегралом некоторой суммируемой функции, на которую наложены дополнительные условия (в частных случаях эти условия были найдены Фишером и Риссом; они сводились к тому, что функция *f(x)* принадлежала пространству L^2 или L^p). Юнг поставил более сложную задачу — получить аналогичный результат не только для p-й степени модуля *f(x)*, но и вообще для некоторой функции от *f(x)* [3, с. 142]. Указанная задача привела Юнга к получению следующего неравенства, названного его именем:

$$uv \leq \int\limits_0^u p(z)dz + \int\limits_0^v q(z)dz, \tag{1}$$

где $p(\cdot)$ — положительная, возрастающая функция действительной переменной $u \geq 0$, имеющая положительную производную $p'(u)$, а *q(v)* — обратная к ней функция, $u = q(v)$ [11, с. 226].

Функции, удовлетворяющие неравенству (1), позднее стали называться *дополнительными по Юнгу* [12, с. 65]. Они привели к замечательному обобщению, которое будет рассмотрено ниже.

К поставленной задаче Юнг вернулся более чем через десятилетие, введя сгруппированные пары классов так называемых “сверхсуммируемых” функций, для которых интеграл

$$\int\limits_a^b Q[|u(x)|]dx \tag{2}$$

принимает конечное значение,

$$Q(u) = \int\limits_0^u q(z)dz, \tag{3}$$

где *q(z)* является положительной, монотонно возрастающей функцией, заданной на промежутке $(0, +\infty)$, для которой $\lim\limits_{z\to\infty} q(z) = \infty$ [13].

Данные классы соединяются в пары посредством неравенства (1) таким образом, что произведение двух функций, принадлежащих классам пары, является суммируемым (как например, *uln(u)* и e^v). Идеи, заложенные в рассмотренных работах Юнга, были развиты рядом других математиков. Прежде всего упомянем работу английского математика Джона Бёркиля (1990 – 1993) [14], в которой он дал определение сильной и слабой сходимости в классах Юнга и доказал несколько теорем об этих сходимостях. Кроме того, он сформулировал важное условие, которому должны удовлетворять функции *Q(u)* вида (3), растущие не быстрее степенных:

$$\exists k = Const, Q(2u) \leq kQ(u). \tag{4}$$

(оно было позднее названо Δ_2-условием, см. ниже).

Все эти результаты сконцентрировались в работах польских математиков, получили в них дальнейшее развитие и привели к понятиям и методам, ставшими классическими и нашедшими широкое применение в разнообразных задачах функционального анализа и его приложений. Речь идёт о двух ярких представителях Львовской школы функционального анализа: З. Бирнбауме и В. Орличе.

Зигмунт Бирнбаум (1903 – 2000) — ученик Г. Штейнгауза, который, в свою очередь, был учеником Д. Гильберта и являлся одним из основателей Львовской школы функционального анализа и журнала Studia Mathematica, получившего широкую международную известность [14, гл. 2]. Именно Штейнгауз “открыл” в 1916 г. Стефана Банаха [16, с. 300]. После окончания Львовского университета в 1929 – 1931 гг. Бирнбаум проходил стажировку в Гёттингене под руководством Э. Ландау [17].

Владислав Орлич (1903-1990) — также выпускник Львовского университета, ученик Банаха, стажировался в Гёттингене в те же самые годы, что и Бирнбаум [4] – [6]. В дальнейшем их пути разошлись, в середине 1930-х Бирнбаум эмигрировал в США, а Орлич перебрался в Познаньский университет, где основал получившую известность математическую школу.

В недолгий период сотрудничества Бирнбаума с Орличем ими была написана большая работа “Об обобщении понятия взаимно сопряжённых потенциалов” [18]. Она была представлена в редакцию Studia Mathematica в октябре 1930 г. и с некоторыми добавлениями опубликована в следующем году. Главным результатом этой работы является всестороннее рассмотрение и углубление свойств восходящих к Юнгу и Бёркилю N-функций вида (3) с точки зрения их использования в задачах интегрируемости и сходимости.

Выпуклая функция *N(u)* называется *N-функцией*, если [3, с. 144]

- она задана и непрерывна для всех u из интервала $(-\infty, +\infty)$;
- $N(0) = 0, N(u) > 0$ при $u > 0$; $N(-u) = N(u)$;
- существуют такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что при $u > \alpha$ всегда $N(u) > \beta$.

Если N-функция *M(u)* удовлетворяет условию

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{M(u)}{|u|} = \infty \quad \lim_{|u|\to 0} \frac{M(u)}{|u|} = 0, \tag{5}$$

то она называется N'-*функцией* [18, с. 8].

В работе [18] также определяются пары *дополнительных* N'-функций *M(u)* и *N(v)*, которые представляются в виде

$$M(u) = \int_0^u p(t)dt, \quad N(v) = \int_0^v p^{-1}(t)dt. \tag{6}$$

Дополнительные функции удовлетворяют неравенству Юнга

$$uv \leq M(u) + N(v).$$

Этот факт, наряду с результатами Ф. Рисса [9] и Р. Купера [19], способствовал доказательству Бирнбаумом и Орличем теоремы об интегрируемости произведения функций *f(x)* и *g(x)* в терминах интегрируемых с *M(u)* и *N(v)* функций. Приведём соответствующие формулировки [18, с. 37].

Функция *f(x)* называется *интегрируемой* с *M(u)* на отрезке [0,1], если она измерима на этом отрезке и интеграл $\int_0^1 M[|f(x)|]dx$ конечен.

N-функция *N(v)* называется *сопряженной в смысле интегрирования* (или кратко *сопряженной*) для N-функции *M(u)*, если:

1. Из того, что *f(x)* интегрируема с *M(u)*, а *g(x)* интегрируема с *N(v)*, следует, что интеграл от произведения $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ ограничен.
2. Если при заданной *f(x)* и *N(v)*-интегрируемой *g(x)* из конечности величины $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ следует, что *f(x)* интегрируема с *M(u)*.

Было установлено, что для существования сопряжённой к N'-функции *M(u)* N'-функции *N(v)* необходимо и достаточно, чтобы при больших *u* функция *M(u)* удовлетворяла Δ_2 -условию и была псевдомонотонна [18, с. 46].

Отметим, что Δ_2-условие, фигурирующее в этом утверждении, является частным случаем Δ_α-условия: если существуют такие числа $\alpha > 0$ и k_α, что для всех достаточно больших *u* выполняется неравенство

$$M(\alpha u) \leq k_\alpha M(u), \tag{7}$$

то говорят, что функция *M(u)* удовлетворяет Δ_α — условию [18, с. 22].

Соотношение (7) появилось в работе Бирнбаума и Орлича, как следствие вышеуказанных условий интегрируемости произведения функций *f(x)* и *g(x)*.

Теперь имелись все предпосылки для дальнейшего обобщения — связать понятие интегрируемых с *M(u)* функций с общей теорией нормированных пространств. Этот решающий шаг был сделан Орличем.

Изучение представления функций, различных видов сходимости привели, помимо выделения частного класса функций L^p, к гораздо более масштабным последствиям. К важнейшим из них следует отнести рождение понятия банаховых пространств. Одной из фундаментальных идей, приведших к созданию функционального анализа, является переход "от конечного к бесконечному". Среди работ других математиков [20] в этом направлении выделим статью Д. Гильберта (1909) [21], представляющую собой доклад, который он намеревался сделать на IV конгрессе математиков в Риме в 1908 г. По словам В. М. Тихомирова, это была не обычная математическая работа, а скорее — пророчество. Гильберт старался охватить с высоты просторы зарождающейся новой науки. Многое тогда виделось не вполне отчётливо, и он стремился донести хотя бы общую планировку, объявить об открытии нового "материка" и призвать к освоению новых территорий. Суть его работы точно выражают слова "бесконечномерный анализ", где участвуют и "бесконечное число переменных" и "отображения в бесконечномерные пространства" [22]. Гильберт указывает на главную цель рождающейся новой области математики — нахождение общей точки зрения и единого метода доказательства для проблем анализа, касающихся решения уравнений относительно функций (задач вариационного исчисления, дифференциальных и интегральных уравнений и т. п.). Здесь он ставит ещё более высокую задачу, чем провести доказательство некоторого утверждения или показать невозможность подобного доказательства — получить возможность приступить к таким исследованиям в области теории функций и теории дифференциальных уравнений [21, с. 39;49].

Появление понятия полного нормированного пространства, или, как его чаще называют, банахова пространства явилось гигантским шагом вперёд, но он не был единоличным достижением С. Банаха. В 1906 г. М. Фреше в своей диссертации, развивая идеи Ж. Адамара, ввёл понятие метрического пространства [23].

В работах по теории интегральных уравнений и бесконечных квадратичных форм Д. Гильберт ввёл пространства, носящие его имя, l^2 и L^2. Ф. Рисс, М. Фреше и Э. Шмидт стоят уже на более абстрактной точке зрения. В метрические и гильбертовы пространства ими вводятся фундаментальные понятия сильной и слабой сходимости, компактности, полноты, сепарабельности, линейных операторов, а также язык евклидовой геометрии - понятие нормы, удовлетворяющей неравенству треугольника. Было замечено, что пространство функций с интегрируемым квадратом обладает геометрией, аналогичной геометрии евклидова пространства. К аксиоматическому определению бесконечномерных пространств наиболее близок, по-видимому, был Ф. Рисс [24, с. 220 – 225]. Решающий шаг в определении понятия полных нормированных пространств был сделан в начале 1920-х гг., и он связан с именами нескольких математиков. Это были Стефан Банах [25], австрийские математики Эдуард Хелли [26], Ганс Хан [27] и американский математик Норберт Винер [28]. Всё же можно утверждать, что эти пространства совершенно справедливо носят имя Банаха, поскольку именно он предпринял их глубокое и систематическое изучение.

Классы и пространство Орлича

Вернёмся к нашему основному сюжету. Вся атмосфера львовской школы 1920-1930 гг. была буквально "пропитана" идеями Банаха [29]. Не вызывает сомнений не только, что Орлич пришёл к своему замечательному обобщению пространств L^p под воздействием этих идей, но и что и сам Банах был непосредственно знаком с изысканиям своего ученика, поскольку именно он представил в начале 1932 г. статью Орлича [30] в редакцию "Известий Польской академии наук". В этой статье Орлич ввёл в рассмотрение классы суммируемых функций L_Φ, у которых вместо степени p под знаком интеграла фигурировала N-функция $\Phi(u)$. Точнее говоря, принадлежность функции u классу L_Φ определялась конечностью величины

$$\rho_\Phi(u) = \int\limits_0^1 \Phi(u(x))dx,$$

как это было предложено ещё А. Зигмундом [31].

Для включения указанного класса в общую теорию банаховых пространств необходимо было преодолеть две трудности. Первая заключалась в том, что в общем случае данный класс функций не является линейным. Орлич показал, *что класс* L_Φ *является линейным множеством тогда, и только тогда, когда* N*-функция* $\Phi(u)$ *удовлетворяет* Δ_2 *— условию при больших* u*:*

$$\exists k \in R : \Phi(2u) \leq k\Phi(u) \text{ для } |u| \geq a. \tag{8}$$

В качестве примера функции, удовлетворяющей этому условию, можно привести N-функцию $\Phi(u) = |u|^\alpha(|\ln|u|| + 1)$ [18, с. 30].

Вторая трудность заключалась в выборе подходящей нормировки. Использование в этой ситуации аналогии с нормой в L^p:

$$\|u\| = \Phi^{-1}\left[\int\limits_0^1 \Phi(|u(x)|)dx\right], \tag{9}$$

где Φ^{-1} — функция, обратная к Φ, не приводит к цели [12, с. 95]. Оказывается, что (9) не является нормой — свойство линейности $\|\alpha u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$ удовлетворяется далеко не для всех Φ.

Проследить дальнейший ход мыслей Орлича может помочь основополагающая работа Банаха [32].

В главе 4, §4 Банах приводит теорему о представлении линейного функционала в L^p в виде

$$f(v) = (u, v) = \int\limits_0^1 uvdx, \tag{10}$$

а его норма определена следующим образом:

$$\|f\|_{L^{p'}} = sup_{\|v\|_{L^p \le 1}} |f(v)|, \tag{11}$$

$$\text{где } \|v\|_{L^p} = \left(\int\limits_0^1 |v|^p dx \right)^{1/p}. \tag{12}$$

С учётом того, что пространства L^p и $L^{p'}$ являются двойственными при $1/p + 1/p' = 1$; $p > 1$ [9], из соотношения (11) можно сделать вывод о том, что для определения нормы в L^p можно использовать формулу нормы для функционалов из сопряжённого пространства

$$\|v\|_{L^p} = sup_{||u||_{L^{p'}} \le 1} \left| \int\limits_0^1 uvdx \right|. \tag{13}$$

Пользуясь некоей аналогией пространств L^p и L_Φ, Орлич исходит из определения нормы (13) в сопряженном к L_Φ пространстве L_Ψ и её естественных свойств:

1. $\rho_\Phi(u) \le K \Rightarrow \|u\|_{L_\Phi} \le K^*$
2. $\lim\limits_{\substack{i \to \infty \\ j \to \infty}} \int_0^1 \Phi[|u_i(x) - u_j(x)|]dx = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{i \to \infty \\ j \to \infty}} \|u_i(x) - u_j(x)\|_{L_\Phi} = 0.$

При этом единичный шар в пространстве L_Ψ представлялся Орличем как множество $\rho_\Psi(v) \le 1$ [30, с. 210], где $\Psi(u)$ — дополнительная к $\Phi(u)$ функция.

Окончательно норма была введена им для функций с конечной величиной $\rho_\Phi(u)$, как

$$\|u\|_{L_\Phi} = \max_{\rho_\Psi(v) \le 1} \int\limits_0^1 uvdx. \tag{14}$$

Следует отметить, что конечность нормы (14) следует из теоремы об интегрируемости произведения функций, полученных Орличем с Бирнбаумом в [18, с. 46], уже упоминаемой нами выше (формула (7)).

Полученное банахово пространство было обозначено Орличем через L^*_Φ (он доказал его полноту при условии, что Φ удовлетворяет Δ_2 — условию при больших u [30, с. 210]). Несколько позднее Зигмунд дал доказательство полноты L^*_Φ без каких-либо дополнительных условий на Φ [12, с. 96].

Отметим, что нормированное пространство Орлича, порождённое функцией $\Phi(u) = \frac{|u|^p}{p}$ совпадает с L^p. При этом норма (14) будет отличаться от традиционной нормы (12) в пространстве L^p постоянным множителем, равным $q^{-1/q}$, где $q = p/(p-1)$ [30, с. 214].

Для выявления дальнейшей аналогии с пространствами L^p необходимо было определить, в каком виде представляются линейные функционалы над пространством L^*_Φ. Орлич показал, что этот вид совпадает с (12), при условии, что порождающая класс L_Φ функция $\Phi(u)$ удовлетворяет Δ_2 — условию [30, с. 226]. При этом в процессе доказательства было использовано существование базиса Хаара в L^*_Φ, следующее из результатов совместной с Бирнбаумом работы [30, с. 216].

Это представление дало Орличу возможность в следующей работе [33, с. 94] определить норму, уже в точности следуя (11), как

$$\|u\|^O_{L_M} = sup_{\rho_N(v)\leq 1} \int\limits_a^b uvdx \tag{15}$$

Здесь *M(u)* — N'-функция; *N(v)* — дополнительная к *M(u)* функция. Функции u, входящие в (15) должны удовлетворять условию $\rho_M(ku) < \infty$ для некоторого $k>0$ [33, с. 93].

Получившееся банахово пространство будем обозначать L^O_M. В работе [33, с. 98–100] Орлич также показал его сепарабельность и рефлексивность при условии, что пространство L^O_M порождено функциями, удовлетворяющими условию (8).

Как отмечает Л. Малигранда [5, с. 323], впервые термин *пространство Орлича* появился в статьях М. Морса, В. Трансю [34] и М. А. Красносельского, Я. Б. Рутицкого [35].

Отметим, что обычная формула для нормы (15) не позволяет производить её фактическое вычисление [36, с. 106]. В связи с этим представляет интерес введение эквивалентной нормировки L^O_M, лишённой этого недостатка. Это удалось сделать в 1955 г. В. Люксембургу [37]. Он упростил определение пространства L^O_M, определив его как линейную оболочку выпуклого множества $B_M = \{u : \rho_M(u) \leq 1\}$ с нормой

$$\|u\|_{L_M} = inf\{\gamma > 0 : u \in \gamma B_M\}$$

Эта норма стала называться *нормой Люксембурга*. То же самое выражение было получено ранее Х. Накано в рамках теории модулярных пространств [38].

Ещё одна конструктивная норма, допустимая к применению в данной ситуации, была введена И. Амемия:[39]

$$\|u\|_{L_M}^A = \inf_{k>0} k^{-1}(1+\rho_M(ku))$$

Её употребительность в пространстве L_M^O была замечена М. А. Красносельским и Я. Б. Рутицким [36, с. 110].

Заключение

Пространства Орлича нашли широкое применение: плодовитая идея замены степенной функции на более общую была перенесена на другие типы функциональных пространств [4, с. 107]. Эта идея воплотилась в ныне хорошо известные пространства Орлича-Безиковича, Харди-Орлича, Липшица-Орлича, Орлича-Лоренца, Орлича-Марцинкевича, Орлича-Соболева, Орлича-Зигмунда, Бергмана-Орлича, Орлича-Накано, Муселяка-Орлича и др. В настоящее время пространства Орлича с успехом используются в теории линейных и нелинейных дифференциальных [40] – [41] и интегральных [42] – [43] уравнений, теории функций [44, гл. 9] и гармоническом анализе [45], теории вероятностей и математической статистике [46], теории интерполяций [47] – [48], теории симметричных пространств [49], эргодической теории и теории мартингала [50], теории риска [51] и других разделах математики и механики [52], [53].

Опубликование монографии Красносельского и Рутицкого [36] в 1958 году вдохновило многих учёных СССР начать исследования по теории пространств Орлича. В итоге сформировалась целая сеть научных направлений, которая буквально "оплела" Советский Союз и впоследствии СНГ[1]. Наиболее известными представителями этих направлений, по нашему мнению, являются[2]

- Вайнберг М. М., Гапошкин В. Ф. — 1960–70 гг; Иванова О. А. — 1990 – н. в. **(Москва)**
- Похожаев С. И., Брудный Ю. А., Трушин Б. В., 1970 – н. в. **(Москва)**
- Лозановский Г. Я. — 1960 – 1970 гг., Макаров Б. М. — 1980 гг. **(Ленинград)**
- Козаченко Ю. В. — 1980 – н. в., Чайченко С. О. — н. в. **(Киев)**
- Шрагин И. В., Левченко И. В. — 1960 – 70 гг. — н. в. **(Кишинёв)**

[1] соответствующая информация про мировые научные школы приведена в [4, с. 107-108]
[2] периодизация приблизительная.

- Соболев В. И. — 1960 – 1980 гг., Семёнов Е. М., Овчинников В. И. — 1960 гг – н. в. **(Воронеж)**
- Антонцев С. Н., Кажихов А В., Монахов В. Н. — с 1970 гг по н. в., Мамонтов А. Е. — 2000 – н. в. **(Новосибирск)**
- Асташкин С. В. — 1980 – н. в. **(Самара)**
- Грибанов Ю. И. — 1960 – 1970 гг **(Казань)**
- Симоненко И. Б., Юдович В. И. — 1960 – 70 гг, Фетисов В. Г. — 2000 – н. в. **(Ростов н/Д)**
- Чернов А. В. — н. в. **(Нижний Новгород)**
- Климов В. С., Семко Е. Р. — 1970 – н. в. **(Ярославль)**
- Карлович Ю. И. — 1980 – н. в. **(Минск)**
- Векслер А. С. — 1980 – 1990 гг, Чилин В. И. — 1990 – н. в., Закиров Б. С. — 2000 – н. в. **(Ташкент)**
- Муратов М. А., Пашкова Ю. С. — 1990 – н. в. **(Симферополь)**
- Лукомский С. Ф. — 2000 – н. в. **(Саратов)**
- Ткебучава Г. Е. — 1980 – 2000 гг.; Кокилашвили В. М. — 1970 – 2000 гг. **(Тбилиси)**
- Казарян С. С. — 1980 – н. в. **(Ереван)**
- Акишев Г. А., Махашев С. Т. — 2000 – н. в. **(Караганда)**.

Автор выражает искреннюю признательность Р. Р. Мухину (СТИ МИСИС) за постановку задачи и полезные обсуждения, а также Г. И. Синкевич (Санкт-Петербург, СПбГАСУ), Л. Малигранде (Швеция, Технологический Университет, г. Лулео) , В. Г. Задорожнему (Воронеж, ВГУ), М. А. Муратову (Симферополь, КФУ), В. И. Чилину (Ташкент, НУУ), Е. Буткиевич (Польша, Гданьский университет), В. П. Богатовой за помощь в предоставлении необходимых материалов и сведений.

Список литературы

1. Вершик, А. М. Жизнь и судьба функционального анализа в XX веке / Математические события XX века. — М.: ФАЗИС, 2003. — 81 – 92 с.

   VERSHIK, A. M. (2006) *The life and the fate of functional analysis in the twentieth century.* Mathematical Events of the Twentieth Century. Edited by A. A. Bolibruch, Yu. S. Osipov and Ya. G. Sinai. Berlin: Springer-Verlag and Moscow: PHASIS.

2. DIEUDONNE, J. (1981) *History of functional analysis.* Amsterdam: North-Holland publishing company.

3. Медведев, Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного / Ф. А. Медведев. — М.: Наука, 1975. — 248 с.

   MEDVEDEV, F. A. (2006) *Essays of the theory of a real variable functions history.* Moscow: URSS.

4. MALIGRANDA, L. & WNUK, W. (2000) Wladislav Orlicz (1903 – 1990). *Wiadom. Mat.* 36. p. 85 – 147.

5. Малигранда, Л. Владислав Орлич (1903 – 1990) // Историко-математические исследования. Вторая серия. — М.: Изд-во "Янус-К", 2002. — Вып. 7. — С. 317 – 325.

   MALIGRANDA, L. (2002) Wladislav Orlicz (1903 – 1990). *Historical and mathematical studies. Series 2.* 7. p. 317 – 325.

6. MALIGRANDA, L. (2009) Wladislav Orlicz (1903 – 1990) — Polish mathematician. *Banach Center Publ.* 87. p. 65 – 78.

7. PIETSCH, A. (2007) *History of Banach Spaces and Linear Operators.* Boston: Birkhauser.

8. Молодший, В. Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века / В. Н. Молодший // Истор.-математ. исслед. — 1978. — Вып. 23. — С. 32 – 55.

   MOLODSHYI, V. N. (1978) O.Cauchy and the revolution in the mathematical analysis of the first quarter of the XIX century. *Historical and mathemat. studies.* 23. p. 32 – 55.

9. RIESZ, F (1910) Untersuchungen uber Systeme integrierbarer Funktionen. *Mathematische Annalen.* 69. p. 449 – 497.

10. LANDAU, E. (1907) Uber einen Konvergenzsatz. . Gottinger Nachr. p. 25 – 27.

11. YOUNG, W. H. (1912) On Classes of Summable Functions and their Fourier Series. *Proc. Royal Soc. (A).* 87. p. 225 – 229.

12. ZYGMUND, A. (1935) *Trigonometrical series.* Warszawa-Lwow: Monografie Matematyczne.

13. YOUNG, W. H. (1926) On successions with subsequence converging to an integral. *Ibid., ser. 2.* 24. p. 1 – 20.

14. BURKILL, J. C. (1928) Strong and Weak Convergence of Functions of General Type. *Proc. Lond. Math. Soc. (2).* 28. p. 493 – 500.

15. KURATOWSKI, K. (1980) *A Half Century of Polish Mathematics: Remembrances and Reflections.* Oxford: Pergamon Press.

16. BIRKHOFF, G. & KREYSZIG, E. (1984) The establishment of functional analysis. *Historia Math.* 11. p. 258 – 321.

17. O'CONNOR, J. J. & ROBERTSON, E. F. (The MacTutor History of Mathematics archive) *Zygmunt William Birnbaum.* [Online] Available from: http://www-history.mcs.standrews.ac.uk/Biographies/Birnbaum.html.

18. BIRNBAUM, Z. W. & ORLICZ, W. (1931) Uber die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander Konjugierten Potenzen. *Studia Math.* 3. p. 1 – 67.

19. COOPER, R. (1927) The Converses of the Cauchy-Holder Inequality and the Solutions of the Inequality $g(x+y) \leq g(x)+g(y)$. *Proc. Lond. Math. Soc. (2).* 26. p. 415 – 432.

20. Медведев, Ф. А. Основоположники функционального анализа в его ранней стадии / Ф. А. Медведев // / Истор.-математ. исслед. — 1973. — Вып. 18. — С. 55 – 70.

    MEDVEDEV, F. A. (1973) The founders of functional analysis at an early stage. *Historical and mathemat. studies.* 18. p. 55 – 70.

21. Гильберт, Д. Сущность и цели анализа бесконечно многих переменных / Д. Гильберт. Избранные труды. Т. II. — М.: Факториал, 1998. — 35 – 39 с.

    HILBERT, D. (1970) *Gesammelte Abhandlungen.* Band II: Geometrie, Algebra und Invariantentheorie. The essence and purpose of infinitely many variables analysis.Berlin: Springer-Verlag

22. Тихомиров, В. М. Сущность и цели анализа бесконечно многих переменных / Д. Гильберт. Избранные труды. Т. II. Комментарии и примечания. — М.: Факториал, 1998. — 525 – 526 с.

    TIHOMIROV, V. M. (1998) *D. Hilbert. Selected works.* Vol. II. Comments and notes. The essence and purpose of infinitely many variables analysis.Moscow: Factorial

23. FRECHET, M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.* 22 (Issue 1). p. 1 – 72.

24. Бурбаки, Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. Пер. с фр. И. Г. Башмаковой под ред. К. А. Рыбникова. — М.: ИЛ, 1963. — 292 с.

    BOURBAKI, N. (1974) *Elements d'histoire des mathematiques.* Paris: Masson.

25. BANACH, S. (1923) Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals. *Fund. Math.* 3. p. 133 – 181.

26. HELLY, E. (1923) Uber Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. *Monatshefte Math. Phys.* 31. p. 60 – 91.

27. HAHN, H. (1922) Uber Folgen linearer Operationen. *Monatshefte Math. Phys.* 32. p. 3 – 88.

28. WIENER, N. (1922) Limit in terms of continuous transformation. *Bull. Soc. Math. France.* 50. p. 119 – 134.

29. Улам, С. Приключения математика / С.Улам. — Москва-Ижевск: РХД, 2001. — 272 с.

    ULAM, S. (1991) *Adventures of a Mathematician.* Los Angeles: University of California Press.

30. ORLICZ, W. (1932) Uber eine gewisse Klasse von Raumen vom Typus B. *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* Ser. A. p. 207 – 220.

31. ZYGMUND, A. (1929) Sur les fonctions conjuguees. *Fund. Math.* 13. p. 284 – 303.

32. BANACH, S. (1932) *Theorie des operations lineaires.* Warsawa: Monografje matematyczne.

33. ORLICZ, W. (1936) Uber Raume (L_M). *Bull. Int. Acad. Polon. Sci.* Ser. A. p. 93 – 107.

34. MORSE, M. & TRANSUE, W. (1950) Functionals F bilinear over the product AxB of two pseudo-normed vector spaces. *Ann. of Math.* 51. p. 576 – 614.

35. Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б. К теории пространств Орлича // ДАН СССР. — М.: ГИФМЛ, 1951. — Т. 81. — С. 497 – 500.

    KRASNOSEL'SKII, M. A. & RUTICKII, YA. B. (1951) On the theory of Orlicz spaces. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.).* 81. p. 497 – 500.

36. Красносельский, М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. — М.: Гос. изд-во физико-математ. литературы, 1958. — 271 с.

    KRASNOSEL'SKII, M. A. and RUTICKII, YA. B. (1958) *Convex Functions and Orlicz Spaces.* Moscow: Gos. izdatelstvo fiziko-matemat. literaturi.

37. LUXEMBURG, W. A. J. (1955) *Banach function spaces.* Thesis. Technische Hogeschool te Delft.

38. NACANO, H. (1950) *Modulared semi-ordered linear spases.* V. 1. Tokyo: Mathem. Book-series.

39. AMEMIYA, I. (1954) A characterization of the modular of L_p type. *J. Fac. Sci Hokkaido Univ.* 1 (13). p. 22 – 33.

40. Кажихов, А. В., Мамонтов, А. Е. Об одном классе выпуклых функций и точных классах корректности задачи Коши для уравнения переноса в пространствах Орлича // Сиб. матем. журн. — Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1998. — Т. 39. — С. 831 – 850.

    KAZHIHOV, A.V.& MAMONTOV, A.E. (1998) On a certain class of convex functions and the exact well-posedness classes of the Cauchy problem for the transport equation in Orlicz spaces. *Sib. Math. Journal.* Vol. 39. p. 716 – 734.

41. CONGXIN, W. & TINGFU, W. (1986) Research advances in Orlicz spaces. *J. Math. Research and Exposition.* 6 (3;4). p. 155-161;143-148.

42. Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б. Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича // ДАН СССР. — М.: ГИФМЛ, 1952. — Т. 85. — С. 33 – 36.

    KRASNOSEL'SKII, M. A. & RUTICKII, YA. B. (1952) Linear integral operators in Orlicz Spaces. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.).* 85. p. 33 – 36.

43. Красносельский, М. А., Рутицкий, Я. Б. Пространство Орлича и нелинейные интеральные уравнения // Тр. ММО. — М.: ГИФМЛ, 1958. — Т. 7. — С. 63 – 120.

    KRASNOSEL'SKII, M. A. & RUTICKII, YA. B. (1958) Orlicz Space and nonlinear non-linear integral equations. *Tr. Mosk. Mat. Obs.* Vol. 7. p. 63 – 120.

44. Анализ – 3, Итоги науки и техн. / Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 26. — М.: ВИНИТИ, 1988. — 236 с.

    Itogi Nauki i Tekhniki. Seriya: Sovremennye Problemy Matematiki. Fundamental'nye Napravleniya, 26. Moskva: Vsesoyuznyj Institut Nauchnoj i Tekhnicheskoj Informatsii. 236 p. R. 2.60 (1988).

45. RAO, M. M. and REN, Z. D. (2002) *Applications of Orlicz Spaces.* Pure and Applied Mathematics. New York: CRC Press.

46. Козаченко, Ю. В. Случайные процессы в пространствах Орлича // Теория вероятност. и мат. статист. Республ. междуведом. науч. сб. / Отв. ред. А. В. Скороход. — Киев: Вища школа, 1984. — Т. 30–31. — С. 92–107; 44–50.

    KOZACHENKO YU. V. (1984) *Stochastic processes in Orlicz Spaces.* Teoriya veroyatnost. i mat. statist. Kiev: Vishcha Shkola.V. 30–31

47. Крейн, С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

    KREIN, S. G. and PETUNIN, YU. I and SEMENOV, E. M. (1982) *Interpolation of linear operators.* Translations of Mathematical Monographs. Vol. 54.Providence: American Mathematical Society

48. MALIGRANDA, L. (1989) *Orlicz spaces and interpolation.* Seminars in mathematics, 5. San Paulo: Universidade Estadual de Campinas SP Brasil.

49. Рубштейн, Б. А. Введение в теорию симметричных пространств измеримых функций. Т. 1. / Б. А. Рубштейн, Г. Я. Грабарник, М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова. — Симферополь: Таврический нац. ун-т., 2014. — 204 с.

    RUBSTEIN, B. A. and GRABARNIK, G. YA. and MURATOV, M. A. and PASHKOVA, YU. S. (2014) *Introduction to the theory of simmetric spaces of measurable functions..* Vol. I. Simferopol: Tauride national univ.

50. EDGAR, G. A. and SUCHESTON, L. (1992) *Stopping Times and Directed Processes.* Encyclopedia of Math. and Appl. Vol. 47. New York: Cambridge University Press

51. DELBAEN, F. & RASONYI, M. & STRICKER, C. Editors (2009) *Optimality and risk -modern trends in mathematical finance. The Kabanov Festschrift.* Berlin: Springer-Verlag.

52. Антонцев, С. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей / С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов. — Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1983. — 315 с.

    ANTOTSEV, S. N. and KAZHIHOV, A. V. and MONAHOV, V. N. (1983) *Boundary value problems of inhomogeneous fluids mechanics.* Novosibirsk: Nauka.

53. CONGXIN, W. and TINGFU, W. (1983) *Orlicz spaces and their applications.* Harbin: Heilongjiang Print House of Sci. Tech.

Статья поступила в редакцию 05.10.2015

УДК: 517.9

MSC2010: 39A70, 47A10, 47B37, 47B39

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАСТУЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова

Воронежский государственный педагогический университет
ул. Ленина, 86, г. Воронеж, 394043, Российская Федерация
Воронежский государственный технический университет
Московский проспект, 14, г. Воронеж, 394026, Российская Федерация
e-mail: *g.garkavenko@mail.ru, nat-uskova@mail.ru*

Spectral analysis of difference operators of second order with a growing potential.

Garkavenko G. V., Uskova N. B.

Abstract.

Let $H = l_2(\mathbb{Z})$ be a Hilbert space of twosided complex sequences with the inner product $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}, x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ and the norm generated by this scalar product. In the space of H regarded linear operator $A - B : D(A) \subset H \to H$, where $(Ax)(n) = a(n)x(n), n \in \mathbb{Z}, D(A) = \{x \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2|a(n)|^2 < \infty\}$, $(Bx)(n) = -2x(n) + x(n+1) + x(n-1), x \in H$. The sequence $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ has the property: $\lim\limits_{|n|\to\infty} |a(n)| \to 0, 0 < d_i = \inf\limits_{i\neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty, |i| \to \infty$. In the standard basis of the space H the operator $A - B$ is tridiagonal matrix with nonzero main, first and minus first diagonals.

The class of differential operators and their matrix corresponds to the Sturm-Liouville operator with growth potential in their deskritization. We study the spectral properties of the operator $A - B$. The method of investigation is proposed A.G. Baskakov simular operators method essentially used in the spectral analysis of the various classes of differential operators. For operators, the operator in question is close to $A - B$ similar operators method previously used. One of the main results is the following statement

Theorem. *There is a natural number $k \geq 1$, that the spectrum $\sigma(A - B)$ of operator $A - B$ represented in the form $\sigma(A - B) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{|i|>k}\sigma_i)$, where $\sigma_{(k)}$ contains no more than $2k + 1$ eigenvalues, $\sigma_i = \{\mu_i\}$, $|i| > k$ — singletons and have the following asymptotic formula*

$$\mu_i = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}),$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + O(d_i^{-2}),\ |i| > k.$$

The corresponding eigenvectors $\tilde{e}_i, |i| > k$, *admits the asymptotic estimate* $\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| = O(d_i^{-2})$, *where*

$$\tilde{y}_i(j) = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1}, \ j = i \pm 1, \\ 0, \ \textit{in other cases.} \end{cases}$$

For the spectral projectors $\tilde{P}_i = P(\{\mu_i\}, A - B), P_i = P(\{a(i)\}, A), |i| > k$ take place Formula $\|\tilde{P}_i - P_i\| = O(d_i^{-1}), \ |i| > k.$

Keywords: *spectral analysis, difference operator, the similar operator method, spectrum, spectral projections.*

Введение

Рассмотрим гильбертово пространство двусторонних комплексных последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$ со скалярным произведением $(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)}$ и нормой $\|x\| = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2)^{\frac{1}{2}}$, где $x, y \in l_2(\mathbb{Z})$, $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $y : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, порождённой этим скалярным произведением. В пространстве $l_2(\mathbb{Z})$ зададим линейный замкнутый оператор $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ формулой

$$(Ax)(n) = a(n)x(n), \ n \in \mathbb{Z}, x \in D(A) \tag{1}$$

с областью определения $D(A) \subset l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$D(A) = \{x \in l_2(\mathbb{Z}) : \sum |a(n)|^2 |x(n)|^2 < \infty\},$$

где $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — последовательность, обладающая свойствами:

$\lim\limits_{|n| \to \infty} |a(n)| \to \infty$; $0 < d_i = \inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)| \to \infty, \ |i| \to \infty.$

Из этих свойств следует, что $a(i) \neq a(j)$ при $i \neq j, i, j \in \mathbb{Z}$.

Символом $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, а символом $\sigma(A)$ — его спектр. Из условий на последовательность $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ следует, что $\sigma(A) = \{a(n), \ n \in \mathbb{Z}\}$, то есть спектр оператора A состоит из простых изолированных собственных значений. Если число λ_0 не совпадает ни с одним $a(n)$, то $\lambda_0 \in \rho(A)$ и оператор $(A - \lambda_0 I)^{-1} : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ действует по формуле $((A - \lambda_0 I)^{-1}x)(n) = ((a(n) - \lambda_0)^{-1}x)(n), \ n \in \mathbb{Z}$, такой оператор является нормальным компактным оператором (и оператор $A : D(A) \subset l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$, ввиду нормальности резольвенты, также является нормальным оператором).

Рассмотрим самосопряженный ограниченный оператор $B : l_2(\mathbb{Z}) \to l_2(\mathbb{Z})$ вида

$$(Bx)(n) = -2x(n) + x(n+1) + x(n-1), \ n \in \mathbb{Z}, \ x \in l_2(\mathbb{Z}). \tag{2}$$

Оператор вида $A-B$ рассматривался в работах Отелбаева М. (см., например, [1], [2]). В стандартном базисе $\{e_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ пространства $l_2(\mathbb{Z})$, где $e_k = (\delta_{nk})$, $n, k \in \mathbb{Z}$, матрица оператора $A - B$ имеет трёхдиагональный вид с ненулевыми минус первой, нулевой и первой диагоналями (при нумерации диагоналей целыми числами). Рассматриваемый класс разностных операторов и их матриц, соответствует уравнениям Штурма – Лиувилля при их дискретизации [2].

В работе изучаются спектральные свойства оператора $A-B$, а именно: получены оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов.

Исследовать оператор $A-B$ будем методом подобных операторов, который и изложем в адаптированном для рассматриваемого случая виде. Отметим, что к операторам, близким к оператору $A-B$, метод подобных операторов ранее не применялся.

1. Метод подобных операторов

Метод подобных операторов берёт начало с работ А. Пуанкаре, А. А. Ляпунова, Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, К. Фридрихса, Р. Тернера и окончательно оформляется в работах А. Г. Баскакова [3] – [5]. Мы будем придерживаться идеологии и методологии работы [5]. Обычно метод подобных операторов применяется для получения спектральных характеристик дифференциальных операторов (см., например, [7] – [8]).

Основная идея метода подобных операторов состоит в преобразовании оператора $A - B$, где $A : D(A) \subset H \to H$ — хорошо изученный оператор с известными характеристиками, имеющий спектр $\sigma(A)$ и резольвентное множество $\rho(A)$, а оператор возмущения B в некотором смысле мал по сравнению с A, и подобный ему более просто устроенный оператор. В нашем случае подобный оператор будет иметь блочно-диагональную матрицу. Спектральные свойства такого оператора легко изучать, так как они близки к спектральным свойствам оператора A.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Символом $\mathfrak{A}$ обозначим одно из операторных пространств: 1) $End\,H$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в H с нормой $\|X\|_\infty$; 2) $End_*\,H \subset End\,H$ — банахова алгебра операторов с суммируемыми диагоналями [6] с нормой $\|X\|_* = \sum_p \sup_{i-j=p} |x_{ij}|$, где $X = (x_{ij})$ матрица оператора X в стандартном базисе пространства H. Очевидно, что $\|X\|_\infty \leqslant \|X\|_*$.

Определение 1. [5]. Пусть $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, $\Gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ трансформаторы. Тройку $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ назовём допустимой для невозмущенного оператора A, а $\mathfrak{A}$ — допустимым пространством возмущений, если
1) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причём J — проектор;

2) $(\Gamma X)(D(A)) \subset D(A)$, при этом

$$A\Gamma X - \Gamma X A = X - JX,\ X \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

и $Y = \Gamma X \in \mathfrak{A}$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;
3) существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\|\Gamma\| \le \gamma, \quad max\{\|X\Gamma Y\|, \|\Gamma XY\|\} \le \gamma\|X\|\|Y\|;$$

4) для любого $X \in \mathfrak{A}$ и $\epsilon > 0$ существует $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$ такое, что $\|X(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}\|_\infty < \epsilon$.

Теорема 1. [5]. *Пусть* $(\mathfrak{A}, J, \Gamma)$ *— допустимая тройка для оператора* $A : D(A) \subset H \to H$ *и* B *— некоторый оператор из* $\mathfrak{A}$*. Тогда, если*

$$\gamma\|B\|_{\mathfrak{A}} < \frac{1}{4}, \tag{4}$$

то оператор $A - B$ *подобен оператору* $A - JX$*, где* $X \in \mathfrak{A}$*, является решением нелинейного операторного уравнения*

$$X = B\Gamma X - (\Gamma X)(JB) - (\Gamma X)J(B\Gamma X) + B = \Phi(X). \tag{5}$$

Решение X *может быть найдено методом простых итераций, положив* $X_0 = 0,\ X_1 = \Phi(0) = B, X_2 = \Phi^2(0), \ldots.$

2. Теорема о подобии

Вернёмся к операторам $A : D(A) \subset H = l_2(\mathbb{Z}) \to H$ и B, определённым формулами (1) и (2) соответственно. Отметим, что в дальнейшем удобно будет пользоваться матричным представлением операторов A и B в стандартном базисе пространства H.

Собственными векторами оператора A являются базисные векторы e_n, $n \in \mathbb{Z}$, а соответствующие спектральные проекторы задаются формулой $P_n x = (x, e_n)e_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Представим оператор $A - B$ в виде $A - B = \tilde{A} - \tilde{B}$, где $(\tilde{A}x)(n) = a(n)x(n) + 2x(n)$, $(\tilde{B}x)(n) = x(n-1) + x(n+1)$. Тогда $\sigma(\tilde{A}) = \{a(n) + 2, n \in \mathbb{Z}\}$ собственные векторы и спектральные проекторы те же, что и у оператора A. Очевидно, что возмущение $\tilde{B}$ принадлежит как пространству $End\,H$, так и пространству $End_*\,H$, причём $\|\tilde{B}\|_\infty = \|\tilde{B}\|_* = 2$, главная диагональ матрицы оператора $\tilde{B}$ нулевая.

Перейдём к определению трансформаторов $J : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ и $\Gamma : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$. Положим

$$JX = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n X P_n,\ X \in \mathfrak{A}.$$

Очевидно, что трансформатор J диагонализует матрицу оператора X и $J\tilde{B} = 0$ в силу определения оператора $\tilde{B}$, более того $\|J\| = 1$.

Перепишем равенство (3) для матричных элементов матрицы $Y = (y_{ij})$, где $Y = \Gamma X$ (здесь учтено, что $\tilde{A}|_{H_i} = (a(i)+2)I_i$, $H_i = RanP_i$, $i \in \mathbb{Z}$, символом $D|_Y$ обозначено сужение оператора D на подпространство Y):

$$a(l)y_{lm} - y_{lm}a(m) = x_{lm},\ l \neq m,$$

откуда

$$y_{lm} = \frac{x_{lm}}{a(l) - a(m)}, \tag{6}$$

и $y_{ll} = 0,\ l \in \mathbb{Z}$. Таким образом, матричные элементы оператора ΓX определены. При этом, если $X \in End\, H$, то и $Y \in End\, H$ и

$$\|Y\|_\infty = C(\inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|_\infty,$$

где $1 \leqslant C \leqslant 5$ (см. [3]). Здесь используется оценка на норму обратного оператора к оператору коммутирования для вычисления нормы оператора ΓX. Эта оценка является следствием более общих оценок, приводимых в [3] (теорема 1.3).

Пусть $X \in End_* H$, тогда

$$\|Y\|_* = \sum_p \sup_{i-j=p} |y_{ij}| = \sum_p \sup_{i-j=p} \frac{|x_{ij}|}{|a(i) - a(j)|} \leqslant (\inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \sum_p \sup_{i-j=p} |x_{ij}| =$$
$$= (\inf_{i \neq j} |a(i) - a(j)|)^{-1} \|X\|_*$$

Пусть $Q_k = \sum_{|i| \leq k} P_i$. Наряду с трансформаторами J и Γ рассмотрим семейство трансформаторов J_k и Γ_k, задаваемых формулами

$$J_k X = \sum_{|i|>k} P_i X P_i + Q_k X Q_k,\ \Gamma_k X = \Gamma X - \Gamma(Q_k X Q_k) = \Gamma X - Q_k(\Gamma X)Q_k.$$

Ясно, что $J_0 X = JX$, $\Gamma_0 X = \Gamma X$. Операторы $J_k X$ и $\Gamma_k X$ отличаются от JX и ΓX на конечномерный оператор.

Более того, величина γ (здесь она зависит от k)из теоремы 1 задается формулой $\gamma = \gamma_k = C(\inf_{|i| \leqslant k, |j|>k} |a(i) - a(j)|)^{-1}$ при $X \in End\, H$ или $\gamma_k = (\inf_{|i| \leqslant k, |j|>k} |a(i) - a(j)|)^{-1}$ при $X \in End_* H$. Точное значение константы C неизвестно, известна лишь её оценка, например, $C \leqslant 5$ [3], но так как мы в дальнейшем будем получать асимптотические оценки, то точное значение C несущественно. Выполнение условия 4) из определения 1 следует из того, что оператор X ограничен, а норму оператора $(A - \lambda_\epsilon I)^{-1}$, $\lambda_\epsilon \in \rho(A)$, можно сделать малой за счет подходящего выбора числа λ_ϵ.

Итак, доказана

Лемма 1. *Тройка* $(End\, l_2(\mathbb{Z}), J_k, \Gamma_k)$ *является допустимой для оператора* $\tilde{A}$ *тройкой при любом* k.

Тройка $(End_*\, l_2(\mathbb{Z}), J_k, \Gamma_k)$ *является допустимой для оператора* $\tilde{A}$ *тройкой.*

Из леммы 1 и теоремы 1 и того, что $d_k \to \infty$ при $|k| \to \infty$ вытекает

Теорема 2. *Существует такое* $k > 0$, *что оператор* $\tilde{A} - \tilde{B}$ *подобен оператору блочно-диагонального вида* $\tilde{A} - J_k X$, *то есть*

$$(\tilde{A} - \tilde{B})(I + \Gamma_k X) = (I + \Gamma_k X)(\tilde{A} - J_k X),$$

где оператор X *есть решение уравнения (5) с* Γ_k *и* J_k, *и возмущением* $\tilde{B}$.

3. Основные результаты

В следующей теореме приводятся аимптотические формулы для собственных значений оператора $A - B$.

Теорема 3. *Существует такое натуральное число* $k \geq 1$, *что спектр* $\sigma(A - B)$ *оператора* $A - B$ *представим в виде* $\sigma(A - B) = \sigma_{(k)} \cup (\cup_{|i|>k} \sigma_i)$, *где* $\sigma_{(k)}$ *содержит не более чем* $2k + 1$ *собственных значений,* $\sigma_i = \{\mu_i\}$, $|i| > k$ *—одноточечные множества и имеют место следующие асимптотические формулы*

$$\mu_i = a(i) + 2 + O(d_i^{-1}), \tag{7}$$

$$\mu_i = a(i) + 2 - \frac{a(i+1) - 2a(i) + a(i-1)}{(a(i+1) - a(i))(a(i-1) - a(i))} + O(d_i^{-2}),\ |i| > k. \tag{8}$$

Соответствующие собственные векторы $\tilde{e}_i, |i| > k$ *допускают асимптотическую оценку* $\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| = O(d_i^{-2})$, *где*

$$\tilde{y}_i(j) = \begin{cases} 1,\ i = j, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1},\ j = i \pm 1, \\ 0,\ \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Мы рассмотрим только случай $\mathfrak{A} = End\, H$, так как случай $\mathfrak{A} = End_*\, H$ рассматривается аналогично.

Из подобия операторов $A - B$ и $\tilde{A} - J_k X$ следует, что их спектры совпадают и спектр оператора $A - B$ допускает представление (4), где $\sigma_i = \sigma(A_i)$ и $A_i = ((a(i) + 2)I - P_i X)|_{H_i}$, $|i| > k$, $H_i = Im P_i$. Таким образом, для асимптотической оценки собственных значений оператора $\tilde{A} - \tilde{B}$ нам нужен оператор $P_i X|_{H_i}$, но нам известен не сам оператор X, а последовательные приближения к нему, причём первым приближением является оператор $\tilde{B}$. Второе приближение имеет вид $X_2 = \tilde{B}\Gamma_k\tilde{B} - \Gamma_k\tilde{B}J_k\tilde{B} - \Gamma_k\tilde{B}J_k(\tilde{B}\Gamma_k\tilde{B})$ и так далее.

Представим оператор $P_iX|_{H_i}$ в виде $(P_i\tilde{B} + P_i(X - \tilde{B}))|_{H_i}$ при этом $P_i\tilde{B}|_{H_i} = 0, |i| > k$. Отметим асимптотические равенства:

$$||P_i(X - \tilde{B})|_{H_i}|| = ||P_i(\tilde{B}\Gamma_kX)|_{H_i}|| = O(d_i^{-1}).$$

Таким образом, формула (7) имеет место. Равенство (8) устанавливается аналогично, но в качестве второго приближения X берем оператор X_2 и учитываем, что $P_i(\tilde{B}\Gamma_k\tilde{B})|_{H_i} = (\dfrac{1}{a(i-1)-a(i)} + \dfrac{1}{a(i+1)-a(i)})I$, $|i| > k$. В итоге получаем представление (8).

Перейдём к оценке отклонений собственных векторов. Опять же из подобия рассматриваемых операторов $A - B$ и $\tilde{A} - J_kX$ следует равенство

$$\tilde{e}_i = (I + \Gamma_kX)e_i = e_i + \Gamma_k\tilde{B}e_i + \Gamma_k(X - \tilde{B})e_i,\ |i| > k,$$

где $\tilde{e}_i$ — собственный вектор оператора $A-B$, отвечающий собственному значению μ_i, определенному формулой (7), а e_i — собственный вектор оператора $\tilde{A}$, отвечающий собственному значению $a(i) + 2$, $|i| > k$. Отметим, что e_i является вектором стандартного базиса пространства $l_2(\mathbb{Z})$. Так как $(\Gamma_k\tilde{B})e_i$ есть i- столбец матрицы $\Gamma_k\tilde{B}$, то $(\Gamma_k\tilde{B})e_i = \{0, ..., 0, \frac{1}{a(i-1)-a(i)}, 0, \frac{1}{a(i+1)-a(i)}, 0, ...\}^T$. Рассмотрим последовательность $\tilde{y}_i$ вида

$$\tilde{y}_i(k) = \begin{cases} 1,\ i = k, \\ (a(i \pm 1) - a(i))^{-1},\ k = i \pm 1, \\ 0, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, $\|\tilde{e}_i - \tilde{y}_i\| = O(d_i^{-2}), i \geqslant k + 1.$ □

В последующей теореме получены оценки равносходимости спектральных разложений операторов $A - B$ и A.

Теорема 4. *Для спектральных проекторов* $\tilde{P}_i = P(\{\mu_i\}, A - B), |i| > k,$ *и* $\tilde{Q}_k = \sum_{|i| \le k} \tilde{P}_i$ *имеют место формулы*

$$\tilde{P}_i = P_iU^{-1} + \Gamma XP_iU^{-1},\ |i| > k,\ \tilde{Q}_k = Q_kU^{-1} + \Gamma XQ_kU^{-1},$$

$$\tilde{P}_i - P_i = (\Gamma_kXP_i - P_i\Gamma_kX)U^{-1},\ |i| > k,\ \tilde{Q}_k - Q_k = (\Gamma_kXQ_k - Q_k\Gamma_kX)U^{-1},$$

причём

$$\|\tilde{P}_i - P_i\|_{\mathfrak{A}} = O(d_i^{-1}),\ |i| > k, \tag{9}$$

и

$$\|\sum_{|i|\geq m}^{N}\tilde{P}_i-\sum_{|i|\geq m}^{N}P_i\|_{\mathfrak{A}}\leq M(\min_{\substack{|p|,|l|\geq m\\ p\neq l}}|a(p)-a(l)|)^{-1},\text{ где } m>k, \tag{10}$$

а M — некоторая постоянная.

Доказательство. Из подобия операторов $\tilde{A}-\tilde{B}$ и $\tilde{A}-J_k\tilde{X}$ следует, что спектральные проекторы P_i, $|i|>k$ оператора $\tilde{A}$ (или оператора A) и спектральные проекторы $\tilde{P}_i=P(\tilde{\sigma}_i,\tilde{A}-\tilde{B})$ связаны равенством

$$\tilde{P}_i=(I+\Gamma_k\tilde{X})P_i(I+\Gamma_k\tilde{X})^{-1},$$

где $\tilde{X}\in\mathfrak{A}$ — решение нелинейного уравнения (5). Отсюда и следуют формулы для $\tilde{P}_i$ и $\tilde{P}_i-P_i$. Аналогично получаются формулы для $\tilde{Q}_k$ и $\tilde{Q}_k-Q_k$. Далее:

$$||\tilde{P}_i-P_i||\leq C_1(||\Gamma_k\tilde{X}P_i||+||P_i\Gamma_k\tilde{X}||+d_i^{-1}),\ \|(\Gamma_k\tilde{X})P_i\|\leqslant C_1d_i^{-1}$$

для некоторой постоянной $C_1>0$. Следовательно, имеет место оценка (9). Оценка (10) получается аналогично оценке (9). □

Пример. Пусть числа $a(n), n\in\mathbb{Z}$, таковы, что $a(n)=c_1\cdot sign(n)|n|^{\alpha}+c_2,\ \alpha>1$ и оператор B определен равенством (2). Тогда имеют место теоремы 3 и 4 для асимптотической оценки собственных векторов, собственных значений и спектральных проекторов оператора $A-B$. Заметим, что в этом случае $d_i=c_3|i|^{\alpha-1},\ \alpha>1,\ d_i\to\infty$ при $|i|\to\infty$.

Список литературы

1. Мусилимов Б., Отелбаев М. Оценка наименьшего собственного значения одного класса матриц, соответствующих разностному уравнению Штурма–Лиувилля // Журн. вычислительной математики и математической физики. — 1981. — Т. 21. — С. 1430–1434.

   MUSILIMOV B. and OTELBAEV M. (1981) Estimation of the least eigenvalues for the matrix class corresponding to the Sturm-Liouville difference equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 21. p. 68-73.

2. Отелбаев М. О коэрцитивных оценках решений разностных уравнений. Исследование по теории дифференцируемых функций многих переменных и её приложениям // Труды МИАН СССР / М.: Наука. — 1988. — Ч. 12. — Т. 181. — С. 241–249.

   OTELBAEV M. (1988) Coercive estimates for the solutions of difference equations. *Trudy Math. Inst. Steclov*. 181. p. 241-249.

3. Баскаков А. Г. Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов. // Сибирский математический журнал. — 1983. — Т. 24. — № 1. — С. 21–39.

BASKAKOV A. G. (1983) Method of abstract harmonic analysis in the theory of perturbation of linear operators. *Siberian Math. J.* Volume 24 (Issue 1). p. 17–32.

4. Баскаков А. Г. Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов // Известия РАН. Серия математическая. — 1994. — Т. 54. — № 4. — С. 3–32.

   BASKAKOV A. G. (1994) Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators. *Izv. RAN. Ser. Mat.* Volume 58 (Issue 4). p. 3–32.

5. Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Известия РАН. Серия математическая. — 2011. — Т. 75. — № 3. — С. 3–28.

   BASKAKOV A. G. (2011) The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials. *Izv. RAN: Ser. Math.* Volume 75 (Issue 3). p. 445–469.

6. Баскаков А. Г. Оценка элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов // Известия РАН. Серия математическая. — 1997. — Т. 61. — № 6. — С. 3–26.

   BASKAKOV A. G. (1997) Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators. *Izv. RAN: Ser. Math.* Volume 61 (Issue 6). p. 1113–1135.

7. Гаркавенко Г. В. О диагонализации некоторых классов линейных операторов // Известия вузов. Математика. — 1994. — № 11. — С. 14–19.

   GARKAVENKO G. V. (1994) On diagonalization of certian classes of linear operator. *Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika).* Volume 38 (Issue 11). p. 11–16.

8. Ускова Н. Б. Об оценке спектральных проекторов возмущенных самосапряженных операторо // Сиб. мат. журн.. — 2000. — № 3. — С. 712–721.

   USKOVA N. B. (2000) On estimates for spectral projections of perturbed selfadjoint operators. *Siberian Mathematical Journal.* Volume 41 (Issue 3). p. 592–600.

Статья поступила в редакцию 11.10.2015

УДК: 517.957

MSC2010: 35R20

ДИНАМИКА СТАЦИОНАРНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ОТРАЖЕНИЯ

© А. А. Корнута

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
пр. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *korn_57@mail.ru*

Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with transformation of reflection.

Kornuta A. A.

Abstract.

We consider the scalar parabolic equation on the quadrant which describes the dynamics of phase modulation of the light wave that has passed a thin layer of the nonlinear medium of Kerr type with transformation of reflection of the spatial variable in the two-dimensional feedback[1]. The equation depends on two parameters: the diffusion coefficient $\mu > 0$ and $\Lambda < -1$. The bifurcation parameter is μ. When decreasing μ and its passing $-1-\Lambda$ from the zero solution losing its stability there branches out a pair of exponentially asymptotically stable stationary spatially inhomogeneous solutions. Using the Galerkin method it is found that there exists the solution Λ^* such one, that with $\Lambda > \Lambda^*$ the indicated stationary solutions remain stable when decreasing μ parameter. When $\mu \longrightarrow 0$ these stationary solutions approach the step functions with values $\pm\sqrt{-1-\Lambda}$. If $\Lambda < \Lambda^*$ then there is such value of the parameter $\mu < -1-\Lambda$, when passing through which there is a loss of stability of stationary solutions. This bifurcation results in birth of two pairs of exponentially asymptotically stable stationary solutions. We have received a representation of these stationary solutions.

With further decrease of μ parameter and the passage of the next bifurcation values each time the zero solution increases the instability index by one. As a result of the bifurcation of the zero solution each time a new pair of unstable stationary spatially inhomogeneous solutions branches out. The nature of the stability of these solutions for the withdrawal from the corresponding bifurcation parameter values depends on the order of approximation. We have received a representation of these stationary solutions.

The direct numerical solution of the equation under consideration suggests that the application of the Galerkin method for the problem of stationary structures leads to a quantitatively and qualitatively correct results.

Keywords: *nonlinear optics, feedback, bifurcation analysis, stability, Galerkin's method.*

Введение

Одной из самых популярных нелинейных оптических систем является система, состоящая из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного контура двумерной обратной связи. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, которое выполняется призмами, линзами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр — одна из наиболее простых оптических систем, в которой реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. Моделирование динамики нелинейных оптических систем с нелокальными взаимодействиями в контуре обратной связи [1, 2] приводит к параболическим функционально-дифференциальным уравнения с преобразованием пространственной переменной искомой функции.

В [3] экспериментально установлено многообразие оптических структур, показана зависимость их количества и форм от коэффициента диффузии. Согласно локальной теории бифуркации, для параболических уравнений с преобразованием пространственных переменных (см. [2, 4] и библиографию к ним) возникновение оптических структур вызвано потерей устойчивости пространственно однородного режима. В [5] для параболического уравнения на отрезке с преобразованием отражения пространственной переменной в малой окрестности бифуркационного значения параметра построены стационарные структуры и проведен анализ их устойчивости. С использованием метода центральных многообразий, в [4, 6] исследуются стационарные структуры параболической задачи, бифурцирующие в кольце и круге.

1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается функционально-дифференциальное уравнение на квадрате $P = \{(x,y)\,|-\pi/2 < x < \pi/2, -\pi/2 < y < \pi/2\}$ [1, 4, 6], описывающее динамику фазовой модуляции $w = w\,(t,x,y)$ световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с преобразованием отражения в контуре обратной связи:

$$\begin{gathered}\partial_t w\,(t,x,y) + w\,(t,x,y) = \mu\Delta w\,(t,x,y) + K\,(1+\gamma\cos w\,(t,-x,y))\,, t>0,\\ w\,(x,0) = w_0\,(x)\,,\end{gathered} \tag{1}$$

$$\partial_x w\,(t,-\pi/2,y) = \partial_x w\,(t,\pi/2,y) = \partial_y w\,(t,x,-\pi/2) = \partial_y w\,(t,x,\pi/2) = 0, \tag{2}$$

здесь Δ — оператор Лапласа, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, коэффициент $K>0$ пропорционален интенсивности входного поля, $0<\gamma<1$ — видность (контрастность) интерференционной картины.

Пусть $H = L_2(P)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом на P функций. Обозначим $H^s, s \in Z_+$ шкалу пространств, порожденную оператором Δ при граничных условиях (2). Норма в пространстве $H^s, s \in Z_+$, определяется формулой $\|u\|_s^2 =< (-\Delta)^s > + < u, u >$, здесь $< *, * >$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H.

Данная работа посвящена нахождению асимптотической формы и анализу устойчивости пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений (1) $w(t, x, y) = \omega$, которые определяются уравнением

$$\omega = K(1 + \gamma \cos\omega). \tag{3}$$

При увеличении K количество одновременно существующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. Фиксируем гладкую ветвь решений $\omega = \omega(K), 1 + K\gamma \sin\omega(K) \neq 0$ уравнения (3). Выполняя замену $w = v + \omega$ и раскладывая функцию $\cos(v + \omega)$ в окрестности точки $v = 0$ в степенной ряд, получаем уравнение

$$\begin{gathered} \partial_t v(t, x, y) + v(t, x, y) = \mu\Delta v(t, x, y) + \\ +\Lambda\left(v(t, -x, y) + \frac{1}{2}v^2(t, -x, y)\operatorname{ctg}\omega - \frac{1}{6}v^3(t, -x, y) + O\left(v^4\right)\right), \\ t > 0, v(x, 0) = v_0(x), \\ \partial_x v(t, -\pi/2, y) = \partial_x v(t, \pi/2, y) = \partial_y v(t, x, -\pi/2) = \partial_y v(t, x, \pi/2) = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\Lambda = -K\gamma\sin\omega$. Далее будем считать, что $\Lambda < 0$ и выполняется следующее условие.

Условие 1. $\cos\omega = 0$.

Опуская в (4) слагаемые порядка $O(v^4)$ и выполняя замену $\left(-\frac{\Lambda}{6}\right)^{1/2} v = u$, получаем уравнение:

$$\begin{gathered} \partial_t u(t, x, y) + u(t, x, y) = \mu\Delta u(t, x, y) + \Lambda Q u(t, x, y) + (Qu(t, x, y))^3, t > 0, \\ Qu(t, x, y) = u(t, -x, y), u(x, 0) = u_0(x), \\ \partial_x u(t, -\pi/2, y) = \partial_x u(t, \pi/2, y) = \partial_y u(t, x, -\pi/2) = \partial_y u(t, x, \pi/2) = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Множество стационарных решений E_μ уравнения (5), а следовательно, решений краевой задачи

$$\begin{gathered} \mu\Delta u(x, y) - u(x, y) + \Lambda Q u(x, y) + (Qu(x, y))^3 = 0, \\ \partial_x u(-\pi/2, y) = \partial_x u(\pi/2, y) = \partial_y u(x, -\pi/2) = \partial_y u(x, \pi/2) = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

зависит от параметра $\mu > 0$.

Уравнение (5), линеаризованное в окрестности нулевого решения, представим в виде

$$\partial_t u = Au,$$

где $Au = \mu\Delta u - u + \Lambda Qu$, $Qu(t,x,y) = u(t,-x,y)$. Линейный оператор A с областью определения H^2, рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H, является самосопряженным оператором. Методом Фурье устанавливается следующее утверждение [4]

Лемма 1. *Оператор A, рассматриваемый в гильбертовом пространстве H с областью определения H^2, имеет полную ортогональную систему собственных функций*

$$\sin(2k+1)x \cdot \sin(2s+1)y, \quad \sin(2k+1)x \cdot \cos 2sy,$$

$$\cos 2kx \cdot \sin(2s+1)y, \quad \cos 2kx \cdot \cos 2sy,$$

$k, s = 0, 1, 2, \ldots$, *соответствующих собственным значениям*

$$\lambda_{2k+1,s} = -1 - \mu\left((2k+1)^2 + s^2\right) - \Lambda, \quad \lambda_{2k,s} = -1 - \mu\left((2k)^2 + s^2\right) + \Lambda.$$

Согласно теореме 5.1.1 ([7, стр.113]) и лемме 1, если $\Lambda > 1$, то нулевое решение (5) неустойчиво для любых $\mu > 0$. Если $-1 < \Lambda < 1$, то нулевое решение (5) является асимптотически устойчивым для любых $\mu > 0$. Интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Выберем теперь K так, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие 2. $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Если $\mu > \mu_{1,0} = -(1+\Lambda)$, то согласно лемме 1 нулевое решение задачи (5) является устойчивым. При убывании параметра μ и его прохождении через значение $\mu_{1,0}$ нулевое решение теряет устойчивость, одна точка спектра переходит на положительную полуось. Обозначим $\mu_{2k+1,s} = \dfrac{\mu_{1,0}}{(2k+1)^2 + s^2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ Если $\mu_{1,1} < \mu < \mu_{1,0}$, то индекс неустойчивости нулевого решения равен 1. Индекс неустойчивости нулевого решения повышается на единицу при уменьшении μ и его прохождении через $\mu_{2k+1,s}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ Параметр μ далее принимается в качестве бифуркационного. С использованием метода центральных многообразий в работе [4] доказана теорема о существовании, устойчивости и асимптотической форме двух стационарных пространственно неоднородных решений рассматриваемой задачи. В отличие от [4] в данной работе для описания асимптотической формы и исследования устойчивости стационарных решений (5) используется метод Галёркина. Отметим, что родственные задачи в одномерном случае рассматривались в [8, 9]

2. Аппроксимация уравнения (5)

Для исследования динамики стационарных структур задачи (5) при отходе параметра μ от соответствующего бифуркационного значения в данной работе строится иерархия упрощённых моделей уравнения (5) [10].

Будем искать приближённые решения уравнения (5) в виде

$$\begin{aligned} u = &\sum_{k=0}^{N} \left(z_{2k+1,0} \sin\left(2k+1\right)x + z_{0,2k+1} \sin\left(2k+1\right)y\right) + \\ &+\sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} z_{2k+1,2s+1} \sin\left(2k+1\right)x \cdot \sin\left(2s+1\right)y + \\ &+\sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} z_{4k+2,2s+1} \cos\left(4k+2\right)x \cdot \sin\left(2s+1\right)y + \\ &+\sum_{k=0}^{N}\sum_{s=0}^{N} z_{2k+1,4s+2} \sin\left(2k+1\right)x \cdot \cos\left(4s+2\right)y. \end{aligned} \tag{7}$$

Подставим (7) в уравнение (5). Приравняв затем коэффициенты при $\sin\left(2k+1\right)x$, $\sin\left(2k+1\right)y$, $\sin\left(2k+1\right)x\sin\left(2s+1\right)y$, $\cos\left(4k+2\right)x\sin\left(2s+1\right)y$, $\sin\left(2k+1\right)x\cos\left(4s+2\right)y$, $\left(k,s=\overline{0,N}\right)$, приходим к системам обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Z} = F\left(Z,\mu\right), \tag{8}$$

где $Z = \left\{z_{p,q}\right\}$, индексы p, q, принимающие значения $0, 2k+1, 4k+2, k=\overline{0,N}$, не могут быть одновременно чётными. Были рассмотрены аппроксимации порядков 12, 21, 40, 55, 84, которые соответствуют значениям $N=\overline{1,5}$.

Согласно проведенному анализу, системы (8) для $N=\overline{1,5}$ обладают рядом общих свойств. Опишем их. Для $\Lambda < -1$ и любого $N=\overline{1,5}$ нулевое решение (8) экспоненциально устойчиво при $\mu > \mu_{1,0}$(все точки спектра матрицы устойчивости расположены на отрицательной полуоси). При переходе параметра μ значения $\mu_{1,0}$ одна точка спектра переходит на положительную полуось, нулевое решение теряет устойчивость. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две непрерывные по μ ветви неподвижных точек $\pm z^{(1)}\left(\mu,N\right) = \pm\left\{z^{(1)}_{p,q}\right\}$, координаты которых, кроме $z^{(1)}_{2k+1,0}, k=\overline{0,N}$, равны нулю, причём

$$z^{(1)}_{1,0} > z^{(1)}_{3,0} > \ldots > 0, k=\overline{0,N}.$$

Функция

$$\varphi_1\left(x,y,\mu,N\right) = \sum_{k=1}^{N} z^{(1)}_{2k+1}\sin(2k+1)x \tag{9}$$

является приближённым решением краевой задачи (6), отвечающим ветви неподвижных точек $z^{(1)}(\mu, N)$.

Функция $\varphi_1(x, y, \mu)$ не зависит от y. Асимптотическая форма и динамика таких решений исследована в [8]. Представляет интерес лишь вопрос об устойчивости $\varphi_1(x, y, \mu)$ под действием мод, зависящих от y. Проведенный для значений $N = \overline{1,5}$ анализ спектра показал, что существует $\Lambda^* \approx -2$ такое, что для $\Lambda > \Lambda^*$ и любых $\mu < \mu_1$ спектр лежит на отрицательной полуоси. Отметим, что при уменьшении параметра μ точки спектра сближаются, причём максимальная точка спектра отделена от нуля. В качестве иллюстрации приведём для $\Lambda = -1.5,\ N = 3$ спектры $z^{(1)}$ при различных значениях параметра μ:

$$\begin{aligned}
\mu = 0.4 \to &\quad \{-19.70, -13.91, \ldots, -3.70, -3.30, -2.69, -1.79, -0.59, -0.19\},\\
\mu = 0.1 \to &\quad \{-5.46, -4.88, \ldots, -1.47, -1.42, -1.37, -1.11, -0.81, -0.71\},\\
\mu = 0.01 \to &\quad \{-1.94, -1.78, \ldots, -1.01, -0.99, -0.92, -0.87, -0.84, -0.83\},\\
\mu = 0.001 \to &\quad \{-1.58, -1.56, \ldots, -0.995, -0.80, -0.79, -0.78, -0.78, -0.77\}.
\end{aligned}$$

Точки $z^{(1)}(\mu, N)$ устойчивы для указанных значений $\Lambda > \Lambda^*$ при любых $\mu < \mu_1$. Следовательно, есть основания полагать, что решение $\varphi_1(x, y, \mu)$ задачи (6) устойчиво при $\mu < \mu_1$.

На Рис. 1 представлен график приближённого решения (9) краевой задачи (6) для $\mu = 0.001$.

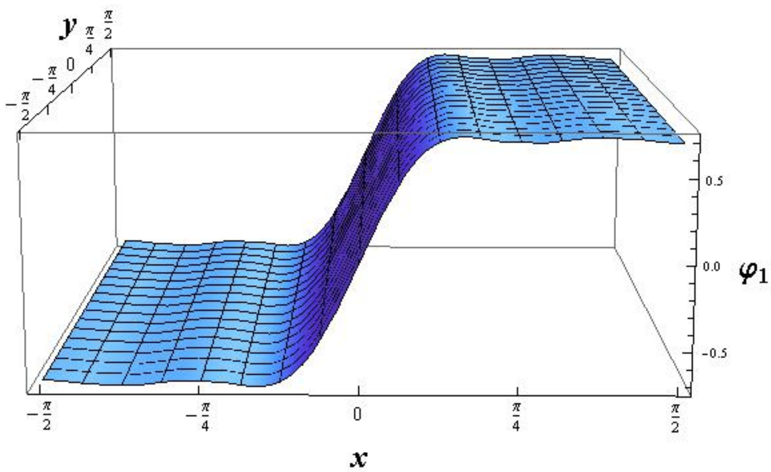

Рис. 1. Приближённое решение (9) краевой задачи (6) при $L = -1.5$, $\mu = 0.001$, $N = 4$.

Для $\Lambda < \Lambda^*$ существует значение параметра $\mu^* = \mu^*(N)$ такое, что при $\mu^* < \mu < \mu_{1,0}$ все точки спектра $z^{(1)}(\mu, N)$ принадлежат отрицательной полуоси. При $\mu = \mu^*$ наибольшая точка спектра $z^{(1)}(\mu, N)$ переходит на положительную полуось. В результате от теряющей устойчивость ветви $z^{(1)}(\mu, N)$ ответвляется пара непрерывных по параметру μ ветвей стационарных точек $z^{(\pm 1)}(\mu, N)$. Проведенный анализ спектров ветвей $z^{(\pm 1)}$ показал, что при одинаковых значениях параметра μ спектры точек $z^{(+1)}(\mu, N)$ и $z^{(-1)}(\mu, N)$ совпадают. Для значений параметра $\mu < \mu^*$ все точки спектра $z^{(+1)}(\mu, N)$ находятся в левой полуплоскости.

При уменьшении параметра μ и переходе значения $\mu_{1,1} = (-1 - L)/2$ индекс неустойчивости нулевого решения увеличивается, ещё одна точка спектра тривиального решения переходит на положительную полуось. В результате от нуля ответвляется вторая пара непрерывных по μ ветвей стационарных точек $\pm z^{(2)}(\mu, N)$ таких, что

$$z^{(2)}_{2k+1,0} = z^{(2)}_{0,2k+1} = z^{(2)}_{2k+1,4s+2} = z^{(2)}_{4s+2,2k+1} = 0, \quad k, s = \overline{0, N},$$

$$z^{(2)}_{2k+1,2s+1} = z^{(2)}_{2s+1,2k+1}, k \neq s,$$

$$z^{(2)}_{1,1} > z^{(2)}_{1,3} > \ldots$$

Функция

$$\varphi_2(x, y, \mu, N) = \sum_{k,s=0}^{N} z^{(2)}_{2k+1,2s+1} \sin(2k+1)x \cdot \sin(2s+1)y \tag{10}$$

является приближённым решением (6), отвечающим ветви неподвижных точек $z^{(2)}$.

На Рис. 2 изображено приближённое решение $\varphi_2(x, y, \mu, N)$ задачи (6), определяемые равенством (10).

Анализ спектра ветви неподвижных точек $z^{(2)}(\mu, N)$ системы (8), проведенный для $N = \overline{1, 5}$, приводит к следующим результатам. Спектр устойчивости $z^{(2)}(\mu, N)$ лежит на вещественной оси. Все точки спектра ветви неподвижных точек $z^{(2)}(\mu, N)$, кроме максимальной точки $\lambda_0(\mu, N)$, принадлежат левой полуоси. При уменьшении параметра μ отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка спектра уменьшается, а минимальная точка увеличивается. В окрестности бифуркационного значения параметра $\mu_{1,1}$ максимальная точка спектра $\lambda_0(\mu, N)$ ветви неподвижных точек $z^{(2)}(\mu, N)$ положительна. Для $-2 < \Lambda < -1$ при отходе от бифуркационного значения максимальная точка спектра $\lambda_0(\mu, N)$ медленно приближается к нулю и переходит через нуль на левую полуось.

При уменьшении параметра μ и переходе значения $\mu_{1,2} = (-1 - L)/5$ индекс неустойчивости нулевого решения увеличивается до трёх. В результате

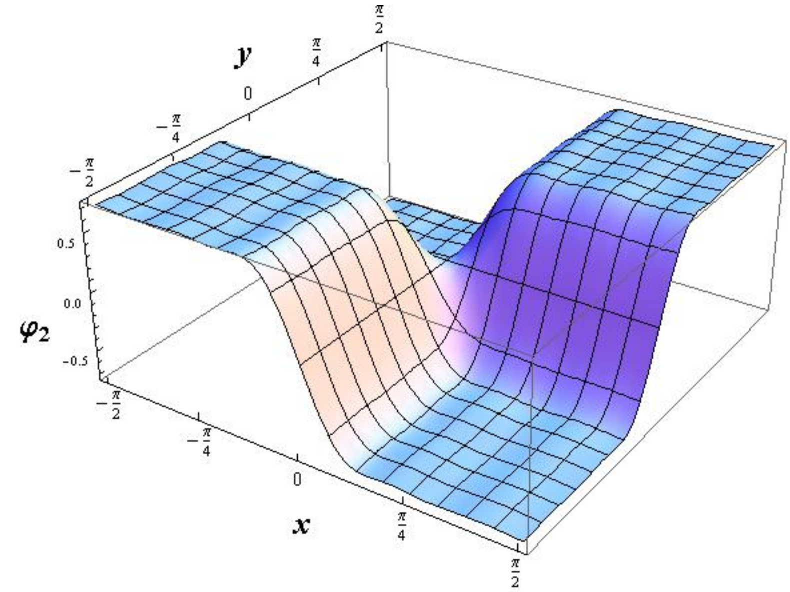

Рис. 2. Приближённое решение (6), $N = 5$, $L = -1.5$, $\mu = 0.01$.

от нуля ответвляется третья пара непрерывных по μ ветвей стационарных точек $\pm z^{(3)}(\mu, N) = \pm\left\{z_{l,m}^{(3)}\right\}$; $l, m = 0, 1, 2, \ldots$, у которых все координаты, кроме $z_{2k+1,4s+2}^{(3)}, k, s = 0, 1, 2, \ldots$, равны нулю. Функция

$$\varphi_3(x, y, \mu) = \sum_{k,s=0}^{N} z_{2k+1,4s+1}^{(3)} \sin(2k+1)\, x \cdot \cos(4s+2)\, y \tag{11}$$

является приближённым решением (6), отвечающим ветви неподвижных точек $z^{(3)}$.

На Рис. 3 приведено приближённое решение $\varphi_3(x, y, \mu)$ задачи (6), определяемое равенством (11).

Приведём далее полученные нами результаты по динамике спектра неподвижных точек $z^{(3)}(\mu, N), N = \overline{1,5}$ системы (8). Спектр $z^{(3)}(\mu, N)$ лежит на вещественной оси. Все точки спектра ветви неподвижных точек $z^{(3)}(\mu, N)$, кроме двух максимальных точек $\lambda_1(\mu, N), \lambda_2(\mu, N)$, принадлежат левой полуоси. При уменьшении параметра μ отрицательные точки спектра сближаются: максимальная точка уменьшается, а минимальная точка увеличивается. В окрестности бифуркационного значения параметра $\mu_{1,2}$ максимальные точки спектра $\lambda_1(\mu, N), \lambda_2(\mu, N)$ ветви неподвижных точек $z^{(3)}(\mu, N)$ положительны. При уменьшении параметра μ и отходе от $\mu_{1,2}$ для $-2 < \Lambda < -1$ поведение $\lambda_1(\mu, N), \lambda_2(\mu, N)$ зависит от N : при $N \neq 3$ точки $\lambda_1(\mu, N), \lambda_2(\mu, N)$ медленно приближаются к нулю, но не переходят через нуль;

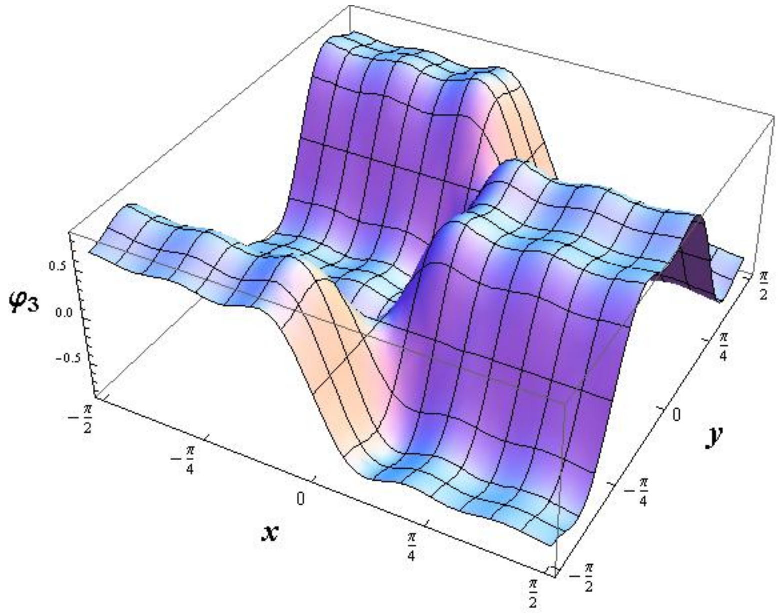

Рис. 3. Приближённое решение (6), $N = 5, L = -1.5, \mu\ = 0.001.$

при $N = 3$ точки $\lambda_1(\mu, N), \lambda_2(\mu, N)$ медленно приближаются к нулю, сначала одна точка переходит с ненулевой скоростью через нуль на левую полуось, а потом и вторая точка переходит на левую полуось. Например,

$$\begin{aligned}
N = 3 \quad & \mu = 0.075 && \to \{-6.90, -5.71, \ldots, -0.53, -0.41, -0.36, -0.235, 0.18, 0.13\}\,,\\
& \mu = 0.05 && \to \{-5.18, -4.42, \ldots, -0.58, -0.42, -0.37, -0.30, -0.05, 0.03\}\,,\\
& \mu = 0.01 && \to \{-2.61, -2.33, \ldots, -0.71, -0.58, -0.49, -0.31, -0.14, -0.10\}\,,\\
& \mu = 0.001 && \to \{-2.21, -1.91, \ldots, -0.71, -0.60, -0.54, -0.23, -0.17, -0.08\}\,,\\
& \mu = 0.0001 && \to \{-1.81, -1.73 \ldots, -0.69, -0.58, -0.38, -0.32, -0.28, -0.19\}\,.
\end{aligned}$$

Для $\Lambda < -2$ при уменьшении параметра μ ветвь неподвижных точек $z^{(3)}\,(\mu, N)$ увеличивает индекс неустойчивости: ещё две точки спектра одна за другой переходят через нуль на правую полуось.

Рассмотрим решения $S^t_\mu\varphi_k, k\ =\ \overline{1,3}$ уравнения (5) с начальными условиями $\varphi_k\,(x, \mu, N)$. Согласно численным расчетам, проведенным для $L = -\frac{3}{2},\ N = \overline{1,5}$, на значительных промежутках изменения времени решения $S^t_\mu\varphi_k$ меняются медленно.

На Рис. 4 представлено численное решение $S^t_\mu\varphi_3$ уравнения (5), полученное с помощью пакета "Mathematica 8.0"для $\mu = 0.001, \Lambda = -\frac{3}{2}, t = 2.2\cdot 10^5$, где в качестве начального условия принято приближённое решение φ_3 краевой задачи (6).

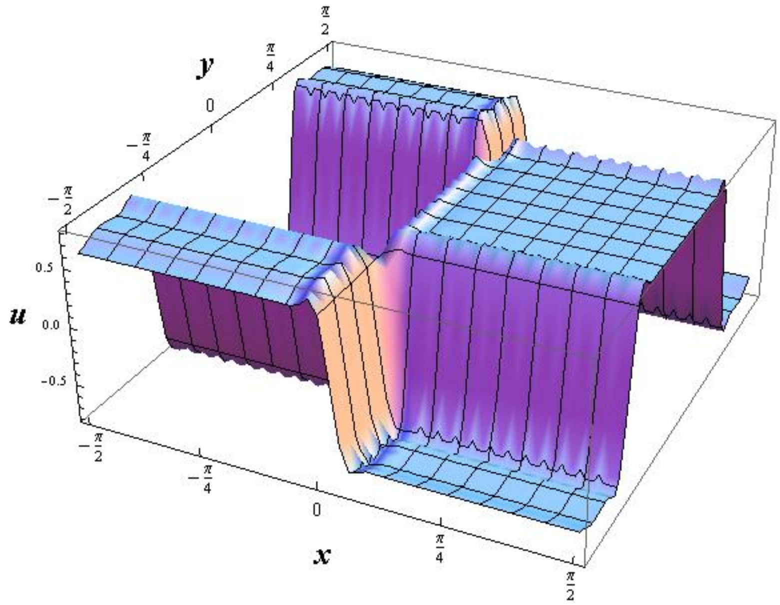

Рис. 4. Приближённое решения (5) с начальной функцией (11) при $\mu = 0.001$, $\Lambda = -\frac{3}{2}$, $t = 2.2 \cdot 10^5$

Отметим, что из проведенного численного анализа можно сделать вывод, что в течение промежутка времени $(0, \approx 2 \cdot 10^5)$ решения $S_\mu^t \varphi_k, k = 1, 2, 3$ меняются медленно. При дальнейшем увеличении t на профилях решений появляются резкие всплески, расположенные на линии быстрого изменения функции (линии перехода).

На Рис. 5 приведено решение $S_\mu^t \varphi_1$ задачи (5) при $t = 2.5 \cdot 10^5, \mu = 0.001$, иллюстрирующее указанное поведение. При увеличении времени t от $2 \cdot 10^5$ амплитуда этих всплесков быстро возрастает, достигая значений порядка 10^6 при $t = 10^6$. По нашему мнению, это явление связано с накопление ошибок интерполяции при численных расчётах.

Таким образом, результаты непосредственного приближённого решения задачи (5) согласуются с результатами галёркинской аппроксимации исходной задачи.

Заключение

Рассмотрены галеркинские аппроксимации порядков 12, 21, 40, 55, 84 уравнения (5), описывающего динамику фазовой модуляции световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа в оптической системе с преобразованием отражения пространственной переменной в контуре обратной связи.

При уменьшении μ и его прохождении $-1 - \Lambda$ от теряющего устойчивость нулевого решения ответвляется пара экспоненциально асимптотически устойчивых стационарных пространственно неоднородных решений. При $\mu \to 0$ эти стационарные

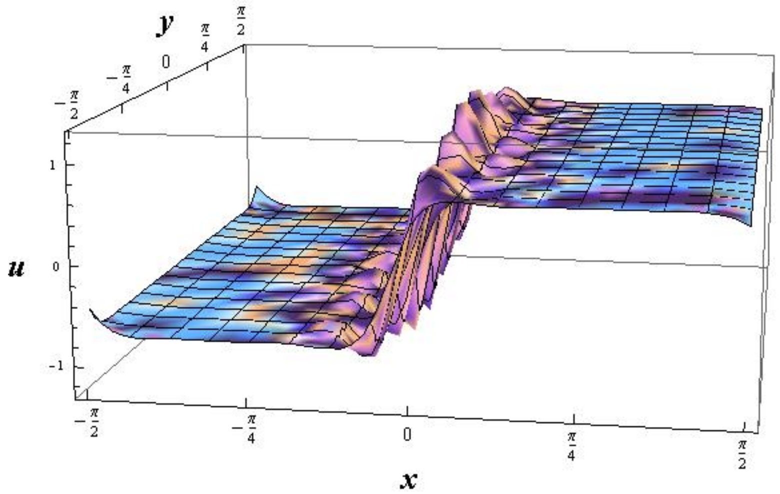

Рис. 5. Приближённое решения (5) с начальной функцией (9) при $\mu = 0.001$, $\Lambda = -\frac{3}{2}$, $t = 2.5 \cdot 10^5$

решения приближаются к ступенчатым функциям со значениями $\pm\sqrt{-1-\Lambda}$. Установлено, что существует значение $\Lambda^* \approx -2$ такое, что при $\Lambda^* < \Lambda < -1$ указанные стационарные решения сохраняют устойчивость при уменьшении параметра μ. Если $\Lambda < \Lambda^*$, то существует значение параметра μ, при переходе через которое имеет место потеря устойчивости стационарных решений. В результате происходит бифуркация рождения двух пар экспоненциально асимптотически устойчивых стационарных решений, которые сохраняют устойчивость при уменьшении параметра μ. Получено представление этих стационарных решений.

При уменьшении μ и прохождении значений $\mu_{2k+1,s} = \dfrac{\mu_{1,0}}{(2k+1)^2 + s^2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ нулевое решение увеличивает индекс неустойчивости. В результате этих бифуркации от нулевого решения каждый раз ответвляется новая пара неустойчивых стационарных пространственно неоднородных решений. Характер устойчивости этих решений при отходе параметра μ от соответствующих бифуркационных значений зависит от порядка галёркинской аппроксимации.

Непосредственное численное решение рассматриваемого уравнения позволяет утверждать, что применение метода Галёркина в задаче о стационарных структурах приводит к количественно и качественно правильным результатам для $t \in (0, \approx 2 \cdot 10^5)$.

Список литературы

1. Ахманов, С. А., Воронцов, М. А., Иванов, В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации / Под ред. С. А. Ахманова, М. А. Воронцова — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.

   AKHMANOV, S., VORONTSOV, M. and IVANOV, V. (1990) *Structure generation in optical systems with two-dimensional feedback: Toward creating nonlinear-optical analogs of neural networks.* New Physical Principles of Optical Data Processing. Moscow: Nauka.

2. Разгулин, А. В. Нелинейные модели оптической синергетики / А. В. Разгулин.. — М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. — 201 с.

   RAZGULIN, A. V. (2008) *Nonlinear models of optical synergetics.* Moscow: MAX-Press.

3. Воронцов, М. А., Железных, Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2. — № 2. — С. 31–38.

   VORONTSOV, M. and ZHELEZNYKH, N. (1990) Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. *Matematicheskoe Modelirovanie.* 2 (2). p. 31–38.

4. Белан, Е. П. Двумерные стацонарные структуры в параболическом уравнении с отражением пространственных переменных // Кибернетика и системный анализ. — 2011. — Т. 47. — № 3. — С. 33–41.

   BELAN, E. (2011) Two-dimensional stationary structures in a parabolic equation with an inversion transformation of its spatial arguments. *Cybernetics and systems analysis.* 47 (3). p. 33–41.

5. Чушкин, В. А., Разгулин, А. В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная Математика и кибернетика. — 2003. — № 2. — С. 13–20.

   CHUSHKIN, V. and RAZGULIN, A. (2003) Steady-state structures in a functional-differential diffusion equation with reflection of the spatial argument. *Mosc. Univ. Comput. Math. Cybern.* (2). p. 4–12.

6. Белан, Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т. 46. — № 5. — С. 95–111.

   BELAN, E. (2010) Dynamics of stationary structures in a parabilic problem with reflected spatial argument. *Cybernetics and systems analysis.* 46 (5). p. 95–111.

7. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри.. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

   HENRY, D. (1981) *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations.* Berlin: Springer.

8. Белан, Е. П., Хазова, Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т. 4. — № 1–2. — С. 43–57.

   BELAN, E. & KHAZOVA, YU. (2014) Dynamics of stationary structures in a parabilic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dinamicheskie Sistemy.* 4 (1-2). p. 43–57.

9. Корнута, А. А. Метаустойчивые структуры в параболическом уравнении на окружности поворотом пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т. 4 —№ 1-2. — С. 59–75.

   KORNUTA, A. (2014) Metastable patterns of a parabilic equation on the circle with rotation of the spatial variable. *Dinamicheskie Sistemy.* 4 (1-2). p. 59–75.

10. Ахромеева, Т. С. Структуры и хаос в нелинейных средах / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. — М.: Физматлит, 2007. — 485 с.

    ACHROMEEVA, T., KURDYUMOV, S., MALINETSKII, G. and SAMARSKII, A. (2007) *Struktury i haos v nelineynyh sredah.* Moscow: Fizmatlit.

Статья поступила в редакцию 29.05.2015

УДК: 517.518.4

MSC2010: 42E20

О СКОРОСТИ РАВНОСХОДИМОСТИ В АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ШТЕЙНГАУЗА[1]

© В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского
Механико-математический факультет
ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Российская Федерация
e-mail: *RykhlovVS@yandex.ru*

On the rate of equiconvergence in an analogue of the Steinhaus theorem.

Rykhlov V. S.

Abstract. H. Steinhaus's theorem on equiconvergence in the uniform metric for trigonometric series of product of two functions and product one of these functions and trigonometric series of another function is well known. In this paper analogues of this theorem which deal with the same equiconvergence are proved and equiconvergence rate is estimated. Equiconvergence is proved not on all the main segment, but on any compact of the main interval. It simplifies calculations. Consideration of all the main segment, as a rule, in applications of the results received in article it isn't required. It is sufficient to research equiconvergence on any compact of the main interval. The results of the paper are used in the study of equiconvergence of expansions in biorthogonal series with respect to eigen and associated functions of ordinary differential operators with regular boundary conditions and non-smooth coefficient at $(n-1)$-th derivative and in ordinary trigonometric series. In introduction of the paper a short historical background is given. In the first part of the paper a general equiconvergence theorem in terms of modules of continuity of the decomposed functions in various metrics is proved. In the second part of the paper logarithmic modules of a continuity are considered. In this case the theorem of equiconvergence is formulated in simpler form. Accuracy estimates of rate of equiconvergence is shown in this case. Namely, examples of functions which properties differ a little from properties of functions in conditions of the theorem of equiconvergence, but equiconvergence for which does not exist already. The estimate from below is given for equiconvergence rate on some subsequences of trigonometric series. In the third part of the paper the theorem of equiconvergence is proved for a case, when modules of continuity are estimated from above by slowly varying functions. In this case the equiconvergence rate is also estimated. As special case, this theorem contains already received results for logarithmic modules of continuity.

[1]Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K)

Keywords: *Steinhaus's theorem, theorem of equiconvergence, rate of equiconvergence, trigonometric series, modules of continuity, logarithmic modules of a continuity, slowly varying functions, estimate from below of equiconvergence rate.*

Введение: постановка задачи, краткая история вопроса, содержание статьи

Обозначим через $\sigma_s(f)$ — s-ю частичную сумму обычного тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[0,1]$. Г. Штейнгауз в 1913 году [1] доказал следующую теорему [2, с. 111].

Теорема (А). *Если $f(x) \in L_1[0,1]$, $W(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка 1 на $[0,1]$ и обе функции периодичны, то*

$$\lim_{s\to\infty} \|W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf)\|_{C[0,1]} = 0. \tag{1}$$

В работах [3, 4] равносходимость типа (1), но только в метрике пространства $C[\delta, 1-\delta]$ для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$ была установлена при других условиях на функции $f(x)$ и $W(x)$. Чтобы сформулировать полученый результат, введем следующие классы функций при $\alpha > 0$ и $1 \le p \le \infty$:

$$H_p^\alpha[0,1] = \left\{ f \in L_p[0,1] : \ \omega(f;\delta)_p = O\left(\ln^{-\alpha}\frac{1}{\delta}\right), \ \delta \to +0 \right\},$$

где

$$\omega(f;\delta)_p = \sup_{0<h\le\delta} \left(\int_0^{t-h} |f(t+h) - f(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

если $1 \le p < \infty$, и

$$\omega(f;\delta)_\infty = \sup_{0<h\le\delta} \sup_{t\in[0,1-h]} |f(t+h) - f(t)|;$$

под $L_\infty[0,1]$ понимаем $C[0,1]$. Считаем также, что $H_p^0[0,1] = L_p[0,1]$.

Теорема (В). *Пусть $W(x) = W_0 + \int_0^x g(t)\,dt$, где W_0 есть произвольная константа, тогда для любого $\delta \in (0, \frac{1}{2})$*

$$\lim_{s\to\infty} \|W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{2}$$

если выполняеся хотя бы одно из условий

1) $g \in L_\infty[0,1]$, $f \in L_1[0,1]$;
2) $g \in L_q[0,1]$, $f \in L_p[0,1]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$;
3) $g \in H_1^\alpha[0,1]$, $f \in H_\infty^\beta[0,1]$, $\alpha + \beta > 1$.

Если неравенства в условиях 2) –3) *заменить на противоположные* ($<$ *на* $>$, *а* $>$ *на* $<$), *то утверждение* (2) *станет неверным.*

На самом деле в этой теореме вместо (2) справедлива равносходимость немного в более общей формулировке, а именно: для любого компакта $K \subset (0,1)$

$$\lim_{s\to\infty} \|W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf)\|_{C(K)} = 0. \tag{3}$$

Именно в такой формулировке мы будем далее исследовать равносходимость.

Естественно, возникает вопрос о скорости равносходимсти в (2) в зависимости от свойств функций $g(x)$ и $f(x)$. В первой части статьи получена оценка скорости равносходимости в общем случае (теорема 1). Полученный результат практически повторяет результат [5], но отличается методом доказательства и немного другим изложением. Во второй части статьи, как простое следствие из общей теоремы 1, формулируется теорема равносходимости в случае, когда модули непрерывности функций $g(x)$ и $f(x)$ имеют логарифмические оценки сверху (теорема 2). Здесь же показывается точность полученных оценок скорости равносходимсмости (теорема 3). В третьей части статьи получены оценки скорости равносходимости (теоремы 4 и 5) в весьма важных случаях, когда модули непрерывности функций $g(x)$ и $f(x)$ оцениваются сверху медленно меняющимися функциями [6, с. 10]. В частности, теорема 2 является частным случаем теоремы 5.

Полученные в статье аналоги теоремы Штейнгауза существенно использовались автором без доказательства в работах [7]–[9].

1. Оценка скорости равносходимости в общем случае

Предположим, что $f(x) \in L_p[0,1]$ и $g(x) \in L_q[0,1]$, где $1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Кроме того, обозначим, как и в теореме (B), $W(x) = W_0 + \int_0^x g(t)\,dt$, где W_0 есть произвольная константа.

Теорема 1. *Для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *имеет место оценка*

$$\|W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf)\|_{C(K)} \le C(f,g,K)\psi(s), \tag{4}$$

где

$$\psi(s) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\omega\Big(f;\frac{1}{m}\Big)_p \varphi^{\frac{1}{q}}(s) + \omega\Big(g;\frac{1}{m}\Big)_q + \frac{m^4}{s}\ln s\right); \tag{5}$$

здесь

$$\varphi(s) = \int\limits_{1/s}^{1} \xi^{-1}\tilde{\varphi}_1^q(\xi)\,d\xi,\ \ \tilde{\varphi}_1(t) = \sup_{\tau\in[0,t]} \varphi_1(\tau),\ \ \varphi_1(\tau) = \inf_{m\in\mathbb{N}} \left(\omega\Big(g;\frac{1}{m}\Big)_q + (m^2\tau)^{\frac{1}{q}}\right) \tag{6}$$

при $1 \le q < \infty$ *и* $\varphi(s) \equiv 1$ *при* $q = +\infty$.

Доказательство. В доказательстве данной теоремы нам потребуются некоторые результаты из теории приближения функций многочленами и некоторые оценки многочленов в разных метриках. Есть много разных источников, откуда можно взять эти результаты. Воспользуемся далее, например, следующими результатами из [10]–[11], которые сформулируем как леммы.

Лемма 1. *Если $f(x) \in L_p[0,1]$ $(1 \le p \le \infty)$, то ([10, с. 84])*

$$E_m(f)_p \le C\omega\left(f;\frac{1}{m}\right)_p, \tag{7}$$

где $E_m(f)_p$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике $L_p[0,1]$ алгебраическими многочленами степени m.

Лемма 2. *Если $Q_m(x)$ — произвольный алгебраический многочлен степени m, $1 \le p < r \le \infty$, $s \in \mathbb{N}$, то существует константа $C(p,r)$, зависящая только от p и r, и константа $C(s)$, зависящая только от s, такие, что ([11])*

$$\|Q_m\|_r \le C(p,r)m^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)}\|Q_m\|_p; \tag{8}$$

$$\|Q_m^{(s)}\|_p \le C(s)m^{2s}\|Q_m\|_p. \tag{9}$$

В дальнейшем будем обозначать через C, $C(\cdot,\cdot,\dots)$ различные константы, зависящие, может быть, от аргументов, стоящих в круглых скобках. Например, всегда можно считать справедливыми оценки

$$\|F_m\|_p \le C(f), \qquad \|G_m\|_q \le C(g), \tag{10}$$

где $F_m(x)$, $G_m(x)$ обозначают алгебраические многочлены наилучшего приближения порядка m, соответственно, функций $f(x)$ и $g(x)$. Здесь и дальше $\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r[0,1]}$.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. Очевидно,

$$A(x,s) = W\sigma_s(f)(x) - \sigma_s(Wf)(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\,\frac{\sin 2\pi(s+\frac{1}{2})t}{\sin\pi t}\,dt =$$

$$= \int_{-x}^{1-x} f_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h(t)D_s(t)\,dt + \int_{-x}^{1-x} F_m(x+t)\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h(t)D_s(t)\,dt =$$

$$= A_{1m}(x,s) + A_{2m}(x,s), \tag{11}$$

где обозначено $D_s(t) = \sin 2\pi(s+\frac{1}{2})t/\pi t$, $h(t) = \pi t/\sin\pi t$, $f_m(x) = f(x) - F_m(x)$, а $m \in \mathbb{N}$ есть параметр. Очевидно, $h(t) \in C^2[0,1]$.

Рассмотрим $\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau$ и выясним, как зависит скорость стремления этого интеграла к нулю при $t \to 0$ от свойств функции $g(x)$. На основании (8) и (10) получим для любого $m \in \mathbb{N}$ и $1 \le q < \infty$

$$\left|\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\right| \le \int_{x+t}^{x} |g(\tau) - G_m(\tau)|\,d\tau + \int_{x+t}^{x} |G_m(\tau)|\,d\tau \le$$
$$\le t^{\frac{1}{p}} E_m(g)_q + t\|G_m\|_\infty \le C(g) t^{\frac{1}{p}} \left(E_m(g)_q + (m^2 t)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Так как $m \in \mathbb{N}$ есть произвольный параметр, то обозначив

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \sup_{\tau \in [0,t]} \varphi_1(\tau), \quad \varphi_1(\tau) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left(\omega\Big(g; \frac{1}{m}\Big)_q + (m^2\tau)^{\frac{1}{q}}\right), \tag{12}$$

из последнего неравенства получим при $1 \le q < \infty$ оценку

$$\left|\int_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau\right| \le C(g) t^{\frac{1}{p}} \tilde{\varphi}_1(t). \tag{13}$$

Очевидно, при $q = \infty$ тоже справедлива оценка (13), если считать $\tilde{\varphi}_1(t) \equiv 1$.

Рассмотрим слагаемое $A_{1m}(x,s)$, определенное в (11). При $p > 1$ на основании (13) и (7) получим

$$|A_{1m}(x,s)| \le C(g) E_m(f)_p B_s^{\frac{1}{q}} \le C(f,g)\omega\Big(f; \frac{1}{m}\Big)_p B_s^{\frac{1}{q}}, \tag{14}$$

где

$$B_s = \pi^q \int_0^1 \tilde{\varphi}_1^q(t) t^{\frac{q}{p}} |D_s(t)|^q\,dt = \int_0^1 \tilde{\varphi}_1^q(t) t^{-1} \left|\sin 2\pi\Big(s + \frac{1}{2}\Big)t\right|^q\,dt.$$

Обозначим $a_s = \frac{1}{2s+1}$. Тогда

$$B_s = \int_0^{a_s/2} \tilde{\varphi}_1^q(t) t^{-1} \left|\sin 2\pi\Big(s + \frac{1}{2}\Big)t\right|^q\,dt + \int_{a_s/2}^{a_s} \tilde{\varphi}_1^q(t) t^{-1} \left|\sin 2\pi\Big(s + \frac{1}{2}\Big)t\right|^q\,dt +$$
$$+ \int_0^{a_s} \left|\sin 2\pi\Big(s + \frac{1}{2}\Big)t\right|^q \sum_{k=1}^{2s} \tilde{\varphi}_1^q(t + ka_s)(t + ka_s)^{-1}\,dt = B_{1s} + B_{2s} + B_{3s}. \tag{15}$$

Из определения функции $\tilde{\varphi}_1(t)$ в (12) видно, что эта функция является неубывающей при $p > 1$. Кроме того, очевидно, $\tilde{\varphi}_1(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Таким образом

$$B_{1s} + B_{2s} \le C(g)\tilde{\varphi}_1^q\Big(\frac{1}{s}\Big), \tag{16}$$

$$B_{3s} \le a_s \sum_{k=1}^{2s} \tilde{\varphi}_1^q((k+1)a_s)(ka_s)^{-1} \le$$

$$\le 2 \sum_{k=2}^{2s-1} \tilde{\varphi}_1^q((k+1)a_s)(k+1)^{-1} + \tilde{\varphi}_1^q\Big(\frac{2}{2s+1}\Big) + \tilde{\varphi}_1^q(1)\frac{1}{2s} \le$$

$$\le C \left(\int_2^{2s} \tilde{\varphi}_1^q\Big(\frac{1+\xi}{1+2s}\Big)\xi^{-1}\, d\xi + \tilde{\varphi}_1^q\Big(\frac{1}{s}\Big) + \frac{1}{s} \right) \le$$

$$\le C \left(\int_{1/s}^{1} \xi^{-1}\tilde{\varphi}_1^q(\xi)\, d\xi + \tilde{\varphi}_1^q\Big(\frac{1}{s}\Big) + \frac{1}{s} \right) = C\left(\varphi(s) + \tilde{\varphi}_1^q\Big(\frac{1}{s}\Big) + \frac{1}{s}\right), \quad (17)$$

где

$$\varphi(s) = \int_{1/s}^{1} \xi^{-1}\tilde{\varphi}_1^q(\xi)\, d\xi.$$

Так как $\varphi(s) \not\to 0$ при $s \to \infty$, а $\tilde{\varphi}_1^q(1/s) \to 0$, то на основани (14)–(17) получим при $p > 1$

$$|A_{1m}(x,s)| \le C(f,g)\omega\Big(f; \frac{1}{m}\Big)_p \varphi^{\frac{1}{q}}(s). \quad (18)$$

Легко видеть, что эта оценка имеет место и при $p = 1$, если считать в этом случае $\varphi(s) \equiv 1$.

Рассмотрим теперь $A_{2m}(x.s)$. Будем считать, что $x \in K$, где $K \subset (0,1)$ есть произвольный компакт. Не нарушая общности, можно считать, что $K \subset [\delta, 1-\delta]$ при достаточно малом $\delta \in (0, 1/2)$. Справедливо равенство

$$A_{2m}(x,s) = \int_0^{1-x} + \int_{-x}^{0} = H_{1m}(x,s) + H_{2m}(x,s). \quad (19)$$

Так как слагаемые выше рассматриваются совершенно аналогично, рассмотрим, например, слагаемое $H_{1m}(x,s)$.

Обозначим через S_k углы в комплексной ρ-плоскости, определяемые неравенствами $k\pi/2 \le \arg\rho \le (k+1)\pi/2$, $k = 0,1,2,3$. Пусть ω_1, ω_2 — различные корни 2-й степени из -1, занумерованные для $\rho \in S_k$ так, что $\Re\rho\omega_1 \le \Re\rho\omega_2$. Ясно, что ω_k есть либо i, либо $-i$ в зависимости от $\arg\rho$. Введем в рассмотрение контуры $\theta(s)$, образованные дугами окружностей радиуса $2\pi(s+1/2)$, попавших в $S_0 \cup S_3$, причем обозначим $\theta_0(s) = \theta(s) \cap S_0$, $\theta_3(s) = \theta(s) \cap S_3$.

На основании леммы (6.13) [4] будем иметь

$$H_{2m}(x,s) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta_0(s)}\int\limits_0^{1-x} F_m(x+t)\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h(t) i e^{\rho i t}\,dt\,d\rho +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\theta_3(s)}\int\limits_0^{1-x} F_m(x+t)\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h(t) i e^{-\rho i t}\,dt\,d\rho = I_{1m}(x,s)+I_{2m}(x,s). \quad (20)$$

Так как слагаемые выше рассматриваются аналогично, рассмотрим, например, слагаемое $I_{1m}(x,s)$. Справедливо представление

$$I_{1m}(x,s) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0(s)} \tilde{I}_{1m}(x,\rho)\,d\rho, \quad (21)$$

где

$$\tilde{I}_{1m}(x,\rho) = \int\limits_0^{1-x} F_m(x+t)\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h(t) i e^{\rho i t}\,dt.$$

Проводим в $\tilde{I}_{1m}(x,\rho)$ один раз интегрирование по частям. Получим

$$\tilde{I}_{1m}(x,\rho) = F_m(1)\int\limits_1^x g(\tau)\,d\tau h(1-x)\frac{1}{\rho i}e^{\rho i(1-x)} - \frac{1}{\rho i}\int\limits_0^{1-x} e^{\rho i t}\Bigg(F'_m(x+t)\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h(t) +$$

$$+ F_m(x+t)\int\limits_{x+t}^{x} g(\tau)\,d\tau h'(t) - F_m(x+t)g(x+t)h(t)\Bigg)dt = \sum_{j=1}^{4} K_{jm}(x,\rho). \quad (22)$$

На основании (8)–(10)

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0(s)} K_{1m}(x,\rho)\,d\rho\right| \le C(f,g)m^{\frac{2}{p}}\left|\int\limits_{\theta_0(s)} \frac{1}{|\rho|}e^{\Re\rho i\delta}\,|d\rho|\right| \le C(f,g,\delta)\frac{m^{\frac{2}{p}}}{s}. \quad (23)$$

Далее, так как по лемме 1.7 [8, с. 984]

$$\left|\int\limits_{\theta_0(s)}\int\limits_0^{1-x} e^{\Re\rho i t}\,|d\rho|\right| \le C\ln s,$$

то аналогично предыдущему

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0(s)} \big(K_{2m}(x,\rho)+K_{3m}(x,\rho)\big)\,d\rho\right| \le C(f,g)m^{2+\frac{2}{p}}\frac{\ln s}{s}. \quad (24)$$

Наконец, рассмотрим $K_{4m}(x.\rho)$. Обозначим $g_l(x) = g(x) - G_l(x)$, где $G_l(x)$, как было обозначено раньше, есть многочлен наилучшего приближения функции $g(x)$ в метрике пространства $L_q[0,1]$. Тогда

$$K_{4m}(x,\rho)=\frac{1}{\rho i}\int\limits_0^{1-x} e^{\rho it}F_m(x+t)g_l(x+t)h(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{\rho i}\int\limits_0^{1-x} e^{\rho it}F_m(x+t)G_l(x+t)h(t)\,dt=L_{1ml}(x,\rho)+L_{2ml}(x,\rho). \quad (25)$$

Очевидно, в силу неравенств (10), (7) и определения $E_l(g)_q$

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0(s)} L_{1ml}(x,\rho)\,d\rho\right|\le\int\limits_0^{1-x}|F_m(x+t)||g_l(x+t)|\,dt\le C(f)\omega\Big(g;\frac{1}{l}\Big)_q. \quad (26)$$

В $L_{2ml}(x,\rho)$ проводим один раз интегрирование по частям

$$L_{2ml}(x,\rho)=\frac{1}{(\rho i)^2}e^{\rho i(1-x)}F_m(1)G_l(1)h(1-x)-\frac{1}{(\rho i)^2}F_m(x)G_l(x)h(1)-$$
$$-\frac{1}{(\rho i)^2}\int\limits_0^{1-x}\big(F'_m(x+t)G_l(x+t)h(t)+F_m(x+t)G'_l(x+t)h(t)+F_m(x+t)G_l(x+t)h'(t)\big)e^{\rho it}\,dt.$$

Отсюда на основании нравенств (8)–(10) получим

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0(s)} L_{2ml}(x,\rho)\,d\rho\right|\le C\frac{1}{s}\Big(\|F_m\|_\infty\|G_l\|_\infty+\|F'_m\|_\infty\|G_l\|_\infty+\|F_m\|_\infty\|G'_l\|_\infty\Big)\le$$
$$\le C(f,g)\frac{1}{s}\Big(m^{2+\frac{2}{p}}l^{\frac{2}{q}}+m^{\frac{2}{p}}l^{2+\frac{2}{q}}\Big). \quad (27)$$

Из (25)–(27) при $l=m$ получим

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_0(s)} K_{4m}(x,\rho)\,d\rho\right|\le C(f,g)\left(\omega\Big(g;\frac{1}{m}\Big)_q+\frac{m^4}{s}\right).$$

Отсюда и из (19)–(24) будем иметь

$$|A_{2m}(x,s)|\le C(f,g,K)\left(\omega\Big(g;\frac{1}{m}\Big)_q+\frac{m^4}{s}\ln s\right).$$

Из этой оценки и оценки (18) на основании равенства (11) получим оценку

$$|A(x,s)|\le C(f,g,K)\left(\omega\Big(f;\frac{1}{m}\Big)_p\varphi^{\frac{1}{q}}(s)+\omega\Big(g;\frac{1}{m}\Big)_q+\frac{m^4}{s}\ln s\right).$$

Отсюда в силу произвольности $m \in \mathbb{N}$ следует утверждение теоремы. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

$\square$

2. Оценка скорости равносходимости в случае логарифмических модулей непрерывности

Накладывая на $\omega(f;\delta)_p$ и $\omega(g;\delta)_q$ такие требования, при которых $\psi(s) \to 0$ при $s \to \infty$ в теореме 1, можно получать различные достаточные условия равносходимости и оценку скорости равносходимости, легко получается, например, следующий результат, усиливаюший теорему (B).

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in H_p^\beta[0,1]$, $g(x) \in H_q^\alpha[0,1]$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \le p \le +\infty$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. *Тогда для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость*

$$\|W\sigma_s(f) - \sigma_s(Wf)\|_{C(K)} \le C(f,g,K)\Psi(s) \to 0 \text{ при } s \to \infty, \tag{28}$$

если

1) $\alpha + \beta > \frac{1}{q}$, $1 \le q < \infty$; *при этом справедливо представление*

$$\Psi(s) = \frac{\ln^{\frac{1}{q}} s}{\ln^{\alpha+\beta}} + \chi(\alpha q)\frac{(\ln\ln s)^{\frac{1}{q}}}{\ln^\beta s} + \frac{1}{\ln^\alpha s} + \frac{1}{\ln^\beta s}, \tag{29}$$

где $\chi(\xi) = 0$ *при* $\xi \ne 0$ *и* $\chi(0) = 1$;

2) α, β — *произвольные положительные числа*, $q = \infty$; *при этом справедливо представление*

$$\Psi(s) = \frac{1}{\ln^\alpha s} + \frac{1}{\ln^\beta s}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся результатом теоремы 1. Пусть $\omega(f;\delta)_p \le C\ln^{-\beta} 1/\delta$ и $\omega(g;\delta)_q \le C\ln^{-\alpha} 1/\delta$ при $\delta \to +0$. Найдем оценку сверху для функции $\psi(s)$, определяемой формулой (5).

Рассмотрим сначала случай $1 \le q < \infty$. В этом случае, очевидно,

$$\varphi_1(\tau) \le C(g)\inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\ln^\alpha m} + (m^2\tau)^{\frac{1}{q}}\right). \tag{30}$$

Если положить при $0 < \tau < 1$

$$\tilde{m}(\tau) = E\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}\ln^{\frac{(\alpha+1)q}{2}}\frac{1}{\tau}}\right),$$

где через $E(\cdot)$ обозначена функция антье, то имеет место неравенство

$$\inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\ln^\alpha m}+(m^2\tau)^{\frac{1}{q}}\right)\le\left(\frac{1}{\ln^\alpha \tilde{m}(\tau)}+(\tilde{m}^2(\tau)\tau)^{\frac{1}{q}}\right)\le C\frac{1}{\ln^\alpha\frac{1}{\tau}},$$

Следовательно, из (30) получим

$$\varphi_1(\tau)\le C(g)\frac{1}{\ln^\alpha\frac{1}{\tau}}.$$

А так как функция справа в этой формуле является возрастающей, то справедлива и оценка

$$\tilde{\varphi}_1(\tau)\le C(g)\frac{1}{\ln^\alpha\frac{1}{\tau}}.$$

Далее имеем

$$\varphi(s)=C(g)+\int\limits_{1/s}^{1/2}\frac{1}{\xi}\tilde{\varphi}_1^q(\xi)\,d\xi\le C(g)\left(1-\int\limits_{1/s}^{1/2}\frac{d\ln\frac{1}{\xi}}{\ln^{\alpha q}\frac{1}{\xi}}\right). \tag{31}$$

Если $\alpha q=1$, то отсюда получим

$$\varphi(s)\le C(g)\ln\ln s. \tag{32}$$

Если же $\alpha q\ne 1$, то из (31) получим

$$\varphi(s)\le C(g)\big(1+C\ln^{1-\alpha q}s\big). \tag{33}$$

Следовательно, используя формулы (5), (32), (33), будем иметь в случае $1-\alpha q\le 0$

$$\psi(s)\le C(f,g,K)\inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\chi(\alpha q)\frac{(\ln\ln)^{\frac{1}{q}}}{\ln^\beta m}+\frac{1}{\ln^\alpha m}+\frac{1}{\ln^\beta m}+\frac{m^4\ln s}{s}\right).$$

А если $1-\alpha q>0$, то из формул (5), (33) будем иметь

$$\psi(s)\le C(f,g,K)\inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\frac{\ln^{\frac{1}{q}}s}{\ln^\beta m\ln^\alpha s}+\frac{1}{\ln^\alpha m}+\frac{1}{\ln^\beta m}+\frac{m^4\ln s}{s}\right).$$

Полагая в последних двух формулах $m=E\big(s^{\frac{1}{8}}\big)$, получим утверждение теоремы 2 в случае $1\le q<\infty$.

Если же $q=\infty$, то так как в этом случае $\varphi(s)\equiv 1$, то полагая $m=E\big(s^{\frac{1}{8}}\big)$ в правой части формулы (5), также получаем утверждение теоремы 2 и в этом случае.

Теорема 2 полностью доказана. □

Доказанная теорема точна в следующем смысле.

Теорема 3. 1) *Если* $1/p+1/q>1$ *при* $p>1$, $q>1$ *и* $p_1>p$, $q_1>q$ *любые числа такие, что по-прежнему* $1/p_1+1/q_1>1$, *то существуют такие функции* $f(x)\in L_p[0,1]$ *и* $g(x)\in L_q[0,1]$ *и некоторая возрастающая подпоследовательность натуральных чисел* $\{j_n\}$, *что справедлива оценка снизу*

$$\left|W\sigma_{j_n}(f)\Big(\frac{1}{2}\Big)-\sigma_{j_n}(Wf)\Big(\frac{1}{2}\Big)\right|>j_n^{1/p_1+1/q_1-1}. \qquad (34)$$

2) *Если* $q=1$, $0<\alpha+\beta<1$, $\alpha_1>\alpha$, $\beta_1>\beta$, *но по-прежнему* $\alpha_1+\beta_1<1$, *то существуют функции* $f(x)\in H_\infty^\beta[0,1]$ *и* $g(x)\in H_1^\alpha[0,1]$, *положительная константа* $C(\alpha_1,\beta_1)$ *и некоторая возрастающая подпоследовательность натуральных чисел* $\{s_k\}$ *такие, что*

$$\left|W\sigma_s(f)\Big(\frac{1}{2}\Big)-\sigma_s(Wf)\Big(\frac{1}{2}\Big)\right|\ge C(\alpha_1,\beta_1)\frac{\ln s_k}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}s_k}. \qquad (35)$$

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ — четная, а $g(x)$ — нечетная функции относительно $1/2$. Тогда, используя обозначение из доказательства теоремы 1, получим представление

$$A\Big(\frac{1}{2},s\Big)=2\int\limits_0^{1/2}f_1(t)\int\limits_0^t g_1(\tau)\,d\tau\,dt+4\sum_{k=0}^{s}\int\limits_0^{1/2}f_1(t)\int\limits_0^t g_1(\tau)\,d\tau\cos 2k\pi t\,dt, \qquad (36)$$

где $f_1(t)=f(1/2-t)$, $g_1(t)=g(1/2-t)$ $(0\le t\le 1/2)$.

Докажем первую часть теоремы. Рассмотрим p_2, q_2 такие, что $p_1>p_2>p$ и $q_1>q_2>q$. Положим

$$f_1(x)=x^{-1/p_2},\quad g_1(x)=x^{-1/q_2}.$$

Тогда, очевидно, $f(x)\in L_p[0,1]$, $g(x)\in L_q[0,1]$.

Далее воспользуемся формулой для средних Фейера тригонометрического ряда [2, с. 138]

$$B(s)=\frac{1}{s}\sum_{j=0}^{s-1}A(1/2,j)=\frac{2}{s}\int\limits_0^{1/2}f_1(t)\int\limits_0^t g_1(\tau)\,d\tau\left(\frac{\sin\pi st}{\sin\pi t}\right)^2dt.$$

Легко получается оценка снизу при некоторой положительной константе $C(p_2,q_2)$

$$B(s) \geq \frac{2}{s} \int_0^{1/2s} \frac{1}{t^{1/p_2}} \int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{1/q_2}} \left(\frac{\sin \pi st}{\sin \pi t} \right)^2 dt \geq$$

$$\geq \frac{2}{(1 - 1/q_2)s} \int_0^{1/2s} t^{1-1/p_2-1/q_2} \left(\frac{2st}{\pi t} \right)^2 dt = C(p_2, q_2) s^{1/p_2+1/q_2-1}. \quad (37)$$

Так как $1/p_2 + 1/q_2 > 1$, то $B(s) \to +\infty$ при $s \to \infty$ с не меньшей скоростью, чем полученной в (37), а значит, очевидно, последовательность $\{A(1/2, s)\}$ не может быть ограниченной.

Предположим

$$(\exists \tilde{C} > 0)\ (\forall j \in \mathbb{N}) \quad |A(1/2, j)| \leq \tilde{C} j^{1/p_1+1/q_1-1}. \quad (38)$$

Тогда отсюда, из оценки (37) и из определения $B(s)$ легко получим при любом $s \in \mathbb{N}$

$$C(p_2, q_2) s^{1/p_2+1/q_2-1} \leq B(s) \leq \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{s-1} |A(1/2, j)| \leq \tilde{C} \frac{1}{s} \sum_{j=0}^{s-1} j^{1/p_1+1/q_1-1} \leq \tilde{\tilde{C}} s^{1/p_1+1/q_1-1},$$

а этого быть не может, так как по построению $1/p_2 + 1/q_2 > 1/p_1 + 1/q_1$.

Следовательно, предположение (38) не верно, то есть

$$(\forall C > 0)\ (\exists j_C \in \mathbb{N}) \quad |A(1/2, j_C)| > C j_C^{1/p_1+1/q_1-1}.$$

В частности,

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists j_n \in \mathbb{N}) \quad |A(1/2, j_n)| > n j_n^{1/p_1+1/q_1-1}. \quad (39)$$

Тем самым получим последовательность $\{j_n\} \subset \mathbb{N}$. Если бы эта последовательность была ограниченной, то начиная с некоторого номера было бы $j_{n_0} = j_{n_0+1} = j_{n_0+2} = \ldots$ Тогда, в силу (39), имела бы место оценка для любого $k \geq n_0$

$$k j_k^{1/p_1+1/q_1-1} = k j_{n_0}^{1/p_1+1/q_1-1} < |A(1/2, j_k)| = |A(1/2, j_{n_0})|,$$

а это невозможно.

Следовательно, $j_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$|A(1/2, j_n)| > n j_n^{1/p_1+1/q_1-1} > j_n^{1/p_1+1/q_1-1}$$

и, тем самым, первая часть теоремы доказана.

Докажем вторую часть теоремы.

Пусть $\alpha,\ \beta \geq 0$ таковы, что $\alpha + \beta < 1$. Построим такие функции $g(x) \in H_1^\alpha[0, 1]$ и $f(x) \in H_\infty^\beta[0, 1]$, что некоторая подпоследовательность $\{A(1/2, s_k)\}$ для них расходится. Для этого рассмотрим $\alpha_1 > \alpha$, $\beta_1 > \beta$, но по-прежнему $\alpha_1 + \beta_1 < 1$. В качестве

$g_1(x)$ возьмем функцию

$$g_1(x) = \frac{1}{\tau}\ln^{-1-\alpha_1}\frac{20}{\tau}. \tag{40}$$

Положим $g(x) = g_1(1/2 - x)$ при $x \in [0, 1/2]$ и продолжим $g(x)$ нечетно на отрезок $[1/2, 1]$.

Далее потребуется следующее простое следствие из [4, Лемма (6.7, с. 46–47)], связанное с классами Орлича [12, с. 91]. Сформулируем его в виде леммы. Обозначим через $\ln^+ u$ функцию, которая равна $\ln u$ при $u \geq e$ и тождественно равна 1 при $0 \leq u < 1$. Введем следующие классы функций при $\gamma > 0$ [12, с. 91]

$$L\big(\ln^+ L\big)^\gamma[a,b] = \Big\{f(x)\,\Big|\,\int\limits_a^b |f(x)|\big(\ln^+|f(x)|\big)^\gamma\,dt < +\infty\Big\}.$$

Лемма 3. *Если при некотором $\gamma > 0$ будет $f(x) \in L\big(\ln^+ L\big)^\gamma[a,b]$, то для любого δ, $0 < \delta < \gamma$, существуют константы $\eta(\delta) > 0$ и $C(f) > 0$ такие, что при $|b_1 - a_1| \leq \eta(\delta)$, где $a_1, b_1 \in [a.b]$,*

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(x)|\,dx \leq C(f)\ln^{-\delta}\frac{1}{|b_1 - a_1|}.$$

Так как $g_1 \in L(\ln^+ L)^{\tilde{\alpha}}[0, \frac{1}{2}]$, где $\alpha < \tilde{\alpha} < \alpha_1$, то, воспользовавшись леммой 3 и монотонным убыванием функции $g_1(x)$ при $x \in (0, 1]$, нетрудно получить, что $g_1 \in H_1^\alpha[0, \frac{1}{2}]$ и, следовательно, $g \in H_1^\alpha[0, 1]$.

Построим теперь требуемую функцию $f(x)$. Для этого при $x \in [0, 1/2]$ рассмотрим функцию вида

$$h_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5^k}Q_{m_k}(t), \tag{41}$$

где $m_k = E(M_k)$, $M_k = 5^{5^{\frac{k-1}{\alpha_1+\beta_1}}}$, а

$$Q_m(t) = 2\sin 4m\pi t\sum_{k=1}^{m}\frac{\sin 2k\pi t}{k} =$$

$$= \left(\frac{\cos 2m\pi t}{m} + ... + \frac{\cos 2(2m-1)\pi t}{1}\right) - \left(\frac{\cos 2(2m+1)\pi t}{1} + ... + \frac{\cos 2(3m)\pi t}{m}\right). \tag{42}$$

Точно так же, как и в [13, с. 107], можно показать, что $h_1(t) \in H_\infty^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$. Кроме того, так как

$$\sum_{j=m_s}^{3m_s} \int\limits_0^{1/2} h_1(t)\cos 2j\pi t\, dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

то

$$\sum_{j=1}^{2m_k-1} \int\limits_0^{1/2} h_1(t)\cos 2j\pi t\, dt =$$
$$= \sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \int\limits_0^{1/2} h_1(t)\cos 2j\pi t\, dt + \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=m_s}^{3m_s} \int\limits_0^{1/2} h_1(t)\cos 2j\pi t\, dt = \sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \int\limits_0^{1/2} h_1(t)\cos 2j\pi t\, dt. \tag{43}$$

Далее, нетрудно видеть, что существует константа $C > 0$ такая, что при достаточно больших $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=m_k}^{2m_k-1} \int\limits_0^{1/2} h_1(t)\cos 2j\pi t\, dt = \frac{1}{5^k}\sum_{j=m_k}^{2m_k-1}\frac{1}{2m_k - j} \geq \frac{\ln m_k}{2\cdot 5^k} \geq C\frac{\ln m_k}{\ln^{\alpha_1+\beta_1} m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{44}$$

так как $\alpha_1 + \beta_1 < 1$.

Положим

$$f_1(t) = \frac{h_1(t)}{\int_0^t g_1(\tau)\, d\tau} \tag{45}$$

и покажем, что $f_1(t) \in H_\infty^\beta[0,1/2]$.

В самом деле

$$|f_1(t+d) - f_1(t)| \leq \frac{|h_1(t+d) - h_1(t)|}{\int_0^{t+d} g_1(\tau)\, d\tau} + \frac{\int_t^{t+d} g_1(\tau)\, d\tau |h_1(t)|}{\int_0^{t+d} g_1(\tau)\, d\tau \int_0^t g_1(\tau)\, d\tau} = X_1(t,d) + X_2(t,d). \tag{46}$$

Так как $h_1(t) \in H_\infty^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$ и

$$\int\limits_0^b g_1(t) = 1/\alpha_1 \cdot \ln^{-\alpha_1} 20/b, \tag{47}$$

то

$$X_1(t,d) \leq C\ln^{\alpha_1}\frac{20}{t+d}\ln^{-\alpha_1-\beta_1}\frac{1}{d} \leq C\ln^{-\beta_1}\frac{1}{d} \leq C\ln^{-\beta}\frac{1}{d}. \tag{48}$$

Рассмотрим теперь $X_2(t,d)$. Возможны следующие случаи:

а) $0 \le t \le d$; так как $g_1(t) \in H_1^{\alpha}[0,1/2]$, $h_1(t) \in H_{\infty}^{\alpha_1+\beta_1}[0,\frac{1}{2}]$, $h_1(0)=0$ и справедливо равенство (47), то

$$X_2(t,d) \le C\frac{\ln^{\alpha_1}\frac{20}{t+d}\ln^{\alpha_1}\frac{20}{t}}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}\frac{1}{t}\ln^{\alpha}\frac{1}{d}} \le C\frac{\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t+d}\ln^{\alpha_1}\frac{1}{t}}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}\frac{1}{t}\ln^{\alpha}\frac{1}{d}} \le C\frac{\ln^{\alpha_1-\alpha}\frac{1}{d}}{\ln^{\beta_1-\beta}\frac{1}{d}}\frac{1}{\ln^{\beta}\frac{1}{d}} \le C\frac{1}{\ln^{\beta_1}\frac{1}{d}}, \tag{49}$$

если считать $\alpha_1-\alpha=\beta_1-\beta$;

б) $d \le t \le \frac{1}{2}-d$. Применяя первую теорему о среднем к $\int_t^{t+d} g_1(\tau)d\tau$, помня, что $h_1(t) \in H_{\infty}^{\alpha_1+\beta_1}[0,1/2]$, $h_1(0)=0$ и справедливо равенство (47), получим при $0<\theta(=\theta(t,d))<1$

$$X_2(t,d) \le C\frac{d}{(t+\theta d)\ln^{1+\alpha_1}\frac{20}{t+\theta d}}\frac{\ln^{\alpha_1}\frac{20}{t+d}\ln^{\alpha_1}\frac{20}{t}}{\ln^{\alpha_1+\beta_1}\frac{1}{t}} \le C\frac{d}{t\ln^{1+\beta_1}\frac{10}{t}}$$

А так как функция $t^{-1}\ln^{-1-\beta_1}\frac{10}{t}$ монотонно убывает при $t \in (0,1/2]$, то окончательно в этом случае получим

$$X_2(t,d) \le C\frac{1}{\ln^{1+\beta_1}\frac{10}{d}} \le C\frac{1}{\ln^{\beta}\frac{1}{d}}. \tag{50}$$

Таким образом, из (46), (48)–(50) следует, что $f_1(t) \in H_{\infty}^{\beta}[0,1/2]$. Далее при $t \in [0,1/2]$ положим $f(t)=f_1(1/2-t)$ и продолжим $f(t)$ четно на отрезок $[1/2,1]$. Совершенно ясно, что $f(t) \in H_{\infty}^{\beta}[0,1]$. В силу (36), (41)–(45) существует такая константа $C>0$, для которой при $s_k=2m_k-1$ имеем оценку снизу

$$A(1/2,s_k) \ge C\frac{\ln m_k}{\ln^{\alpha_1+\beta_1} m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Тем самым теорема 2, таким образом, полностью доказана.

□

3. Оценка скорости равносходимости в общем случае медленно меняющихся модулей непрерывности

Предположим, что при $1/p+1/q=1$

$$\omega(f;\delta)_p = O(v(\delta)), \quad \omega(g;\delta)_q = O(w(\delta)), \quad \delta \to +0, \tag{51}$$

где $v(\delta)$ и $w(\delta)$ — монотонные убывающие к нулю функции при $\delta \to +0$, медленно меняющиеся в нуле в смысле определения 1.2 [6, с. 10].

Прежде, чем сформулировать основную теорему этого раздела, докажем предварительно две леммы. Будем использовать при этом обозначения, введенные в теореме 1, не оговаривая это особо. Пусть ε — сколь угодно малое положительное число, фиксированное в наших рассуждениях.

Лемма 4. *Справедлива следующая оценка при $t \to +0$ и $1 \le q < +\infty$*

$$\tilde{\varphi}(t) = O\Big(w\big(t^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\big)\Big). \tag{52}$$

Доказательство. В рассматриваемом случае имеем

$$\varphi_1(\tau) \le C \inf_{m \in \mathbb{N}} \left(w\Big(\frac{1}{m}\Big) + (m^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right), \tau \to +0.$$

Полагая здесь $m = E\big(\tau^{\frac{\varepsilon_1 - 1}{2}}\big)$, где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, получим

$$\varphi_1(\tau) \le C \left(w\Big(1/E\big(\tau^{\frac{\varepsilon_1-1}{2}}\big)\Big) + \Big(E^2\big(\tau^{\frac{\varepsilon_1-1}{2}}\big)\tau\Big)^{\frac{1}{q}} \right) \le$$

$$\le C \left(w\Big(1/\big(\tau^{\frac{\varepsilon_1-1}{2}} - 1\big)\Big) + \Big(\big(\tau^{\frac{\varepsilon_1-1}{2}}\big)^2 \tau\Big)^{\frac{\varepsilon_1}{q}} \right) \le$$

$$\le C \left(w\Big(1/\big(\tau^{\frac{\varepsilon-1}{2}}\big)\Big) + \tau^{\frac{\varepsilon_1}{q}} \right) \le Cw\Big(\tau^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\Big),\ \tau \to +0,$$

причем в последнем неравенстве мы воспользовались следующими двумя свойствами медленно меняющихся функций [6, с. 24–25]: пусть $L(x)$ — произвольная медленно меняющаяся в нуле функция, тогда

а) для любого $\gamma > 0$ при $x \to 0$

$$x^{\gamma} L(x) \to 0, \quad x^{-\gamma} L(x) \to \infty,$$

б) для любого $\lambda \in (-\infty, \infty)$ функция $L^{\lambda}(x)$ является медленно меняющейся.

Используя эту оценку и монотонность функции $w(\delta)$, получим оценку

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \sup_{\tau \in [0,t]} \varphi_1(\tau) \le Cw\Big(t^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\Big),\ t \to +0.$$

Тем самым лемма доказана.

□

Лемма 5. *В случае $1 \le q < +\infty$ функция $\varphi(s)$ есть медленно меняющаяся при $s \to +\infty$.*

Доказательство. Имеем с учетом предыдущей леммы

$$\varphi(s) = \int\limits_{1/s}^{1} \xi^{-1} \tilde{\varphi}_1^q(\xi)\, d\xi = O\Big(\int\limits_{1/s}^{1} \xi^{-1} w^q\big(\xi^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\big)\, d\xi\Big). \tag{53}$$

Далее,

$$\int\limits_{1/s}^{1} \xi^{-1} w^q\big(\xi^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\big)\,d\xi = \int\limits_{1}^{s} w^q\big(x^{\frac{\varepsilon-1}{2}}\big) x^{-1}\,dx.$$

Обозначим $\tilde{w}(x) = w^q\big(x^{\frac{\varepsilon-1}{2}}\big)$. Из определения медленно меняющейся функции и свойства б), сформулированного в додказательстве предыдущей леммы, следует, что $\tilde{w}(x)$ есть медленно меняющаяся функция в бесконечности.

Таким образом,

$$\varphi(s) = O\Big(\int\limits_{1}^{s} \tilde{w}(x) x^{-1}\,dx\Big),$$

где $\tilde{w}(x)$ есть медленно меняющаяся функция в бесконечности. Из этого соотношения следует утверждение доказываемой леммы, если принять к сведению формулировку упражнения 2.2 [6, с. 82]. Лемма доказана. $\square$

Теорема 4. *Если выполняется предположение* (51), $1 \le q < +\infty$, *то для любого* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *и любого компакта* $K \subset (0,1)$ *имеет место равносходимость* (3), *когда*

$$v\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big)\Big(\int\limits_{1/s}^{1} \xi^{-1} w^q\big(\xi^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\big)\,d\xi\Big)^{1/q} \to 0 \text{ при } s \to \infty; \tag{54}$$

при этом в оценке (4)

$$\psi(s) = v\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big)\Big(\int\limits_{1/s}^{1} \xi^{-1} w^q\big(\xi^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\big)\,d\xi\Big)^{1/q} + w\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big). \tag{55}$$

В случае $q = +\infty$ *равносходимость* (3) *для любого компакта* $K \subset (0,1)$ *имеет место всегда и при этом*

$$\psi(s) = v\big(s^{-\frac{1}{4}}\big) + w\big(s^{-\frac{1}{4}}\big).$$

Доказательство. Используя оценки (51), из (5) получим при $s \to \infty$

$$\psi(s) \le \inf_{m\in\mathbb{N}} \Big(v\Big(\frac{1}{m}\Big)\varphi^{1/q}(s) + w\Big(\frac{1}{m}\Big) + \frac{m^4}{s}\ln s\Big). \tag{56}$$

Полагая в (56) $m = E\big(s^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}\big)$, где $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon$, получим

$$\psi(s) \le \Big(v\big(1/E\big(s^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}\big)\big)\varphi^{1/q}(s) + w\big(1/E\big(s^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}\big)\big) + E^4\big(s^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}\frac{\ln s}{s}\big)\Big) \le$$

$$\le C(f,g,K)\Big(v\big(1/\big(s^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}-1\big)\big)\varphi^{1/q}(s) + w\big(1/\big(s^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}-1\big)\big) + s^{-\varepsilon_2}\ln s\Big) \le$$

$$\leq C\Big(v\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big)\varphi^{1/q}(s)+w\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big)+s^{-\varepsilon_2}\ln s\Big)\leq$$

$$\leq C\Big(v\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big)\varphi^{1/q}(s)+w\big(s^{\frac{\varepsilon-1}{4}}\big)\Big),\quad (57)$$

причем в последнем неравенстве мы воспользовались утверждением леммы 5, свойствами а) и б) медлено меняющихся функций, приведенных в лемме 4, и свойством [6, с. 25]:

в) если $L_1(x)$, $L_2(x)$ есть медленно меняющиеся функции, то и функции $L_1(x)+L_2(x)$, $L_1(x)L_2(x)$ есть медленно меняющиеся функции.

Учитывая далее оценку (53), из (57) получаем условие равносходимости (54) и скорость равносходимости (55) в случае $1\leq q<+\infty$.

В случае $q=+\infty$ утверждение теоремы очевидно, если в (5) воспользоваться неравенствами (51) и положить $m=E\big(\sqrt[4]{s}\big)$.

Теорема полностью доказана. □

Произвольная медленно меняющаяся функция $L(x)$, вообще говоря, не обладает свойством

г) для любого $\gamma>0$ справедливо $L(x^\gamma)\sim L(x)$.

Однако наиболее часто используемые на практике медленно меняющиеся функции (такие, как: $\log x$, $\log\log x$ или более общий класс: $(\log x)^{\alpha_1}(\log_2 x)^{\alpha_2}\dots(\log_k x)^{\alpha_k}$, где числа $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ вещественны и, по определению, $\log_r x=\log(\log_{k-1}x)$) обладают этим свойством. Ввиду важности этого класса медленно меняющихся функций и ввиду упрощения в этом случае формулировки теоремы 4, уместно сформулировать следующую теорему, доказательство которой есть очевидное следствие теоремы 4.

Теорема 5. *Если выполняется предположение* (51), *а функции* $v(\delta)$ *и* $w(\delta)$ *обладают свойством г), то для любого компакта* $K\subset(0,1)$ *в случае* $1\leq q<+\infty$ *имеет место равносходимость* (3), *когда*

$$v\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big(\int\limits_{1/s}^{1}\xi^{-1}w^q\big(\xi^{\frac{1-\varepsilon}{2}}\big)\,d\xi\Big)^{1/q}\to 0 \text{ при } s\to\infty;$$

при этом в оценке (4)

$$\psi(s)=v\Big(\frac{1}{s}\Big)\Big(\int\limits_{1/s}^{1}\xi^{-1}w^q(\xi)\,d\xi\Big)^{1/q}+w\Big(\frac{1}{s}\Big).$$

В случае же $q = \infty$ равносходимость (3) *для любого компакта $K \subset (0,1)$ в метрике пространства $C(K)$ имеет место всегда и при этом в оценке* (4)

$$\psi(s) = v\Big(\frac{1}{s}\Big) + w\Big(\frac{1}{s}\Big).$$

Очевидно, при выполнении предположений теоремы 2 из последней теоремы получаем, как следствие, утверждение теоремы 2.

Список литературы

1. STEINHAUS, H. (1913) Sur le développment du produit de deux fonctions en une série de Fourier. *Bull. Intern. de l'Acad. de Cracovie.* . p. 113–116.

2. Бари, Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961. — 936 с.

   BARI, N. K. (1961) *Trigonometric series.* Moscow: Fizmatgiz.

3. Рыхлов, В. С. Равносходимость для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-ой производной // Функциональный анализ. Спектральная теория. – Ульяновск. — 1980. — Вып. 14. — С. 113–115.

   RYKHLOV, V. S. (1980) Equiconvergence for differential operators with a nonzero coefficient for $(n-1)$-th derivative. *Functional Analysis. Spectral Theory.* Ulyanovsk. Iss. 14. p. 113–115.

4. Рыхлов, В. С. Разложения по собственным и присоединенным функциям квазидифференциальных и интегральных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Саратов, 1981. — 129 с.

   RYKHLOV, V. S. (1981) *Expansions in eigen- and associated functions of quasidifferential and integral operators: Cand. phys. and math. sci. diss.*. Saratov.

5. Рыхлов, В. С. О скорости равносходимости в аналоге теремы Штейнгауза // Функциональный анализ. Спектральная теория: Межвузовский сборник научных трудов. – Ульяновск: УГПИ им. И.Н. Ульянова. — 1984. — С. 102–110.

   RYKHLOV, V. S. (1984) On the rate of equiconvergence in the analogue of the Steinhaus theorem. *Functional Analysis. Spectral Theory: Interuniversity collection of scientific works).* Ulyanovsk. p. 102–110.

6. Сенета, Е. Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.

   SENETA, E. (1976) *Regularly varying functions.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer–Verlag.

7. Рыхлов, В. С. О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной // Докл. АН СССР. — 1984. — Т. 279. — № 5. — С. 1053–1056.

   RYKHLOV, V. S. (1984) On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n-1)$-st derivative. *Sov. Math. Dokl.* 30 (3). p. 777–779.

8. Рыхлов, В. С. Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной // Дифференц. ур-я. — 1990. — Т. 26. — № 6. — С. 975–989.

RYKHLOV, V. S. (1990) Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $(n-1)$-th derivative. *Differential Equations*. 26. p. 704–715.

9. RYKHLOV, V. S (1996) Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators. *Results in Mathematics*. 29 (1). p. 153–168.

10. Черных, Н. И. О приближении функций полиномами со связями // Приближение функций в среднем. Сборник работ. Тр. МИАН СССР. — 1967. — Т. 88. — С. 75–130.

    CHERNYKH, N.I. (1967) The approximation of functions by polynomials with constraints. *Approximation of functions in the mean, Work collection, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 88. p. 79–138.

11. Лебедь, Г. К. Неравенства для многочленов и их производных // Докл. АН СССР. — 1957. — Т. 117. — № 4. — С. 570–572.

    LEBED', G. K. (1957) Inequalities for polynomials and their derivatives. *Dokl. AN SSSR*. 117 (4). p. 570–572.

12. Красносельский, М. А. Выпуклые функции и пространства Орлича / М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий. — М.: Физматгиз, 1958. — 271 с.

    KRASNOSEL'SKII, M. A and RUTICKII, YA. B (1961) *Convex Functions and Orlicz Spaces*. Groningen: P. Noordhoff Ltd.

13. Рубинштейн, А. И. О равенстве Парсеваля // Изв. вузов. Математика. — 1978. — № 6. — С. 102–108.

    RUBINSTEIN, A. I. (1978) Parseval's equality. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*. 22 (6). p. 77–82.

Статья поступила в редакцию 03.12.2015

УДК: 517:957

MSC2010: 35K55

СТАЦИОНАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ОТРАЖЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© Ю. А. Хазова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
пр. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295007, Российская Федерация
e-mail: *hazova.yuliya@hotmail.com*

Stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable.

Khazova Y. A.

Abstract. Recently, there have been many studies on nonlinear optics, which is due to the wide use of optical systems in information technologies. The key advantages of optical methods for data storage and conversion are parallel signal processing and high performance. Owing to their natural benefits, optical systems are used to create elements of content-addressable memory, pattern recognition systems, and learning analog computers.

One of the most popular nonlinear optical systems is a system consisting of a thin layer of nonlinear Kerr-type medium and a two-dimensional feedback loop that can be organized in different ways. The fundamental feature of such systems is that the external feedback loop can be used to directly influence the nonlinear dynamics of the system by using prisms, lenses, dynamic holograms, and other devices for controlled transformation of spatial variables.

Parabolic functional differential equations with transformed arguments of the unknown function, used to model optical systems with two-dimensional feedback, are a new class of equations for studying the structurization phenomenon.

The paper deals with the dynamics of stationary structures of a parabolic equation on a circle with small diffusion in case of reflection spatial variable. The method to be used combines the formalisms Galerkin's methods.

Emergence of metastable structures in the equation at reduction of parameter has bifurcation character. In Galerkin's approximations of the equation average $(20-31)$ dimensions the broad spectrum saddle-nodal bifurcations is implemented. Continuous branches of stationary points of systems of the ordinary differential equations which are given rise as a result saddle-nodal bifurcations, are answered by continuous branches of approximate stationary solutions. In this work the task about approximate stationary solutions of the equation type of transitional layer with one transition point is investigated. The set of approximate stationary solutions of the equation stated above like correctly reflects nature of evolution of metastable structures with one transition point at increase and at mean values of parameter. The last means that each metastable structure of the equation with one transition point at increase passes near approximate stationary solutions with one transition point. Thus it is about dynamics of metastable structures not only at stage of slow evolution, but also in transitional zone. At research of metastable structures the task about approximate stationary solutions is key. In this work it is established that for the solution of this task at mean values of parameter application of method of Galerkin's leads to qualitatively and quantitatively correct results.

Keywords: *parabolic problem, bifurcation, stability, Galerkin's method.*

Введение

Оптические системы с двумерной обратной связью демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур [1, 6]. Обратная связь позволяет воздействовать на динамику оптической системы посредством управляемого преобразования пространственных переменных, выполняемых призмами, линзами, динамическими голограммами и другими устройствами. Нелинейный интерферометр с зеркальным отражением поля в двумерной обратной связи является одной из наиболее простых оптических систем, в которых реализуется нелокальный характер взаимодействия световых полей. В этом случае экспериментально установлено многообразие оптических структур, выявлена зависимость их количества и форм от коэффициента диффузии [1, 7]. Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются полулинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Параболическое уравнение на отрезке с преобразованием отражения рассматривалось в работах [8, 6, 2]. Методы локальной теории бифуркаций в этом случае применялись в [8, 6] с целью построения стационарных структур и анализа их устойчивости. Метод Галеркина использовался в [2, 3] для построения стационарных структур и исследования их устойчивости при углублении в область надкритичности.

Задача о бифуркации пространственно неоднородных стационарных решений из пространственно однородного стационарного решения параболической задачи на окружности с преобразованием отражения исследовались в работе [10]. В указанной работе рассматривалась, при некоторых упрощающих предположениях, задача об эволюции стационарных решений при уменьшении коэффициента диффузии и его приближении к нулю. Эта же задача в данной работе рассматривается при более общих, чем в [10], условиях. Отметим, что в работе [10] также рассматривался вопрос о метаустойчивых структурах при малых значениях коэффициента диффузии и некоторых упрощающих условиях. Здесь тоже будем исследовать метаустойчивые структуры при более общих условиях. Строится иерархия упрощенных моделей указанной задачи. Анализ галеркинских аппроксимаций указанной задачи, а также её численные расчеты в пакете “Mathematica”, позволяют утверждать, что при средних (не очень малых) значениях коэффициента диффузии в рассматриваемой задаче возникают метаустойчивые структуры.

1. Постановка задачи

На окружности рассматривается параболическая задача с преобразованием отражения

$$u_t + u = Du_{\varphi\varphi} + K(1 + \gamma \cos u(\pi - \varphi, t)),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(\varphi + 2\pi, t) = u(\varphi, t). \tag{2}$$

Задача (1), (2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(\varphi, t)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $t > 0$, световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения в контуре обратной связи в одномерном приближении. Здесь D — коэффициент диффузии нелинейной среды, положительный коэффициент K пропорционален интенсивности входного поля, γ — видность (контрастность) интерференционной картины, $0 < \gamma < 1$.

Гильбертово пространство $L_2(]0, 2\pi[)$ 2π–периодических функций обозначим H. Пусть H^s, $s \in N$, шкала пространств, порожденная оператором $\triangle$ ($\triangle$ — одномерный оператор Лапласа) при условиях (2). Норма в H^s задается формулой $\|u\|_s^2 =< (-\triangle)^s u, u > + < u, u >$. Здесь $< *, * >$ — скалярное произведение в H. Отметим, что оператор $-\triangle$ с областью определения H^2 в пространстве H имеет полную ортогональную систему собственных функций $1, \sin\varphi, \cos\varphi, \sin 2\varphi, \cos 2\varphi \ldots$

Рассмотрим в этом разделе вопросы существования, формы и устойчивости в метрике H^1 пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, т. е. решений $u(\varphi, t) = w$, определяемых из уравнения

$$\omega = K(1 + \gamma \cos \omega). \tag{3}$$

С ростом K количество сосуществующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \to \infty$ их состав постоянно меняется [4, 5]: рождаются новые состояния равновесия и умирают старые. Поэтому фиксируем гладкую ветвь решений

$$\omega = \omega(K, \gamma),\ 1 + K\gamma \sin \omega(K, \gamma) \neq 0, \tag{4}$$

уравнения (3).

Затем линеаризуем (1), (2) на $\omega(K,\gamma)$. В результате получаем уравнение

$$u_t + Lu = 0,$$

где

$$Lu = u - Du_{\varphi\varphi} - \Lambda Qu,$$
$$\Lambda = \Lambda(K,\gamma) = -K\gamma\sin\omega,$$

Q — самосопряженный в H оператор, определенный согласно равенству $Qu(\varphi,t) = u(\pi-\varphi,t)$.

Несложно убедиться в справедливости следующего предположения.

Лемма 1. *Оператор L имеет полную ортогональную систему собственных функций*

$$1, \cos\varphi, \sin\varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi \ldots,$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_0^c = 1-\Lambda, \lambda_1^c = 1+D+\Lambda, \lambda_1^s = 1+D-\Lambda, \lambda_2^c = 1+4D-\Lambda, \lambda_2^s = 1+4D+\Lambda \ldots$$

Если $\Lambda > 1$, то $\omega(K,\gamma)$ неустойчиво. Если $-1 < \Lambda < 1$, то $\omega(K,\gamma)$ устойчиво. Таким образом, интерес представляет случай $\Lambda < -1$. Фиксируем K такое, что выполняется следующее условие.

Условие 1. $\Lambda = \Lambda(K,\gamma) < -1$.

Проблема реализуемости этого условия исследована в [4, 5].

2. Устойчивые структуры параболической задачи

В качестве бифуркационного параметра примем D. Замена $u = v + \omega$ приводит уравнение (1), (2) в пространстве H^1 к виду

$$v_t + Lv = R(Qv), \tag{5}$$

где

$$R(Qv) = \Lambda\frac{1}{2!}\operatorname{ctg}\omega\cdot Qv^2 - \Lambda\frac{1}{3!}\cdot Qv^3, \tag{6}$$

$L = L(D) = 1 - D\triangle - \Lambda Q$, $Qv(\varphi,t) = v(\pi-\varphi,t)$, а все члены порядка 4 и выше опущены.

Справедлива следующая теорема [10].

Теорема 1. *Пусть выполнено условие 1. Существует $\delta_0 > 0$ такое, что если $0 < D_1 - D < \delta_0$, то решениями (5) являются $v^{\pm}(\varphi, D)$, где*

$$v^{\pm}(\varphi, D) = \pm \left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{1/2} \cos\varphi +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)\frac{\Lambda}{2}\operatorname{ctg}\omega((\lambda_0^c - 2\lambda_1^c)^{-1} + (\lambda_1^s - 2\lambda_1^c)^{-1}\cos 2\varphi) \pm$$
$$\pm \frac{1}{3!}\left(\frac{D - D_1}{c_1(D_1)}\right)^{3/2}(\lambda_4^s - 3\lambda_1^c)^{-1}\left(\frac{\Lambda}{4} - \frac{3}{4}\Lambda^2\operatorname{ctg}^2\omega(\lambda_2^s - 2\lambda_1^c)^{-1}\right)\cos 3\varphi + O((D - D_1)^2).$$

Здесь

$$c_1(D) = \frac{\Lambda}{8} - \frac{1}{4}(\Lambda\operatorname{ctg}\omega)^2((\lambda_0 - 2\lambda_1^c)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_2^c - 2\lambda_1^c)^{-1}) < 0.$$

Решения $u^{\pm}$ экспоненциально устойчивы.

Теорема 1 справедлива в окрестности бифуркационного значения D_1 параметра D. Для исследования задачи об эволюции $v^{\pm}(\varphi, D)$ при выходе D из окрестности D_1 в [10] использовался метод Галеркина. При этом предполагалось, что $\cos\omega = 0$.

В данной статье рассматривается общий случай уравнения (5) ($\cos\omega \neq 0$), а также влияние квадратичного слагаемого на форму и устойчивость возникающих пространственно неоднородных стационарных решений. Согласно теореме 1, нулевое решение (5) асимптотически устойчиво для всех $D > D_1$, $D_1 = -(1 + \Lambda)$. При уменьшении параметра D и его прохождении через значение D_1 нулевое решение теряет устойчивость. В результате от нулевого решения ответвляется пара стационарных решений $v_1^{\pm}$, которая рождается устойчивой. При дальнейшем уменьшении D и прохождении значения $\frac{D_1}{4}$ из неустойчивого нулевого решения бифурцирует пара стационарных решений $v_2^{\pm}$, которая рождается неустойчивой с индексом неустойчивости 1. Для каждого $\frac{D_1}{(k+1)^2} < D < \frac{D_1}{k^2}$, $k = 1, 2\ldots$, $D_1 = -(1+\Lambda)$ существует ровно k пар стационарных решений $v_1^{\pm}, v_2^{\pm}, \ldots, v_k^{\pm}$ уравнения (5), которые бифурцируют из нулевого решения.

Рассмотрим галеркинскую аппроксимацию уравнения (5) в виде

$$v = \sum_{s=0}^{N} z_s \cos s\varphi + \sum_{k=1}^{N} z_{k+N}\sin k\varphi. \tag{7}$$

Подставим (7) в уравнение (5). Приравняв затем коэффициенты при $\cos s\varphi$ и $\sin k\varphi$, $s = \overline{0, N}$, $k = \overline{1, N}$, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= -\lambda_s^c z_s + g_s(z), \quad s = \overline{0, N}, \\ \dot{z}_{k+N} &= -\lambda_k^s z_{k+N} + g_{k+N}(z), \quad k = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{8}$$

Функции $g_s(z)$, $g_{k+N}(z)$ зависят от порядка аппроксимации N (в связи с громоздкостью выражения для них не приводятся).

Системы уравнений (8) обладают рядом общих свойств. Для каждого N нулевое решение (8) — асимптотически устойчиво, если $D > D_1$. Нулевое решение (8) теряет устойчивость при прохождении параметра D через значение D_1. Максимальная точка спектра нулевого решения проходит в этом случае через нуль с ненулевой скоростью. В результате этой бифуркации от нуля ответвляются две устойчивые непрерывные ветви неподвижных точек $z^1_{\pm}(D,N) = (z^1_{s,\pm}(D,N), 0)$, $s = \overline{0,N}$, где все четные компоненты положительные, а у нечетных знак чередуется. Справедливо неравенство: $|z^1_{1,\pm}(D,N)| > |z^1_{3,\pm}(D,N)| > \ldots$.

В силу (7) и определения $z^1_{\pm}(D,N)$ справедливо следующее равенство

$$v_1^{\pm}(D) = v_1^{\pm}(\varphi, D) \approx \sum_{s=0}^{N} z^1_{s,\pm}(D,N)\cos s\varphi. \tag{9}$$

Опишем динамику по параметру D стационарных решений $v_1^{\pm}(\varphi, D)$ уравнения (5), опираясь на равенство (9) и численные расчеты непрерывной ветви $z^1_{\pm}(D,N)$ стационарных точек системы (8), проведенные для N до 33. Для значений параметра D вблизи D_1 $v_1^{\pm}(\varphi, D)$ является квазигармонической функцией с малой амплитудой. Амплитуда функций (9) монотонно возрастает с убыванием параметра D, приближаясь к значениям $\dfrac{3\Lambda\operatorname{ctg}\omega \pm \sqrt{9\Lambda^2\operatorname{ctg}^2\omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$ при $D \to 0$. Заметим, что начиная с зависящего от N значения D^* функции (9) колеблются вблизи значений $\dfrac{3\Lambda\operatorname{ctg}\omega \pm \sqrt{9\Lambda^2\operatorname{ctg}^2\omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$. На рис. 1 представлены приближенные решения $v_1^{+}(\varphi, D)$, полученные согласно (9) для $N = 10$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости стационарного решения $v_1^{\pm}(\varphi, D)$. С этой целью обратимся к динамике спектра $\sigma(z^1_{\pm}(D,N))$ ветви неподвижных точек $z^1_{\pm}(D,N)$ системы (8). Проведенный анализ показал, что при убывании параметра D точки спектра сближаются. При этом максимальная точка спектра $\mu_1^1 < 0$ — убывает, а остальные точки — возрастают. В качестве примера приведем 4 максимальные точки спектра, когда $N = 10$, $\omega = 1.76$, $\Lambda = -1.17$

$$\begin{aligned}
\sigma(z^1(0.07,10)) =& \{\ldots, -1.179, -0.693, -0.331, -0.207\},\\
\sigma(z^1(0.03,10)) =& \{\ldots, -0.666, -0.471, -0.280, -0.264\},\\
\sigma(z^1(0.001,10)) =& \{\ldots, -0.377, -0.374, -0.301, -0.265\}.
\end{aligned}$$

Проведенный анализ для N от 16 до 33 дает основание предполагать, что решение $v_1^{\pm}(\varphi, D)$ асимптотически устойчиво на промежутке $(0, D_1)$ изменения параметра D.

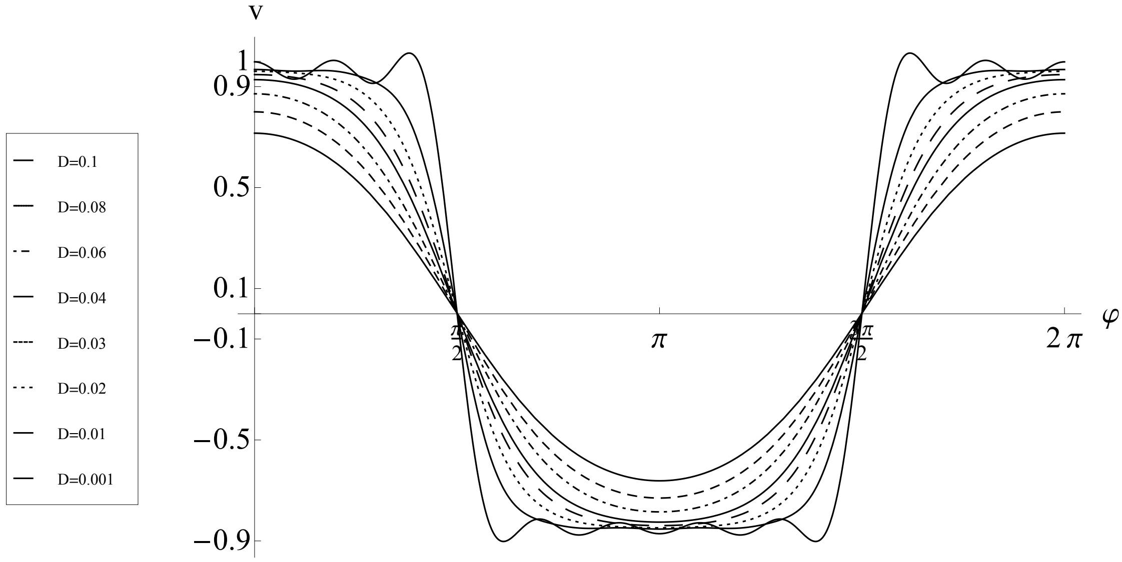

Рис. 1. Решения $v_1^+(\varphi, D)$, где $D = 0.1; 0.08; 0.06; 0.04; 0.03; 0.02; 0.01; 0.001$, $N = 10$, $\omega = 1.76$, $\Lambda = -1.17$.

Спектр стационарных точек системы дифференциальных уравнений зависит от параметра Λ. Спектры $z_+^1(D,N)$, $z_-^1(D,N)$ совпадают. В рассмотренных нами примерах, когда D от 0 до D_1 и $\cos\omega$ отходит от нуля, получено, что спектр всегда отделен от нуля. Так, например, для $\Lambda = -2.39$

$$\begin{aligned}\sigma(z^1(1.1,10)) =& \{\dots, -4.172, -3.610, -2.754, -0.591\},\\ \sigma(z^1(0.8,10)) =& \{\dots, -3.441, -3.072, -1.922, -1.211\},\\ \sigma(z^1(0.07,10)) =& \{\dots, -1.883, -1.145, -1.509, -1.669\}.\end{aligned}$$

3. Решения $v_2^\pm(\varphi, D)$

Перейдем теперь к анализу формы и устойчивости стационарных решений $v_2^\pm(\varphi, D)$ уравнения (5). Эта пара решений рождается из нуля неустойчивой с индексом неустойчивости 1 тогда, когда параметр D, убывая, проходит через $D_2 = \dfrac{D_1}{4}$. Для анализа поведения $v_2^\pm(\varphi, D)$ при отходе параметра D от точки бифуркации обратимся к системам (8). В этих системах индекс неустойчивости нуля повышается на единицу и становится равным двум тогда, когда параметр D, убывая, проходит через D_2. В результате имеет место бифуркация "вилки" — от нуля ответвляются две непрерывные ветви неподвижных точек $z_\pm^2(D,N) = (z_0, -z_{s,\pm}^2(D,N), \pm z_{k+N,\pm}^2(D,N))$, $s = \overline{0,N}$, $k = \overline{0,N}$, где от нуля отличны только координаты с индексами $4m$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Как и выше, воспользовавшись равенством (7), приходим к следующему приближенному равенству

$$v_2^{\pm}(D) = v_2^{\pm}(\varphi, D) \approx \sum_{k=0}^{N} z_{4k,\pm}^2(D,N)\cos 4k\varphi + \sum_{k=1}^{N} z_{4k+2+N,\pm}^2(D,N)\sin(4k+2+N)\varphi. \tag{10}$$

Равенства (10) позволяют описать динамику $v_2^{\pm}(\varphi, D)$ при убывании D. Отметим, что при $D \to 0$ $v_2^{\pm}(\varphi, D)$ приближается к ступенчатой функции, принимающей значения $\dfrac{3\Lambda \operatorname{ctg}\omega \pm \sqrt{9\Lambda^2 \operatorname{ctg}^2\omega + 24\Lambda^2 - 24\Lambda}}{2\Lambda}$ и точками разрыва $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi$. На рис. 2 представлены, согласно (10), приближенные решения $v_2^{-}(\varphi, D)$, где $N = 10$, $\omega = 1.76$, $\Lambda = -1.17$ и различных значениях параметра D.

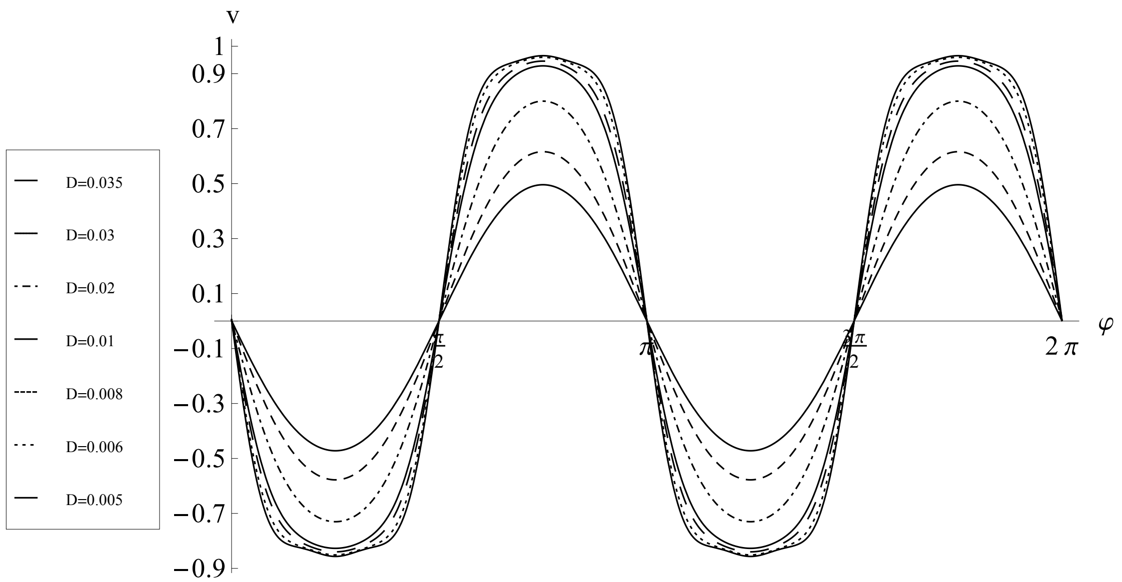

Рис. 2. Решения $v_2^{-}(\varphi, D)$, где $D = 0.035; 0.03; 0.02; 0.01; 0.008; 0.006; 0.005$, $N = 10$, $\omega = 1.76$, $\Lambda = -1.17$.

Вопрос об устойчивости $v_2^{\pm}(\varphi, D)$ при уменьшении параметра D приводит к вопросу о поведении максимального собственного значения решения $v_2^{\pm}(\varphi, D)$. Обратимся в этой связи к вопросу о динамике при уменьшении параметра D максимального собственного значения $\mu_1^2(D, N)$ неподвижных точек $z_{\pm}^2(D, N)$ системы (8). Спектр матрицы устойчивости $z_{\pm}^2(D, N)$ лежит на вещественной оси и его максимальная точка $\mu_1^2(D, N)$ при малых $D_2 - D > 0$ принадлежит положительной полуоси. Остальные точки спектра лежат на отрицательной полуоси.

Поведение $\mu_1^2(D,N)$ при уменьшении D зависит от порядка аппроксимации N. Если $N = 4n-3$, $n = 5,6,7$, то с уменьшением D $\mu_1^2(D,N)$ убывая приближается к нулю, затем медленно меняется вблизи нуля, оставаясь на положительной полуоси. Если приведенное выше условие на N не выполняется, то $\mu_1^2(D,N)$ приближается к нулю при уменьшении параметра D и при некотором $D = D^{**}(N)$ становится отрицательным. Приведем иллюстрирующий пример: $\mu_1^2(0.03,10) = 0.047$, $\mu_1^2(0.0106,10) = 0.0000596$, $\mu_1^2(0.0105,10) = -9.99 \cdot 10^{-6}$, $\mu_1^2(0.0104,10) = -0000782$, $\mu_1^2(0.006,10) = -0.00441$.

Проведенный анализ не позволяет сделать строгих заключений о характере устойчивости решений $v_2^{\pm}(\varphi,D)$ на всем интервале $(0,D_2)$ изменения D. Однако есть основания полагать, что $v_2^{\pm}(\varphi,D)$ на интервале $(0,D_2)$ сохраняет индекс неустойчивости.

4. Метаустойчивые структуры

В системах (8) размерности N согласно проведенному бифуркационному анализу для значений N от 20 до 30 реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций при средних (не очень малых) значениях параметра D. В результате бифуркации седло-узел в однопараметрической системе (8) появляются две непрерывные по D ветви стационарных точек, индексы неустойчивости которых отличаются на 1. Эти ветви стационарных точек определены для всех положительных значений параметра D, которые меньше соответствующего бифуркационного. Рассматриваемым двум ветвям стационарных точек (8) отвечают в силу (7) две непрерывные ветви приближенных стационарных решений (5) типа внутреннего переходного слоя. Будем говорить, что приближенные решения (5) указанного типа отвечают седло-узловым бифуркациям в системе (8). Некоторые из седло-узловых бифуркаций в (8) порождают непрерывные по D ветви приближенных стационарных решений (5) типа внутреннего переходного слоя с четырьмя точками перехода.

Реализация в системе (8) бифуркаций седло-узел с указанными выше свойствами вызвана медленной эволюцией вблизи нуля максимальной точки спектра ветвей стационарных точек $z_{\pm}^2(D,N)$ на достаточно большом интервале изменения параметра D. Далее для определенности ограничимся анализом бифуркаций седло-узел, связанных с ветвью стационарных точек $z_{\pm}^2(D,N)$. Бифуркации седло-узел указанного типа объединяются в конечные наборы бифуркаций, которые называются далее каскадами седло-узловых бифуркаций.

Рассмотрим один из каскадов, который порождает приближенные решения краевой задачи (5) с точками перехода, принадлежащими интервалу $(\pi,2\pi)$. Имеет место 3 таких бифуркаций с бифуркационными значениями $D = D_k$, $k = 1, 2, 3$, $D_1 > D_2 > D_3$. Здесь $D_k = D_k(N)$, $k = 1, 2, 3$. Подчеркнем, что $D_k = D_k(N)$, $k = 1, 2, 3$ убывают с ростом N. Приведем теперь в качестве иллюстрации для случая $N = 10$ приближенные бифуркационные значения D, соответствующие им координаты точек и 3 наибольшие точки их спектров:

$$D_1 = 0.0329$$

$$(0.01160, 0.179, 0.00205, 0.116, -0.00901, 0.0265, -0.000251, 0.00341, \ldots)$$

$$\{\ldots, -0.323, -0.215, 0.0000138\}$$

$$(0.01169, 0.214, 0.00267, 0.124, -0.00841, 0.0285, -0.000111, 0.00326, \ldots)$$

$$\{\ldots, -0.322, -0.217, -5.51 \cdot 10^{-8}\}$$

$$D_2 = 0.0299$$

$$(0.0143, 0.520, 0.0148, 0.196, -0.00181, -0.00867, -0.000294, -0.00711, \ldots)$$

$$\{\ldots, -0.333, -0.257, 1.3 \cdot 10^{-7}\}$$

$$(0.0144, 0.527, 0.0151, 0.195, -0.00163, 0.00936, -0.000320, -0.00732, \ldots)$$

$$\{\ldots, -0.334, -0.258, -1.35 \cdot 10^{-7}\}$$

$$D_3 = 0.00716$$

$$(0.0390, 1.0384, 0.0274, -0.101, -0.0101, -0.0767, -0.000577, 0.0711, \ldots)$$

$$\{\ldots, -0.332, -0.317, 1.3 \cdot 10^{-7}\}$$

$$(0.0392, 1.0479, 0.0275, -0.120, -0.0108, -0.0625, -0.000181, 0.0657, \ldots)$$

$$\{\ldots, -0.347, -0.320, -1.4 \cdot 10^{-7}\}$$

С целью сокращения многоточием обозначены остальные координаты стационарных точек. Устойчивая и неустойчивая ветви неподвижных точек, родившиеся в результате седло-узловой бифуркации системы (8), расходятся медленно с уменьшением параметра D. Соответственно медленно расходятся и отвечающие им в силу (7) непрерывные ветви приближенных решений краевой задачи (5).

Приведенным стационарным точкам системы (8), где $N = 10$, $D = 0.004$, отвечают приближенные решения задачи (5) на рис. 3. Очевидно, что с помощью преобразования $\varphi \to 2\pi - \varphi$ можно получить другие наборы ветвей приближенных решений.

Обозначим $v_k^{s,+} = v_k^{s,+}(\varphi, D, N)$, $v_k^{u,+} = v_k^{u,+}(\varphi, D, N)$, $k = 1, 2, 3$ непрерывные по D ветви приближенных решений (5), отвечающие соответственно в силу (7) устойчивой, неустойчивой непрерывным ветвям стационарных решений системы (8), рожденных

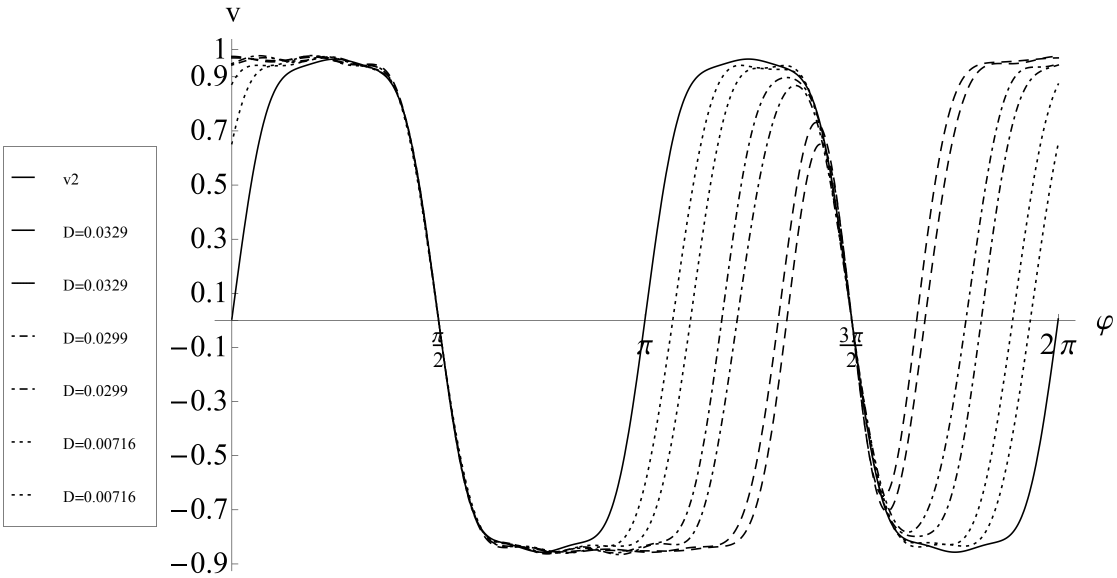

Рис. 3. Приближенные стационарные решения (5), $\Lambda = -1.17, \omega = 1.76$, $D = 0.005$.

в результате седло-узловой бифуркации с номером k. Подчеркнем, что имеет место слабая зависимость указанных функций от N.

Положим далее $N = 10$. Рассмотрим решения $S_D^t v_2^{s,+}$, $S_D^t v_2^{u,+}$ уравнения (5) с начальными условиями $v_k^{s,+} = v_k^{s,+}(\varphi, D, N)$, $v_k^{u,+} = v_k^{u,+}(\varphi, D, N)$. Согласно численным расчетам, на значительных промежутках изменения времени решения $S_D^t v_2^{s,+}$, $S_D^t v_2^{u,+}$ меняются медленно. Приближенные решения $v_2^{s,+}$, $v_2^{u,+}$ порождают метаустойчивые структуры. На рис. 4 представлено решение $S_D^t v_2^{s,+}$ уравнения (5). Видно, что в течение времени t порядка 40000 решения $S_D^t v_2^{s,+}$ медленно меняется. Затем за достаточно короткий по сравнению с этапом медленной эволюции промежуток времени $S_D^t v_2^{s,+}$ оказывается вблизи устойчивого стационарного решения.

Заключение

Проведенный анализ показал, что замена исходной задачи некоторыми упрощенными моделями является целесообразной. В галёркинских аппроксимациях уравнения (5) средних (15–25) размерностей реализуется широкий спектр седло-узловых бифуркаций. Непрерывным ветвям стационарных точек систем обыкновенных дифференциальных уравнений, рожденных в результате седло-узловых бифуркаций, отвечают непрерывные ветви приближенных стационарных решений (5). Исследована задача о приближенных стационарных решениях уравнения (5) типа переходного

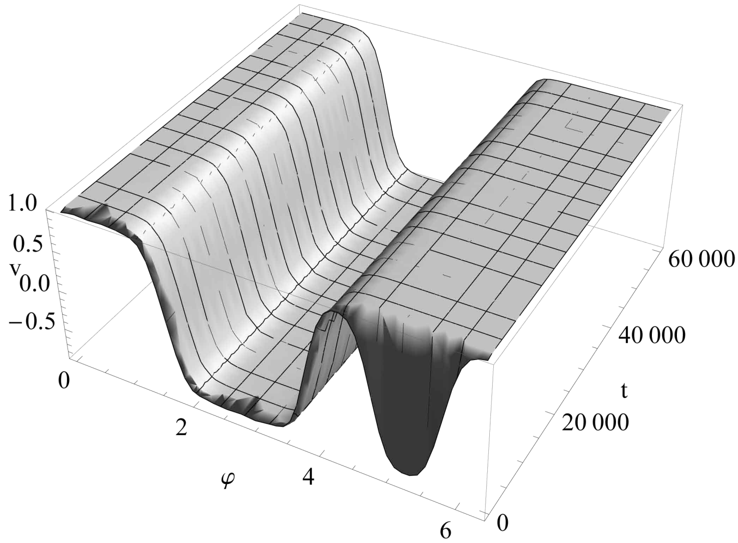

Рис. 4. Метаустойчивая структура (5), $\Lambda = -1.17$, $\omega = 1.76$, $D = 0.005$.

слоя с четырьмя точками перехода. Множество приближенных стационарных решений уравнения (5) указанного выше типа правильно отражает характер эволюции метаустойчивых структур с четырьмя точками перехода при увеличении t и при средних значениях параметра D. Последнее означает, что каждая метаустойчивая структура уравнения (5) с четырьмя точками перехода при увеличении t проходит вблизи приближенных стационарных решений (5) с двумя точками перехода. При этом речь идет о динамике метаустойчивых структур не только на стадии медленной эволюции, но и в переходной зоне. При исследовании метаустойчивых структур задача о приближенных стационарных решениях является ключевой. Установлено, что для решения этой задачи при средних значениях параметра D применение метода Галеркина приводит к качественно и количественно правильным результатам.

Список литературы

1. Ахманов, С. А., Воронцов, М. А., Иванов, В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые физические принципы оптической обработки информации. — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.

   AKHMANOV, S. A. and VORONTSOV, M. A and IVANOV, V.Y. (1990) Structure generation in optical systems with two-dimensional feedback: towards the creation of nonlinear optical analogs of neural networks. *New physical principles of optical information processing.* p. 263–325.

2. Белан, Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. — 2010. — Т. 46. — С. 95–111.

BELAN, E. P. (2010) Stationary structures in parabolic equations with inversion transformer spatial argument. *Cybernetics and Systems Analysis.* 46. p. 95–111.

3. Белан, Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. математ. физики, анализа, геометрии. — 2005. — Т. 1. — С. 3–34.

   BELAN, E. P. (2005) On the dynamics of travelling waves in a nonlinear parabolic equation with a shift transformation of the space variable. *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.* 1 (1). p. 3–34.

4. Колесов, А. Ю., Розов, Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и матем. физика. — 2004. — Т. 140. — С. 14–28.

   KOLESOV, A. Y. and ROZOV, N. K. (2004) Optical buffering and mechanisms for its occurrence. *Teoret. Mat. Fiz.* 140 (1). p. 14–28.

5. Мищенко, Е. Ф. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е. Ф. Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов. — М.: Физматлит, 2005. — 430 с.

   MISHCHENKO, E. F. and SADOVNICHIY, V. A. and KOLESOV, A. Y. and ROZOV, N. K. (2005) *The autowave processes in nonlinear media with diffusion.* Moscow: Fizmathlit.

6. Разгулин, А. В. Нелинейные модели оптической синергетики / А. В. Разгулин. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 203 с.

   RAZGULIN, A. V. (2008) *Nonlinear optical model of synergy.* Moscow: MAKS Press.

7. Воронцов, М. А., Железных, Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2. — С. 31–38.

   VORONTSOV, M. A. and ZHELEZNYKH, N. I. (1990) Transverse bistability and multistability in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback. *Mathematical modeling.* 2 (2). p. 31–38.

8. Чушкин, В. А., Разгулин, А. В. Стационарные структуры в функционально- дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестн. Моск. ун-та. — 2003. — Т. 2. — С. 13–20.

   CHUSHKIN, V. A. and RAZGULIN, A. V. (2003) Steady-state structures in a functional-differential diffusion equation with reflection of the spatial argument. *Mosc. Univ.* 2. p. 13–20.

9. Хенри, Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

   Henry, D. (1985) *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Moscow: Mir.

10. Белан, Е. П., Хазова, Ю. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче на окружности с отражением пространственной переменной // Динамические системы. — 2014. — Т. 4. — С. 43–57.

    BELAN, E. P. and KHAZOVA, Y. A. (2014) Dynamics of stationary structures in a parabolic problem with reflection spatial variable in the case of a circle. *Dynamic systems.* 4 (1–2). p. 43 – 57.

Статья поступила в редакцию 02.06.2015

УДК: 517.929

MSC2010: 34K06

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ В СЛУЧАЕ ПРОСТЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© В. Г. Цирулик

Инженерно-технологическая академия Южного федерального университета
г. Таганрог, 347922, Российская Федерация
e-mail: *tcrlk@pbox.ttn.ru*

Calculation of particular solution of inhomogeneous linear equations with almost algebraic operators in the case of simple roots of the characteristic equation.

Tsirulik, V. G.

Abstract.

In some works of the author of the monograph [7] the notion of algebraic elements and elements that are algebraic relatively the twosided ideal, so called almost algebraic elements are systematically applied to the solution of some classes of equations.

In this paper author proves that in the definition of almost algebraic element the twosided ideal may de substituted by leftsided ideal. In this case ordinary linear differential and difference operators may serve as almost algebraic elements, which are solutions of certain operator equations [8].

The concept of almost algebraic relatively left ideal elements is applied to the calculation of the partial solution of the equations of the form $L(A, B)(u) = \sum\limits_{i=0,j=0}^{n,m} a_{ij}A^iB^j(u) = f$, where A and B is linear operators. In the case when one of the operators A or B, for example, B, is almost algebraic and has only simple characteristic numbers t_i, it is associated with a finite number of operators P_i, acting in the space N and being called projectors. If B_0 is generator of the ideal I, then the space N solutions of equations $B(y) = 0$ is a direct sum of subspaces $N_i = P_i(N)$.

In the case when $B(f) = 0$ and a partial solution of the original equation exists in the space N, it can be calculated as the sum of partial solutions of many independent equations $L(A, t_i)(u_i) = P_i(f)$, prepared substituting in the original equation of the characteristic numbers t_i instead of the operator B. Partial solutions of the equations are specified by left regularizer of $L(A, t_i)$ obtained from the equation $R_iL(A, t_i) + X_iV_i = \epsilon$, where R_i is unknown left regularizer operator $L(A, t_i)$, X_i is unknown operator, V_i is operator annihilates the element $P_i(f)$, ϵ is unit operator.

In the paper are proposed an example of differential-difference equation and is then given several ways to use almost algebraic elements to finding a partial solution.

Keywords: *almost algebraic difference and differential operators, a left regularizer of linear operators, differential-difference operators, particular solution of inhomogeneous linear differential-difference equations.*

Введение

Дифференциально–разностные уравнения рассматривались разными авторами и с различных точек зрения, например, в [1] и [6]. Общая теория линейных уравнений в банаховом пространстве приведена в монографии [3]. Частные решения неоднородных линейных дифференциально-разностных уравнений можно вычислять проще, если использовать понятие почти алгебраического элемента, рассматривавшееся в работах автора [7].

1. Линейные операторы, алгебраические относительно левого идеала

Пусть N — конечномерное линейные пространство над полем комплексных чисел C, $\mathscr{A}_0$ — алгебра линейных операторов, действующих в пространстве N, I — левый главный идеал алгебры, образованный операторами, аннулирующими пространство N. Далее через $a \equiv b\,(\mathrm{mod} I)$ обозначается сравнение по модулю левого идеала I, ϵ — единица алгебры.

Определение 1. Множество Π_s, $2 \leq s \leq \dim N$, операторов $P_i \in \mathscr{A}_0$ и P_i не принадлежит I, называется оптимальным множеством разделенных проекторов пространства N мощности s относительно идеала I, если выполняются условия:

$$P_1 + \dots + P_s \equiv \epsilon(\mathrm{mod} I) \tag{1}$$

$$P_i(N) \bigcap P_j(N) = 0 \text{ при } i \neq j. \tag{2}$$

Определение 2. Множество проекторов относительно идеала I, удовлетворяющих дополнительно условию

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j & (\mathrm{mod} I), k = j, \\ 0 & (\mathrm{mod} I), k \neq j, \end{cases} \tag{3}$$

называется I — идемпотентной системой ортогональных проекторов.

В дальнейшем для краткости I — идемпотентная система проекторов.

Определение 3. Оператор A называется алгебраическим относительно левого идеала I (почти алгебраическим), если существует такой ненулевой многочлен $\nu(t)$ с коэффициентами в поле C, что $\nu(A) \in I$.

Сравни с [7], где идеал I двусторонний. Алгебраическим оператором является, например, инволюция некоторого порядка. Почти алгебраические операторы возникают как решения уравнения $XD = DY$, где D — заданный оператор, а X, Y — операторы, подлежащие определению [8]; Y — компонента решения является почти алгебраическим оператором.

Определение 4. Оператор A называется почти алгебраическим степени m, если существует нетривиальный многочлен $\nu(t)$ степени m такой, что $\nu(A) \in I$, и не существует многочлена степени меньшей чем m такого, что $\nu(A) \in I$. Если это так, то многочлен $\nu_m(t)$ называется характеристическим многочленом оператора A, а его корни называются характеристическими корнями оператора.

Далее полагаем, что почти алгебраические операторы $A \in \mathscr{A}_0$ не принадлежат идеалу I и $m \geq 2$. Старшие коэффициенты характеристических многочленов операторов будем считать равными единице.

Лемма 1. *(Ш. Эрмит) Для произвольного многочлена* $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=1}^{s}(t-t_i)^{r_i}$, *построенного по множеству пар* $(t_i; r_i)$, $i = \overline{1, s}, s \geq 2$, *где* t_i *— попарно различные комплексные числа, называемые узлами,* r_i *— натуральные числа, называемые кратностями,* $r_1 + \cdots + r_s = m$, *справедливо тождество*

$$1 \equiv \sum_{i=0}^{s} p_i(t), \tag{4}$$

где

$$p_i(t) = q_i(t_i) \prod_{j=1; j\neq i}^{s} (t - t_j)^{r_j}, \tag{5}$$

причем $q_i(t_i) = \sum\limits_{k=0}^{r_i-1} \dfrac{(t-t_i)^k}{k!} \dfrac{d^k}{dt^k} \left[\dfrac{(t-t_i)^{r_i}}{\nu_m(t)}\right]_{t=t_i}$.

Тождество (4) называется разбиением единицы.

Построим по формулам (5) операторы

$$P_j = p_j(A), \tag{6}$$

где $A \in \mathscr{A}_0$ — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=1}^{s}(t-t_i)^{r_i}$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, $r_1 + \cdots + r_s = m$.

Лемма 2. *Операторы* $P_j = p_j(A)$ *обладают свойством*

$$(A - t_j\epsilon)^{r_j} P_j \equiv 0(\mathrm{mod} I), \forall j = \overline{1, s}. \tag{7}$$

Доказательство. Действительно

$$(A - t_i\epsilon)^{r_i} P_i = (A - t_j\epsilon) q_j(A) \prod_{i=1; i\neq j}^{s} (A - t_i\epsilon)^{r_i} =$$

$$= q_j(A)\nu_m(A) \in I,\ \forall j = 1, \cdots, s.$$

□

Лемма 3. *Операторы $P_j = p_j(A)$ образуют I- идемпотентную систему проекторов.*

Доказательство. Свойство (1) следует из (4). Обозначим $N_j = P_j(N)$. Согласно (7), $(A - t_j\epsilon)^{r_j} P_j x = 0\ \forall x \in N$. А поскольку уравнения $(A - t_j\epsilon)^{r_j} y = 0$, $(A - t_i\epsilon)^{r_i} y = 0$ при $i \neq j$ не имеют общих нетривиальных решений, то $P_j(N) \bigcap P_i(N) = 0$.

Идемпотентность. По построению оператры P_j коммутативные, поэтому при $j \neq k$ получим:

$$P_j P_k = p_j(A) p_k(A) = q_j(A) q_k(A) \prod_{i=1; i\neq j}^{s} (A - t_i\epsilon)^{r_i} \prod_{i=1; i\neq k}^{s} (A - t_i\varepsilon)^{r_i} =$$

$$= q_j(A) q_k(A) \prod_{i=1; i\neq j; i\neq k}^{s} (A - t_i\epsilon)^{r_i} \nu_m(A) \in I.$$

При $j = k$ имеем:

$$P_j^2 - P_j = \sum_{i=1; i\neq j}^{s} P_j P_i \in I,$$

то есть $P_j^2 \equiv P_j (\mathrm{mod} I)$. □

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

а) *оператор $A \in \mathscr{A}_0$ является почти алгебраическим относительно левого идеала I с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod_{i=0}^{s} (t - t_i)^{r_i}$;*

б) *существуют I-идемпотентная система проекторы $P_j \in \mathscr{A}_0, j = 1, \cdots, s$;*

в) *пространство N является прямой суммой своих подпространств: $N = \bigoplus_{j=1}^{s} N_j$, $N_j = P_j(N)$.*

Доказательство. **а) → б)**. Положим $P_j = p_j(A)$, где $p_j(t)$ определяются по формуле (6), поэтому утверждение следует из формулы (4) и леммы 3.

б) → в). Из справедливости б) и по определению 1.

в) $\to$ **а)**. Пусть N является прямой суммой подпространств $N_j = P_j(N) = ker(A - t_j\epsilon)^{r_j}$. Обозначим $\nu_m(A) = \prod_{j=1}^{s}(A - t_j\epsilon)^{r_j}$. Согласно предположению $\forall x \in N$, имеем $x = \sum_{j=1}^{s} x_j$, $x_j \in N_j$. Отсюда

$$\nu_m(A)x = \nu_m(A)\sum_{j=1}^{s} x_j = \sum_{j=1}^{s}\left[\prod_{k=1;k\neq j}^{s}(A - t_k\epsilon)^{r_k}\right](A - t_j\epsilon)^{r_j}x_j = 0.$$

Следовательно, оператор A почти алгебраический степени $r_1 + \cdots + r_s = m$. $\square$

Теорема 2. *Если характеристический многочлен $\nu_m(t)$ оператора A не имеет кратных корней, то*

$$A^k \equiv \sum_{j=1}^{m} t_j^k P_j(\mathrm{mod} I), k = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

Доказательство. Так как все собственные корни оператора простые, то из (7) следует $AP_j \equiv t_jP_j(\mathrm{mod} I)$. Складывая эти сравнения, получим в силу (4)

$$A \equiv \prod_{j=1}^{s} t_jP_j(\mathrm{mod} I). \tag{9}$$

Применяя далее индукцию по k, находим

$$A^k \equiv \sum_{j=1}^{s} t_j^k P_j(\mathrm{mod} I). \tag{10}$$

$\square$

Рассмотрим теперь уравнение

$$L_r(A, B)u = f, \tag{11}$$

где $L_r = L_r(A, B) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} a_{i\,j}A^iB^j$ — оператор (многочлен от A, B), $r = \max(p, q, p + q)$ — совокупный порядок оператора, коэффициенты которого a_{ij} принадлежат некоторому полю K, содержащему поле комплексных чисел C, замкнутому относительно действия линейных операторов A, B, то есть $\forall a \in K, A(a) \in K, B(a) \in K$. Оператор L_r можно рассматривать как многочлен от A с коэффициентами, зависящими от оператора B, и записывать его как $L_r = \sum_{i=0}^{p} a_i(B)A^i$, либо как многочлен от оператора B с коэффициентами, зависящими от оператора A, и записывать его как $L_r = \sum_{j=0}^{q} b_j(A)B^j$; $\epsilon = A^0 = B^0$ — операторная единица.

Элемент f принадлежит некоторому конечномерному линейному пространству N над полем C. Далее предполагается, что операторы A, B действуют в пространстве N и, следовательно, $A, B \in \mathscr{A}_0$, I — левый главный идеал алгебры операторов $\mathscr{A}_0$, аннулирующих пространство N.

Частное решение уравнения будем искать в пространстве N, так что оператор[L_r, по предположению, кроме своей естественной области определения M действует и в этом пространстве.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (11) *оператор B — почти алгебраический относительно идеала I с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$ и простыми характеристическими корнями $t_j, j = \overline{1,m}$; P_j — I-идемпотентная система проекторов, $f_j = P_j(f)$. Если операторы $L_r(A, t_j)$, полученные из оператора $L_r(A, B)$ подстановкой чисел $t_j^i, i = \overline{0,q}$, вместо операторов B^i, действуют в пространстве и N и $kerL_r(A, t_j) \bigcap N = 0$, то частное решение уравнения* (11) *может быть вычислено как сумма частных решений системы независимых уравнений*

$$L_r(A, t_j)u_j = f_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку операторы $A, B, L_r(A, B)$ действуют в конечномерном пространстве N, то искомое решение существует. Заменив степени B^i в силу теоремы 2, получим $\sum\limits_{i=0}^{q} b_i(A) \sum\limits_{j=1}^{m} t_j^i P_j u = f$. Меняя порядок суммирования и учитывая, что $f \in N$, найдем $\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{i=0}^{q} b_i(A)t_j^i P_j u = \sum\limits_{j=1}^{m} P_j f$ или $\sum\limits_{j=1}^{m}(L_r(A, t_j)P_j u - P_j f) = 0$. Согласно предположению, правые части $(L_r(A, t_j)P_j u$ системы отличны от нуля, а пространство N, которое является прямой суммой своих подпространств N_j равно $P_j(N)$, откуда получаем (12). □

2. Почти алгебраические дифференциальные операторы

Пусть K — дифференциальное поле с дифференцированием $\delta = d/dx$ (элементами поля K являются функции $f(x)$ вещественной или комплескной переменной x), поле комплексных чисел $C \subset K$.

Обозначим через $K[\delta]$ алгебру обыкновенных линейных дифференциальных операторов (ОЛДО), то есть многочленов вида $D_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\delta^i$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$, n — порядок оператора, $\delta^0 = \epsilon$ — единица алгебры.

Почти алгебраические ОЛДО возникают, например, при рассмотрении уравнения [8]

$$XD_n = D_nY, \tag{13}$$

где $D_n \in K[\delta]$ — заданный оператор, а X, Y — операторы, подлежащие определению. Коэффициенты этих операторов, вообще говоря, принадлежат некоторому расширению $R \supset K$, полученному присоединением к полю K решений системы дифференциальных уравнений на коэффициенты операторов X, Y.

Определение 5. Решением уравнения (13) называется любая пара операторов $(X,\, Y)$ из $R[\delta] \times R[\delta]$, обращающая (13) в тождество.

Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора D_n в $R[\delta]$. Поскольку множества X и Y компонент решений уравнения (13) являются изоморфными C-алгебрами, то ограничимся рассмотрением алгебры Y, а её элементы будем называть решениями уравнения (13).

Обозначим через N пространство решений уравнения $D_n(y) = 0$. Из рассмотрения уравнения (13) следует, что операторы Y являются гомоморфизмами пространства N, $\mathscr{A}_0$ — алгебра этих операторов. Множество операторов из Y, аннулирующих пространство N, является левым идеалом в алгебре $R[\delta]$, обозначается I. Этот идеал является главным, с образующей D_n, $I = (D_n)$.

Теорема 4. *Каждая Y компонента решения уравнения* (13) *является алгебраическим оператором относительно идеала I.*

Доказательство. Оператор Y действует на пространстве N посредством матрицы определенной в некотором базисе. Пусть $\nu_n(t)$ — характеристический многочлен. Для каждого его корня t_i кратности r_i, $i = 1, \cdots, s$, оператор $(Y - t_i\epsilon)^{r_i}$ имеет ровно r_i линейно независимых решений в пространстве N, а произведение этих операторов аннулирует пространство N, значит, $\nu_n(Y) \in I$. $\square$

Пусть оператор $D_q \in K[\delta]$ таков, что оператор D_n допускает представление $D_n = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i D_q^i$, $c_i \in C$, $n = mq$. Тогда оператор D_q почти алгебраический с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=0}^{s} (t - t_i)^{r_i}$, где $t_1, t_2, \cdots, t_s$ — различные характеристические корни оператора D_q, $r_1, \cdots, r_s$, соответственно, их кратности, $r_1 + \cdots + r_s = m, m \geq 2$.

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны:*

а) *D_q — почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$;*

б) *существует s линейных операторов $P_j \in \mathscr{A}_0$ таких, что:*

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \equiv \epsilon(\mathrm{mod} I), \tag{14}$$

$$P_jP_k \equiv \begin{cases} P_j & (\mathrm{mod} I), k = j, \\ 0 & (\mathrm{mod} I), k \neq j, \end{cases} \tag{15}$$

$$(D_q - t_j\epsilon)^{r_j} P_j \equiv 0 (\mathrm{mod} I). \tag{16}$$

в) *пространство N является прямой суммой своих подпространств $N_j = \ker(D_q - t_j\epsilon)^{r_j}$, $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} N_j$, где $r_1 + \cdots + r_s = m$.*

Утверждение является следствием теоремы 1.

3. Почти алгебраические разностные операторы

Пусть K — поле функций $f(x)$ вещественной или комплексной переменной x, содержащее поле комплексных чисел C, замкнутое относительно "разностного" оператора ω, действующего по формуле $\omega f(x) = f(x+h)\ \forall f(x) \in K, h \in C$. Обозначим через $K[\omega]$ алгебру обыкновенных линейных разностных операторов (ОЛРО), то есть многочленов вида $\Omega_n = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\omega^i$, $a_i \in K$, $a_n \neq 0$, n — порядок оператора, $\omega^0 = \epsilon$ — единица алгебры.

Почти алгебраические ОЛРО возникают, например, при рассмотрении уравнения, аналогичного (13),

$$X\Omega_n = \Omega_n Y, \tag{17}$$

где $\Omega_n \in K[\omega]$ — заданный оператор, а X, Y — операторы, подлежащие определению. Коэффициенты этих операторов, вообще говоря, принадлежат некоторому расширению $G \supset K$, полученному присоединением к полю K решений системы разностных уравнений на коэффициенты операторов X, Y.

Определение 6. Решением уравнения (17) называется любая пара операторов $(X,\ Y)$ из $G[\omega] \times G[\omega]$, обращающая (17) в тождество.

Множество решений этого уравнения не пусто, поскольку в нем содержатся элементы централизатора оператора Ω_n в $G[\omega]$. Поскольку множества X и Y компонент решений уравнения (17) являются изоморфными C-алгебрами, то ограничимся рассмотрением алгебры Y, а её элементы будем называть решениями уравнения (17). Обозначим через N пространство решений уравнения $\Omega_n(y) = 0$. Из рассмотрения уравнения (17) следует, что операторы Y являются гомоморфизмами пространства N, $\mathscr{A}_0$— алгебра этих операторов. Множество операторов из Y, аннулирующих пространство N, является левым идеалом в алгебре $G[\omega]$, обозначается I. Этот идеал является главным, с образующей Ω_n, $I = (\Omega_n)$.

Теорема 6. *Каждая Y компонента решения уравнения* (17) *является алгебраическим оператором относительно идеала I.*

Доказательство. Оператор Y действует на пространстве N посредством матрицы определенной в некотором базисе. Пусть $\nu_n(t)$ — характеристический многочлен этой матрицы. Для каждого его корня t_i кратности r_i оператор $(Y - t_i\epsilon)^{r_i}$ имеет ровно r_i, $i = \overline{1, s}$, линейно независимых решений в пространстве N , а произведение этих операторов аннулирует пространство N, то есть $\nu_n(Y) \in I$. □

Пусть оператор Ω_q таков, что оператор Ω_n допускает представление $\Omega_n = \sum\limits_{i=0}^{m} c_i\Omega_q^i$, $c_i \in C$, $n = mq$. Тогда оператор Ω_q почти алгебраический с характеристическим многочленом $\nu_m(t) = \prod\limits_{i=0}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, где $t_1, t_2, \cdots, t_s$ — различные характеристические числа оператора Ω_q, $r_1, \cdots, r_s$, соответственно, их кратности, $r_1 + \cdots + r_s = m, m \geq 2$.

Теорема 7. *Следующие условия эквивалентны:*

а) Ω_q *— почти алгебраический оператор с характеристическим многочленом $\nu_m(t)$;*

б) *существует s линейных операторов $P_j \in \mathscr{A}_0$ таких, что:*

$$\sum_{j=1}^{s} P_j \equiv \epsilon (\mathrm{mod} I), \tag{18}$$

$$P_j P_k \equiv \begin{cases} P_j & (\mathrm{mod} I), k = j, \\ 0 & (\mathrm{mod} I), k \neq j, \end{cases} \tag{19}$$

$$(\Omega_q - t_j\epsilon)^{r_j} P_j \equiv 0 (\mathrm{mod} I). \tag{20}$$

в) *пространство N является прямой суммой своих подпространств $N_j = \ker(\Omega_q - t_j\epsilon)^{r_j}$, $N = \bigoplus\limits_{j=1}^{s} N_j$, где $r_1 + \cdots + r_s = m$.*

Утверждение является следствием теоремы 1.

4. Дифференциально-разностные уравнения

Применим понятие почти алгебраического элемента (оператора) к дифференциально-разностным уравнениям. Пусть поле K замкнуто относительно действия “разностного” ω и дифференциального δ операторов; $\Omega_p = \sum\limits_{i=0}^{p} b_i\omega^i \in K[\omega]$, $b_i \in K$, $\mathrm{D}_q = \sum\limits_{i=0}^{q} a_i\delta^i \in K[\delta]$, $a_i \in K$. Операторы $A_m = A_m(\Omega_p, D_q) = \sum\limits_{i=0}^{r}\sum\limits_{j=0}^{s} a_{i\,j}\Omega_p^i D_q^j$,

$a_{ij} \in K$, где $m = \max(rp, sq, rp + sq)$ — совокупный порядок оператора — можно рассматривать как алгебру $\mathscr{A}[\Omega_p]$ многочленов от Ω_p с коэффициентами, зависящими от оператора D_q, и записывать её элементы как $A_m = \sum\limits_{i=0}^{r} a_i(\mathrm{D}_q)\Omega_p^i$, либо как алгебру $\mathscr{A}[D_q]$ многочленов от оператора D_q с коэффициентами, зависящими от оператора Ω_p, и записывать её элементы как $A_m = \sum\limits_{j=0}^{s} b_j(\Omega_p)D_q^j$; $\epsilon = \omega^0 = \delta^0$ — единица алгебры.

Рассмотрим уравнение

$$A_m(\Omega_p, D_q)u = f \tag{21}$$

с оператором $A_m(\Omega_p, D_q)$ и функцией $f = f(x)$ принадлежащей пространству N решений некоторого дифференциального уравнения $D_n(y) = 0$, $D_n \in K[\delta]$, M — область определения оператора A_m, а областью его значений является пространство N.

Пусть $I = (D_n)$ — левый главный идеал алгебры $\mathscr{A}_0$, с образующей $D_n \in K[\delta]$, $D_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j\delta^j, a_j \in K$. Если оператор D_n может быть представлен в виде $D_n = \sum\limits_{i=0}^{k} c_i D_q^i$, $c_i \in C$, $n = kq$, то он является алгебраическим относительно идеала I с характеристическим многочленом $\nu_k(t) = \sum\limits_{i=0}^{s}(t - t_i)^{r_i}$, $r_1 + \cdots + r_s = k$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$.

Будем искать решение уравнения в пространстве N то есть предполагать, что оператор $A_m(\Omega_p, D_q)$ действует и в этом пространстве.

Теорема 8. *Если операторы $A_m(\Omega_p, t_j)$, полученные из оператора $A_m(\Omega_p, D_q)$ подстановкой чисел t_j^i, $i = \overline{0, s}$, вместо операторов D_q^i, действуют в пространстве N и $ker A_m(\Omega_p, t_j) \bigcap N = 0$, то частное решение уравнения* (21) *может быть вычислено как сумма частных решений системы независимых уравнений*

$$A_m(\Omega_p, t_j)u_j = f_j, j = \overline{1, s}, \tag{22}$$

где $f_j = P_j(N)$, операторы P_j — образуют I- идемпотентную систему проекторов.

Доказательство. Доказательство повторяет доказательство теоремы 3 при замене операторов A, B на операторы Ω_p, D_q, соответственно. □

Заметим, что методы решения однородных и неоднородных обыкновенных линейных разностных уравнений даны в [4], [5].

5. Пример

Вычислим частное решение уравнения

$$u(x+1)^{(4)}_{xx} - 2u(x+1)^{(4)}_{xx} + 2u(x+1)^{(2)}_{xx} - 4u(x)^{(2)}_{xx} + 2u(x+1) - u(x) = f(x) \tag{23}$$

с правой частью $f(x) = \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$.

Перепишем уравнение в операторной форме

$$A_5(u) = [(\omega - 2\epsilon)(\delta^4 + 2\delta^2 + \epsilon) + \omega + \epsilon]u = f(x). \tag{24}$$

Здесь δ — оператор дифференцирования по переменной x, оператор ω действует на функцию $f(x)$ по формуле $\omega(f(x)) = f(x+1)$. Приведем три варианта решения, выбирая различным образом почти алгебраический оператор.

Вариант 1. Запишем оператор в виде $A_5(u) = (\omega - 2\epsilon)(\delta^2 + \epsilon)^2 + \omega + \epsilon$. Правая часть уравнения принадлежит пространству решений дифференциального уравнения $D_4(u) = \left((\delta^2 + \epsilon)^2 - \frac{9}{4}\epsilon\right) u = 0$, которое принимаем в качестве пространства N. Таким образом, оператор $\delta^2 + \epsilon$ — алгебраический относительно левого главного идеала $I = (D_4)$ с характеристическим многочленом $\nu_2(t) = t^2 - \frac{9}{4}\epsilon$ и простыми характеристическими числами $t_1 = -\frac{3}{2}, t_2 = \frac{3}{2}$.

Построим проекторы по формулам (6), которые в силу простых корней имеют вид

$$P_1 = -\tfrac{1}{6}(2\delta^2 - \epsilon), P_2 \ = \tfrac{1}{6}(2\delta^2 + 5\epsilon), \tag{25}$$

тогда $P_1(f(x)) = f_1(x) = \cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right), P_2(f(x)) = f_2(x) = \exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Согласно теореме 8, для вычисления частного решения имеем систему независимых уравнений

$$A_5(t_1)u_1 = \cos\left(\sqrt{\tfrac{5}{2}}x\right), A_5(t_2)u_2 = \exp\left(\tfrac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{26}$$

Частные решения этих уравнений найдем, построив левые регуляризаторы операторов в их левых частях по формулам

$$R^j_{m_1}A_5(t_j) + B^j_{m_2}\Omega^j_1 = \epsilon, j = 1, 2, \tag{27}$$

которые рассматриваются как уравнения относительно неизвестных операторов $R^j_{m_1}$ и $B^j_{m_2}$. Операторы $R^j_{m_1}$ называются левыми регуляризаторами операторов $A_5(t_j)$, Ω^j_1 — операторы, аннулирующие функции $f_j(x) = P_j(f(x))$. В каждом случае ищем минимальное решение [2] уравнения (27).

Имеем $A_5(t_1) = A_5(t_2) = \dfrac{13}{4}\omega - \dfrac{7}{2}\epsilon$. Для первого уравнения $\Omega^1_2 = \omega^2 - 2\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\omega + \epsilon$ — оператор, аннулирующий правую часть. Поэтому минимальное решение уравнения (27) нужно искать в виде $R_1^1 = a_1\omega + b_1\epsilon$, $B_0^1 = c_1\epsilon$. Составляя и решая систему относительно a_1, b_1, c_1, получим $a_1 = \dfrac{52}{365 - 364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$, $b_1 = -\dfrac{2}{7} + \dfrac{338}{7(365 - 364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$, $c_1 = \dfrac{169}{365 - 364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$, следовательно, $u_1(x) = R_1^1(f_1(x)) = \dfrac{52\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}(x-1)\right) - 56\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)}{365 - 364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)}$.

Для второго уравнения имеем: $\Omega_1^2 = \omega - \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\epsilon$, поэтому решение уравнения (27) ищем в виде $R_0^2 = a_2\epsilon$, $B_0^2 = b_2\epsilon$. Получаем $a_2 = \dfrac{4}{-14 + 13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, следовательно, $u_2(x) = \dfrac{4\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{-14 + 13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$. Таким образом, искомое частное решение таково

$$u(x) = \frac{52\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}(x-1)\right) - 56\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)}{365 - 364\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)} + \frac{4\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right)}{-14 + 13\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Вариант 2. Строим оператор $D_3 = (\delta - \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon)(\delta^2 + \frac{5}{2}\epsilon)$, ядру N которого принадлежит правая часть уравнения. Оператор дифференцирования δ является алгебраическим относительно левого идеала $I = (D_3)$ с характеристическим многочленом третьей степени и простыми характеристическими числами $t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $t_2 = \dfrac{5}{\sqrt{2}}i$, $t_3 = -\dfrac{5}{\sqrt{2}}i$. В этом случае имеются три проектора: $P_1 = \dfrac{1}{3}(\delta^2 + \dfrac{5}{2}\epsilon)$, $P_2 = \dfrac{-i}{5i + \sqrt{5}}\delta^2 + \dfrac{i - \sqrt{5}}{2^{1/2}(5i + \sqrt{5})}\delta + \dfrac{\sqrt{5}}{2(5i + \sqrt{5})}\epsilon$ и $P_3 = \dfrac{i}{-5i + \sqrt{5}}\delta^2 - \dfrac{i + \sqrt{5}}{2^{1/2}(-5i + \sqrt{5})}\delta + \dfrac{\sqrt{5}}{2(-5i + \sqrt{5})}\epsilon$, применение которых в теореме приводит к следующей системе: $\left(\dfrac{13}{4}\omega - \dfrac{7}{2}\epsilon\right)u_1(x) = \exp\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\dfrac{13}{4}\omega - \dfrac{7}{2}\epsilon\right)u_2(x) = \dfrac{1}{2}\exp\left(-i\sqrt{\dfrac{5}{2}}x\right)$, $\left(\dfrac{13}{4}\omega - \dfrac{7}{2}\epsilon\right)u_3(x) = \dfrac{1}{2}\exp\left(i\sqrt{\dfrac{5}{2}}x\right)$. Вычисляя левые регуляризаторы операторов и применяя их к уравнениям, получим, вообще говоря, комплексные решения: $u_1(x) = 4\exp\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(-14 + 13\exp\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^{-1}$,

$u_2(x) = 2\exp\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)\left(-14 + 13\cos\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)^{-1}$, $u_3(x) = 2\exp\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}x\right) \times \times \left(-14 + 13\cos\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\right)^{-1}$. Выделив вещественную часть, придем к решению, полученному ранее.

Вариант 3. Рассмотрим кратко случай, когда почти алгебраическим элементом выбирается оператор ω. Перепишем оператор уравнения в виде $A_5(u) = (\delta^4 + 2\delta^2 + 2\epsilon)\omega - (\delta^4 + 2\delta^2 - \epsilon)$. В качестве образующей левого главного идеала выбираем разностный оператор Ω_3, аннулирующий пространство N, с базисом из функций $\exp\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, $\cos\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$, $\sin\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)$. Теперь оператор ω является алгебраическим относительно идеала $I = (\Omega_3)$ с простыми характеристическими числами $k_1 = \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k_2 = \exp\left(-i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $k_3 = \exp\left(i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$. Проекторы $P_i, i = \overline{1,3}$, зависят от оператора ω, что приводит к трем независимым уравнениям $((t_i - 1)\,\delta^4 + 2\,(t_i - 1)\,\delta^2 + (2t_i - 1)\,\epsilon)u_i(x) = P_i(f(x)$. Частные решения этих уравнений вычислим, построив с помощью уравнений (27) левые регуляризаторы операторов в левых частях.

Заключение

Понятие элементов почти алгебраических относительно двусторонних идеалов распространяется на элементы почти алгебраические относительно левых идеалов. Показано, что таковыми могут быть обыкновенные линейные дифференциальные и разностные операторы, являющиеся решениями некоторых операторных уравнений. В случае простых корней характеристического уравнения строятся соответствующие проекторы и левые регуляризаторы. Полученные результаты применяются к отысканию частных решений неоднородных обыкновенных линейных дифференциально-разностных уравнений с почти алгебраическим дифференциальным или разностным оператором.

Список литературы

1. Беллман, Р., Кук, К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 518 с.

   BELLMAN, R. E. and COOKE K. L. (1967) *Differential - difference equations.* Moscow: Mir.

2. Беркович, Л. М., Цирулик, В. Г. Дифференциальный результант и некоторые его применения // Дифференц. уравнения. — 1986. — Т. 22, № 5. — С. 750–757.

   BERKOVICH, L. M. and TSIRULIK, V. G. (1986) Differential resultant and some of its applications. *Diff. equations.* 22 (5). p. 750–757.

3. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971. — 104 с.

   KREIN, S. G. (1967) *Linear equations in a Banach space.* Moscow: Nauka.

4. Миролюбов, А. А., Солдатов, М. А. Линейные однородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1981. — 204 с.

   MIROLIUBOV, A. A., SOLDATOV, M. A. (1981) *Linear homogeneous difference equations.* Moscow: Nauka.

5. Миролюбов, А. А., Солдатов, М. А. Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.

   MIROLIUBOV, A. A., SOLDATOV, M. A. (1986) *Linear inhomogeneous difference equations.* Moscow: Nauka.

6. Мышкис, А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.

   MYSHKIS, A. D. (1972) *Linear differential equations with retarded argument.* Moscow: Nauka.

7. PRZEWORSKA-ROLEWICZ, D. (1973) *Equation which transformed argument an algebraic approch.* PWN: Elsevier.

8. Цирулик, В. Г. Некоторые приложения уравнений с некоммутативными коэффициентами в теории и практике линейных функционально-дифференциальных уравнений. — Таганрог: ЮФУ, 2012. — 198 с.

   TSIRULIK, V. G. (2012) *Some applications of equations with non-commutative coefficients in the theory and practice of linear functional-differential equations.* Taganrog: SFEDU.

Статья поступила в редакцию 21.10.2015

Андронова О. А. Случай малой интенсивности в спектральных задачах с внутренней диссипацией энергии / О. А. Андронова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 8 – 23.

УДК: 517.9:532

В статье рассмотрены спектральные задачи с внутренней диссипацией энергии и приведены простейшие свойства спектра данной задачи. Выясняется, что спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен, он зависит от интенсивности внутренней диссипации, что и обосновывает рассмотрение “модельных” спектральных задач. Результаты рассмотрения одной модельной спектральной задачи как подтверждают ранее доказанные общие свойства спектра, так и устанавливают новые факты. В случае малой интенсивности внутренней диссипации энергии получены утверждения о локализации спектра, о полноте и базисности системы корневых элементов.

Ключевые слова: *гильбертово пространство, компактный самосопряжённый оператор, классы компактности, характеристическое уравнение, динамика изменения собственных значений.*

Богатов Е. М. Некоторые заметки об истории пространств Орлича / Е. М. Богатов // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 24 – 39.

УДК: 51(09)

Работа посвящена истории создания пространств Орлича L_M, состоящих из функций, интегрируемых с выпуклой функцией $M(u)$, для которых конечен интеграл $\rho_M(u) = \int_a^b M(u(x)dx$. Проводится анализ состояния математической науки на этапе переоценки соотношения между её вычислительными и идейными аспектами. Исследуется влияние идей крупнейших европейских математиков — Э. Ландау, Ф. Рисса, У. Юнга, С. Банаха и др., на результаты которых опирался В. Орлич в 1932 – 1936 гг. при создании банахова пространства с нормой $\|u\|_{L_M}^O = sup_{\rho_N(v)\leq 1} \int_a^b uvdx$, где $N(v)$ — дополнительная к $M(u)$ по Юнгу выпуклая функция, а функция $u(x)$ удовлетворяет условию $\rho_M(ku) < \infty$ для некоторого $k > 0$. Приводятся наиболее известные представители советской и постсоветской науки, специализирующиеся на пространствах Орлича и их приложениях.

Ключевые слова: *история функционального анализа, обобщения пространств L^p, пространство Орлича L_M, В. Орлич, З. Бирнбаум, банаховы пространства, классы интегрируемых функций, норма Орлича, советская математика, польская математика*

Гаркавенко Г. В., Ускова Н. Б. Спектральный анализ разностных операторов второго порядка с растущим потенциалом / Г. В. Гаркавенко, Н. Б. Ускова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 40 – 48.

УДК: 517.9

В работе рассматривается один класс разностных операторов, соответствующий оператору Штурма – Лиувилля с растущим потенциалом при его дискретизации. Изучаются спектральные свойства операторов данного класса. Методом исследования служит предложенный А. Г. Баскаковым метод подобных операторов, обычно применяемый в спектральном анализе различных классов дифференциальных операторов. Для исходного оператора построены две допустимые тройки, в первой из которых в качестве пространства допустимых возмущений выступает банахова алгебра ограниченных линейных операторов, а во втором — банахова алгебра операторов с суммируемыми диагоналями. Получены асимптотические оценки собственных значений, собственных векторов и спектральных проекторов.

Ключевые слова: *спектр, метод подобных операторов, асимптотические оценки, разностный оператор, спектральные проекторы*

Корнута А. А. Динамика стационарных структур в параболической задаче с преобразованием отражения / А. А. Корнута // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 49 – 61.

УДК: 517.957

Рассматривается скалярное параболическое уравнение с преобразованием отражения пространственной переменной. Исследуется асимптотическая форма и устойчивость пространственно неоднородных стационарных решений, бифурцирующих из нулевого решения.

Ключевые слова: *нелинейная оптика, обратная связь, бифуркационный анализ, устойчивость, метод Галёркина*

Рыхлов В. С. О скорости равносходимости в аналоге теоремы Штейнгауза / В. С. Рыхлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 62 – 81.

УДК: 517.518.4

Хорошо известна теорема Х. Штейнгауза о равносходимости в равномерной метрике тригонометрического ряда от произведения двух функций и произведения одной

из этих функций на тригонометрический ряд от другой функции. В данной статье доказываются аналоги этой теоремы, в которых речь идет о такой же равносходимости и оценивается скорость равносходимости. Равносходимость доказывается не на всем основном отрезке, а на любом компакте основного интервала. Это упрощает выкладки. Тем более, рассмотрение всего отрезка, как правило, в приложениях полученных в статье результатов не требуется. Достаточно исследования равносходимости на любом компакте основного интервала. Результаты статьи используются при исследовании равносходимости разложений в биортогональные ряды по собственным и присоединенным функциям обыкновенных дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями и негладким коэффициентом при $(n-1)$-й производной и по тригонометрической системе. Во введении статьи дается краткая история вопроса. В первой части статьи доказывается общая теорема равносходимости в терминах модулей непрерывности разлагаемых функций в различных метриках. Во второй части статьи рассматриваются логарифмические модули непрерывности. В этом случае теорема равносходимости формулируется в более простой форме, показывается точность оценки скорости равносходимости. А именно, строятся примеры функций, свойства которых мало отличаются от свойств функций в условиях теоремы равносходимости, но равносходимости для которых уже нет. Дается оценка снизу скорости равносходимости на некоторой подпоследовательности тригонометрического ряда. В последней, третьей, части статьи доказывается теорема равносходимости для случая, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями. В этом случае также оценивается скорость равносходимости. Как частный случай, эта теорема содержит уже полученные результаты для логарифмических модулей непрерывности.

Ключевые слова: *теорема Штейнгауза, теорема равносходимости, скорость равносходимости, тригонометрический ряд, модули непрерывности, логарифмические модули непрерывности, медлнно меняющиеся функции, оценка снизу скорости равносходимости*

Хазова Ю. А. Стационарные структуры в параболической задаче с отражением пространственной переменной / Ю. А. Хазова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 82 – 94.

УДК: 517:957

Исследуется динамика стационарных структур в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения. Математической моделью системы является параболическое уравнение на окружности с преобразованием отражения пространственной

переменной. Исследуется эволюция форм и устойчивость структур при уменьшении коэффициента диффузии. В работе используется иерархия галеркинских аппроксимаций для построения системы дифференциальных уравнений. В этой системе возникает широкий спектр седло-узловых бифуркаций, которым отвечают приближенные решения исходной задачи. Данные приближенные решения порождают метаустойчивые структуры.

Ключевые слова: *параболическая задача, бифуркация, устойчивость, метод Галеркина*

Цирулик В. Г. Вычисление частных решений неоднородных линейных уравнений с почти алгебраическим оператором в случае простых корней характеристического уравнения / В. Г. Цирулик // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 3 (28). — С. 95 – 108.

УДК: 517.929

Понятие оператора, почти алгебраического относительно некоторого двустороннего идеала, алгебры линейных операторов, действующих в некоторых конечномерных линейных пространствах, распространяется на тот случай, когда идеал только левый. Рассматриваются свойства таких операторов, доказывается теорема о виде частного решения уравнения вида $\sum\limits_{i=0,j=0}^{n,m} a_{ij}A^iB^ju = f$, где A и B — линейные операторы, f — элемент некоторого линейного пространства. Результаты применяются к дифференциально-разностным уравнениям.

Ключевые слова: *почти алгебраические дифференциальные и разностные операторы, левые регуляризаторы линейных операторов, дифференциально-разностные операторы, частные решения неоднородных линейных дифференциально-разностных уравнений*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Андронова Ольга Андреевна	к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики и информатики факультета водных ресурсов и энергетики Академии строительства и архитектуры КФУ им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ *e-mail: o.andronova@list.ru*
Богатов Егор Михайлович	к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики инженерно-экономического факультета Старооскольского технологического института (филиала) Национального исследовательского технологического университета “МИСиС”, г. Старый Оскол, РФ *e-mail: embogatov@inbox.ru*
Гаркавенко Галина Валериевна	к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики и методики преподавания математики физико-математического факультета ФГБОУ ВПО “Воронежский государственный педагогический университет”, Воронеж, РФ *e-mail: g.garkavenko@mail.ru*
Корнута Анжелика Александровна	старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии КФУ им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ *e-mail: korn_57@mail.ru*
Рыхлов Виктор Сергеевич	к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, РФ *e-mail: RykhlovVS@yandex.ru*
Ускова Наталья Борисовна	к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики и физико-математического моделирования ФГБОУ ВПО “Воронежский государственный педагогический университет”, Воронеж, РФ *e-mail: nat-uskova@mail.ru*

Хазова Юлия Александровна — аспирант кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврической академии Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, РФ
e-mail: hazova.yuliya@hotmail.com

Цирулик Владимир Григорьевич — к. ф.-м. н., доцент инженерно-технологической академии Южного федерального университета, г. Таганрог, РФ
e-mail: tcrlk@pbox.ttn.ru

Подписано к печати 14.12.2015. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п.л. Тираж 50 экз. Заказ № НП/23.
Отпечатано в издательском отделе КФУ имени В. И. Вернадского
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4