Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 2 (27) ’ 2015

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2015, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический Вестник Информатики и Математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В.И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

- Функциональный анализ и его приложения
- Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы
- Спектральные и эволюционные задачи
- Математические проблемы гидродинамики
- Дискретная оптимизация
- Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений
- Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
- Дедуктивные системы и базы знаний
- Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
- Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
- Вычислительная математика

Печатается по решению ученого совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 17 от 4 декабря 2015 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

---

*В данном номере опубликованы работы участников **Крымской осенней математической школы (КРОМШ)**.*

TABLE OF CONTENTS

In this volume we publish the articles of ***Crimean Autumn Mathematical School's*** *participants.*

ОТ РЕДАКЦИИ

В данном номере журнала собрана вторая часть избранных работ участников разных лет Крымской Осенней Математической Школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ). Конференция проводится сотрудниками факультета математики и информатики Крымского федерального университета имени В.И. Вернадского каждый год осенью с 1990 года на южном побережье Крыма. В 2014 году КРОМШ-2014 организованный сотрудниками Таврического национального университета им. В.И. Вернадского при участии Российского фонда фундаментальных исследований, Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Крымского научного центра НАНУ, Математического фонда Крыма проходил с 21 по 30 сентября 2014 в городе Судаке (пансионат "Звездный").

В конференции принял участие 151 человек из России, Беларуси, Украины, Узбекистана, Казахстана и Португалии, из них действительные члены академий — 1, доктора наук — 34, кандидаты наук — 44, аспиранты, соискатели, студенты и др. — 72. Было прочитано 29 лекций, сделано 82 доклада и сообщения.

Российская Федерация была представлена, в-частности, такими учебными и научными заведениями: Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Московский физико-технический институт, Российский университет дружбы народов, Институт системного программирования РАН, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, НИУ Высшая Школа Экономики, Московский государственный областной гуманитарный институт (г. Орехово-Зуево), Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (г. Симферополь), Крымский инженерно-педагогический университет (г. Симферополь), Филиал МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Севастополе, Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова (г. Архангельск), Белгородский государственный университет, Воронежский государственный университет, Вологодский государственный педагогический университет, Институт Математики с ВЦ УНЦ РАН (г. Уфа), Санкт-Петербургский Государственный Университет, Петербургское отделение Математического института им. Стеклова, Казанский (Приволжский) Федеральный Университет, Южный Федеральный Университет (г. Ростов-на-Дону), Ростовский государственный строительный университет, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского, Самарский государственный университет.

УДК: 517.977

MSC2010: 34K35, 93C23, 93C99

DAD DYNAMICAL SYSTEMS: STABILITY, REACHABILITY AND OBSERVABILITY

© V. M. Marchenko

Belarusian State Technological University
Department of Higher Mathematics
ul Sverdlova, 13a, Minsk, 220050, Belarus
e-mail: *vladimir.marchenko@gmail.com*

Bialystok University of Technology
Faculty of Computer Science
department of mathematics
ul. Wiejska 45A ,15-351, Poland

The paper deals with linear differential-algebraic systems with delay (DAD systems) consisting of differential and difference equations. We study the stability of solutions of DAD systems and derive necessary and sufficient conditions for their asymptotic and exponential stability. A determining equation system is introduced and a number of algebraic properties of the determining equation solutions is established, in particular, the well-known Cayley-Hamilton matrix theorem is generalized to the solutions of determining equation. As a result, an effective parametric reachability and observability rank criteria are given.

Key words: differential-algebraic systems, time-delay, stability, reachability, observability.

Introduction

Scientific-technical progress, in particular, the widespread use of microprocessors in industry, subjects the development of new control systems and the support of existing ones to new, higher requirements related to the necessity of a more adequate description of these systems and the use of their specific properties, which often leads to hybrid dynamical systems. However, note that there is no common viewpoint to the notion of "hybrid systems"(see the papers [1]-[14]) and the bibliography therein). From our viewpoint, being hybrid means, in general, being inhomogeneous in the nature of the considered process or in its investigation methods. The notion "hybrid systems"can be used for systems that describe processes or objects with essentially distinct characteristics, for example, containing continuous and discrete variables (signals) in the basic dynamics, deterministic and random variables or inputs, and so on, which, in the end, defines the character (nature) of hybrid systems.

In the paper, we consider differential-algebraic time-delay (DAD) systems to which, in particular, some standard types of discrete-continuous and systems with retarded argument of neutral type can be reduced (Section 1). Such systems can be qualified as hybrid difference-differential systems or quite regular DAD systems which, in turn, a special case of descriptor (singular, implicit) systems with after-effect (for the entire collection and application see, e.g. [4], [7] [11], and references therein).

1. THE MOTIVATION: EXAMPLES OF DAD SYSTEMS

Consider a linear neutral type time-delay equation

$$\frac{d}{dt}(x(t) - dx(t-h)) = ax(t) + a_1 x(t-h), t \geq 0, \tag{1}$$

and a hybrid discrete-continuous system of the form

$$\dot{x}(t) = a_{11}x(t) + a_{12}y[k], t \in [kh, (k+1)h), \tag{2}$$

$$y[k+1] = a_{21}x(kh) + a_{22}y[k], \ k = 0, 1, ... \tag{3}$$

$$x(0) = x_0, \, y[0] = y_0. \tag{4}$$

Here $a, a_1, d, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, h$ are given real numbers, $d \neq 0, h > 0$; $y[k]$ denotes a function of integer k; the initial data x_0, y_0 are real numbers.

The objects (1)–(3) have usually been considered separately. Below we propose an unified approach to study them by reducing to DAD systems.

There are various approaches to the statement of initial-valued problem for Equation (1), in particular,

$x(\tau) = \varphi(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$,

where φ is usually of class C^1 ; some approaches require that

$$\dot{\varphi}(0) = a\varphi(0) + a_1\varphi(-h) + d\dot{\varphi}(-h),$$

the other do not, and what is more, admit jump discontinuities of function φ. Theoretically, we may consider an initial-valued problem of the form

$$x(\tau) = \varphi(\tau), \, \dot{x}(\tau) = \psi(\tau), \, \tau \in [-h, 0], \, x(+0) = x_0,$$

where ψ need not be the derivative of φ. The similar observation was made [15, p. 187–188 in the russian edition and p.169 in the english one] while reducing a second order time-delay equation to a system of equations of the first order.

To expand the solutions, we reduce time-delay equation (1) to a DAD system.

Introduce real $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ by $a_{22} = d, a_{11} + a_{12} = a, a_{11}a_{22} = -a_1$, and denote

$$x_1(t) = x(t) - a_{22}x(t-h), \, x_2(t) = x(t), \, t \geq 0. \tag{5}$$

By (1), we have
$\dot{x_1}(t)=\dot{x}(t)-d\dot{x}(t-h)=ax(t)+a_1x(t-h)=(a_{11}+a_{12})x(t)-a_{11}a_{22}x(t-h)=a_{11}(x(t)-$ $-a_{22}x(t-h))+a_{12}x(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)$, and, taking into account the first equation in (5), we obtain a DAD system of the normal form:

$\dot{x}_1(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)$,
$x_2(t)=x_1(t)+a_{22}x_2(t-h)$, $t\geq 0$,
$x_1(0)=x_{10}$, $x_2(\tau)=\varphi(\tau)$, $\tau\in[-h,0)$,

where function φ is admitted to be of more general class than C^1.

Now, turning back to System (2)-(4), denote

$$x(t)=x_1(t),\ x_2(t)=\begin{bmatrix} x(kh)\\ y[k]\end{bmatrix},\ \text{for } t\in[kh,(k+1)h),\ k=0,1,\ldots$$

Applying the Cauchy formula $x(kh+h)=e^{a_{11}(kh+h-kh}x(kh)+\int_{kh}^{kh+h}e^{a_{11}(kh+h-\tau)}a_{12}y[k]d\tau=$ $=e^{a_{11}h}x(kh)+\int_0^h e^{a_{11}(h-s)}ds\,a_{12}\,y[k],\ k=0,1,\ldots,$ to Equation (2), it is not difficult to see that System (2)–(4) can be represented as a DAD system of the symmetric form:

$\dot{x}_1(t)=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)$,
$x_2(t+h)=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t),\ t\geq 0$,

with $A_{11}=a_{11}$, $A_{12}=[0,\ a_{12}]$, $A_{21}=0$, $A_{22}=\begin{bmatrix} e^{a_{11}h} & \int_0^h e^{a_{11}(h-\tau)}d\tau\,a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

and the initial conditions are given by

$$x_1(0)=x_1(0+)=x_{10}\,x_2(\tau)=\varphi(\tau)\equiv\begin{bmatrix} x_0\\ y_0\end{bmatrix}.$$

We believe that examples from above provide the motivation for futher consideration of DAD systems.

2. SYSTEM DESCRIPTION

For $z\in R$, $[z]$ denotes the integer part of real number z; $\mathbb{C}$ denotes the field of complex numbers. Symbol $x(t)$ will be usually used to denote the value of function $x(\cdot)=x$ at the point t; $|\cdot|$ denotes a given norm in vector space $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$ and $\|\cdot\|$ is used for a norm in functional spaces. $PC(I,\mathfrak{M})$ is the set of piecewise continuous functions on $I\subset\mathbb{R}$ with values in $\mathfrak{M}$. This is a linear normed space if we equip it with the sup norm $\|\varphi\|_{PC}=\sup_{t\in I}|\varphi(t)|$.

In sequel we pay attention to the simplest DAD control and observation system of normal form:

$$\dot{x}_1(t)=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)+B_1u(t), \tag{6}$$

$$x_2(t)=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t-h)+B_2u(t),\ t\geq 0, \tag{7}$$

with the initial conditions

$$x_1(0) = x_{10} \in R^{n_1},\ x_2(\tau) = \psi(\tau),\ \tau \in [-h, 0), \tag{8}$$

and the output

$$y(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t),\ t \geq 0, \tag{9}$$

where $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}$, $B_1 \in R^{n_1 \times r}$, $A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$, $B_2 \in R^{n_2 \times r}$, $C_1 \in R^{m \times n_1}$, $C_2 \in R^{m \times n_2}$,$\psi \in PC([-h, 0], R^{n_2})$; the external action $u(t)$ for $t \geq 0$ is a piecewise continuous r-vector function (admissible control).

We regard an absolutely continuous function $x_1(\cdot)$ and a piecewise continuous function $x_2(\cdot)$ as a solution of System (6)–(8) if it satisfies the initial conditions (8), it satisfies the equation (7) for $t \geq 0$ and Equation (6) almost everywhere (a. e.) for $t \geq 0$. If Equation (6) is satisfied for all $t \geq 0$ with right-hand value at $t = 0$ then we consider the solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ as a strong solution of the system.

Computing the solution $x_1(t) = x_1(t, x_{10}, \psi, u)$, $x_2(t) = x_2(t, x_{10}, \psi, u)$, $t \geq 0$, of the system (6)–(8) by "step by step"one can prove that it exists, is unique, and its growth rate does not exceed an exponential one for any admissible control having no higher than the exponential rate of growth. This permits to apply the Laplace transform to the system.

3. STABILITY

3.1. **Problem Statement.** Consider System (6), (7) for the switched-off control:

$$u(t) = 0,\ \ t \geq 0. \tag{10}$$

Following the classical statement of the problem of stability for time-delay systems we give definitions of stability of DAD systems.

Definition 1. The zero solution of System (6), (7), (10) is said to be:

i) stable (in Lyapunov sense) if, given $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that every solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ of the system satisfying

$$|x_{10}| + \|\psi\|_{PC} \leq \delta$$

will also satisfy

$$\max_{0 \leq t < +\infty} (\|x_{1t}\|_{PC} + \|x_{2t}\|_{PC}) \leq \varepsilon,$$

where $x_{1t}(\tau) = x_1(t + \tau)$, $x_{2t}(\tau) = x_2(t + \tau)$, $\tau \in [-h, 0]$;

ii) asymptotically stable (in Lyapunov sense) if it is stable and every solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ of the system will also satisfy the relation

$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0$;

iii) exponentially stable if there are positive numbers M and α such that every solution $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ satisfies the inequality

$\max\{|x_1(t)|, |x_2(t)|\} \le M(|x_{10}| + \|\psi\|_{PC})e^{-\alpha t}$, $t \ge 0$.

3.2. **Variation-of-Constants Formulas.** Introduce matrix-valued functions $X^*_{i1}(\cdot)$, $X^*_{i2}(\cdot)$, and $Z^*_i(\cdot)$ as the solutions of the following adjoint system:

$$\dot{X}^*_{i1}(t) = X^*_{i1}(t)A_{11} + X^*_{i2}(t)A_{21},\ t \in (jh, (j+1)h), \tag{11}$$

$$X^*_{i2}(t) = X^*_{i1}(t)A_{12} + X^*_{i2}(t-h)A_{22},\ t \ge 0, \tag{12}$$

$$X^*_{i1}(kh+0) - X^*_{i1}(kh-0) = Z^*_i[k]A_{21}, \tag{13}$$

$$Z^*_i[k] = Z^*_i[k-1]A_{22},\ k = 1, ..., T_t, \tag{14}$$

with initial conditions of the form: $X^*_{i2}(\tau) = 0$, $\tau < 0$; $i = 1, 2$; $j = 0, 1, ...$;

$$X^*_{11}(0) = X^*_{11}(+0) = I_{n_1},\ Z^*_1[0] = 0; \tag{15}$$

$$X^*_{21}(0) = X^*_{21}(+0) = A_{21},\ Z^*_2[0] = I_{n_2}. \tag{16}$$

Here and throughout the following, the symbol I_k stands for the identity k by k matrix.

It is not difficult to check that $X^*_{11}(t)$ and $X^*_{12}(t) - X^*_{12}(t-h)A_{22}$ are continuous for $t \ge 0$.

Then the solution $x_1(t) = x_1(t, x_{10}, \psi)$, $x_2(t) = x_2(t, x_{10}, \psi)$ of System (6), (7), (10) can be computed by [12]

$$x_1(t) = X^*_{11}(t-0)x_{10} + \int_0^h X^*_{12}(t-\tau)A_{22}\psi(\tau-h)d\tau, \tag{17}$$

$$x_2(t) = X^*_{21}(t-0)x_{10} + \int_0^h X^*_{22}(t-\tau)A_{22}\psi(\tau-h)d\tau+$$
$$+Z^*_2[T_t]A_{22}\psi(t - T_t h - h),\ t \ge 0, \tag{18}$$

where $T_t = [\frac{t}{h}]$ is the integer part of $\frac{t}{h}$.

3.3. **Stability Criteria.** Using the method due originally to Euler, we attempt to find a solution of the form

$$x_1(t) = e^{\lambda t}c_1,\ x_2(t) = e^{\lambda t}c_2, \tag{19}$$

where $\lambda \in \mathbb{C}$, $c_1 \in \mathbb{C}^{n_1}$, $c_2 \in \mathbb{C}^{n_2}$, and $|c_1| + |c_2| \ne 0$.

Then λ, c_1 and c_2 must satisfy the equation

$$\begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} - e^{-\lambda h} A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

If the solution of this algebraic system is to be nontrivial λ must be a root of the characteristic equation

$$\det \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & I_{n_2} - e^{-\lambda h} A_{22} \end{bmatrix} = \Delta(\lambda) = 0. \tag{20}$$

Definition 2. The roots (complex, in general) of the characteristic equation (20) will be called the characteristic roots (values) of System (6), (7), (10).

Then we state:
i) the condition that all characteristic roots must have non-positive real parts is necessary for each kind of stability considered above;
ii) the condition

$$Re\, \lambda < 0 \tag{21}$$

for $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\Delta(\lambda) = 0$ is necessary for both asymptotic and exponential stability of System (6), (7), (10).

If we take the initial conditions (8) as follows $x_{10} = 0 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\psi(\tau) = \begin{cases} I_{n_2},\ \tau = -h, \\ 0,\ \tau \in (-h, 0), \end{cases}$

we conclude: if System (6), (7), (10) is asymptotically stable then all roots of the equation

$$\det(I_{n_2} - e^{-\lambda h} A_{22}) = 0 \tag{22}$$

have negative real parts, i. e. A_{22} is a Schur matrix.

Using the representations (17), (3.2) and the Laplace transforms for the matrix-valued functions $X^*_{i1}(\cdot)$, $X^*_{i2}(\cdot)$, one can prove (the details are in [12]) that functions $X^*_{21}(\cdot)$, $X^*_{22}(\cdot)$ are exponentially decreasing and as a result the conditions (21) and (7) are sufficient for asymptotic stability and exponential one as well.

Theorem 1. The following statements are equivalent:

i) A_{22} is a Schur matrix and all characteristic roots of System (6), (7), (10) have negative real parts, i. e.
Re $\lambda < 0$ for $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $\Delta(\lambda) = 0$;

ii) System (6), (7), (10) is asymptotically stable;

iii) System (6), (7), (10) is exponentially stable.

3.4. **Scalar Case.** Consider System (6), (7), (10), where

$$A_{ij} = a_{ij}, \qquad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, \tag{23}$$

are real numbers and the characteristic equation is of the form

$$\Delta(\lambda) = \lambda + \alpha_1 + \alpha_2\, e^{-\lambda h} + \alpha_3\, \lambda\, e^{-\lambda h} = 0, \tag{24}$$

where $\alpha_1 = -a_{11} - a_{12}a_{21}$, $\alpha_2 = a_{11}a_{22}$, $\alpha_3 = -a_{22}$.

By using the method of D-partitions for localization of the characteristic roots, one can prove (the details are in [12])

Theorem 2. The following statements are equivalent:

i) System (6), (7), (10), (23) is asymptotically stable;

ii) System (6), (7), (10), (23) is exponentially stable;

iii) $|a_{22}| < 1$ and all roots the characteristic equation (24) have negative real parts;

iv) $|a_{22}| < 1$ and at least one of the following conditions is satisfied: $\alpha_1 > |\alpha_2|$ or $\alpha_2 > |\alpha_1|,\; h < h^*$, where h^* is given by

$$h^* = \sqrt{\frac{1 - \alpha_3^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}} \quad \arccos\,(-\,\frac{\alpha_1 + \alpha_2\,\alpha_3}{\alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_3}). \tag{25}$$

For a simplest hybrid difference-differential system in the scalar case, Theorem 2 provides stability conditions explicitly expressed via its original parameters, which permits one to analyze problems of robust stability of such systems and estimate the limit delay preserving the property of stability.

4. REACHABILITY

4.1. **Reachability and Controllability.** For a given $q \times (n_1 + n_2)$ matrix H and a time moment $t_* \geq 0$, System (6), (7) is said to be relatively $H - t_*$-reachable if for any final system state $(x_1^*, x_2^*) \in R^{n_1} \times R^{n_2}$ there exists a piecewise-continuous control $u = u(\cdot)$ such that the corresponding solution to the system with zero initial state possesses the property

$$H \begin{bmatrix} x_1(t_*, 0, 0, u) \\ x_2(t_*, 0, 0, u) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix}.$$

In the case $H = I_{n_1+n_2}$, the system is called relatively t_*-reachable; for $H = [I_{n_1}, 0]$, it is relatively t_*-reachable with respect to x_1; and, for $H = [0, I_{n_2}$, it is relatively t_*-reachable with respect to x_2.

If, in the previous definitions, the initial state is not zero, we come to the controllability concepts (zero-controllability, for the zero final state).

The time t_* above can be omitted if the corresponding t_*-reachability (controllability) takes place for at least one value $t_* \geq 0$. Note that the reachability and controllability notions given above are not equivalent.

4.2. **Determining Equations.** Introduce matrix-valued functions $X_k^1(t)$, $X_k^2(t)$, as the solutions of the following determining equations of System (6), (7):

$$X_{k+1}^1(t) = A_{11}X_k^1(t) + A_{12}X_k^2(t) + B_1U_k(t), \tag{26}$$

$$X_k^2(t) = A_{21}X_k^1(t) + A_{22}X_k^2(t-h) + B_2U_k(t), \tag{27}$$

$k = -1, 0, 1, 2, ...;$ $t \geq 0$;
with the initial conditions

$$\begin{array}{c} X_k^1(t) = 0,\ X_k^2(t) = 0 \text{ for } k < 0 \text{ or } t < 0; \\ U_0(0) = I_r;\, U_i(\tau) = 0 \text{ for } i^2 + t^2 \neq 0 \end{array}. \tag{28}$$

It is easy to see that $X_k^i = 0$ for $t \neq kh$, $k = 0, 1, 2, ...$

We introduce the notation:
$\beta(\omega) = \det(I_{n_2} - A_{22}\omega)$, $\xi(\omega) = \det(I_{n_1} - A_{11}\omega)$,
$\eta(\omega) = \det(I_{n_2}\xi(\omega) - \xi(\omega)A_{21}(I_{n_1} - A_{11}\omega)^{-1}A_{12}\omega)$,
$A(\omega) = A_{11} + A_{12}(I_{n_2} - A_{22}\omega)^{-1}A_{21}$,
$D(\omega) = (I_{n_2} - A_{21}(I_{n_1} - A_{11}\omega)^{-1}A_{12}\omega)^{-1}A_{22}$,
$B(\omega) = B_1 + A_{12}(I_{n_2} - A_{22}\omega)^{-1}B_2$,
$\tilde{B}(\omega) = B_2 + A_{21}(I_{n_1} - (A_{11} + A_{12}A_{21})\omega)^{-1}(A_{12}B_2 + B_1)\omega$.

Then the characteristic equation of the matrix $A(\omega)$:

$$0 = \det(\lambda I_{n_1} - A(\omega)) \equiv (\beta(\omega))^{-n_1} \textstyle\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_1 n_2} r_{ij}\lambda^{n_1-i}\omega^j$$

and the characteristic equation of the matrix $D(\omega)$:

$$0 = \det(\lambda I_{n_2} - D(\omega)) \equiv (\eta(\omega))^{-n_2} \textstyle\sum_{i=0}^{n_2} \sum_{j=0}^{n_1 n_2} p_{ij}\lambda^{n_2-i}\omega^j = 0$$

are equivalent to the following ones:

$$\lambda^{n_1} = -\sum_{j=1}^{n_1 n_2} r_{0j}\lambda^{n_1-i}\omega^j - \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_1 n_2} r_{ij}\lambda^{n_1-i}\omega^j, \tag{29}$$

$$\lambda^{n_1} = -\sum_{j=1}^{n_1 n_2} r_{0j}\lambda^{n_1-i}\omega^j - \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_1 n_2} r_{ij}\lambda^{n_1-i}\omega^j, \tag{30}$$

respectively for $|\omega| \leq \omega_1$, where ω_1 is a sufficiently small real number.

Below we establish some algebraic properties of the determining equations solutions (the details are in [9]).

Lemma 1. The following identities hold:
$(A(\omega))^k B(\omega) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X^1_{k+1}(jh)\omega^j$;
$(I_{n_2} - A_{22}\omega)^{-1}A_{21} (A(\omega))^k B(\omega) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X^2_{k+1}(jh)\omega^j$;
$(I_{n_2} - A_{22}\omega)^{-1}B_2 \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X^2_0(jh)\omega^j$; $k = 0, 1, 2, ...$;
$(D(\omega))^j \tilde{B}(\omega) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} X^2_k(jh)\omega^k$, $j = 0, 1, 2, ...$;
$(I_{n_1} - A_{11}\omega)^{-1}A_{12}\omega (D(\omega))^j \tilde{B}(\omega) \equiv \sum_{k=0}^{+\infty} X^1_k(jh)\omega^k$, $j = 1, 2, ...$;
$(I_{n_1} - (A_{11} + A_{12}A_{21})\omega)^{-1}(A_{12}B_2 + B_1)\omega \equiv$
$\sum_{k=0}^{+\infty} X^1_k(0)\omega^k$, where $|\omega| \leq \omega_1$.

Lemma 2 (generalized Cayley-Hamilton theorem). The solution $X^i_k(t)$ of the determining equations (26) - (28) satisfies the characteristic equations (29), (30) and, as a result, we have ($|\omega| \leq \omega_1$):

$$X^\nu_\gamma(kh) = -\sum_{j=1}^{\min\{k,n_1n_2\}} r_{0j}X^\nu_\gamma(kh - jh) - -\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=0}^{\min\{k,n_1n_2\}} r_{ij}X^\nu_{\gamma-i}(kh - jh),$$

$k = 0, 1, 2, ...; \gamma = n_1 + 1, n_1 + 2, ...,\ \nu = 1, 2;$

$$X^\nu_k((\gamma+2-\nu)h) = -\sum_{j=1}^{\min\{k,n_1n_2^2\}} p_{0j}X^\nu_{k-j}((\gamma+2-\nu)h) - -\sum_{i=1}^{n_2}\sum_{j=0}^{\min\{k,n_1n_2^2\}} p_{ij}X^\nu_{k-j}((\gamma+2-\nu-i)h),$$

$k = 0, 1, 2, ..., \gamma = n_2, n_2 + 1, n_2 + 2, ..., \nu = 1, 2.$

4.3. **Solution Series Expansions.** Using the Laplace transform and Lemma 1, one can prove (the details are in [9]) that the solution of System (6),(7) can be represented as follows

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{ih\leq t} X^1_{k+1}(ih)\int_0^{t-ih}\frac{(t-\tau-ih)^k}{k!}u(\tau)d\tau + x_1(t, x_{10}, \psi, 0), \tag{31}$$

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{ih\leq t} X^2_{k+1}(ih)\int_0^{t-ih}\frac{(t-\tau-ih)^k}{k!}u(\tau)d\tau + \sum_{ih\leq t} X^2_0(ih)u(t-ih) + x_2(t, x_{10}, \psi, 0). \tag{32}$$

4.4. **Reachability Criteria.** Using the solution representations (31),(32) and taking into account Lemma 2, which claims that in the linear span of column-solutions to the determining equations there is a finite set of generators, we obtain

Theorem 2. System (6),(7) is

i) relatively $H - t_*$-reachable if and only if

$$\operatorname{rank}\left[H\begin{bmatrix} 0 \\ X^2_0(jh)\end{bmatrix}, H\begin{bmatrix} X^1_k(t) \\ X^2_k(t)\end{bmatrix},\ H,\ \begin{matrix} t\in[0,t_*)\cap[0,n_2h], k = 1, 2, ..., n_1, \\ j = 0, 1, ..., \min\{\left[\frac{t_*}{h}\right], n_2\}\end{matrix}\right] =$$

$$= \text{rank}\left[H \begin{bmatrix} 0 \\ X_0^2(jh) \end{bmatrix}, H \begin{bmatrix} X_k^1(t) \\ X_k^2(t) \end{bmatrix}, \begin{array}{c} t \in [0, t_*) \cap [0, n_2 h], k = 1, 2, ..., n_1, \\ j = 0, 1, ..., \min\{\left[\frac{t_*}{h}\right], n_2\} \end{array} \right];$$

ii) relatively reachable if and only if

$$\text{rank}\left[\begin{bmatrix} 0 \\ X_0^2(jh) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_k^1(t) \\ X_k^2(t) \end{bmatrix}, t \in [0, n_2 h], k = 1, 2, ..., n_1,\ j = 0, 1, ..., n_2 \right] = n_1 + n_2;$$

iii) relatively reachable with respect to x_1 if and only if

$\text{rank}[X_k^1(jh),\ k = 1, 2, ..., n_1,\ j = 0, 1, ..., n_2] = n_1;$

iv) relatively reachable with respect to x_2 if and only if

$\text{rank}[X_k^2(jh),\ k = 0, 1, 2, ..., n_1,\ j = 0, 1, ..., n_2] = n_2;$

v) relatively reachable if it is relatively reachable with respect to x_1 and, additionally, the following condition holds:

$\text{rank}[B_2,\ A_{22}B_2,\ ...,\ (A_{22})^{n_2-1}B_2] = n_2.$

5. OBSERVABILITY

For the simplicity, we concentrate on the problem of relative observability with respect to x_1.

System (6), (7), (9), (10) is said to be R^{n_1}-observable with respect to x_1 if for every $x_{10}, \tilde{x}_{10} \in R^{n_1}$ the condition $y(t, x_{10}, \psi, 0) \equiv y(t, \tilde{x}_{10}, \psi, 0)$ for every $\psi \in PC([-h, 0), R^{n_2})$ and for $t \geq 0$ implies that $x_{10} = \tilde{x}_{10}$ that, by linearity of the system, is equivalent to the implication:

$$y(t, x_{10}, 0, 0) \equiv 0,\ t \geq 0,\ x_{10} \in R^{n_1} \Longrightarrow x_{10} = 0. \tag{33}$$

For System (6), (7), (9), (10) of observation, we introduce its determining equations as follows:

$$X_k^{01}(t) = A_{11}X_{k-1}^{01}(t) + A_{12}X_{k-1}^{02}(t) + U_{k-1}(t), \tag{34}$$

$$X_k^{02}(t) = A_{21}X_k^{01}(t) + A_{22}X_k^{02}(t - h), \tag{35}$$

$$Y_k(t) = C_1X_k^{01}(t) + C_2X_k^{02}(t),\ t \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots \tag{36}$$

with initial conditions

$X_k^{01}(t) = 0, X_k^{02}(t) = 0, Y_k(t) = 0$ for $t < 0$ or $k \leq 0$;

$U_0(0) = I_{n_1},\ U_k(t) = 0$ for $t^2 + k^2 \neq 0$.

Similarly to Lemma 1 and Lemma 2, we can establish some algebraic properties of $X_k^{01}(t), X_k^{02}(t), Y_k(t)$, in particular, the following identities hold ($|\omega| < \omega_1$ and the symbols $A(\omega), D(\omega), r_{ij}), p_{ij}$ are the same as in Section 4.2:

$$(C_1 + C_2(I_{n_2} - A_{22}\omega)^{-1}A_{21})(A(\omega)^i \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} Y_{i+1}(jh)\omega^j,$$

$$(C_1(I_{n_1} - A_{11}\omega)^{-1}A_{12}\omega + C_2) \times (D(\omega))^j$$

$$(A_{21}(I_{n_1} - (A_{11} + A_{12}A_{21})\omega)^{-1}) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} Z_k(jh)\omega^{k-1},$$

$$Y_k(\gamma h) = -\sum_{j=1}^{\theta_\gamma} r_{0j} Y_k((\gamma - j)h) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\theta_\gamma} r_{ij} Y_{k-i}((\gamma - j)h)$$

$i = 0, 1, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots;\ \gamma = 0, 1, \ldots,\ k = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots,$ where $\theta_\gamma = \min\{\gamma, n_1 n_2\}$; and

$$Y_k(\gamma h) = -\sum_{j=1}^{\widetilde{\theta_k}} p_{0j} Y_{k-j}(\gamma h) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\widetilde{\theta_k}} p_{ij} Y_{k-j}((\gamma - i)h)$$

for $k = 1, 2, \ldots,\ \gamma = n_2 + 1, n_2 + 2, \ldots,$ where $\widetilde{\theta_k} = \min\{k, n_1 n_2^2\}$.

Using the Laplace transformation and algebraic properties of the determining equations solutions $X_k^{10}(t), X_k^{20}(t), Y_k(t)$, one can prove (details are in [8]) that the solution $x_1(t) = x_1(t, x_{10}, 0, 0)$, $x_2(t) = x_1(t, x_{10}, 0, 0)$, $t \geq 0$, of System (6), (7), (9), (10) can be represented as follows

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{t-jh>0} \frac{(t - jh)^k}{k!} X_{k+1}^{10}(jh) x_{10}, \tag{37}$$

$$x_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{t-jh>0} \frac{(t - jh)^k}{k!} X_{k+1}^{02}(jh) x_{10}. \tag{38}$$

and as a result we have

Theorem 3. System (6), (7), (9), (10) is R^{n_1}-observable with respect to x_1 if and only if

$$\operatorname{rank}[Y_k^T(jh),\ j = 0, ..., n_2;\ k = 1, ..., n_1]^T = n_1,$$

where symbol $()^T$ means transposition.

Similarly as above one can obtain the other observability criteria and establish an "observability-reachability"duality principle.

6. CONCLUSION AND FUTURE WORK

In this paper, we have considered the simplest stationary linear differential-algebraic systems of observation and control with delay. For such systems, the problem of stability has been studied, in particular, we have proved that, unlike in the case of classical time-delay neutral type systems, the exponential stability is equivalent to asymptotic one. Necessary and sufficient conditions for asymptotic and exponential stability have been given. In the scalar case, these conditions have been refined and expressed via the original coefficients of the system in parametric form, which permits one to keep track of how the perturbations in the coefficients affect the solutions and to find the limiting value of the delay for which stability is preserved. We introduced a determining equation system and have established a number of algebraic properties of determining equations in order to obtain an effective rank condition for relative reachability and observability in terms of determining equation solutions. The results obtained can be generalized to the problem of stabilization of DAD systems, DAD systems with several state and control delays and to problems of functional observability and controllability that will permit to formulate a general "observability-reachability-controllability"duality principle. This will be the object of another paper.

The research was carried out in the framework of the scientific collaboration (project no. S/WI/2/2011) of the Bialystok University of Technology and the Belarusian State Technological University

References

1. Кириллова, Ф.М., Стрельцов, С.В. Необходимые условия оптимальности управлений в гибридных системах // Сб. трудов Института математики Сибирского отд. АН СССР / Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР. — 1975. — Вып. 14. — С. 24–33.

   KIRILLOVA, F.M. & STREL'TSOV, S.V. (1975) Necessary optimality conditions for hybrid systems. *Control Systems, SO AN USSR.* 14. p. 24–26.

2. Ахундов, А.А. Управляемость линейных гибридных систем // Сб. трудов Института математики Сибирского отд. АН СССР / Новосибирск: Изд-во Института математики СО АН СССР. — 1975. — Вып. 14. — С. 4–10.

   AKHUNDOV, A.A. (1975) Controllability of hybrid systems. *Control Systems, SO AN USSR.* 14. p. 4–10.

3. De La Sen, M. (1996) The reachability and observability of hybrid multirate sampling systems. *Comput. Math. Applications.* 31. p. 109–122.

4. Baker, C.T.H., Paul, C.A. & Tian, H. (2002) Differential-algebraic equations with after-effect. *Comput. and Math. Applications.* 140. p. 63–80.

5. Fridman, E. (2002) Stability of linear descriptor systems with delay: a lyapunov-based approach. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 273. p. 24–44.

6. Щеглова, А.А. Наблюдаемость вырожденных линейных гибридных систем с постоянными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. — 2004. — 11. — С. 86–101.

   SHCHEGLOVA, A.A. (2004) Observability of generate linear hybrid systems. *Automatika i Telemekhanika.* 11. p. 86–101.

7. Niculesku, S.I., Fu, P. & Chen, J. (2006) On the stability of linear delay-differential algebraic systems: Exact conditions via matrix pencil solutions. *Proceedings of the 45th IEEE CDC, Dec. 13-15* . San Diego, USA. p. 834–839.

8. Marchenko, V.M., Poddubnaya, O.N. & Zaczkiewicz, Z. (2006) On the observability of linear differential-algebraic systems with delay. *IEEE Trans. Automat. Control.* 51 (8). p. 1387–1392.

9. Марченко, В.М., Поддубная, О.Н. Линейные стационарные ГДР системы: I. Представление решений; II. Относительная управляемость // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — 5; 6. — С. 24–38; 14–28.

   MARCHENKO, V.M. & PODDUBNAYA, O.N. (2006) Linear stationary differential-algebraic systems: I. Solution representation; II. Relative controllability . *Journal of Computer and Systems Sciences International.* (5; 6). p. 699–713; 858–871.

10. Марченко, В.М., Поддубная, О.Н. Представление решений гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. — 2006. — 6. — С. 741–755.

    MARCHENKO, V.M. & PODDUBNAYA, O.N. (2006) Representations of solutions of hybrid difference-differential systems . *Differential Equations.* 42 (6). p. 789–804.

11. Marchenko, V.M. (2007) DAD systems of control and observation and open problems. *Intern. J.: Mathematical Manuscripts.* 1 (1). p. 111–125.

12. Марченко, В.М., Луазо, Ж.-Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. — 2009. — 5. — С. 728–740.

    MARCHENKO, V.M. & LOISEAU, J.-J. (2009) On the stability of hybrid difference-differential systems . *Differential Equations.* 45 (5). p. 743–756.

13. Michiels, W. (2011) Spectrum based stability analysis and stabilization of systems described by delay differential algebraic equations. *IET Control Theory and Applications.* 5 (16). p. 1829–1842.

14. Марченко, В.М. Полная наблюдаемость гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. — 2011. — 11. — С. 1608–1620.

    MARCHENKO, V.M. (2011) Complete observability of differential-algebraic systems with delays. *Differential Equations.* 45 (5). p. 743–756.

15. Беллман, Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р.Беллман, К.Кук. — М.: Мир, 1967. — 548 с.

    BELLMAN, R. and COOKE, K.L. (1963) *Differential-difference equations.* New York – London: Academic Press.

Статья поступила в редакцию 11.05.2015

УДК: 519.863

MSC2010: 49L20

ОДНА ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ РЕКЛАМНОЙ СТРАТЕГИИ

© В. М. Адуков, Н. В. Адукова, К. Н. Кудрявцев

Южно-Уральский государственный университет
факультет математики, механики и компьютерных наук
просп. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Российская Федерация
e-mail: *kudrkn@gmail.com*

One discrete model of optimal advertising strategy.

Adukov V. M., Adukova N. V., Kudryavtsev K. N.

Abstract. A discrete model of optimal advertising for a monopolist-seller of a new goods is proposed. In the model, the dynamics given by a nonlinear difference equation. The nonlinearity depends on a parameter σ, $0 < \sigma < 1$, i.e. a continuous family of the models are considered. If $\sigma = 1/2$, a discrete version of the well-known model of S.P. Sethi is obtained. The seller's objective is to maximize its profit up to the finite horizont T by the optimal advertising expenditure. This problem is a discrete multi-step optimal control problem, where advertising expenditure is a control variable. The Bellman method of dynaming programming is used to solve the problem. Explicit recurrence relations for the optimal control and the market share up to the step t, $t = 1, \ldots, T$, are obtained under the assumption that the difference equation of the model has a solution. Sufficient conditions on the parameters of the model guaranteeing existence of a solution are found. The proposed algorothm is implemented as the procedure OptimalAdvertising in the package Maple. Numerical experiments with the procedure were carried out.

Key words: advertising, competition, optimal control, discrete model, dynamical programming.

Введение

Во многих отраслях экономики компании конкурируют за долю рынка, в основном, за счет рекламы. Одна из первых моделей, описывающих влияние уровня рекламы на занимаемую фирмой долю рынка, была предложена в 1957 г. Видалем и Вольфом в [1]. В ней зависимость между объемом продаж $s(t)$ и затратами на рекламу $u(t)$ в момент времени t задается дифференциальным уравнением

$$\dot{s}(t) = \gamma u(t)\,[m - s(t)] - \delta s(t), \quad s(t_0) = s_0, \tag{1}$$

где m – максимальный объем продаж, параметр γ характеризует эффективность рекламы, а δ – скорость, с которой потребитель «забывает» продукт.

Другая «классическая» модель была предложена Сети в 1983 г. в статье [2]. Здесь изменение динамики доли рынка $x(t)$ задается уже нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = \rho u(t)\sqrt{1 - x(t)} - \delta x(t), \quad x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

Зоргер в 1989 г. в [3], объединив модель Сети с ланчестерской моделью, построил модель рекламной конкуренции в дуополии.

Заметим, что как указанные, так и большое число последующих работ, использовали непрерывные модели. Дискретные постановки авторы обнаружили лишь в [4, 5] и [6]. Вместе с тем, сам характер финансирования и проведения рекламных акций часто подразумевает дискретный характер задачи.

В настоящей работе предлагается дискретная динамическая модель, включающая в себя, как частные случаи, дискретные аналоги моделей Видаля-Вольфа (1) и Сети (2). Заметим, что эта модель отвечает всем «желаемым» свойствам [7]. А именно, доля рынка имеет вогнутый отклик на рекламу и уровень насыщения.

1. Модель

Рассмотрим задачу определения оптимального объема рекламных расходов компании, реализующей уникальный продукт и не имеющей конкурентов на рынке. Мы будем пользоваться динамической моделью в дискретном времени, ввиду дискретного характера принятия решения.

Пусть $t = 1, \dots, T$ – моменты времени, когда принимались решения (шаги динамического процесса); T – число моментов принятия решения; $X(t)$ – доля рынка, принадлежащая компании в момент времени t ($X(t) \in [0, 1]$); X_0 – доля рынка в начальный момент времени; $u(t)$ – расходы на рекламу в момент времени t; δ – коэффициент, показывающий на сколько снижается доля рынка при отсутствии рекламы, $\delta \in [0; 1]$; ρ – параметр эффективности рекламы, $\sigma \in (0, 1)$ – параметр нелинейности задачи.

Мы будем исследовать обобщение дискретного аналога непрерывной модели из [2], [8]. В изучаемой нами модели $X(t)$ определяется из разностного уравнения:

$$X(t+1) = (1-\delta)X(t) + \rho u(t)[1 - X(t)]^{1-\sigma}, \; t \in [0; T), \; X(0) = X_0. \tag{3}$$

Предполагается, что параметры δ, ρ, σ и управление $u(t)$ таковы, что $X(t) \in [0, 1]$ на каждом шаге t.

Выбор дополнительного слагаемого в форме $\rho u(t)[1 - X(t)]^{1-\sigma}$ объясняется также, как и в модели Сети. С одной стороны, рекламные усилия (то есть управление $u(t)$) должны действовать на не проданную порцию товара (то есть на долю рынка

$1 - X(t))$. С другой стороны, разность между нелинейным слагаемым $[1 - X(t)]^{1-\sigma}$ и линейным $1 - X(t)$ представляется в виде

$$[1 - X(t)]^{1-\sigma} - [1 - X(t)] = \sigma X(t)[1 - X(t)] + \frac{\sigma(\sigma+1)}{2} X^2(t) + \ldots$$

и при достаточно малых $X(t)$ пропорциональна $X(t)[1 - X(t)]$. Таким образом, как и в работе [2], можно считать, что

$$\rho u(t)[1 - X(t)]^{1-\sigma} \approx \rho u(t)\big(1 - X(t)\big) + \sigma\rho u(t)X(t)\big(1 - X(t)\big).$$

Слагаемое $\sigma\rho u(t)X(t)\big(1 - X(t)\big)$, зависящее и от проданной порции товара $X(t)$, и от еще нереализованной порции $1-X(t)$, можно объяснить как дополнительный фактор, создающий позитивный эффект рекламы за счет процесса устной коммуникации.

Расходы на рекламу $u(t)$ рассматриваются как управление данной динамической системой. Вся последовательность управления представляет собой вектор

$$u = (u(0), u(1), \ldots, u(T-1)) .$$

Управление $u(t)$ используется для того, чтобы найти оптимальный объем рекламных расходов для достижения максимального размера прибыли к моменту времени $t = T$.

В нашей модели этот размер прибыли задается формулой:

$$J = \frac{mX(T)}{(1+r)^T} + \sum_{k=0}^{T-1} \frac{mX(k) - cu^{1/\sigma}(k)}{(1+r)^k}. \tag{4}$$

Здесь m – коэффициент перевода объема рынка в его денежный эквивалент, r – коэффициент дисконтирования на начальный момент времени, c – параметр, характеризующий стоимость рекламы. В дальнейшем без ограничения общности мы можем считать, что $c = 1$, проведя в функционале J соответствующее масштабирование.

Расходы на рекламу учитываются в функционале J в виде слагаемого $-\sum\limits_{k=0}^{T-1} \dfrac{cu^{1/\sigma}(k)}{(1+r)^k}$. Нелинейный характер стоимости рекламы применяется для того, чтобы учесть убывающую отдачу ($0 < \sigma < 1$) маркетинговых усилий на прибыль фирмы. Наиболее часто в литературе встречается (например, [9, 10]) квадратичная структура стоимости рекламы $u^2(k)$. В нашей модели рассматривается более общая ситуация, когда параметр нелинейности $1/\sigma$ может меняться от 1 до ∞. Важным аргументом в пользу такого выбора нелинейности является тот факт, что в этом случае задача может быть решена аналитически.

Эквивалентным подходом может быть перенос нелинейности (в «обратной» степени) в динамическое уравнение и учет рекламных расходов линейно — в целевой функции (например, [3] и [5]). Подробное обсуждение этих вопросов в [11].

2. Построение оптимального управления

В этом разделе, используя подходящую модификацию метода динамического программирования Беллмана из [12], мы получим рекуррентную формулу для оптимального управления. Итак, будем строить $T+1$ *функцию Беллмана*

$$V^{(0)}(X(0)), V^{(1)}(X(1)), \dots, V^{(T)}(X(T))$$

и последовательность оптимальных управлений $u^* = (u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(T-1))$.

Решение задачи осуществляется в обратном порядке, начиная с конечного шага T. Функция Беллмана на шаге T имеет вид:

$$V^{(T)}(X(T)) = \max_{u(T)\geqslant} \frac{mX(T) - u^{1/\sigma}(T)}{(1+r)^T} = \frac{mX(T)}{(1+r)^T},$$

поскольку управление $u(T)$ на этом шаге отсутствует. Напомним, что мы считаем $c = 1$. Для того, чтобы получить в дальнейшем единую рекуррентную формулу, запишем $V^{(T)}(X(T))$ в виде:

$$V^{(T)}(X(T)) = \frac{m}{(1+r)^T}[\alpha_T X(T) + \beta_T].$$

где $\alpha_T = 1, \beta_T = 0$.

Функция Беллмана на шаге k определяется следующим образом:

$$V^{(k)}(X(k)) = \max_{u(k)\geqslant 0} W(k, X(k), u(k)) = \max_{u(k)\geqslant 0}\Big[\frac{mX(k) - u^{1/\sigma}(k)}{(1+r)^k} + V^{(k+1)}\Big],$$

где k пробегает последовательно все значения от $T-1$ до 0. Это определение означает,что мы оптимизируем расходы на рекламу на k-м шаге, учитывая полученный к этому шагу объем продаж $X(k)$. Значение $u(k) = u^*(k)$, на котором достигается максимум функции $W(k, X(k), u(k))$, и есть искомое оптимальное управление на шаге k. Ясно, что значение $V^{(0)}(X(0))$ и есть максимальное значение целевой функции.

Основным результатом работы является следующие две теоремы, которые показывает, что решение оптимизационной задачи может быть построено явно с помощью рекуррентных соотношений.

Теорема 1. *Если параметры $\delta, m, \rho, r, \sigma$ модели таковы, что решение оптимизационной задачи существует, то последовательность функций Беллмана и последовательность оптимальных управлений строятся по рекуррентным формулам*

$$V^{(k)}(X(k)) = \frac{m}{(1+r)^T}\big[\alpha_k X(k) + \beta_k\big], \tag{5}$$

$$u^*(k) = \left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} [1 - X(k)]^\sigma, \tag{6}$$

где

$$\alpha_k = \alpha_{k+1}\left[(1-\delta)-(1-\sigma)\rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right]+(1+r)^{T-k}, \tag{7}$$

$$\beta_k = \beta_{k+1}+(1-\sigma)\rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}. \tag{8}$$

и $\alpha_T = 1, \beta_T = 0$. *Здесь* $X(k)$ *находится из следующего линейного разностного уравнения, полученного из* (3) *при* $u(k) = u^*(k)$*:*

$$X(k+1) = \left[1-\delta-\rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right]X(k)+\rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции. Для проверки базы индукции найдем функцию Беллмана на $T-1$ шаге.

Эта функция находится из равенства:

$$V^{(T-1)}(X(T-1)) = \max_{u(T-1)\geqslant 0} W^{(T-1)} = \max_{u(T-1)\geqslant 0}\left[\frac{mX(T-1)-u^{1/\sigma}(T-1)}{(1+r)^{T-1}}+V^{(T)}\right].$$

После подстановки $X(T)$ из рекуррентного уравнения (3) в $V^{(T)}$, получаем

$$W^{(T-1)} = \frac{mX(T-1)-u^{1/\sigma}(T-1)}{(1+r)^{T-1}}+$$
$$+\frac{m}{(1+r)^T}\Big((1-\delta)X(T-1)+\rho u(T-1)[1-X(T-1)]^{1-\sigma}\Big)$$

Легко проверить, что максимум функции $W^{(T-1)}$ по переменной $u(T-1)$ достигается при управлении

$$u^*(T-1) = \left(\frac{m\rho\sigma}{(1+r)}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}[1-X(T-1)]^{\sigma},$$

что соответствует формуле (6) при $k = T-1$.

Подставляя найденное на шаге $T-1$ оптимальное управление $u^*(T-1)$ в $W^{(T-1)}$, получаем функцию Беллмана $V^{(T-1)}(X(T-1))$:

$$V^{(T-1)}(X(T-1)) =$$
$$\frac{m}{(1+r)^T}\left[\left((1+r)+(1-\delta)-\rho(1-\sigma)\left(\frac{m\sigma\rho}{1+r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right)X(T-1)+\rho\left(\frac{m\sigma\rho}{1+r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right].$$

Обозначим

$$\alpha_{T-1} = (1-\delta) - \rho(1-\sigma)\left(\frac{m\sigma\rho}{1+r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} + (1+r), \quad \beta_{T-1} = \rho(1-\sigma)\left(\frac{m\sigma\rho}{1+r}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}.$$

Таким образом функцию Беллмана на шаге $T-1$ можно записать в виде:

$$V^{(T-1)}(X(T-1)) = \frac{m}{(1+r)^T}\Big[\alpha_{T-1}X(T-1) + \beta_{T-1}\Big],$$

где α_{T-1}, β_{T-1} находятся по формулам (7) и (8) при $k = T-1$. База индукции проверена.

Сделаем индукционное предположение. Пусть на шаге $k+1$ была получена функция Беллмана

$$V^{(k+1)}(X(k+1)) = \frac{m}{(1+r)^T}\big[\alpha_{k+1}X(k+1) + \beta_{k+1}\big].$$

Найдем функцию Беллмана $V^{(k)}(X(k)) = \max_{u(k)\geqslant 0} W^{(k)}$ на шаге k. Здесь

$$W^{(k)} = \frac{mX(k) - u^{1/\sigma}(k)}{(1+r)^k} + V^{(k+1)}(X(k+1)) =$$

$$= \frac{mX(k) - u^{1/\sigma}(k)}{(1+r)^k} + \frac{m}{(1+r)^T}\big[\alpha_{k+1}X(k+1) + \beta_{k+1}\big].$$

Стационарная точка функции $W^{(k)}$ по переменной $u(k)$ есть

$$u^*(k) = \left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}[1-X(k)]^\sigma.$$

Поскольку

$$\big(W^{(k)}\big)'' = -\frac{1-\sigma}{(1+r)^k\sigma^2}u^{\frac{1-2\sigma}{\sigma}}(k) < 0,$$

то в точке $u^*(k)$ достигается максимум функции $W^{(k)}$. Таким образом, мы доказали, что оптимальное позиционное управление $u^*(k)$ находится по формуле (6).

Теперь можно найти функцию Беллмана $V^{(k)}(X(k)) = W^{(k)}\,|_{u(k)=u^*(k)}$ на k-м шаге:

$$V^{(k)}(X(k)) =$$

$$\frac{m}{(1+r)^T}\left\{\left[(1-\delta)\alpha_{k+1} - (1-\sigma)\rho\alpha_{k+1}\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} + (1+r)^{T-k}\right]X(k)\right.$$

$$\left. + \beta_{k+1} + \left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right\}$$

Таким образом,

$$V^{(k)}(X(k)) = \frac{m}{(1+r)^T}\big[\alpha_k X(k) + \beta_k\big],$$

где α_k, β_k находятся по формулам (7) и (8). □

Укажем теперь некоторые достаточные условия на параметры модели, которые гарантируют существование оптимального решения. Нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть последовательность* $\{\alpha_k\}_{k=0}^T$ *определена рекуррентным соотношением*

$$\alpha_k = \alpha_{k+1}\left[(1-\delta) - (1-\sigma)\rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_{k+1}}{(1+r)^{T-k}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}\right] + (1+r)^{T-k}, \quad \alpha_T = 1.$$

Если выполнено неравенство

$$m\sigma\rho^{\frac{1}{\sigma}} < r+\delta, \tag{10}$$

то числа $b_k = \rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_k}{(1+r)^{T-k+1}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$, $k = 0, 1, \ldots, T$, *удовлетворяют неравенствам*

$$b_k < 1. \tag{11}$$

Доказательство. Из определения b_k следует, что неравенства (11) равносильны

$$\alpha_k < \frac{(1+r)^{T-k+1}}{m\sigma\rho^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

При $k = T$ неравенство, очевидно, выполнено, т.к. $\delta \in [0,1]$. Пусть $\alpha_{k+1} < \frac{(1+r)^{T-k}}{m\sigma\rho^{\frac{1}{\sigma}}}$. Тогда из рекуррентного соотношения для α_k и неравенства (10) получаем

$$\alpha_k < \alpha_{k+1}(1-\delta) + (1+r)^{T-k} < \frac{(1+r)^{T-k}}{m\sigma\rho^{\frac{1}{\sigma}}}\left[1-\delta+m\sigma\rho^{\frac{1}{\sigma}}\right] < \frac{(1+r)^{T-k+1}}{m\sigma\rho^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

□

Теорема 2. *Если выполнено условие* (10), *то решение, построенное в теореме 1 по формулам* (5) – (9), *существует.*

Доказательство. Ясно, что нам нужно лишь доказать, что решение $X(k)$ линейного разностного уравнения (9) удовлетворяет условию $X(k) \in [0,1]$. Перепишем это уравнение в виде

$$X(k+1) = X(k)(1-\delta) + [1-X(k)]b_k, \tag{12}$$

где $b_k = \rho\left(\frac{m\sigma\rho\alpha_k}{(1+r)^{T-k+1}}\right)^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$.

По лемме 1 числа $b_k \in [0,1]$. Таким образом, $1-\delta$ и $b_k \in [0,1]$.

При $k = 0$ начальное значение $X_0 \in [0,1]$. Поэтому $X(1) = X(0)(1-\delta)+[1-X(0)]b_0$ также принадлежит отрезку $[0,1]$, как выпуклая комбинация точек $1-\delta$ и b_0.

Предположим, что $X(k) \in [0,1]$. Из уравнения (12) тогда следует, что $X(k+1$ как как выпуклая комбинация точек $1-\delta$, b_0 принадлежит $[0,1]$. Теорема доказана индукцией по k. $\square$

Итак, мы получили рекуррентную последовательность оптимальных управлений

$$u^* = (u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(T-1))$$

и последовательность функций Беллмана

$$V^{(0)}(X(0)), V^{(1)}(X(1)), \dots, V^{(T)}(X(T)).$$

При этом максимум функционала (4) совпадает со значением функции Беллмана $V^{(0)}(X(0))$, то есть

$$\max_u J(u) = V^{(0)}(X(0)).$$

3. Численное моделирование

Теоремы 1 и 2 позволяют предложить следующий алгоритм решения задачи нахождения оптимальных расходов на рекламу.

Algorithm Optimal Advertising

Input: $T \in \mathbb{N}$ – число моментов принятия решений; $X_0 \in [0,1]$ – доля рынка компании в начальный момент времени; $\delta \in [0,1]$ – коэффициент снижения доли рынка при отсутствии рекламы; m – коэффициент перевода объема рынка в денежный эквивалент; ρ – параметр эффективности рекламы; r – коэффициент дисконтирования; $\sigma \in (0,1)$ – параметр «нелинейности» модели.

Output: $u^* = (u^*(0), u^*(1), \dots, u^*(T-1))$ – последовательность оптимальных управлений (расходов на рекламу); $V^{(0)}(X(0)), V^{(1)}(X(1)), \dots, V^{(T)}(X(T))$ – последовательность функций Беллмана ($V^{(0)}(X(0))$ – максимальный размер прибыли, достигнутый к шагу $k = T$); $X(k)$ – доля рынка, занимаемая на шаге k ($k = 1, 2, ..., T$).

Step 1. Initialization.

Setting of initial values of the input parameters.

Step 2. Verification of X_0, δ, σ. If $X_0 \notin [0,1]$, or $\delta \notin [0,1]$, or $\sigma \notin (0,1)$ then STOP.

Step 3. Verification of the sufficient condition. If test := $\frac{1-\delta+\mathrm{m}\sigma\rho^{1/\sigma}}{1+\mathrm{r}}$ $\geq$1 then STOP.

Step 3. Finding α_k, β_k.

The coefficients α_k, β_k is defined by formulas (7), (8) with the initial values $\alpha_T = 1$, $\beta_T = 0$.

Step 3. Finding $X(k)$.

The fraction of the total market $X(k)$ is found from linear difference equation (9) by the initial value $X(0) = X_0$.

Step 4. Finding $V(k)$, u^*.

The Bellman functions $V^{(k)}$ and the optimal control $u^*(k)$ is found by formulas (5), (6).

Step 5. End of the algorithm.

Предлагаемый алгоритм был реализован в виде процедуры **OptimalAdvertising** в системе Maple. При обращении к процедуре задаются параметры: T, X0 := X_0, δ, m, ρ, r, σ. Процедура возвращает вектора U, V, X и строит графики pointU, pointX.

Рассмотрим примеры использования этой процедуры для решения модельных примеров.

Пример 1. Приведем пример обращения к процедуре.

```
> restart; with(plots):
> T := 24; X0:=0.5; delta:=0.2; m:=0.6; rho:=0.5; r:=0.1; sigma:=0.8;
> OptimalAdvertising(T,X0,delta,m,rho,r,sigma);
the total advertising effors=3.565690
the value of the profit functional=1.459383
the maximal value of the profit functional=1.479754
>display({pointU, polygU}); display({pointX, pointY, polygX, polygY});
```

Процедура возвращает оптимальное управление U, последовательность функций Беллмана V и долю рынка X на каждом шаге динамического процесса. Кроме того, найдена общая сумма рекламных затрат sumU = 3.565690. Для сравнения, кроме графика доли рынка при оптимальных расходах (графики pointX, polygX) построен также график доли рынка при равномерном распределении затрат на рекламу на каждом шаге (графики pointY, polygY).

На рисунках приведены графики, полученные начальной доле рынка $X(0) = 0.3$ и значениях параметров $T = 24$ $\delta = 0.2$, $m = 0.6$, $\rho = 0.5$, $r = 0.1$ и различных значениях σ. Так рисунок 1 получен при значении $\sigma = 0.9$, рисунок 2 при $\sigma = 0.5$, а рисунок 3 при $\sigma = 0.1$. Анализируя эти случаи, можно заметить, что чем больше значения σ, тем меньше значения оптимальных управлений (то есть средств, вкладываемых в рекламу). Соответственно, ниже и доля рынка, контролируемого компанией.

Кроме того, можно заметить, что (при рассмотренной начальной доле рынка в 30%) оптимальные расходы на рекламу в первый период максимальны, что можно трактовать как «массированную» рекламную компанию с целью подъема объема продаж. Затем они снижаются до некоторого «среднего уровня», на котором стабилизируются, и в последние периоды снижаются до нуля.

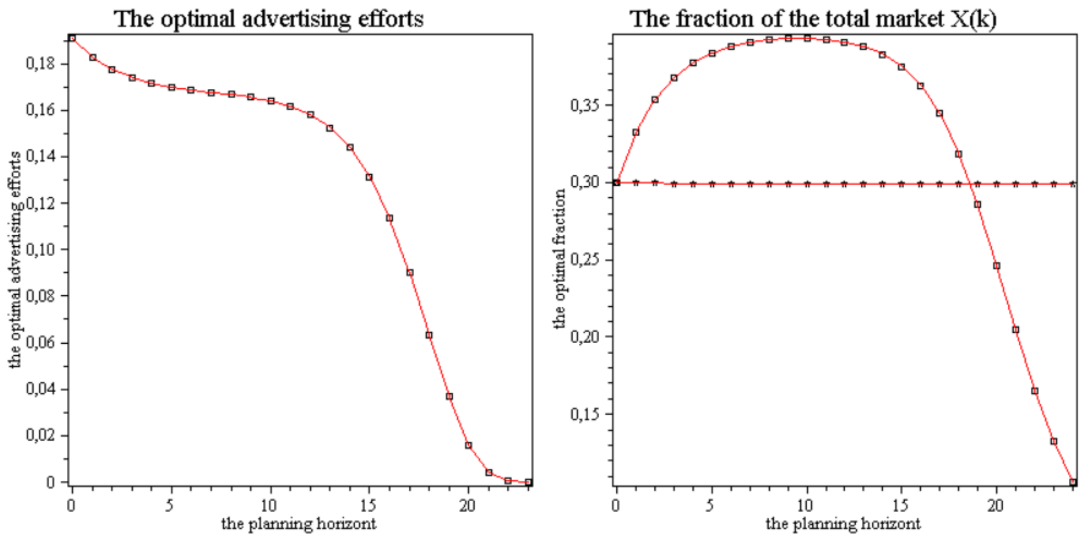

Рис. 1. Случай $\sigma = 0.9$

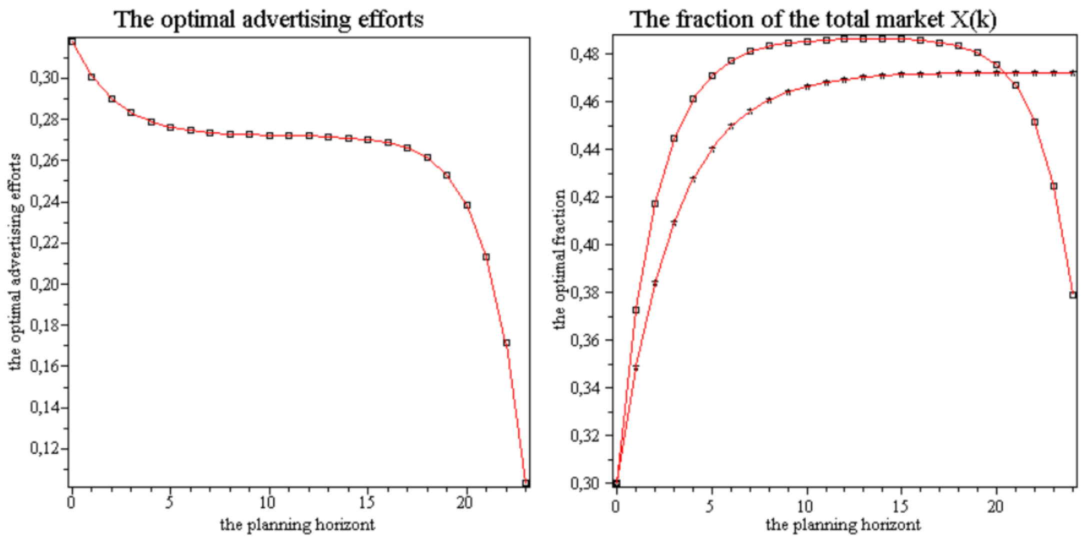

Рис. 2. Случай $\sigma = 0.5$

Заключение

В работе предложена дискретная модель оптимального планирования рекламной стратегии, частными случаями которой являются дискретные аналоги «классических» моделей оптимизации управления рекламой. Так при $\sigma = 0.5$ получается модель Сети из [2], а при $\sigma = 0$ — модель Видаля–Вольфа [1]. Видимо, для разных рынков надо использовать различные значения параметра σ. Точный подбор

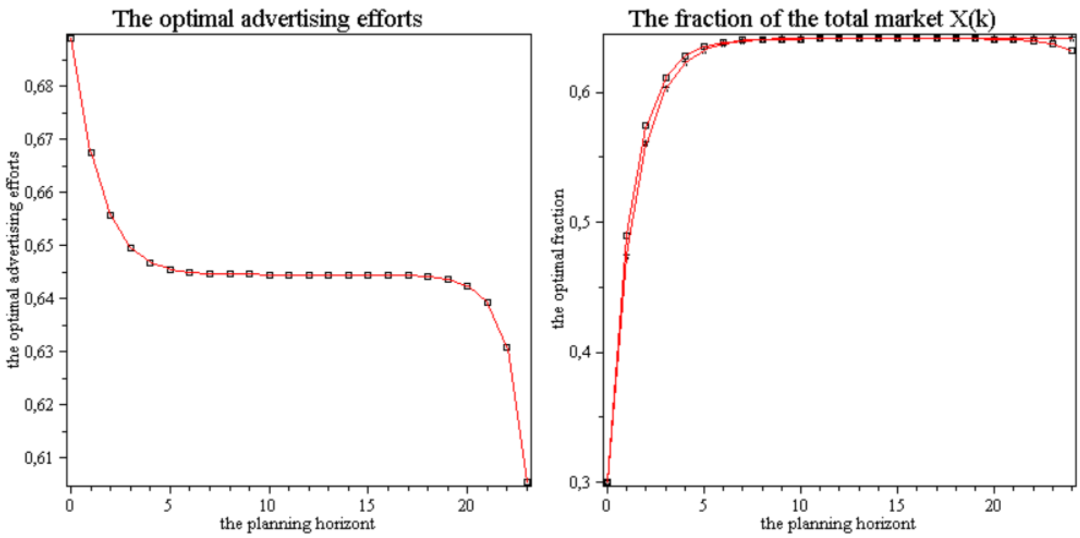

Рис. 3. Случай $\sigma = 0.1$

подходящих параметров для конкретного рынка возможен при обработке достаточного количества статистических данных. В данной же статье цели моделирования какого-либо определенного рынка не ставилось. Однако предлагаемый алгоритм может быть легко применен для построения оптимальной рекламной стратегии и на реально действующих рынках.

Развитием работы может служить дискретная модель управления рекламой на конкурентном рынке – игровая постановка задачи. Попытка построить такую модель (в аналоге игры Зоргера [3]) была предпринята в [13]. Еще одним направлением будущих исследований является учет в модели неопределенностей, например, следуя предложенным В.И. Жуковским в [14] и [15] подходам.

Список литературы

1. VIDALE, M.L. & WOLFE, H.B. (1957) An Operations-Research Study of Sales Response to Advertising. *Operations Research.* 5 (3). p. 370–381.

2. SHETI, S.P. (1983) Deterministic and stochastic optimization of dynamic advertising model. *Optimal Control Applications and Methods.* 4 (2). p. 179–184.

3. SORGER, G. (1989) Competitive Dynamic Advertising: A modification of the Case game. *Journal of Economics Dynamics and Control.* 13. p. 55–80.

4. Грачева, С.С., Першин, М.А. Дискретная задача оптимизации рекламной политики компании в случае линейной модели динамики спроса // Управление экономическими системами. — 2013. — Т. 3. — № 51. — С. 26.

GRACHEVA, S.S. & PERSHIN, M.A. (2013) Optimal advertising expenditures of a monopolist with an only good in discrete linear model. *Management of Economics Systems.* 3 (51). p. 26.

5. Грачева, С.С. Оптимизация рекламной стратегии компании для случая нелинейной функции спроса // Вестник Самарского государственного университета. — 2014. — № 2(113). — С. 180–185.

   GRACHEVA, S.S. (2014) Optimization of advertising strategy of a company in case of non-linear function of demand. *Vestnik of Samara State University.* 2 (113). p. 180–185.

6. CHIARELLA, C. & SZIDAROVSZKY, F. (2008) Discrete dynamic oligopolies with intertemporal demand interactions. *Mathematica Pannonica.* 19 (1). p. 107–115.

7. LITTLE, J.D.C. (1979) Aggregate Advertising Models: The State of the Art. *Operations Research.* 27 (4). p. 629–667.

8. SETHI, S.P., PRASAD, A. & He, X. (2008) Optimal advertising and pricing in a new-product adoption model. *J. Optim. Theory Appl..* 139 (2). p. 351–360.

9. SLADE, M. (1995) Product Rivalry with Multiple Strategic Weapons: An Analysis of Price and Advertising Competition. *Journal of Economics and Management Strategy.* 4 (3). p. 445–476.

10. ERICKSON, G.M. (1995) Advertising Strategies in a Dynamic Oligopoly. *Journal of Marketing Research.* 32 (2). p. 233–237.

11. SETHI, S.P. & THOMPSON, G.L. (2000) *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics.* 2nd ed. New York: Springer.

12. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов и приложения / В.И. Жуковский, К.Н.Кудрявцев. — М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012. — 304 с.

    ZHUKOVSKII, V. and KUDRYAVTSEV, K. (2012) *Balancing of conflicts and application.* Moscow: URSS.

13. Кудрявцев, К.Н., Мешков, В.М. Об одной модели планирования рекламного бюджета в дуополии // Системы компьютерной математики и их приложения. — 2014. — Т. 15. — С. 173–175.

    KUDRYAVTSEV, K.N. & MESHKOV, V.M. (2014) About one Model of planning Advertising Strategies in a Duopoly. *Computer Mathematics System and applications.* 15. p. 173–175.

14. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5. — № 1. — С. 27–44.

    ZHUKOVSKIY, V.I. & KUDRYAVTSEV, K.N. (2014) Balancing of conflicts under uncertainty. I. Analogue of saddle point. *Mathematical game theory and applications.* 5 (1). p. 27–44.

15. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. — 2013. — Т. 5. — № 2. — С. 3–45.

    ZHUKOVSKIY, V.I. & KUDRYAVTSEV, K.N. (2014) Balancing of conflicts under uncertainty. I. Analogue of maximin. *Mathematical game theory and applications.* 5 (2). p. 3–45.

Статья поступила в редакцию 08.06.2015

УДК: 519.8

MSC2010: 91A10

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ С УЧЕТОМ РИСКОВ И СОЖАЛЕНИЙ

© А. Е. Бардин

Московский государственный областной гуманитарный институт
факультет информатики
ул. Зеденая, д.22, 1 учебный корпус, г.Орехово-Зуево, Московская область,142600,
Российская Федерация
e-mail: *intch2006@rambler.ru*

© Ю. Н. Житенева

Московский государственный областной гуманитарный институт
факультет информатики
ул. Зеденая, д.22, 1 учебный корпус, г.Орехово-Зуево, Московская область,142600,
Российская Федерация
e-mail: *unzh2011@mail.ru*

© Т. В. Макаркина

Московский государственный областной гуманитарный институт
факультет информатики
ул. Зеденая, д.22, 1 учебный корпус, г.Орехово-Зуево, Московская область,142600,
Российская Федерация
e-mail: *tatmak147@yandex.ru*

Portfolio selection problem under uncertainty, taking account of risks and regrets.

Bardin A. E., Zhiteneva Y. N., Makarkina T. V.

Abstract.

In this paper new solution for portfolio selection problem under uncertainty is formalized. It is based on three concepts: guaranteed result, regret function, Pareto optimal solution.

This paper deals with a portfolio selection problem under uncertainty. Let us consider n securities with return rate ξ_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$ and denote by x_i the proportion of total amount of funds invested in the i-th security. A portfolio selection problem consists in finding the investment rate vector $x = (x_1,\ldots,x_n)$, where $x_i \geq 0$, $\sum\limits_i = 1$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Vector $x \in R^n$ maximizes the total portfolio return $\xi_P = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\xi_i$. The traditional Markowitz models of portfolio selection treat the return rates as a random variables vector following a probability distribution with vector $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ and a covariance matrix $V = \|\sigma_{ij}\|$, where $\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, & i = j, \\ \operatorname{cov}(\xi_i,\xi_j), & i \neq j. \end{cases}$

In particular, the well known model proposed by Markowitz, consists in minimizing the portfolio variance $\sigma_P^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = x^T V x$.

In this paper, the total portfolio return equals $\xi_P = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_j$, where uncertainty $y_i \in [a_i, b_i]$, parameters $a_i > 0$, variables $x_i \geq 0$, $\sum\limits_i x_i = 1$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. We have two-criteria problem under uncertainty $P_1 = \langle X, Y, \{f_1(x,y), f_2(x,y)\}\rangle$, where the set

$$X = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \middle| x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$

the set $Y = \{y = (y_1, \ldots, y_n) \,|y_i \in [a_i, b_i]\,\}$, first criteria $f_1(x,y) = \sum\limits_i x_i y_i$ second criteria $f_2(x,y) = f_1(x,y) - \max\limits_{x \in X} f_1(x,y)$. Then we consider two-criteria problem $P_2 = \langle X, \{g_1(x), g_2(x)\}\rangle$, here $g_1(x) = -R_V(x)$, $g_2(x) = -R_S(x)$ and

$$R_V(x) = \max_x \min_y f_1(x,y) - \min_y f_1(x,y) \text{is risk function},$$

$$R_S(x) = \max_y \Phi(x,y) - \min_x \max_y \Phi(x,y) \text{ - regret function.}$$

Further we look for vector $x_P \in R^n$, which minimizes the function

$$G(x) = R_V^2(x) + R_S^2(x),\ x \in X.$$

Solution $x_P \in X$ is Pareto optimal for given problem P_2. In this paper, we construct the algorithm finding optimal portfolio selection.

Key words: portfolio selection, uncertainty, risk, regret, two-criteria problem, Pareto optimal solution.

Введение

Согласно Толковому словарю русского языка сущность риска с одной стороны раскрывается выражениями "возможная опасность"и "действовать на свой страх с другой стороны риск рассматривается как "действие наудачу в надежде на счастливый исход". Там же, в частности, сожаление трактуется как чувство, вызванное утратой, сознанием невозможности что-то изменить. В дальнейшем, формализуя понятия риска и сожаления для задачи при неопределенности, будем учитывать одновременно как ожидаемые потери при принятии рискованных решений, так и возможность благоприятных для лица, принимающего решение (ЛПР) действий неконтролируемых им факторов. В научной литературе описываются различные математические модели риска и способы его измерения. Особое место занимают стохастические модели, в которых риск связан со случайными неконтролируемыми факторами, имеющими известные законы распределения.

Приведем простой пример. Пусть X есть множество допустимых решений ЛПР, например, совокупность инвестиционных портфелей. Рассматривается случайное событие A, состоящее в том, что ЛПР понесет убытки при выборе некоторого решения (портфеля) $x \in X$. Тогда вероятность этого события $P(A)$ есть численная оценка (мера) финансового риска данного решения (портфеля).

Методика оценки (измерения) финансовых рисков как вероятностей неблагоприятных событий является неудобной с точки зрения финансового менеджера, так как она формирует вероятностное распределение убытков, но не дает стоимостную оценку финансового риска.

Одним из современных методов определения финансового риска является VAR-метод, получившей название от словосочетания "Value-at-Risk". В последнее время VAR-метод стал важным средством управления и контроля риска в компаниях различного типа. Так стандартная методика начисления страховых премий основана на данном методе оценки риска. Другим методом вычисления финансового риска является SAR-метод (Shortfall-at-Risk), который определяет значение ожидаемой величины убытка как функции от резервного капитала.

С середины двадцатого века после появления портфельной теории активно используется определение риска финансовых операций через среднее квадратичное отклонение. Нобелевский лауреат Гарри Марковиц формализовал двухкритериальную математическую модель портфеля инвестиций, в которой первый критерий оценивает ожидаемую доходность портфеля, а второй критерий определяет риск портфеля как степень взаимной зависимости доходностей активов при помощи матрицы ковариаций. Моделирование риска указанным образом позволяет свести двухкритериальную задачу к минимизации линейно-квадратичной функции.

Надо отметить, что существуют аргументированные возражения противников рассмотренных выше моделей риска. Первый довод связан с тем, что отношение лица, принимающего решение к риску в условиях действия случайных неконтролируемых факторов, будет субъективным. Именно, в одной и той же ситуации разные люди оценивают риск различным образом. Поэтому выбор оптимальных решений (с их точек зрения) в одной и той же задаче не будет совпадать.

С другой стороны измерение риска при помощи среднего квадратичного отклонения может привести к парадоксальным результатам. Например, показатель рискованности Шарпа иногда представляют в виде отношения $\frac{\sigma[\xi]}{M[\xi]}$, где величина $M[\xi]$ есть математическое ожидание случайной величины доходности финансовой операции, а значение является средним квадратичным отклонением. Проанализируем следующую задачу выбора оптимального решения в условиях риска.

Пусть у ЛПР есть возможность получить 1000 единиц дохода с вероятностью равной 1. В этом случае величина $\sigma[\xi]$ равна 0, и, следовательно, показатель рискованности $\frac{\sigma[\xi]}{M[\xi]} = 0$. Также предлагается участвовать в лотерее (игре), где он равновероятно либо наверняка получит 1000 условных единиц, либо значение $a > 1000$. Любой здравомыслящий человек предпочтет участие в лотерее, несмотря на тот факт, что во втором случае величина риска $\frac{\sigma[\xi]}{M[\xi]} > 0$.

Отметим, что моделирование риска для стохастических задач предполагает знание ЛПР функций распределения случайных величин, которые являются переменными в данной модели. Однако принятие соответствующей статистической гипотезы о законе распределения может быть ошибочным. Более того, неконтролируемые ЛПР факторы могут описываться неопределенными величинами, о которых известны только области возможных значений. Наконец, наличие риска в процессе принятия решений не всегда является негативной особенностью данной задачи. Многочисленные примеры салонных игр, а также реальные проблемы, связанные с экономическими, политическими и военными конфликтами, свидетельствуют о возникающей часто необходимости принятия рискованного выбора. В статье предлагается подход к формализации оптимальных решений для задачи оптимизации портфеля инвестиций в условиях действия неопределенных факторов и с учетом рисков и сожалений.

1. Постановка задачи

В данной статье математическая модель портфеля ценных бумаг (активов) формализуется как двухкритериальная задача при неопределенности с учетом рисков по Вальду и сожалений по Сэвиджу [3]. Предлагается подход к выбору единственного оптимального портфеля. Перейдем к построению математической модели.

Пусть в начальный момент времени t_0 инвестор обладает некоторой суммой денег W_0, которую он хочет использовать, желая получить в момент времени t прирост капитала $\Delta W = W(t) - W_0$.

Величина доходности ξ_P портфеля определяется как прирост капитала на единицу вложений, то есть,

$$\xi_P = \frac{\Delta W}{W_0}. \tag{1}$$

Предположим, что инвестор имеет n способов распределить денежные средства W_0 по ценным бумагам, выбирая произвольную комбинацию возможных инвестиций на промежуток времени $\Delta t = t - t_0$. Пусть x_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, есть доля общего количества средств W_0, инвестируемых в i-ый актив. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} = 1$, будем называть *портфелем инвестиций*, при этом величины x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, являются неотрицательными действительными числами. Обозначим через ξ_i, величину доходности i-ой акции на единицу вложенных средств. В простейшем случае величину ξ_i можно выразить через цену акции S_i и дивиденды D_i, которые выплачиваются в момент времени t на одну акцию i-го типа, именно,

$$\xi_i = \frac{D_i - S_i}{S_i}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \tag{2}$$

Пусть в момент времени t_0 инвестор имеет капитал W_0 и покупает n_i акций i-го вида, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда справедливы равенства

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} n_i S_i, \tag{3}$$

а также

$$x_i = \frac{n_i S_i}{W(t_0)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{4}$$

При этом величина капитала в момент времени $t > t_0$ равна

$$W(t) = \sum_{i=1}^{n} n_i D_i. \tag{5}$$

Преобразуя равенство (1) с учетом формул (2) - (5), получаем:

$$\xi_P = \frac{\sum_i n_i D_i - \sum_i n_i S_i}{W(t_0)} = \sum_i \frac{n_i S_i}{W(t_0)} \left(\frac{D_i - S_i}{S_i} \right) = \sum_i x_i \xi_i. \tag{6}$$

В классических портфельных моделях [5] нобелевского лауреата Г. Марковица величины ξ_P и ξ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, считаются случайными с известными параметрами распределения $\mu_i = M[\xi_i]$, $\sigma_i = \sqrt{D[\xi_i]}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, где есть математическое ожидание величины ξ_i, а σ_i - её среднее квадратичное отклонение. Далее формализована принципиально другая математическая модель портфеля, в которой неконтролируемые ЛПР величины ξ_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, являются неопределенностями. Именно, для указанных величин неизвестен закон распределения, а только области допустимых значений.

Далее будем использовать обозначения и терминологию, применяемые в теории многокритериальных задач при неопределенности [3], [4], [5].

Пусть неопределенности $y_i = \xi_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$ являются доходностями i-го актива на единицу вложенных средств в момент времени t. Тогда доходность портфеля в тот же момент времени, согласно формуле (6), равна

$$\xi_P = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{7}$$

где $x \in R^2$ - неотрицательный вектор, сумма компонент которого равна 1. Набор $y = (y_1, \ldots, y_n)$ есть векторная неопределенность, компоненты которой удовлетворяют условиям

$$y_i \in [a_i, b_i], \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{8}$$

В дальнейшем будем рассматривать случай

$$a_i > 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{9}$$

Принятие решений ЛПР осуществляется по следующей схеме:

во-первых, в момент t_0 ЛПР выбирает вектор

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \text{где } x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1, i \in \{1, \ldots, n\};$$

во-вторых, в момент времени t независимо от действий ЛПР происходит реализация неопределенности $y \in R^n$, причем $y_i \in [a_i, b_i]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим через $X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \geq 0, \, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ множество возможных решений ЛПР, а множество $Y = \{y = (y_1, \ldots, y_n) | \, y_i \in [a_i, b_i], i \in \{1, \ldots, n\}\}$ есть совокупность неопределенностей $y \in R^n$.

Каждую допустимую пару $(x, y) \in X \times Y$ ЛПР оценивает по двум критериям:

$$\begin{cases} f_1(x, y) & = & \sum\limits_i x_i y_i, \\ f_2(x, y) & = & -\Phi(x, y), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\Phi(x, y) = \max_{x \in X} f_1(x, y) - f_2(x, y).$$

Таким образом, формализуется двухкритериальная задача при неопределенности

$$P_1 = \langle X, Y, \{f_1(x, y), f_2(x, y)\} \rangle, \tag{11}$$

параметры которой определены выше.

От задачи (11) перейдем к двухкритериальной задаче вида

$$P_2 = \langle X, \{g_1(x), g_2(x)\} \rangle, \tag{12}$$

$$g_1(x) = -R_V(x) = -\left(\max_x \min_y f_1(x, y) - \min_y f_1(x, y) \right),$$

$$g_2(x) = -R_S(x) = -R_S(x) = -\left(\max_y \Phi(x,y) - \min_x \max_y \Phi(x,y)\right),$$

а множество X допустимых решений x описано в задаче (11).

В задаче (12) ЛПР стремится получить значения обоих критериев g_i, $i \in \{1,2\}$, возможно большими, то есть, он хочет, чтобы риск $R_V(x_*)$ по Вальду и сожаление $R_S(x_*)$ по Сэвиджу для оптимального решения x_* были "как можно меньше".

Согласно теории многокритериальных задач при неопределенности [3-5] имеются различные способы определения оптимального решения для задачи (11). Рассмотрим способ построения оптимального по Парето решения x_u, который базируется на методе точки утопии. Согласно подходу, изложенному в работах [1], [2], задачам (11) и (12) ставится в соответствие классическая оптимизационная задача

$$\begin{cases} x \in X \\ G(x) \to \min, \end{cases} \tag{13}$$

где $G(x) = R_V^2(x) + R_S^2(x)$. Оптимальное решение $x_u = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u)$ задачи (13) будем считать оптимальным для задачи (11).

2. Алгоритм нахождения оптимального портфеля

Опишем последовательность действий, которые приведут к нахождению оптимального портфеля $x_u = (x_1^u, x_2^u, \ldots, x_n^u)$. Предположим, что далее выполняется условие

$$\bigcap_i [a_i, b_i] \neq \emptyset. \tag{14}$$

Также будем считать, что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$.

I шаг. Построение функции $R_V(x)$

Очевидно, что $\min_y f(x,y) = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$. Тогда справедливо равенство

$$\max_x \min_y f(x,y) = a_1, \tag{15}$$

соответственно,

$$R_V(x) = \max_x \min_y f(x,y) - \min_y f(x,y) = a_1 - (x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n). \tag{16}$$

II шаг. Построение функции $\Phi(x,y)$

Введем обозначения: $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $Y_i = \{y \in Y \,|\, y_i \geq y_j, j \in I \backslash \{i\}\}$. При указанных условиях получаем

$$\max_x f(x, y) = \begin{cases} y_1, & \text{если } y \in Y_1, \\ y_2, & \text{если } y \in Y_2, \\ \ldots \\ y_n, & \text{если } y \in Y_n. \end{cases}$$

Окончательно,

$$\Phi(x, y) = \max_x f(x, y) - f(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{j \neq 1} (y_1 - y_j) x_j, & \text{если } y \in Y_1, \\ \sum\limits_{j \neq 2} (y_2 - y_j) x_j, & \text{если } y \in Y_2, \\ \ldots \\ \sum\limits_{j \neq n} (y_n - y_j) x_j, & \text{если } y \in Y_n, \end{cases} \tag{17}$$

III шаг. Построение функции $R_S(x)$

Для каждого фиксированного индекса $i \in I = \{1, 2, \ldots, n\}$ рассмотрим функцию $\Phi_i(x) = \sum\limits_{j \neq i} (b_i - a_j) x_j$ и множество X_i, $i \in I$, которое является решением системы неравенств $\Phi_i(x) \geq \Phi_j(x)$, $x \in X$, $j \in I \backslash \{i\}$. Тогда имеем

$$\Phi(\bar{x}) = \max_y \Phi(x, y) = \begin{cases} \sum\limits_{j \neq 1} (b_1 - a_j) x_j, & \text{если } x \in X_1, \\ \sum\limits_{j \neq 2} (b_2 - a_j) x_j, & \text{если } x \in X_2, \\ \ldots \\ \sum\limits_{j \neq n} (b_n - a_j) x_j, & \text{если } x \in X_n. \end{cases} \tag{18}$$

Далее находим гарантированное минимаксное сожаление по Сэвиджу, именно, $\min_x \max_y \Phi(x, y) = \Phi^*$, которое получаем из решения задачи

$$\bar{\Phi}(x) \to \min, \quad x \in X.$$

Окончательно, имеем явный вид функции сожаления по Сэвиджу:

$$R_V(x) = \bar{\Phi(x)} - \Phi^* = \begin{cases} \sum\limits_{j\neq 1}(b_1 - a_j)x_j - \Phi^*, & \text{если } x \in X_1, \\ \sum\limits_{j\neq 2}(b_2 - a_j)x_j - \Phi^*, & \text{если } x \in X_2, \\ \dots \\ \sum\limits_{j\neq n}(b_n - a_j)x_j - \Phi^*, & \text{если } x \in X_n. \end{cases} \tag{19}$$

IV шаг. Нахождение оптимального портфеля.

Для нахождения оптимального портфеля $x_u = (x_1^u, x_2^u, \dots, x_n^u)$ решается классическая оптимизационная задача

$$R_V^2(x) + R_S^2(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{20}$$

Отметим, что каждый шаг алгоритмически реализуем, в частности, существует решение задачи (20), так как функции $R_V(x)$ и $R_S(x)$ являются непрерывными на компактном множестве X. Проиллюстрируем построенный выше алгоритм для случая двух видов ценных бумаг.

Пример. Рассмотрим частный случай данной задачи, когда имеющиеся средства инвестор распределяет между двумя активами. В этом случае задачу (11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 \to \max, \\ \Phi(x,y) = \max_{(x_1,x_2)} f(x,y) - f(x,y) \to \min, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_i \geq 0, \quad i \in \{1,2\}, \\ a_1 \leq y_1 \leq b_1,\ a_2 \leq y_2 \leq b_2, \end{aligned} \tag{21}$$

причем $a_i > 0$, $i \in \{1,2\}$.

Считаем, что далее выполняется условие $[a_1, b_1] \cap [a_2, b_2] \neq \emptyset$. Также будем предполагать, что $a_1 \geq a_2 > 0$.

Очевидно, что $\min\limits_y f(x,y) = x_1a_1 + x_2a_2$. Тогда $\max\limits_x \min\limits_y f(x,y) = a_1$, соответственно,

$$R_V(x) = \max_x \min_y f(x,y) - \min_y f(x,y) = a_1 - (x_1a_1 + x_2a_2) = a_1(1 - x_1) - a_2x_2.$$

Используя условие $x_1 + x_2 = 1$ и обозначения

$$x_1 = t,\ x_2 = 1 - t,\ 0 \leq t \leq 1,$$

функцию риска по Вальду можно записать следующим образом:

$$R_V(t) = (a_1 - a_2)(1 - t),$$

где $a_1 \geq a_2 > 0$. Отметим, что в частном случае, когда $a_1 = a_2$, функция R_V тождественно равна 0, то есть, согласно принятой выше концепции рискованного поведения, в процессе принятия решений любой портфель $x = (x_1, x_2)$ будет безрисковым.

Введем обозначения: $Y_1 = \{y \in Y | \, y_1 \geq y_2\}$, $Y_2 = \{y \in Y | \, y_1 \leq y_2\}$, здесь $Y = \{y = (y_1, y_2) | \, a_i \leq y_i \leq b_i, \; i \in \{1, 2\}\}$. Получаем

$$\Phi(t, y) = \begin{cases} (1-t)(y_1 - y_2), & \text{если } y \in Y_1, \\ t(y_2 - y_1), & \text{если } y \in Y, \end{cases} \tag{22}$$

где $0 \leq t \leq 1$. Из условия $(1-t)(b_1 - a_2) \geq t(b_2 - 1)$ находим

$$t \leq \frac{b_1 - a_2}{b_1 + b_2 - a_1 - a_2}.$$

Таким образом,

$$\bar{\Phi}(t) = \max_y \Phi(t, y) = \begin{cases} (1-t)(b_1 - a_2), & \text{если } 0 \leq t \leq m, \\ t(b_2 - a_1), & \text{если } m \leq t \leq 1, \end{cases}$$

и

$$\min_t \max_y \Phi(t, y) = \bar{\Phi}(m) = \Phi^* = \frac{(b_1 - a_2)(b_2 - a_1)}{b_1 + b_2 - a_1 - a_2}, \tag{23}$$

где $m = \frac{b_1 - a_2}{b_1 + b_2 - a_1 - a_2}$. Получаем явный вид функции сожаления по Сэвиджу:

$$R_S(t) = \max_y \Phi(t, y) - \min_t \max_y \Phi(t, y) = \begin{cases} \Delta_1 \left(1 - t - \frac{\Delta_2}{\Delta}\right), & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ \Delta_2 \left(t - \frac{\Delta_1}{\Delta}\right), & \text{если } \frac{\Delta_1}{\Delta} \leq t \leq 1, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$\Delta_1 = b_1 - a_2, \; \Delta_2 = b_2 - a_1, \; \Delta = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Множество $L = \{ (R_V(t), R_S(t)) | \, t \in [0, 1]\}$ представляет собой на координатной плоскости $R_V O R_S$ ломаную линию L, каждая точка $M(t)$ которой определяет риск по Вальду и сожаление по Сэвиджу для лица, выбирающего портфель вида

$$x(t) = (x_1 = t, x_2 = 1 - t), \; 0 \leq t \leq 1. \tag{25}$$

В качестве оптимального решения (портфеля) выбираем $x_u = x(t_u)$, которому соответствует точка

$$M(t_u) = M(R_V(t_u), R_S(t_u)),$$

причем $M(t_u)$ - ближайшая точка к началу координат $O(R_V = 0, \; R_S = 0)$.

Для нахождения точки $M(t_u)$ решается классическая оптимизационная задача

$$\begin{gathered} R_V^2(t) + R_S^2(t) \to \min, \\ 0 \le t \le 1. \end{gathered} \tag{26}$$

Оптимальный (согласно данному подходу) портфель имеет вид:

$$x(t_u) = (t_u, 1 - t_u), \tag{27}$$

где t_u есть решение задачи (26).

Проиллюстрируем полученные формулы на числовом примере. Пусть

$$a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ b_1 = 3,\ b_2 = 6$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} R_V = 1 - t, \\ R_S = \begin{cases} 2\left(\frac{1}{3} - t\right) & \text{если } 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ 4\left(t - \frac{1}{3}\right) & \text{если } \frac{1}{3} \le t \le 1. \end{cases} \end{cases} \tag{28}$$

Ломаная линия ABC, заданная условиями (28), изображена на рис. 1. Точка $M\left(\frac{32}{51}, \frac{8}{51}\right)$ - ближайшая к началу координат, поэтому $R_V = \frac{32}{51}$, $R_S = \frac{8}{51}$.

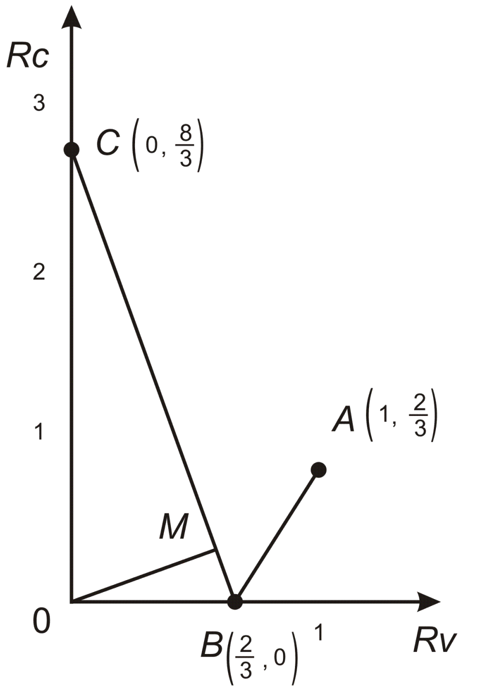

Рис. 1

Соответственно оптимальное значение параметра t равно $t_u = \frac{19}{51}$. Следовательно, оптимальный портфель имеет вид

$$x_u = x\left(\frac{19}{51}\right) = \left(\frac{19}{51}, \frac{32}{51}\right),$$

то есть ЛПР вкладывает $\frac{19}{51}$ всех средств W_0 в первый актив, а оставшиеся средства - во второй актив. При этом доходность оптимального портфеля x_u принадлежит интервалу $[x_1^u a_1 + x_2^u a_2, x_1^u b_1 + x_2^u b_2]$, именно,

$$f(x_u, y) \in \left[\frac{70}{51}, \frac{249}{51}\right], \quad y \in Y.$$

Можно сравнить найденное решение с "осторожным"поведением ЛПР. Пусть он осуществляет "осторожный"выбор и вкладывает все средства в первый актив, то есть $x_V = (1, 0)$. Тогда

$$f(x_V, y) \in [2, 3].$$

Сравнивая решения, видим, что ЛПР, "рискуя"величиной $2 - \frac{70}{51} = \frac{32}{51}$, может получить в благоприятном случае существенно большую доходность портфеля.

Заключение

В данной статье формализуются понятия функции риска и функции сожаления для задачи нахождения оптимального портфеля ценных бумаг, при этом учитывается одновременно как ожидаемые потери при принятии рискованных решений, так и возможность благоприятных для ЛПР действий неконтролируемых им рыночных факторов. Действия неконтролируемых факторов в построенной модели отождествляется с неопределенностями, о которых известны лишь области допустимых значений.

Каждый возможный портфель оценивается двумя критериями: риском по Вальду и сожалением по Сэвиджу. Первый критерий оценивает возможные потери при отклонении от гарантированного (максиминного) решения. Второй критерий учитывает возможность реализации «благоприятных» неопределенностей для лица, принимающего решения. В полученной двухкритериальной задаче находится оптимальное по Парето решение методом построения «идеальной точки». В статье приведен алгоритм вычисления оптимального портфеля, который проиллюстрирован на конкретном примере.

Приведенные в статье исследования являются новыми и представляются актуальными как с теоретической точки зрения, так и для практических приложений.

Модельный пример продемонстрировал эффективность предложенного алгоритма построения оптимального решения.

Список литературы

1. Бардин А.Е. Риски и сожаления игроков в игровых моделях // Материалы III Межд. конф. МГОГИ. — Орехово-Зуево.: Изд-во МГОГИ, 2010. — С. 86–89.

   BARDIN A.E. (2010) Risk and Regrets in the Games. *III International conference. MGOGI.* . p. 86-89.

2. Бардин, А.Е., Житенева, Ю.Н. Риски и сожаления в игре с природой // Труды межд. конф. КРОМШ 2012. — Симферополь, 2012. — С. 2–5.

   BARDIN, A. and ZHITENEVA, Y. (2012) Risk and Regets for One-Person Game under Uncertainty. *International Scientific J. Spectral and Evolution Problems.* vol.22. p. 2-5.

3. Жуковский, В.И. Риски при конфликтных ситуациях / В.И.Жуковский. — М.: URSS, 2011. — 328 с.

   ZHUKOVSKIY, V.I. (2011) *Risks at conflict situations.* Moscow: URSS LENAND.

4. Жуковский, В.И., Кудрявцев К.Н Уравновешивание конфликтов и приложения / В.И.Жуковский, К.Н.Кудрявцев. — М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012. — 304 с.

   ZHUKOVSKIY, V. and KUDRIAVSEV, K. (2012) *Equilibrating conflicts and applications.* Moscow: URSS, ЛЕНАНД.

5. Жуковский, В.И., Кудрявцев К.Н, Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения / В.И.Жуковский, К.Н.Кудрявцев, Л.В.Смирнова. — М.: KRASAND, 2012. — 304 с.

   ZHUKOVSKIY, V. and KUDRIAVSEV, K. and SMIRNOVA, L. (2012) *The guaranteed solutions in the conflict and applications.* Moscow: KRASAND.

6. Savage, L.Y. The theory of statistical decision // J. American Statistic Association. — 1951. — №46. — С. 55–67.

   Savage, L.Y. (1951) The theory of statistical decision. . J. American Statistic Association (№46). p. .55-67

7. Markowitz, H. Portfolio Selection // Journal of Finance. — 1952. — vol. VII, №1, March. — С. 55-67.

   Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. . Journal of Finance (vol. VII, №1, March). p. 55-67.

Статья поступила в редакцию 31.05.2015

УДК: 519.833.2

MSC2010: 91A10

ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО В МОДЕЛИ ДУОПОЛИИ КУРНО

© М. И. Высокос

Московский государственный областной гуманитарный институт
Физико-математический факультет
кафедра математики и физики
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево, 142611, Российская Федерация
e-mail: *mvysokos@mail.ru*

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра оптимального управления
Ленинские горы, МГУ, ВМК, ГСП-1, Москва, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

The Golden Rule in the Model of Cournot Duopoly.

Vysokos M. I, Zhukovskiy V. I.

Abstract.

Source of the Golden Rule: «Do with respect to someone in such way as you would like him to do with respect to you» one can find in New Testament.

Such approach in economics results to altruistic rules of behavior «help others, forgetting about yourself». The concept of Berge equilibrium strictly formalized in Russia in 1994 in thesis and first articles of Vaisman K.S. fully meets such approach. Then this method of conflict balancing began to be used in works of western colleagues.

However the matter of its practical application to problems of mathematical economics was left open.The offered article maybe is one of the first concerning this application. It is constructed the explicit form of Berge equilibrium solution in dynamic one-step variant of controllable Cournot duopoly – the mathematical model of interaction of two sellers on the market.

Nash equilibrium is a common optimality concept for non-cooperative games. The key difference is that in case of Nash equilibrium an individual player's deviation from the equilibrium cannot increase the player's own payoff, therefore it has «egoistic character». On the contrary Berge equilibrium is characterized by «altruistic character» dictated by the Golden rule.

The monograph written by French economist, philosopher and mathematician Antoine Augustin Cournot (1801-1877) is one of the first scientific studies of the use of game theory in economics. It was published in 1838. Cournot considers a duopoly model on the market in this book.

Key words: Cournot duopoly, Berge equilibrium, Nash equilibrium, one-step positional noncooperative linear-quadratic game, dynamic programming.

Введение

Одним из первых научных исследований, посвященных применению теории игр в экономике, принято считать монографию французского экономиста, философа и математика Антуанна Огюстена Курно (1801-1877) «Исследование математических принципов теории богатств» [1], опубликованную им в 1838 г. В разделе 7 этой книги «о конкуренции производителей» Курно рассматривает частный случай дуополии и использует концепцию решения соответствующей игры, представляющей собой частный случай общеизвестного понятия равновесия (по Нэшу).

В настоящей статье рассмотрены статический и динамический варианты модели Курно. Наиболее распространенной концепцией равновесности является равновесие по Нэшу. Однако, используемый в данной статье подход отличается от упомянутой концепции равновесности. Здесь за основу поведения взято Золотое правило: «Поступай по отношению к другому так, как ты хотел бы, чтобы он поступил по отношению к тебе». Полностью отвечает этому подходу концепция равновесности по Бержу, которая впервые была строго формализована в диссертации и статьях К.С. Вайсмана [2, 3, 4]. Этот способ уравновешивания конфликтов уже получил достаточно широкое распространение в работах отечественных и западных ученых [5].

В данной статье впервые рассматривается вопрос о практическом применении равновесия по Бержу: использование такого способа уравновешивания конфликтов в модели дуополии Курно.

1. «Статический» вариант модели

Сформулируем экономическую модель рыночной конкуренции, известную под названием *модель дуополии Курно.*

Две фирмы выпускают однородную продукцию за некоторый (заданный априори) промежуток времени. Пусть q_i - количество продукции, выпущенное i-ой фирмой $(i = 1, 2)$. *Издержки производства* предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной продукции q_i и поэтому будут $cq_i + d$, здесь c и d соответственно средние переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным – аренда помещений, земли, станков, лицензий и т.п.). На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от количества $\tilde{q} = q_1 + q_2$ поступившего на продажу товара.

Цену товара представляем в виде $p(\tilde{q}) = a - b\tilde{q}$, где $a = const > 0$ - цена (на рынке) при отсутствии товара, а коэффициент b показывает, на сколько «падает» цена при поступлении в продажу единицы продукции. Тогда выручка первой фирмы будет

$$p(\tilde{q})q_1 = (a - b\tilde{q})q_1 = [a - b(q_1 + q_2)]q_1,$$

а ее прибыль (выручка минус издержки)

$$\psi_1(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_1 - (cq_1 + d) = aq_1 - bq_1^2 - bq_1q_2 - cq_1 - d,$$

одновременно прибыль второго

$$\psi_2(q_1, q_2) = [a - b(q_1 + q_2)]q_2 - (cq_2 + d) = aq_2 - bq_2^2 - bq_1q_2 - cq_2 - d.$$

Вследствии строгой вогнутости $\psi_i(q_1, q_2)$ по q_i $(i = 1, 2)$ (т.к. $\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial q_i^2} = -2b < 0$) достаточные условия существования q_i^*, максимизирующей $\psi_i(q_1, q_2)$ по q_i $(i = 1, 2)$, сводятся к построению решения системы из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1(q_1,q_2)}{\partial q_1}|_{q_1^*} = a - 2bq_1^* - bq_2 - c = 0, \\ \frac{\partial \psi_2(q_1,q_2)}{\partial q_2}|_{q_2^*} = a - bq_1 - 2bq_2^* - c = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$q_1^* = \frac{a - c - bq_2}{2b}, \; q_2^* = \frac{a - c - bq_1}{2b}.$$

Итак, в «статическом» варианте математической модели функциональная зависимость между «наилучшими ответами» двух фирм (при конкурентном взаимодействии) связаны соотношениями

$$q_1 = \frac{a - c - bq_2}{2b}, \; q_2 = \frac{a - c - bq_1}{2b}.$$

Этот факт будет учтен при построении динамического варианта модели.

2. Динамический вариант модели

Здесь будем предполагать,

во-первых, время продолжительности выпуска продукции состоит из одного периода между моментами времени, т.е. $k = 0, 1$;

во-вторых, существует временной лаг (здесь берем его равным одному периоду) и поэтому функции наилучшего ответа каждой из фирм на действия конкурента приобретают вид

$$q_1(k+1) = \frac{a - c - bq_2(k)}{2b}, \; q_2(k+1) = \frac{a - c - bq_1(k)}{2b} \quad (k = 0);$$

в-третьих, фиксированы начальное количество продукта (то есть в момент $k = 0$) на складах i-ой фирмы $q_i(0) = q_{i0}$ $(i = 1, 2)$.

Наконец, *в-четвертых*, руководство каждой фирмы (в дальнейшем называемое *игроком*) формирует и организует *интенсивность* (на каждый период) выпуска продукции (за счет, например, части инвестиций в свое производство $(\beta_i u_i)$ а оставшаяся $(1 - \beta_i)u_i$ $(i, j = 1, 2;\ j \neq i)$ передается второму игроку, точно так же обстоят дела с внедрением новых технологий; данную интенсивность для i-ой фирмы в момент $t = k$ обозначим через $u_i[k]$ $(i = 1, 2;\ k = 0, 1)$, при этом постоянные $\beta_i \in [0, 1]$; отметим также, что управляющие воздействия u_i игрока i в момент времени k зависит от количества продуктов, выпущенных обеими фирмами в момент k. Таким образом $U_i(k)$ - стратегию (правило поведения – способ руководства своей фирмой) i-го игрока $(i = 1, 2)$ в момент $t = k$ $(k = 0, 1)$ будем отождествлять со скалярной функцией $u_i(k, q_1, q_2)$ (этот факт обозначается $U_i \div u_i(k, q)$, здесь и далее двухкомпонентный вектор $q = (q_1, q_2)$). Тогда сама математическая модель управляемой динамической системы Σ, описывающей процесс выпуска продукции в дискретные моменты времени 0 и 1 представится следующим образом

$$\begin{array}{ll} q_1(k+1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2(k)}{2} + \beta_1 u_1 + (1-\beta_2)u_2, & q_1(0) = q_{10}, \\ q_2(k+1) = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1(k)}{2} + (1-\beta_1)u_1 + \beta_2 u_2, & q_2(0) = q_{20} \quad (k = 0). \end{array} \tag{1}$$

Отметим, что (1) есть система из двух разностных (одношаговых) линейных уравнений, множество стратегий $U_i(k)$ на k-ом шаге далее обозначаем символом $\mathscr{U}_i(k)$ $(i = 1, 2;\ k = 0)$. Тогда ситуацию $U(0)$ образует упорядоченная пара

$$U(0) = (U_1(0) \div u_1(0, q), U_2(0) \div u_2(0, q)),$$

где $U_i(k) \in \mathscr{U}_i(k)$ $(k = 0)$ и $q(0) = (q_{10}, q_{20})$.

Итак, пара стратегий (U_1, U_2) образует *ситуацию* U.

С возрастанием времени k от 0 до 1 «развертывание игры во времени» происходит следующим образом. Пусть игроки, не объединяясь в коалицию, каждый i-ый сам выбирает свою стратегию $U_i(0) \in \mathscr{U}_i(0)$, $U_i(0) \div u_i(0, q)$ $(i = 1, 2)$; то есть формируются две скалярные функции $u_i(0, q_1, q_2)$ $(i = 1, 2)$. Сам выбор стратегии $U_i(0) \in \mathscr{U}_i(0)$, $U_i(0) \div u_i(0, q_1, q_2)$ игрок i осуществляет, руководствуясь концепцией равновесности по Бержу («помогай всем, забывая о своих интересах») и применяя ее к функциям выигрыша игроков (явный вид которых будет приведен ниже). Для построения таких функций применим (1) и начальные значения фазового вектора $q(0) = q^0 = (q_1(0), q_2(0)) = (q_{10}, q_{20})$.

Строим

$$\begin{aligned} q_1(1) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_{20}}{2} + \beta_1 u_1(0, q_{10}, q_{20}) + (1-\beta_2) u_2(0, q_{10}, q_{20}), \\ q_2(1) &= \tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_{10}}{2} + (1-\beta_1) u_1(0, q_{10}, q_{20}) + \beta_2 u_2(0, q_{10}, q_{20}). \end{aligned} \tag{2}$$

В результате получим, *во-первых*, две последовательности

$$\{q_i(k)\}_{k=o}^{1} \ (i = 1, 2), \tag{3}$$

образующие траекторию системы (1) при использовании игроками упомянутых (и выбранных) конкретных стратегиях $U_i(0) \in \mathscr{U}_i(0),\ U_i(0) \div u_i(0, q)\ (i = 1, 2)$;

во-вторых, две реализации

$$\{u_i[k] = u_i(0, q(0))\} \ (i = 1, 2). \tag{4}$$

С помощью (3) и (4) построим критерий (функцию выигрыша) игрока i, значение которого (выигрыш) как раз и оценивает качество функционирования этого игрока. При этом будем учитывать следующие два обстоятельства.

Во-первых, каждая i-ая фирма $(i = 1, 2)$ стремится выпустить на рынок возможно большее количество продукции, что, в конечном счете, можно свести к максимизации i-ым игроком (за счет подходящего выбора $U_i \in \mathscr{U}_i$) следующей суммы

$$q_i^2(1) + q_i^2(0) \ (i = 1, 2).$$

Во-вторых, затратить при таком выпуске возможно меньше своих ресурсов и ресурсов партнера. Это требование можно «обеспечить» стремлением к возможно увеличить

$$-u_1^2[0] - u_2^2[0].$$

В результате получаем функцию выигрыша i-го игрока в виде

$$J_i(U, q_0) = q_i^2(1) + q_i^2(0) - u_1^2[0] - u_2^2[0] \ (i = 1, 2). \tag{5}$$

Упорядоченная четверка

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \Sigma \div (1), \{\mathscr{U}_i\}_{i=1,2}, \{J_i(U, q_0) \div (5)\}_{i=1,2} \rangle,$$

образует *одношаговую бескоалиционную позиционную линейно-квадратичную игру двух лиц*. В ней $\Sigma \div (1)$ означает, что управляемая система Σ описывается системой разностных уравнений (1), а $J_i(U, q_0) \div (5)$ - функция выигрыша i-го игрока имеет вид (5).

Ситуация $U^B = (U_1^B, U_2^B) \in \mathscr{U}$ *является равновесной по Бержу в игре* Γ, *если*

$$\begin{aligned} \max_{U_2 \in \mathscr{U}_2} J_1(U_1^B, U_2, q_0) = J_1(U^B, q_0), \\ \max_{U_1 \in \mathscr{U}_1} J_2(U_1, U_2^B, q_0) = J_2(U^B, q_0). \end{aligned} \tag{6}$$

Тройка $(U^B, J_1^B = J_1(U^B, q_0), J_2^B = J_2(U^B, q_0))$ называется *равновесным по Бержу решением игры* Γ.

Согласно определению равновесной по Нэшу ситуации $U^e = (U_1^e, U_2^e)$ в игре Γ:

$$\begin{aligned} \max_{U_1 \in \mathscr{U}_1} J_1(U_1, U_2^e, q_0) = J_1(U^e, q_0), \\ \max_{U_2 \in \mathscr{U}_2} J_2(U_1^e, U_2, q_0) = J_2(U^e, q_0), \end{aligned}$$

и приведенному понятию равновесности по Бержу, для игры двух лиц ситуация равновесия по Нэшу становится ситуацией равновесия по Бержу, если только в игре Γ игроки обменялись своими функциями выигрыша. Поэтому (снова только в игре двух лиц!) для построения ситуации равновесия по Бержу можно в игре Γ применять метод динамического программирования, «приспособленный» для построения равновесия по Нэшу в модели дуополии Курно в книге [6, с. 184-242]. Перейдем к изложению этого способа.

Замечание 1. При построении равновесного по Бержу решения воспользуемся схемой, «диктуемой» теоремой 2.4.1 из [6] и измененной в соответствии с определением (6). Для игры Γ ее можно свести к выполнению двух этапов.

Этап 1. При $k = 1$ строятся две функции

$$V_i^{(1)}(q) = q_i^2 \ (i = 1, 2).$$

Этап 2. При $k = 0$ находим четыре скалярные функции $u_i(0, q)$ и $V_i^{(0)}(q)$ $(i = 1, 2)$, исходя из условий

$$\begin{aligned} V_1^{(0)}(q) = \max_{u_2}\{q_1^2 - [u_1^B(0,q)]^2 - u_2^2 + [\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_2}{2} + \beta_1 u_1^B(0,q) + (1-\beta_2)u_2]^2\} = \\ = Idem\{u_2 \to u_2^B(0,q)\}, \\ V_2^{(0)}(q) = \max_{u_1}\{q_2^2 - u_1^2 - [u_2^B(0,q)]^2 + [\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_1}{2} + (1-\beta_1)u_1 + \beta_2 u_2^B(0,q)]^2\} = \\ = Idem\{u_1 \to u_1^B(0,q)\}, \end{aligned} \tag{7}$$

здесь $Idem\{u_i \to u_i^B(0,q)\}$ означает выражение в фигурных скобках, где u_i заменено на $u_i^B(0,q)$ $(i = 1, 2)$.

Тогда, *во-первых*, ситуация равновесия по Бержу в игре Γ

$U^B = (U_1^B, U_2^B)$, $U_i^B = U_i^B(0)$ и $U_i^B(0) \div u_i^B(0, q_1, q_2)$ $(i = 1, 2)$,

во-вторых, равновесные выигрыши игроков (их выигрыши в ситуации равновесия по Бержу) будут $J_i(U^B, q_0) = V_i^{(0)}(q_{10}, q_{20})$ $(i = 1, 2)$; равновесное по Бержу решение игры Γ при этом образует тройка $(U^B, V_1^{(0)}(q_0), V_2^{(0)}(q_0))$.

3. Построение равновесного по Бержу решения

Утверждение 1. *Равновесное по Бержу решение игры* Γ *имеет вид*

$$(U^B = (U_1^B, U_2^B), J_1^B = J_1(U^B, q_0), J_2^B = J_2(U^B, q_0)),$$

где

$$\begin{aligned} U_1^B \div u_1^B(0,q) &= \tfrac{1-\beta_1}{2\beta_1(3-\beta_1-\beta_2)}[-\tfrac{a-c}{b}(3-2\beta_2) + q_1(2-\beta_2) + q_2(1-\beta_2)], \\ U_2^B \div u_2^B(0,q) &= \tfrac{1-\beta_2}{2\beta_2(3-\beta_1-\beta_2)}[-\tfrac{a-c}{b}(3-2\beta_1) + q_1(1-\beta_1) + q_2(2-\beta_1)], \\ J_1(U^B, q_0) &= q_{10}^2 - [u_1^B(0,q_0)]^2 - [u_2^B(0,q_0)]^2 + [\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_{20}}{2} + \beta_1 u_1^B(0,q_0) + (1-\beta_2)u_2^B(0,q_0)]^2, \\ J_2(U^B, q_0) &= q_{20}^2 - [u_1^B(0,q_0)]^2 - [u_2^B(0,q_0)]^2 + [\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_{10}}{2} + (1-\beta_1)u_1^B(0,q_0) + \beta_2 u_2^B(0,q_0)]^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Следуем схеме, представленной в приведенном выше замечании 1. Этап 1. $(k = 1)$. Строим две скалярные функции

$$V_i^{(1)}(q) = q_i^2 \ (i = 1, 2).$$

Этап 2. $(k = 0)$. Первое равенство из (7) реализуется при $u_2^B(0, q)$, если

$$\max_{u_2} \psi_1(u_2) = \psi_1(u_2^B(0,q)) \ \forall q \in \mathbf{R}^2, \tag{8}$$

где $\psi_1(u_2) = -u_2^2 + [\frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{2} + \beta_1 u_1^B(0,q) + (1-\beta_2)u_2]^2$. В свою очередь, (8) имеет место, если только

$$\begin{aligned} &\tfrac{d\psi_1(u_2)}{du_2}|_{u_2^B(0,q)} = -2u_2^B(0,q) + 2[\tfrac{a-c}{2b} - \tfrac{q_2}{2} + \beta_1 u_1^0(0,q) + (1-\beta_2)u_2^B(0,q)](1-\beta_2) = 0, \\ &\tfrac{d^2\psi_1(u_2)}{du_2^2} = -2 + 2(1-\beta_2)^2 = 2[\beta_2 - 2]\beta_2 < 0 \end{aligned}$$

(второе условие имеет место, ибо постоянная $\beta \in [0, 1]$). Из первого равенства и аналогично ему вторых равенств для (6)-(7):

$$-2u_1^B(0,q) + 2[\frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{2} + (1-\beta_1)u_1^B(0,q) + \beta_2 u_2^B(0,q)](1-\beta_1) = 0$$

получаем построение $u_i^B(0, q)$ $(i = 1, 2)$ сводится к решению двух линейных неоднородных алгебраических уравнений (относительно $u_1^B(0, q)$ и $u_2^B(0, q)$)

$$\begin{cases} \beta_1(1-\beta_2)u_1^B(0,q) + \beta_2(\beta_2-2)u_2^B(0,q) = (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_2}{2})(1-\beta_2), \\ \beta_1(\beta_1-2)u_1^B(0,q) + \beta_2(1-\beta_1)u_2^B(0,q) = (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_1}{2})(1-\beta_1). \end{cases} \tag{9}$$

Определитель системы (9)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_1(1-\beta_2) & \beta_2(\beta_2-2) \\ \beta_1(\beta_1-2) & \beta_2(1-\beta_1) \end{vmatrix} = \beta_1\beta_2(-3+\beta_1+\beta_2) \neq 0,$$

ибо $0 < \beta \leq 1$ $(i = 1, 2)$. Для построения решения $u_i^B(0, q)$ $(i = 1, 2)$ из системы (9) найдем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_2}{2})(1-\beta_2) & \beta_2(\beta_2 - 2) \\ (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_1}{2})(1-\beta_1) & \beta_2(1-\beta_1) \end{vmatrix} = (1-\beta_1)\beta_2 \begin{vmatrix} (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_2}{2})(1-\beta_2) & (\beta_2 - 2) \\ (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_1}{2}) & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{\beta_2(1-\beta_1)}{2}[-\frac{a-c}{b}(3-2\beta_2) + q_1(2-\beta_2) + q_2(1-\beta_2)] > 0,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \beta_1(1-\beta_2) & (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_2}{2})(1-\beta_2) \\ \beta_1(\beta_1 - 2) & (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_1}{2})(1-\beta_1) \end{vmatrix} = \beta_1(1-\beta_2) \begin{vmatrix} 1 & (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_2}{2}) \\ \beta_1 - 2 & (-\frac{a-c}{2b} + \frac{q_1}{2})(1-\beta_1) \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{\beta_1(1-\beta_2)}{2}[-\frac{a-c}{b}(3-2\beta_1) + q_1(1-\beta_1) + q_2(2-\beta_1)].$$

Отсюда

$$\begin{array}{l} u_1^B(0,q) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{1-\beta_1}{2\beta_1(-3+\beta_1+\beta_2)}[-\frac{a-c}{b}(3-2\beta_2) + q_1(2-\beta_2) + q_2(1-\beta_2)], \\ u_2^B(0,q) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1-\beta_2}{2\beta_2(-3+\beta_1+\beta_2)}[-\frac{a-c}{b}(3-2\beta_1) + q_1(1-\beta_1) + q_2(2-\beta_1)] \end{array} \tag{10}$$

и $U^B = (U_1^B, U_2^B) \div (u_1^B(0,q), u_2^B(0,q))$.

Наконец, согласно (7),

$$\begin{array}{l} J_1^B = J_1(U^B, q_0) = V_1^{(0)}(q_0) = q_{10}^2 - [u_1^B(0,q_0)]^2 - [u_2^B(0,q_0)]^2 + \\ +[\frac{a-c}{2b} - \frac{q_{20}}{2} + \beta_1 u_1^B(0,q_0) + (1-\beta_2)u_2^B(0,q_0)]^2, \\ J_2^B = J_2(U^B, q_0) = V_2^{(0)}(q_0) = q_{20}^2 - [u_1^B(0,q_0)]^2 - [u_2^B(0,q_0)]^2 + \\ +[\frac{a-c}{2b} - \frac{q_{10}}{2} + (1-\beta_1)u_1^B(0,q_0) + \beta_2 u_2^B(0,q_0)]^2, \end{array}$$

причем $u_i^B(0, q_0)$ заданы в (10), где $q_0 = (q_1^0, q_2^0)$.

Таким образом, утверждение 1 доказано.

□

Заключение

В работе получены следующие результаты:

во-первых, рассмотрен динамический одношаговой вариант управляемой дуополии Курно, формализовано для нее понятие равновесной по Бержу ситуации и равновесного по Бержу решения для такой одношаговой бескоалиционной позиционной игры двух лиц;

во-вторых, построен *явный вид* равновесного по Бержу решения.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-00-90408 Укр_а и НАН Украины проект №03-01-14.

Список литературы

1. COURNOT, A.A. (1838) Recherches sur les Principes Mathematiques de la Theorie des Rechesses.Paris: L.Hachette.

2. Вайсман, К.С. Равновесие по Бержу: автореферат дисс. ... канд. физ.-мат. наук. — СПбГУ, 1994. — 13 с.

   Vaisman, K.S.(1995) The Berge equilibrium: abstract of diss. ... cand. of phys. math. sciences. SPbSU.

3. ZHUKOVSKIY, V.I., SALUKVADZE, M.E. and VAISMAN, K.S. (1999)The Berge equilibrium. Preprint. — Tbilisi: Institute of Control Systems.

4. Вайсман, К.С. Равновесие по Бержу // Линейно-квадратичные дифференциальные игры / Жуковский, В.И., Чикрий, А.А. — Киев: Наукова Думка, 1994. — С. 119-142.

   VAISMAN, K. (1994) The Berge equilibrium. In the book Zhukovskiy, V.I. and Chikrii, A.A. Linear-quadratic differential games. Kiev: Naukova Dumka.

5. COLMAN, A., KORNER, T., MUSY, O. and TAZDAIT, T. (2011) Mutual support in games: some properties of Berge equilibria. *Journal of Mathematical Psychology, Article in Press*. p. 1–10.

6. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов и приложения. — М.:URSS, 2012. — 304 с.

   Zhukovskiy, V.I., Kudryavtsev, K.N. (2012) Equilibrium in conflicts and applications. Moscow: URSS.

Статья поступила в редакцию 26.05.2015

УДК: 517.978.2

MSC2010:91A20:91A80

РАВНОВЕСИЕ ПО БЕРЖУ В ОЛИГОПОЛИИ БЕРТРАНА ПРИ УЧЕТЕ ИМПОРТА

© А. С. Горбатов, В. И. Жуковский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, 1, Москва, 119234, Российская Федерация
e-mail: *gorbatovanton@gmail.com, zhkvlad@yandex.ru*

Berge equilibrium in Bertrand oligopoly with import.

Gorbatov A. S., Zhukovskiy V. I.

Abstract. In recent years, there is an active formation of the mathematical theory of Berge equilibrium, proposed in 1994, by Russian mathematician, K.S. Vaisman (who died in 1998, did not live up to 36 years). However, the use of this balance is not beyond the scope of matrix games of two persons. This article, apparently for the first time, breaks this tradition. The article by using dynamic programming shows explicit form of strongly guaranteed Berge equilibrium in the mathematical model taking into account the Bertrand oligopoly under uncertainty (imports suddenly appeared on the market).

Considering in 1836 the interaction processes between companies, Cournot suggested that an oligopoly only determine the amount of product, the price is formed as a result of the balance between supply and demand. The market price is set at a level at which buyers will be present demand for all the goods on the market. However, a more natural behavior seller is the direct appointment of the prices (« Price — Value, plus a reasonable sum for the wear and tear of conscience in demanding it.», says American writer Ambrose Bierce (1842-1914)). This is the approach suggested by Joseph Bertrand in published in 1883. In this his model the companies set the price for their goods themselves, the volume of the goods offered by them are formed so as to completely satisfy caused demand at given prices.

In the presented article for controlled model of Bertrand oligopoly the explicit form of guaranteed Berge equilibrium is found by the dynamic programming method.

Key words: non-cooperative game, Bertrand oligopoly, dynamic programming, Berge equilibrium, uncertainty.

Введение

Рассматривая в 1836 году процессы взаимодействия компаний, Курно [1] предполагал, что олигополии определяют только объем выпускаемой продукции, цена же формируется в результате равновесия между спросом и предложением. Рыночная цена устанавливается на том уровне, на котором покупателями будет предъявлен спрос на весь «выкинутый на рынок» товар. Однако более естественным поведением продавца является прямое назначение цены («Цена — стоимость плюс разумное вознаграждение за угрызения совести при назначении цены», иронизирует американский писатель Абрам Бирс (1842-1914)). Именно такой подход предложил Жозеф Бертран в опубликованной в 1883 году статье [2]. В исследованной Бертраном модели фирмы сами устанавливают цену на производимый ими товар, объемы же предлагаемого ими товара формируются так, чтобы полностью удовлетворить возникший при данных ценах спрос.

1. Математическая модель

Заметим, что покупатели обычно рассматривают продукты одинакового назначения разных фирм как разные товары. Поэтому логично считать, что на рынок каждая из фирм выходит со своим товаром, причем все эти товары взаимозаменяемы. Так производителя двух марок совершенно идентичного по составу яблочного сока (иногда даже разлитого из одного и того же концентрата в одном и том же цехе, но для разных продавцов и под разными марками) могут позиционировать свои товары не только как различные, но даже ориентированные на разные группы покупателей.

Предполагаем, что на рынке сбыта функционируют две фирмы 1 и 2, производящие взаимозаменяемый товар. Фирма 1 назначает цену p_1, а фирма 2 — цену p_2. После объявления цен на рынке складывается спрос (предполагаем наличие линейной зависимости спроса от объявленных цен). Для первой фирмы спрос описывается следующим образом

$$Q_1(p_1, p_2) = q - l_1 p_1 + l_2(p_2 + y),$$

для второй

$$Q_2(p_1, p_2) = q - l_1 p_2 + l_2(p_1 + y).$$

Здесь q - начальный спрос, $l_1 > 0$ — коэффициент эластичности, который указывает насколько уменьшается спрос на предлагаемый товар при возрастании его цены на единицу, $l_2 > 0$ — коэффициент эластичности, показывающий насколько изменится спрос при увеличении на единицу цены товара, $y > 0$ — цена единицы аналогичного импортного товара, назначаемая независимо от действий продавцов (y играет в дальнейшем «роль» неопределенности).

Пусть себестоимость единицы товара есть c. Тогда функции, оценивающие прибыль соответственно первой и второй фирм, можно представить следующим образом

$$f_1(p_1, p_2, y) = [q - l_1 p_1 + l_2(p_2 + y)](p_1 - c),$$

$$f_2(p_1, p_2, y) = [q - l_1 p_2 + l_2(p_1 + y)](p_2 - c).$$

Отметим, что функция выигрыша $f_1(p_1, p_2, y)$ строго вогнута по p_i $(i = 1, 2)$, т.к. $\frac{\partial^2 f_i}{\partial p_i^2} = -2l_1 < 0$. Вследствие этого достаточные условия существования p_i^*, максимизирующей $f(p_1, p_2, y)$ по p_i, сводятся к выполнению условий

$$\left.\frac{\partial f_1(p_1, p_2, y)}{\partial p_1}\right|_{p_1^*} = q - 2l_1 p_1^* + l_2(p_2 + y) + l_1 c = 0,$$

$$\left.\frac{\partial f_2(p_1, p_2, y)}{\partial p_2}\right|_{p_2^*} = q - 2l_1 p_2^* + l_2(p_1 + y) + l_1 c = 0.$$

Тогда первая фирма получит наибольшую прибыль, если, зная цены p_2 и y, назначит цену своего товара равной

$$p_1^* = \frac{q + l_1 c}{2l_1} + \frac{l_2}{2l_1}(p_2 + y).$$

Аналогично для второй фирмы

$$p_2^* = a + l(p_1 + y).$$

Здесь и в дальнейшем используем постоянные

$$a = \frac{q + l_1 c}{2l_1} > 0, \quad l = \frac{l_2}{2l_1} > 0.$$

Будем далее учитывать существование временного лага. Считаем его равным одному периоду. Пусть u_i - управляющее воздействие i-ой фирмы, при этом $u_i[k]$—сумма, затрачиваемая i-ой фирмой $(i = 1, 2)$ в момент времени $t = k$, например, на рекламу, на модернизацию процесса производства, внедрение новых технологий, различные меры поощрения и (или) наказания производителя. Обозначим управляющее воздействие неопределенности $z = ly$. Тогда рассматриваемая управляемая система взаимодействия фирм и импортера можно представить в разностном виде

$$\begin{cases} p_1(k+1) = a + lp_2(k) + z[k] + \alpha u_1[k] + (1-\beta)u_2[k], \\ p_2(k+1) = a + lp_1(k) + z[k] + (1-\alpha)u_1[k] + \beta u_2[k] \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ p_i(0) = p_i^0 (i = 1, 2), \end{cases} \tag{1}$$

где p_i^0 — начальные цены $(i = 1, 2)$; $z[k] = ly[k]$ — реализация неопределенности в момент времени $t = k$, постоянные $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Первая фирма часть своих средств

$\alpha u_i[k]$ направляет в собственное производство, а оставшуюся часть $(1-\alpha)u_1[k]$ — в производство конкурента. Аналогичным образом поступает вторая фирма.

Введем обозначения

$$L = \begin{pmatrix} 0 & l \\ l & 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{pmatrix},$$

$$\bar{a} = (a, a), p = (p_1, p_2), e = (1, 1), u = (u_1, u_2).$$

Систему (1) представим следующим образом

$$p(k+1) = \bar{a} + Lp(k) + ez[k] + Mu[k],\quad p(0) = p^0 = (p_1^0, p_2^0)\quad (k = 0, 1, 2, \dots). \tag{2}$$

2. Одношаговая бескоалиционная игра

Далее предполагаем в системе (1) (или (2)) наличие только одного шага, т.е. $k = 0$. Каждую фирму назовем игроком. Стратегию (правило действия) i-ой фирмы $U_i(k)$ в момент времени $k = 0$ отождествляем (согласно подходу теории дифференциальных позиционных игр) со скалярной функцией $u_i(k, p)$, зависящей только от позиции $(k, p_1, p_2) = (k, p)$, реализовавшейся и момент времени $t = k$. Такое соответствие далее представляется $U_i(k) \div u_i(k, p)$.

Множество стратегий $U_i(k)$ обозначим символом $\mathscr{U}_i(k)$ $(i = 1, 2)$. Тогда стратегией игрока i в определенной далее бескоалиционной однопериодной игре будет $U_i = U_i(0) \in \mathscr{U}_i = \mathscr{U}_i(0)$ $(i = 1, 2)$.

Перейдем к неопределенностям. Предполагая *информационную дискриминацию фирм*, неопределенность $Z(k)$ в момент $t = k$ будем отождествлять со скалярной функцией $z(k, p, u)$, т.е. $Z(k) \div z(k, p, u) = z(k, p_1, p_2, u_1, u_2)$. Далее используем множество $\mathscr{Z}(0) = \{Z(0)\}$. Тогда сама неопределенность будет $Z = Z(0) \in \mathscr{Z} = \mathscr{Z}(0)$.

С возрастанием времени k от 0 до 1 развертывание игры во времени происходит следующим образом. Пусть игроки не объединяются в коалицию, причем каждый i- -ый $(i = 1, 2)$ из них сам выбирает свою стратегию $U_i \in \mathscr{U}_i$, т.е. формирует скалярную функцию $u_i(0, {}_1, {}_2) \geq 0$ (при $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$). Выбор стратегий $U_i(0) \in \mathscr{U}_i(0)$ игрок i осуществляет, руководствуясь стремлением к возможному увеличению своего выигрыша — значения своей функции выигрыша $J_i(U, Z, p^0)$, $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$, явный вид которой будет приведен ниже. В ходе игры реализуются конкретные значения стратегий игроков $u_i[0] = u_i(0, p(0))$ $(i = 1, 2)$ и одновременно с ними значения неопределенности $z[0] = z(0, (0), u[0])$. Из (2) при $k = 0$ находим значение фазового вектора $p(1) = ({}_1(1), p_2(1))$:

$$p(1) = \bar{a} + Lp(0) + ez[0] + Mu[0].$$

В результате получаем, *во-первых*, две последовательности

$$\{p_i(k)\}_{k=0}^{1} \quad (i=1,2), \tag{3}$$

образующие дискретную траекторию системы (2) при использовании игроками стратегий $U_i(k) \div u_i(0,p)$, $U_i \in \mathscr{U}_i$ $(i=1,2)$ и реализующейся неопределенности $Z(k) \div z(0,p,u)$;
во-вторых, реализации

$$u_i[0] = u_i(0, p_1(0), p_2(0)) \quad (i=1,2) \tag{4}$$

примененных игроками стратегий $U_i \in \mathscr{U}_i$ $(i=1,2)$;
в-третьих, реализацию неопределенности $z[0] = z(0, p(0), u[0])$.

С помощью (3), (4) и $z[0]$ построим критерий (функцию выигрыша) игрока i $(i=1,2)$, значение которой (выигрыш) оценивает качество функционирования этого игрока. При этом будем учитывать следующие три обстоятельства:

во-первых, каждая i-ая фирма $(i=1,2)$ ориентирована на уменьшение назначаемой ею цены, что, в конечном счете, можно свести к уменьшению $p_i^2(1)$ (или максимизации $-p_i^2(1)$);

во-вторых, обе фирмы стремятся затратить возможно меньше своих ресурсов и ресурсов партнера, что соответствует требованию максимизации $-u_1^2[0] - u_2^2[0]$;

в-третьих, следуя принципу гарантированного результата по Ю.Б. Гермейеру, игрок i $(i=1,2)$ должен рассчитывать на «максимальное противодействие» неопределенности; для учета этого требования введем в функцию выигрыша слагаемое $2z^2[0]$.

В результате получаем явный вид функции выигрыша i-го игрока:

$$J_i(U,Z,p_0) = -p_i^2(1) - u_1^2[0] - u_2^2[0] + 2z^2[0] \quad (i=1,2). \tag{5}$$

Упорядоченная пятерка

$$\Gamma =< \{1,2\}, \Sigma \div (2), \{\mathscr{U}_i\}_{i-1,2}, \mathscr{Z}, \{J_i(U,Z,p^0) \div (5)\}_{i=1,2} >$$

образует *одношаговую бескоалиционную позиционную линейно-квадратичную игру двух лиц при неопределенности.* В ней $\Sigma \div (2)$ означает, что управляемая система Σ описывается системой разностных уравнений (2), а $J_i(U,Z,p^0) \div (5)$ — функция выигрыша i-го игрока, которая имеет вид (5).

Определение 1. Пару $(U^B, J^B[p^0]) \in \mathscr{U} \times \mathbb{R}^2$ назовем *сильно гарантированным равновесием по Бержу* игры Γ, если

1) существуют неопределенности $Z^{(i)} \in, \mathscr{Z}$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\min_{Z \in, \mathscr{Z}} J_i(U, Z, p^0) = J_i(U, Z^{(i)}, p^0) = J_i[U, p^0] \quad (i = 1, 2)$$

при $\forall U \in \mathscr{U}$;

2) $U^B = (U_1^B, U_2^B) \in \mathscr{U}$ — единственная ситуация равновесия по Бержу в игре гарантий

$$< \{1, 2\}, \Sigma, \{\mathscr{U}_i\}_{i=1,2}, \{J_i[U_1, U_2, p^0]\}_{i=1,2} >,$$

т.е. U^B определяется двумя равенствами

$$\max_{U_2 \in \mathscr{U}_2} J_1[U_1^B, U_2, p^0] = J_1[U^B, p^0] = J_1^B[p^0],$$

$$\max_{U_1 \in \mathscr{U}_1} J_2[U_1, U_2^B, p^0] = J_2[U^B, p^0] = J_2^B[p^0];$$

3) вектор $J^B[p^0] = (J_1^B[p^0], J_2^B[p^0])$.

3. Алгоритм построения сильно гарантированного равновесия по Бержу (СГРБ)

Здесь используем модификацию метода динамического программирования Белламана и результаты из [4, §3.4]. Дело в том, что ситуация равновесия по Бержу становится равновесной по Нэшу в игре двух (только!) лиц, если игроки обменялись своими функциями выигрыша. Этим фактом и теоремой 3.4.1 из [4, с. 241] воспользуемся, предложив следующий порядок нахождения СГРБ.

Прежде всего, строим две $(i = 1, 2)$ функции

$$\begin{aligned} W_i(k, p, u, z, V_i^{(k)}(p(k+1) = \bar{a} + Lp + ez + Mu)) = \\ = -u_1^2 - u_2^2 + 2z^2 + V_i^{(k+1)}(\bar{a} + Lp + ez + Mu) \ \ (k = 1, 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Этап 1. При $k = 1$ вводятся две скалярные функции

$$V_i^{(1)}(p) = -p_i^2 \ \ (i = 1, 2).$$

Этап 2. При $k = 0$ сначала находим для $\forall p \in \mathbb{R}_+^2 = \{p = (p_1, p_2) | p_i \geq 0\}$, $u \in \mathbb{R}^2$ функции $z^{(i)}(1, p, u)$ $(i = 1, 2)$, используя равенства

$$\begin{aligned} &\min_z \{-u_1^2 - u_2^2 + 2z^2 - [a + lp_2 + z + \alpha u_1 + (1 - \beta) u_2]^2\} = \\ &= Idem\{z \to z^{(1)}(0, p, u_1, u_2)\} = W_1[0, p, u_1, u_2], \\ &\min_z \{-u_1^2 - u_2^2 + 2z^2 - [a + lp_1 + z + (1 - \alpha) u_1 + \beta u_2]^2\} = \\ &= Idem\{z \to z^{(2)}(0, p, u_1, u_2)\} = W_2[0, p, u_1, u_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Затем нужно построить функции $V_i^{(0)}[p]$ и $u_i^e(0,p)$ $\quad (i=1,2)$ согласно условиям

$$V_1^{(0)}[p] = \max_{u_2} W_1[0,p,u_1^B(0,p),u_2] = Idem\{u_2 \to u_2^B(0,p)\}, \tag{8}$$

$$V_2^{(0)}[p] = \max_{u_1} W_2[0,p,u_1,u_2^B(0,p)] = Idem\{u_1 \to u_1^B(0,p)\} \tag{9}$$

$\forall p \in \mathbb{R}_+^2$ и убедиться, что пара $(u_1^B(0,p), u_2^B(0,p))$ единственна.

Этап 3. Найти пару $(U^B, J^B[p^0])$, где ситуация $U^B = (U_1^B, U_2^B)$, $U_i^B \div u_i^B(0,p)$ и $J_i^B[p^0] = V_i^{(0)}[p^0]$ $(i=1,2)$.

Тогда пара $(U^B, J^B[p^0] = (J_1^B[p^0], J_2^B[p^0])) \in \mathscr{U} \times \mathscr{U} \times \mathbb{R}^2$ образует сильно гарантированное равновесие по Бержу игры Г.

4. Построение явного вида СГРБ игры Г

Утверждение 1. *Если в игре* Г *постоянные*

$$a = \frac{q + l_1 c}{2l_1},\ l = \frac{l_2}{2l_1},\ (\alpha,\beta) \in \{\alpha,\beta | \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 1\},$$

то при любом выборе начальных цен $p^0 = (p_1^0, p_2^0)$ *явный вид сильно гарантированного равновесия по Бержу* $(U^B, J^B[p^0])$ *будет,*

во-первых, сама равновесная по Бержу ситуация

$$U^B = (U_1^B, U_2^B),\ U_i^B \div \frac{\Delta_i(p_1,p_2)}{\Delta} \quad \forall p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (i=1,2),$$

где постоянная

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{7}{2}(1-\beta)\alpha & 2 + \frac{7}{2}(1-\beta)^2 \\ 2 + \frac{7}{2}(1-\alpha)^2 & \frac{7}{2}(1-\alpha)\beta \end{vmatrix} = -4 + \frac{49}{4}(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha+\beta-1) - 7[(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2], \tag{10}$$

а линейные по ценам p_1 *и* p_2 *скалярные функции* $\Delta_i(p_1,p_2)$ *имеют вид*

$$\Delta_1(p_1,p_2) = 7(1-\alpha)(a + lp_1) + \frac{49}{4}(1-\alpha)(1-\beta)[(1-\beta)(a+lp_1) - \beta(a+lp_2)],$$

$$\Delta_2(p_1,p_2) = 7(1-\beta)(a + lp_2) + \frac{49}{4}(1-\alpha)(1-\beta)[(1-\alpha)(a+lp_2) - \alpha(a+lp_1)].$$

во-вторых, равновесные по Бержу гарантии

$$J^B[p^0] = (J_1^B[U^B,p^0], J_2^B[U^B,p^0]) = (V_1^{(0)}[p^0], V_2^{(0)}[p^0]),$$

$$V_1^{(0)}[p^0] = -[u_1^B(0,p^0)]^2 - [u_2^B(0,p^0)]^2 - \frac{7}{4}[a + lp_2^0 + \alpha u_1^B(0,p^0) + (1-\beta)u_2^B(0,p^0)]^2,$$

$$V_2^{(0)}[p^0] = -[u_1^B(0,p^0)]^2 - [u_2^B(0,p^0)]^2 - \frac{7}{4}[a + lp_1^0 + (1-\alpha)u_1^B(0,p^0) + \beta u_2^B(0,p^0)]^2, \tag{11}$$

$$u_1^B(0,p^0) = \frac{\Delta_i(p_1^0,p_2^0)}{\Delta} \quad (i=1,2).$$

Доказательство. Следуем схеме, описанной в предыдущем разделе.
Этап 1. $(k=1)$ Строим две скалярные функции

$$V_i^{(1)}(p) = -p_i^2 \quad (i=1,2).$$

Этап 2. $(k=0)$ Равенства (7) реализуются при $z = z^{(i)}(t,p,u)$, если для $\forall u, p \in \mathbb{R}^2$

$$\min_z \bar{W}_i^{(0)}(z) = \bar{W}_i^{(0)}(z^{(i)}(0,p,u)) \quad (i=1,2), \tag{12}$$

где

$$\bar{W}_1^{(0)}(z) = 2z^2 - [a + lp_2 + z + \alpha u_1 + (1-\beta)u_2]^2,$$
$$\bar{W}_1^{(0)}(z) = 2z^2 - [a + lp_1 + z + (1-\alpha)u_1 + \beta u_2]^2.$$

В свою очередь, (12) имеет место, если

$$\left.\frac{\partial \bar{W}_1^{(0)}(z)}{\partial z}\right|_{z^{(1)}(0,p,u)} = 4z^{(1)}(0,p,u) - 2[a + lp_2 + z^{(1)}(0,p,u) + \alpha u_1 + (1-\beta)u_2] = 0,$$

$$\left.\frac{\partial \bar{W}_2^{(0)}(z)}{\partial z}\right|_{z^{(2)}(0,p,u)} = 4z^{(1)}(0,p,u) - 2[a + lp_2 + z^{(2)}(0,p,u) + (1-\alpha)u_1 + \beta)u_2] = 0$$

$\forall p \in \mathbb{R}_+^2$, $u \in \mathbb{R}^2$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} z^{(1)}(0,p,u) &= \frac{1}{2}[a + lp_2 + \alpha u_1 + (1-\beta)u_2], \\ z^{(2)}(0,p,u) &= \frac{1}{2}[a + lp_1 + (1-\alpha)u_1 + \beta)u_2]. \end{aligned} \tag{13}$$

Следует отметить, что при построении $z^{(i)}(0,p,u)$ $(i=1,2)$ использованы неравенства

$$\left.\frac{\partial^2 \bar{W}_1^{(0)}(z)}{\partial z^2}\right|_{z^{(1)}(0,p,u)} = 2 > 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \bar{W}_2^{(0)}(z)}{\partial z^2}\right|_{z^{(2)}(0,p,u)} = 2 > 0.$$

После подстановки (13) в (8), (9) получаем

$$V_1^{(0)}[p] = \max_{u_2} W_1(0,p,u,z^{(1)}(0,p,u), V_1^{(1)}(p) = -p_1^2(1)) =$$
$$= \max_{u_2}\{-[u_1^B(0,p)]^2 - u_2^2 - \frac{7}{4}[a + lp_2 + \alpha u_1^B(0,p) + (1-\beta)u_2]^2]\} = Idem\{u_2 \to u_2^B(0,p)\},$$
$$V_2^{(0)}[p] = \max_{u_1} W_2(0,p,u,z^{(2)}(0,p,u), V_2^{(1)}(p) = -p_2^2(1)) =$$
$$= \max_{u_1}\{-u_1^2 - [u_2^B(0,p)]^2 - \frac{7}{4}[a + lp_2 + (1-\alpha)u_1(0,p) + \beta)u_2^B]^2]\} = Idem\{u_1 \to u_1^B(0,p)\},$$

Эти равенства реализуются, если

$$\left.\frac{\partial W_1^{(0)}[u_2]}{\partial u_2}\right|_{u_2^B(0,p)} = -2u_2^B(0,p) - \frac{7}{2}(1-\beta)[a + lp_2 + \alpha u_1^B(0,p) + (1-\beta)u_2^B(0,p)] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W_1^{(0)}[u_2]}{\partial u_2^2} = -2 - \frac{7}{2}(1-\beta)^2 < 0,$$

$$\left.\frac{\partial W_2^{(0)}[u_1]}{\partial u_1}\right|_{u_1^B(0,p)} = -2u_1^B(0,p) - \frac{7}{2}(1-\beta)[a + lp_1 + (1-\alpha)u_1^B(0,p) + \beta u_2^B(0,p)] = 0,$$

$$\frac{\partial^2 W_2^{(0)}[u_1]}{\partial u_1^1} = -2 - \frac{7}{2}(1-\alpha)^2 < 0.$$

Приведенные строгие неравенства имеют место, ибо постоянные $\alpha, \beta \in [0,1]$. Полученные же выше равенства образуют систему из двух линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $u_i^B(0,p)$ $(i = 1,2)$:

$$\begin{cases} \frac{7}{2}(1-\beta)\alpha u_1^B(0,p) + [2 + \frac{7}{2}(1-\beta)^2]u_2^B(0,p) = -\frac{7}{2}(1-\beta)(a+lp_2), \\ [2 + \frac{7}{2}(1-\alpha)^2]u_1^B(0,p) + \frac{7}{2}(1-\alpha)\beta u_2^B(0,p) = -\frac{7}{2}(1-\alpha)(a+lp_1). \end{cases} \tag{14}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{7}{2}(1-\beta)\alpha & 2 + \frac{7}{2}(1-\beta)^2 \\ 2 + \frac{7}{2}(1-\alpha)^2 & \frac{7}{2}(1-\alpha)\beta \end{vmatrix} = -4 + \frac{49}{4}(1-\alpha)(1-\beta)(\alpha+\beta-1) - 7[(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2]. \tag{15}$$

Заметим, что $\Delta < -4$ при $\alpha + \beta \le 1$, $\alpha, \beta \in [0,1]$. Следовательно при указанных значениях постоянных α и β система (14) имеет единственное решение $(u_1^B(0,p), u_2^B(0,p))$ (т.к. $\Delta \ne 0$).

Найдем $\Delta_1(p_1,p_2)$ и $\Delta_2(p_1,p_2)$, где

$$\Delta_1(p_1,p_2) = \begin{vmatrix} -\frac{7}{2}(1-\beta)(a+lp_2) & 2 + \frac{7}{2}(1-\beta)^2 \\ -\frac{7}{2}(1-\alpha)(a+lp_1) & \frac{7}{2}(1-\alpha)\beta \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2(p_1,p_2) = \begin{vmatrix} \frac{7}{2}(1-\beta)\alpha & -\frac{7}{2}(1-\beta)(a+lp_2) \\ 2 + \frac{7}{2}(1-\alpha)^2 & -\frac{7}{2}(1-\alpha)(a+lp_1) \end{vmatrix}.$$

Получим

$$\begin{aligned} \Delta_1(p_1,p_2) &= 7(1-\alpha)(a+lp_1) + \frac{49}{4}(1-\alpha)(1-\beta)[(1-\beta)(a+lp_1) - \beta(a+lp_2)], \\ \Delta_2(p_1,p_2) &= 7(1-\beta)(a+lp_2) + \frac{49}{4}(1-\alpha)(1-\beta)[(1-\alpha)(a+lp_2) - \alpha(a+lp_1)]. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда решение системы (14) при $\forall(\alpha,\beta)\in\{\alpha,\beta|\alpha\geq 0,\beta\geq 0,\alpha+\beta\leq 1\}$ и $\forall p\in\mathbb{R}^2_+$ имеет вид:

$$u_1^B(0,p_1,p_2)=\frac{\Delta_1(p_1,p_2)}{\Delta},u_2^B(0,p_1,p_2)=\frac{\Delta_2(p_1,p_2)}{\Delta}, \tag{17}$$

где явный вид Δ, Δ_i $(i=1,2)$ задан соответственно в (15) и (16).

Этап 3. Строим пару $(U^B, J^B[p^0])$ — сильно гарантированное равновесие по Бержу игры Г, используя формулы этапа 3 (из раздела 3), а также (15)-(17), а затем (11). □

Заключение

Методом динамического программирования для математической модели управляемой олигополии Бертрана найден явный вид сильно гарантированного равновесия по Бержу.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №14-00-90408 Укр_а и НАН Украины проект №03-01-14.

Список литературы

1. Cournot, A.A. (1938) *Recherches sur les principes mathematiques de la theorie de richesses.* Paris.
2. Bertrand, J. (1883) Review of Walras's theorie mathematique de la richesses sociale and Cournot's recherches sur lew principes mathematique de la theorie des richesses. *Journal des Savants.* 68. p. 499 - - 508.
3. Жуковский, В.И., Шершеков, М.И. Многошаговая модель дуополии Бертрана при учете импорта / В.И. Жуковский,М.И. Шершеков // Спектральные и Эволюционные задачи. — Симферополь, 2013. — 23. — С. 85-90.

   Zhukovskiy, V.I. & Shershekov, M.I. (2013) Multistep model of Bertrand duopoly by accounting import. *Spectral and Evolution problems.* 23. p. 85-90.
4. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н., Смирнова Л.В. Гарантированные решения конфликтов и их приложения / В.И. Жуковский,К.Н. Кудрявцев,Л.В. Смирнова. — Москва: КРАСАНД, 2013. — 268 с.

   Zhukovskiy, V.I., Kudryavtsev, K.N. and Smirnova, L.V. (2013) *Guaranteed solutions of conflicts and their applications.* Moscow: KRASAND.

Статья поступила в редакцию 26.05.2015

УДК: 519.833.2

MSC2010: 91A10

УЧЕТ ИМПОРТА В ДУОПОЛИИ КУРНО

© В. И. Жуковский

Московский Государственный университет им. В.М. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, МГУ,ВМК, 2-ой учебный корпус, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Т. В. Макаркина

Московский государственный областной гуманитарный институт
факультет информатики
ул. Зеденая, д.22, 1 учебный корпус, г.Орехово-Зуево, Московская область,142600,
Российская Федерация
e-mail: *tatmak147@yandex.ru*

Import accounting in Kurno duopoly.

Zhukovskiy V. I., Makarkina T. V.

Abstract.

The competition of two firms on the market of one product with regard to import is considered. The particular volume of product supplied to the market by the importer is unknown to both producers. They know only restrictions about volume of import defined by the market. Non-cooperative game of two persons under uncertainty will serve as a mathematical model where "the role"of uncertainty "plays"the quantity of export goods, "the role"of players strategy - the quantity of goods supplied by them on the sale, payoff function - the income of the player. Two notions of guaranteed decision of players - strictly guaranteed (Nash) equilibrium and (Pareto) quaranteed equilibrium are used. The first one is on the boundary of the concept of maximin and Nash equilibrium, the second one - of Pareto minimum and Nash equilibrium decision. In this paper for stated mathematical Kurno model with regard to import the explicit form of both guaranteed equilibrium is found. Let us imagine that two companies (designated I and II respectively) compete in the market of the product. The volume of produced by them during a certain (specified a priori) period of time output is denoted by x_1 and x_2 respectively. At the same time there appears an importing company on the market, the managers of the companies I and II do not have any information about purposes and volume of goods produced by it. They can only consider that the volume of goods produced by the importer is nonnegative quantity $y \in [0, +\infty)$. The i-production costs are assumed to be linearly dependent on the amount of output x_i ($i = 1, 2$) and can be represented as $cx_i + d$, c and d here are respectively variable and constant costs (for example, variable costs include the costs to workers wages, the purchase of raw materials, depreciation of equipment, constant costs – rent of premises, land, machinery, licenses etc.). Depending on the demand the price of product is determined on the market, this price we also consider as linearly dependent on the amount of $\bar{x} = x_1 + x_2 + y$ goods entered on sale. The price of goods we represent in the form $p(\bar{x}) = a - b\bar{x}$, where $a = const > 0$ - the initial price of goods, and constant positive elasticity coefficient $b > 0$ shows how much the price is "falling"when a unit of production is on sale. Suppose that the price is determined so that to equalize supply and demand. Let each of the firms sells all that it produces, then the proceeds of the first company is $p(\bar{x})x_1 = (a - b\bar{x})x = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1$, and its profit (proceeds minus costs) is $\psi_1(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1 - (cx_1 + d) = ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - byx_1 - cx_1 - d$, at the same time the second company's profit is $\psi_2(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_2 - (cx_2 + d) = = ax_2 - bx_1x_2 - bx_2^2 - byx_2 - cx_2 - d$.

By determining the amount of production, the management of the manufacturing company is forced to rely not only on the "rational"choice of the competitor, but also on the possibility of implementing any in advance unpredictable uncertainty values - y volume supplied to the import market. Following the principle guaranteed result by Germeier Yu. B., we will assume that when choosing a production volume x_i $(i = 1, 2)$ i-manufacturer is focused on maximizing the function $F_i(x_1, x_2, y) = \phi_i(x_1, x_2, y) + by^2$. In this case the first term is a function of profit, and the second "compels"when choosing decision to focus on "maximum resistance to uncertainty".

Key words: Nash equilibrium, Pareto minimality, guaranteed decisions.

Введение

Представим, что две фирмы (обозначенные соответственно I и II) конкурируют на рынке одного продукта. Объем произведенной ими за некоторый (заданный априори) промежуток времени продукции обозначим через x_1 и x_2 соответственно. Одновременно с этим на рынке появляется компания-импортер, о целях и объемах представляемой им продукции руководство компаний I и II не имеют никакой информации. Они могут считать лишь, что объем представляемого импортером товара является некоторой неотрицательной величиной $y \in [0, +\infty]$. *Издержки* i-го производства предполагаются линейно зависимыми от количества выпущенной продукции x_i $(i = 1, 2)$ и могут быть представлены в виде $cx_i + d$, здесь c и d соответственно переменные и постоянные издержки (к переменным издержкам относятся, например, затраты на зарплату рабочих, на закупку сырья, на амортизацию оборудования, к постоянным - аренда помещений, земли, станков, лицензий и т.п.). На рынке в зависимости от спроса устанавливается цена продукции, которую также считаем линейно зависящей от количества $\bar{x} = x_1 + x_2 + y$ поступившего на продажу товара. Цену товара представляем в виде $p(\bar{x}) = a - b\bar{x}$, где $a = const > 0$ – начальная цена товара, а постоянный положительный коэффициент эластичности $b > 0$ показывает, на сколько "падает"цена при поступлении в продажу единицы продукции. Предположим, что цена определяется так, чтобы уравнять спрос и предложение. Пусть каждая из фирм продает все, что она производит, тогда выручка первой фирмы будет

$$p(\bar{x})x_1 = (a - b\bar{x})x = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1,$$

а ее прибыль (выручка минус издержки) составит

$$\psi_1(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1 - (cx_1 + d) =$$

$$= ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - byx_1 - cx_1 - d, \quad (1)$$

одновременно прибыль второго

$$\psi_2(x_1, x_2, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_2 - (cx_2 + d) =$$

$$= ax_2 - bx_1x_2 - bx_2^2 - byx_2 - cx_2 - d. \quad (2)$$

Определяя объем производства, руководство фирмы-производителя вынуждено ориентироваться не только на "рациональный"выбор конкурента, но и на возможность реализации любого, заранее непредсказуемого значения неопределенности - объема y поставленного на рынок импорта. Следуя принципу гарантированного результата по Ю.Б.Гермейеру [1], будем считать, что при выборе объемов производства x_i $(i = 1, 2)$ i-ый производитель ориентируется на максимизацию функции

$$F_i(x_1, x_2, y) = \psi_i(x_1, x_2, y) + by^2. \quad (3)$$

При этом первое слагаемое в (3) представляет собой функцию прибыли, а второе "вынуждает" при выборе решения ориентироваться на "максимальное противодействие неопределенности".

Замечание 1. Появление последнего слагаемого в (3) можно объяснить и следующим образом. Для каждого игрока i $(i = 1, 2)$ фактически рассматривается двухкритериальная задача: первый критерий - это его прибыль $\psi_i(x_1, x_2, y)$, второй связан с идеями принципа гарантированного результата: принимать i-му игроку решения рекомендуется в условиях, когда неопределенность "стремится максимально напортить жизнь"этому игроку, то есть принимает "самые большие"из возможных значений. Эта рекомендация и приводит ко второму критерию by^2, который i-ый игрок также стремится увеличить. Итак в двухкритериальной задаче, возникающей для каждого игрока, у него два критерия, которые он желает увеличить - прибыль и by^2. Линейная их свертка с положительными коэффициентами (здесь единицы) и приводит к (3), а чтобы для оговариваемой двухкритериальной задачи добиться максимума по Парето, то достаточно эту линейную свертку "максимизировать".

Упорядоченная четверка

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{X_i = [0, +\infty)\}_{i=1,2}, \{Y = [0, +\infty)\}, \{F_i(x, y) \div (3)\}_{i=1,2} \rangle$$

образует бескоалиционную игру двух лиц при неопределенности. Здесь 1 и 2 - порядковые номера игроков; стратегии игроков $x_i \in X_i = [0, +\infty)$. В результате выбора игроками своих стратегий складывается ситуация $x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2$. Независимо от выбора игроков реализуется некоторая неотрицательная неопределенность $y \in Y$. На множестве пар $(x, y) \in X \times Y$ определена функция выигрыша i-го игрока $F_i(x, y)$ из (3).

В настоящей статье используются два понятия: сильно гарантированное равновесие и Парето-гарантированное равновесие, предложенных в 2013 г. в серии статей [2], [3].

1. СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОЕ РАВНОВЕСИЕ (СГР)

Понятие СГР лежит на стыке понятий максимина и равновесия по Нэшу.

Определение 1. *Сильно гарантированным равновесием (СГР) игры* Γ *назовем тройку* $(x^H, F_1^H, F_2^H) \in X \times R^2$, *для которой существуют две функции* $y^{(i)}(x) : X \to Y$ *такие, что,*

во-первых, для каждой ситуации $x \in X$ *стратегическая неопределенность* $y^{(i)}(x) : X \to Y$ *является минимальной в задаче*

$$< Y, F_i(x, y) > \quad (i = 1, 2),$$

т.е.

$$\min_{y \in Y} F_i(x, y) = F_i(x, y^{(i)}(x)) = F_i[x] \quad \forall x \in X \quad (i = 1, 2); \tag{4}$$

во-вторых, ситуация $x^H = (x_1^H, x_2^H)$ *является равновесной по Нэшу в „игре гарантий“*

$$\Gamma_g = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle ,$$

т.е.

$$\begin{aligned} &\max_{x_1 \in X_1} F_1[x_1, x_2^H] = F_1[x_1^H, x_2^H] = F_1^H, \\ &\max_{x_2 \in X_2} F_2[x_1^H, x_2] = F_2[x_1^H, x_2^H] = F_2^H. \end{aligned} \tag{5}$$

Иерархическую интерпретацию СГР можно представить следующей двухуровневой трехшаговой иерархической игрой (см. рис.1). На верхнем уровне находятся два игрока и на первом ходу они посылают на нижний уровень свои возможные ситуации $x = (x_1, x_2) \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня; он, во-первых, формирует для каждого $i = 1, 2$ и каждой ситуации $x \in X$ гарантии $F_i[x] \leq F_i(x, y)$ $\forall y \in Y$ $(i = 1, 2)$ и передает гарантии $F_i[x]$ на верхний уровень.

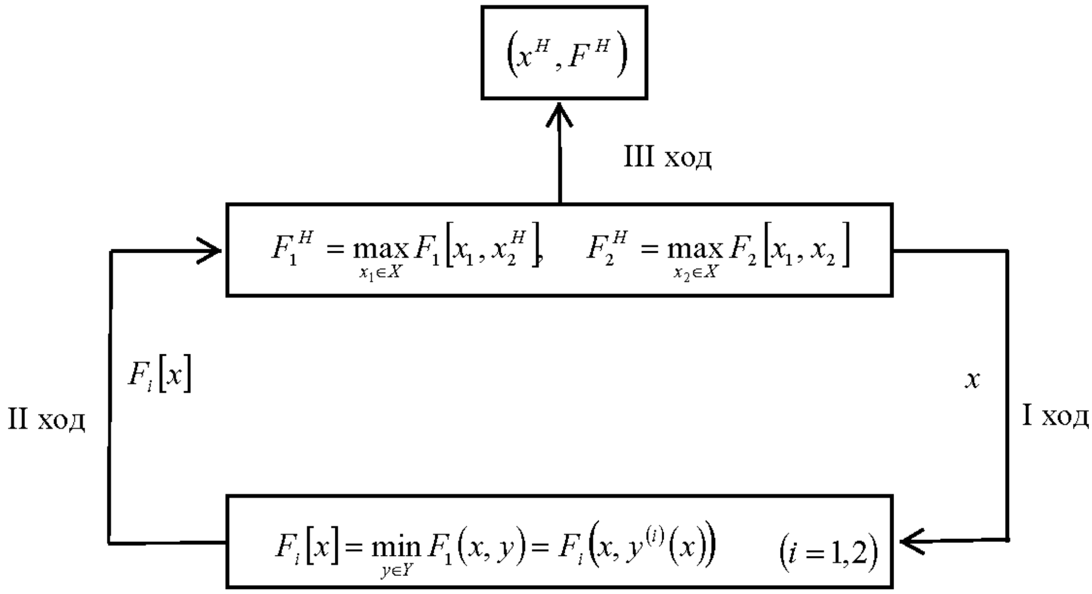

Рис. 1. Способ формирования СГР.

На *третьем ходу* игроки для "игры гарантий"

$$\Gamma_g = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle$$

находят ситуацию равновесия по Нэшу из (5) и выигрыши $F_i^H = F_i[x^H]$ $(i = 1, 2)$. Пара $(x^H, F^H = (F_1^H, F_2^H))$ как раз и образует СГР игры Γ.

Стратегии (x_1^H, x_2^H) предлагается игрокам применять при этом, ибо если в результате действий обоих игроков сложилась ситуация $x = (x_1, x_2)$, то $F_i(x, y) \geq F_i[x]$ $\forall y \in Y$ $(i = 1, 2)$, т.е. ни при какой неопределенности $y \in Y$ выигрыш любого i-го игрока не может стать меньше его гарантии

$$F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x, y) \quad (i = 1, 2).$$

Следовательно, так как неопределенность y может принимать любые значения из Y, то при выборе своих стратегий из ситуации $x = (x_1, x_2)$ оба игрока могут твердо рассчитывать только на свою гарантию $F_i[x](i = 1, 2)$. А тогда естественно в качестве решения игры Γ выбрать такие ситуации $x^H \in X$, которые реализуют равновесие по Нэшу для "игры гарантий"Γ_g. Итак, получили следующий *способ* построения СГР игры Γ:

a) найти две скалярные функции $y^{(i)}(x) : X \to Y$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x, y) = F_i(x, y^{(i)}(x)) \quad \forall x \in X \quad (i = 1, 2);$$

b) для полученной "игры гарантий" $\Gamma_g = \langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i[x]\}_{i=1,2} \rangle$ построить x^H – ситуацию равновесия по Нэшу, определяемую равенствами (5).

Найденная в результате тройка (x^H, F_1^H, F_2^H) как раз и будет сильно гарантированным равновесием игры Γ.

Утверждение 1. *Если в игре* Γ *будет* $b > 0$, $d < \frac{5(a-c)^2}{49b}$ *и* $a > c$, *то сильно гарантированное равновесие имеет вид*

$$\left((x_1^H, x_2^H), (F_1^H, F_2^H)\right) = \left(\left(\frac{2(a-c)}{7b}, \frac{2(a-c)}{7b}\right), \left(\frac{5(a-c)^2}{49b} - d, \frac{5(a-c)^2}{49b} - d\right)\right).$$

Доказательство. Применим приведенную процедуру для игры Γ - математической модели дуополии Курно с учетом импорта. При этом будем следовать указанным выше шагам a) и b).

a) Для функции выигрыша 1-го игрока

$$F_1(x, y) = [a - b(x_1 + x_2 + y)]x_1 - (cx_1 + d) + by^2$$

построим функцию

$$y^{(1)}(x) = \arg\min_{y \in Y} F_1(x, y) \quad \forall x \in X.$$

Для этого достаточно, чтобы

$$\left.\frac{\partial F_1(x, y)}{\partial y}\right|_{y^{(1)}(x)} = -bx_1 + 2by^{(1)}(x) = 0 \quad \forall x \in X,$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_1(x, y)}{\partial y^2}\right|_{y^{(1)}(x)} = 2b > 0.$$

Отсюда $y^{(1)}(x) = \frac{x_1}{2}$ и поэтому

$$F_1[x] = \min_{y \in Y} F_1(x, y) = F_1\left(x, y^{(1)})(x)\right) = \left[a - b\left(\frac{3x_1}{2} + x_2\right)\right] x_1 - (cx_1 + d) + \frac{bx_1^2}{4} =$$

$$= ax_1 - \frac{5}{4}bx_1^2 - bx_1x_2 - (cx_1 + d),$$

$$F_2[x] = \min_{y \in Y} F_2(x, y) = ax_2 - \frac{5}{4}bx_2^2 - bx_1x_2 - (cx_1 + d).$$

b) Требования (5) имеют место, если

$$\left.\frac{\partial F_1[x_1, x_2^H]}{\partial x_1}\right|_{x_1^H} = (a - c) - \frac{5}{2}bx_1^H - bx_2^H = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_1[x_1, x_2^H]}{\partial x_1^2} = -\frac{5}{2}b < 0,$$

$$\left.\frac{\partial F_2[x_1^H, x_2]}{\partial x_2}\right|_{x_2^H} = (a-c) - bx_1^H - \frac{5}{2}bx_2^H = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F_2[x_1^H, x_2]}{\partial x_2^2} = -\frac{5}{2}b < 0.$$

Отсюда для нахождения $x^H = (x_1^H, x_2^H)$ получаем систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 &=& 2\frac{a-c}{b}, \\ 2x_1 + 5x_2 &=& 2\frac{a-c}{b}, \end{cases}$$

тогда

$$x_i^H = \frac{2}{7} \cdot \frac{a-c}{b} \quad (i = 1, 2),$$

и поэтому

$$F_i^H = F_i[x^H] = \frac{5(a-c)^2}{49b} - d \quad (i = 1, 2).$$

□

2. Парето-гарантированное равновесие (ПГР)

Гарантии F_i^H $(i = 1, 2)$, которые найдены в предыдущем разделе "самые маленькие". А ведь игроки стремятся к возможно большим выигрышам и, следовательно, к возможно большим гарантиям. Поэтому здесь будем использовать гарантии заведомо не меньшие, чем "диктуемые"определением 1.

Определение 2. *Парето-гарантированным равновесием (ПГР) игры* Γ *назовем тройку* $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$*, для которой существует функция* $y_P(x) : X \to Y$ *такая, что,*

во-первых, для каждой ситуации $x \in X$ *функция* $y_P(x)$ *является минимальной по Парето неопределенностью в двухкритериальной задаче*

$$\langle Y, \{F_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle\,,$$

полученной из Γ *при каждой фиксированной ситуации* $x = (x_1, x_2) \in X$*, т.е. при каждом "замороженном"*$x \in X$ *несовместна система неравенств*

$$F_i(x, y) \le F_i(x, y_P(x)) \quad (i = 1, 2),$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое;

во-вторых, ситуация $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ *является равновесной по Нэшу в игре (без неопределенностей)*

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i\}_{i=1,2}, \{F_i(x, y_P(x))\}_{i=1,2} \rangle\,,$$

полученной при подстановке в игру Γ *вместо неопределенности ее реализации* $y_P(x)$.

При этом x^e назовем *Парето-гарантирующей равновесной ситуацией, а* $F^e = (F_1^e, F_2^e)$, $F_i^e = F_i(x^e, y_P(x^e))$ $(i = 1, 2)$ *– соответствующей ей векторной гарантией игрока* i.

Парето-гарантированным равновесием (ПГР) дуополии Курно (с учетом импорта) будем называть тройку $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$, *где Парето-гарантирующая равновесная ситуация* $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ *та же, что и в ПГР игры* Γ, $\psi_i^e = \psi_i(x^e, y_P(x^e))$ $(i = 1, 2)$ *есть прибыли игроков, входящие в их гарантированный векторный выигрыш* $(F^e = (F_1^e, F_2^e), F_i^e = F_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e))$ *для* i*-ой фирмы* $(i = 1, 2))$.

Алгоритм построения Парето-гарантированного равновесия

Согласно приведенному определению 2, при нахождении ПГР в дуополии Курно с учетом импорта применим следующую последовательность шагов.

ШАГ I. Нахождение внутреннего минимума по Парето: определяем непрерывную функцию $y_P(x) : X \to Y$, доставляющую минимум по Парето в двухкритериальной задаче

$$\langle Y = [0, +\infty), \{F_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle \quad \forall x \in X, \tag{6}$$

полученной из Γ при каждой фиксированной ситуации $x = (x_1, x_2) \in X$.

ШАГ II. Построение ситуации равновесия по Нэшу: найдем равновесную по Нэшу ситуацию $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в игре (без неопределенностей)

$$\langle \{1, 2\}, \{X_i = [0, +\infty)\}_{i=1,2}, \{F_i(x, y_P(x))\}_{i=1,2} \rangle, \tag{7}$$

данная игра (игра паретовских гарантий) получена подстановкой в Γ минимальной по Парето неопределенности $y = y_P(x)$.

ШАГ III. Вычисление прибылей ψ_i^e: определим прибыли игроков $\psi_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e)) = \psi_i^e$ $(i = 1, 2)$.

Нахождение внутреннего минимума по Парето

Лемма 1. *Если существуют числа* α, $\beta > 0$ *и скалярная функция* $y_P(x) : X \to Y$ *такие, что для каждого* $x \in X$

$$\min_{y \in Y} [\alpha F_1(x, y) + \beta F_2(x, y)] = Idem[y \to y_P(x)]$$

($Idem[y \in y_P(x)]$ *означает выражение в квадратных скобках, где* y *заменено на* $y_P(x)$*), то при каждом* $x \in X$ *функция* $y_P(x)$ *будет минимальной по Парето в двухкритериальной задаче (6).*

Доказательство. Имеется в любом пособии по многокритериальной оптимизации. □

Лемма 2. *Неопределенность*

$$y_P(x_1, x_2) = \frac{b(x_1 + x_2)}{2}$$

минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (6) для каждой ситуации $x = (x_1, x_2) \in [0, +\infty)^2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x, y) = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) = \psi_1(x_1, x_2, y) + \psi_2(x_1, x_2, y) + y^2 =$$
$$= a(x_1 + x_2) - b(x_1 + x_2)^2 - by(x_1 + x_2) - c(x_1 + x_2) - 2d + y^2.$$

Минимальное значение функции при каждом фиксированном $x = (x_1, x_2) \in X$ достигается при $y_P(x) = \frac{b(x_1+x_2)}{2}$, так как

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=y_P(x)} = -b(x_1 + x_2) + 2y_P(x) = 0$$

и

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=y_P(x)} = 2 > 0.$$

Отсюда, с учетом Леммы 1 при $\alpha = \beta = 1$, получаем, что неопределенность $y_P(x) = \frac{b(x_1+x_2)}{2}$ минимальна по Парето в двухкритериальной задаче (6). □

Построение ситуации равновесия по Нэшу

Утверждение 2. *При* $b > 0$ *и* $a >$ *cситуация равновесия по Нэшу в игре (7) имеет вид*

$$x^e = (x_1^e, x_2^e) = \left(\frac{a - c}{b(3 + b)}, \frac{a - c}{b(3 + b)}\right).$$

Доказательство. Используя найденную в Лемме 2 неопределенность $y_P(x)$ и учитывая (1) и (3), получим

$$F_1(x, y_P(x)) = ax_1 - bx_1^2 - bx_1x_2 - \frac{b^2(x_1 + x_2)}{2}x_1 - cx_1 - d + \frac{b^2(x_1 + x_2)^2}{8},$$
$$F_2(x, y_P(x)) = ax_2 - bx_2^2 - bx_1x_2 - \frac{b^2(x_1 + x_2)}{2}x_2 - cx_2 - d + \frac{b^2(x_1 + x_2)^2}{8}.$$

Достаточные условия существования ситуации равновесия по Нэшу $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в игре (7) можно свести к выполнению четырех требований

$$\left.\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right|_{x=x^e} = a - 2bx_1^e - bx_2^e - \frac{b^2}{2}(2x_1^e + x_2^e) - c + \frac{b^2}{4}(x_1^e + x_2^e) = 0, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2}\right|_{x=x^e} = -2b - \frac{3b^2}{4} < 0, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right|_{x=x^e} = a - 2bx_1^e - bx_2^e - \frac{b^2}{2}(x_1^e + 2x_2^e) - c + \frac{b^2}{4}(x_1^e + x_2^e) = 0, \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2}\right|_{x=x^e} = -2b - \frac{3b^2}{4} < 0, \tag{11}$$

Условия (9) и (11) имеют место в силу $b > 0$, а равенства (8), (10) представляют собой систему из двух линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \left(2b + \frac{3b^2}{4}\right) x_1^e + \left(b + \frac{b^2}{4}\right) x_2^e = a - c, \\ \left(b + \frac{b^2}{4}\right) x_1^e + \left(2b + \frac{3b^2}{4}\right) x_2^e = a - c. \end{cases} \tag{12}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2b + \frac{3b^2}{4} & b + \frac{b^2}{4} \\ b + \frac{b^2}{4} & 2b + \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} = \left(2b + \frac{3b^2}{4}\right)^2 - \left(b + \frac{b^2}{4}\right)^2 = (3b + b^2)\left(b + \frac{b^2}{2}\right),$$

при этом $\Delta \neq 0$ поскольку $b > 0$.

Найдем определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a - c & b + \frac{b^2}{4} \\ a - c & 2b + \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} = (a - c)\begin{vmatrix} 1 & b + \frac{b^2}{4} \\ 1 & 2b + \frac{3b^2}{4} \end{vmatrix} =$$

$$= (a - c)\left(2b + \frac{3b^2}{4} - b - \frac{b^2}{4}\right) = (a - c)\left(b + \frac{b^2}{2}\right),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2b + \frac{3b^2}{4} & a - c \\ b + \frac{b^2}{4} & a - c \end{vmatrix} = (a - c)\begin{vmatrix} 2b + \frac{3b^2}{4} & 1 \\ b + \frac{b^2}{4} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a - c)\left(2b + \frac{3b^2}{4} - b - \frac{b^2}{4}\right) = (a - c)\left(b + \frac{b^2}{2}\right)$$

и получим решение системы (12)

$$x_1^e = x_2^e = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(a - c)\left(b + \frac{b^2}{2}\right)}{(3b + b^2)\left(b + \frac{b^2}{2}\right)} = \frac{a - c}{b(3 + b)} > 0.$$

□

Утверждение 3. *При $a > c$, $b > 0$ и $\frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} > d$ Парето-гарантированное равновесие в дуополии Курно с учетом импорта представляет тройка $(x^e, \psi_1^e, \psi_2^e)$, где*

$$x^e = (x_1^e, x_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right),$$

а соответствующая прибыль i -ой фирмы

$$\psi_i^e = \psi_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e)) = \frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} - d \quad (i = 1, 2).$$

Доказательство. С учетом утверждения перейдем к вычислению прибылей ψ_i^e и гарантированных выигрышей F_i^e.

Во-первых, непосредственной подстановкой $x^e = (x_1^e, x_2^e)$ в $y_P(x) = \frac{b(x_1+x_2)}{2}$ убедимся, что $y_P(x_1^e, x_2^e) = \frac{a-c}{3+b}$.

Во-вторых, подставив

$$x^e = (x_1^e, x_2^e) = \left(\frac{a-c}{b(3+b)}, \frac{a-c}{b(3+b)}\right)$$

и $y_P(x_1^e, x_2^e) = \frac{a-c}{3+b}$ в (1) – (3), определим гарантированные выигрыши игроков F_i^e, в которые входят

$$\begin{gathered}\psi_i^e = \psi_i(x_1^e, x_2^e, y_P(x_1^e, x_2^e)) = [a - b(x_1^e + x_2^e + y_P(x_1^e, x_2^e))]x_i^e - (cx_i^e + d) = \\ = \left[a - b\left(2\frac{a-c}{b(3+b)} + \frac{a-c}{3+b}\right)\right] \cdot \frac{a-c}{b(3+b)} - \left[\frac{c(a-c)}{b(3+b)} + d\right] = \\ = \frac{(a-c)^2}{b(3+b)^2} - d \quad (i = 1, 2),\end{gathered}$$

а сами гарантированные выигрыши

$$F_i^e = F_i(x^e, y_P(x^e)) = \psi_i^e + \frac{y_P^2(x^e)}{2} = \left(\frac{a-c}{3+b}\right)^2 \frac{2+b}{2b} - d \quad (i = 1, 2).$$

□

Заключение

В работе найден явный вид гарантированных стратегий производителей в математической модели дуополии Курно при учете импортных поставок. Причем обоим продавцам известны лишь границы возможного изменения объема поставок.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14 - 00 - 90408 Укр-а и НАН Украины проект № 03 - 01 - 14.

Список литературы

1. Гермейер, Ю.Б. Введение в исследование операций / Ю.Б.Гермейер. — М.: Наука, 1971. — 384 с.

   GERMIER Y.B. (1971) *Introduction to Research.*. Moscow: Nauka.

2. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности.I. Аналог седловой точки // Математическая теория игр и ее приложения. — Петрозаводск, 2013. — Т. 5, №1. — С. 27–44.

   ZHUKOVSKIY, V. & KUDRYAVTSEV, K. (2013) Equilibrating conflicts under uncertainty. I. Analog of saddle-point. *Mathematical games theory and their application.* T.5,№1. p. 27-44.

3. Жуковский, В.И., Кудрявцев, К.Н. Уравновешивание конфликтов при неопределенности.II. Аналог максимина // Математическая теория игр и ее приложения. — Петрозаводск, 2013. — Т. 5, №2. — С. 3–45.

   ZHUKOVSKIY, V & KUDRYAVTSEV, K. (2013) Equilibrating conflicts under uncertainty. II. Analog of maximin. *Mathematical games theory and their application.* T.5,№2. p. 3-45.

Статья поступила в редакцию 31.05.2015

УДК: 518.833.2

MSC2010: 91.A10

СУЩЕСТВОВАНИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО БЕРЖУ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С “РАЗДЕЛЕННОЙ” ДИНАМИКОЙ

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра оптимального управления
Ленинские горы, МГУ, ВМК, 2 учебный корпус, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Л. В. Смирнова

Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского
филиал в г. Орехово-Зуево Московской области
кафедра естественнонаучных дисциплин
ул. Шулайкиной, 2, Орехово-Зуево, Московская область, 142601, Российская Федерация
e-mail: *smirnovalidiya@rambler.ru*

The existence of Berge equilibrium in differential game with «separated» dynamics.

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V.

Abstract. The notion of «Berge equilibrium» (BE) appeared in Russia in 1994-1995 in the thesis written by Vaisman (post-graduate student of Zhukovskiy V.I. at that time; he died at the age of 36 in 1998). Then the notion BE was exported by Moussa Larbani and Radjef Muchamed Said (Algerian post-graduate students of Zhukovskiy V.I. at that time) beyond the bounds of Russia and became widespread in the whole world. BE publications member over 100 titles. The survey showed that in mathematical theory of BE the period of accumulation of facts had been completed and the stage of evolutionary development is being arised.

The suggested article corresponds to the second stage and it is pioneer in construction of a new mathematical direction: the investigation of questions of Berge equilibrium existence in N-persons positional differential games. In will be established the existence of situation BE in one non-cooperative positional differential game of N-persons with «separated» dynamics. First the proof is based on the application of Germeier convolution of payoff functions, second, on the theory of antagonistic positional differential games, namely, the application of mathematical formalization of quasi-motions and finally, third, on the method of control with the help of a quide offered.

Key words: positional differential games, Germeier convolution, saddle point, strategies, quasi-motion, Nash and Berge equilibrium.

Введение

Понятие «равновесия по Бержу» (РБ) появилось в России [1, 2, 3] в 1994-1995 годах в диссертации Константина Семеновича Вайсмана (тогда аспиранта В. И. Жуковского; К.С. Вайсман умер в 1998 г., не дожив до 36 лет). Затем понятие РБ было вывезено из России Муссой Ларбани и Мухамедом Роджефом (в то время алжирскими стажерами В. И. Жуковского) и получило за пределами России широкое распространение [4]. В настоящее время количество публикаций по РБ насчитывает уже свыше 100 названий. Как показал обзор [4], в математической теории РБ заканчивается период накопления фактов и зарождается этап эволюционного развития. Предлагаемая статья отвечает второму эволюционному периоду и является пионерской в построении нового математического направления: исследование вопросов существования равновесия по Бержу в позиционных дифференциальных играх многих лиц. В ней установлено существование равновесной по Бержу ситуации в одной бескоалиционной позиционной дифференциальной игре многих лиц с «разделенной» динамикой. Доказательство базируется на применении, *во-первых*, гермейеровской свертки функций выигрыша (см. [5]), *во-вторых*, теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, именно, использовании математической формализации квазидвижений (см. [6, с. 22-30]) и, наконец, *в-третьих*, предложенным российским академиком Н. Н. Красовским в [6, § 57] способом управления с поводырем.

Рассматривается бескоалиционная позиционная дифференциальная игра N-лиц (БПДИ) вида

$$\langle \mathbb{N}, \{\Sigma_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{\mathfrak{V}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{F_i(x[\vartheta])\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle, \tag{1}$$

где множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \dots, N\}$, изменение (во времени) управляемой подсистемы Σ_i описывается векторным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_i, v_i),\ x_i[t_0] = x_i^0 \ \ (i \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

здесь $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ являются компонентами фазового вектора $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^m$ $(m = \sum m_i)$, управляющее воздействие i-го игрока $v_i \in Q_i \in comp\ \mathbb{R}^{n_i}$, время $t \in [t_0, \vartheta]$, постоянные $\vartheta > t_0 \geq 0$; предполагаем, что для элементов упорядоченного набора (1) выполнены

Условия. Компоненты m_i-вектор-функций $f_i(t, x_i, v_i)$ определены и непрерывны по совокупности аргументов в области $\mathbb{R}^{1+m_i} \times Q_i$, локально липшицевы по первой и второй переменной, т. е.

$$\|f_i(t^{(1)}, x_i^{(1)}, v_i) - f_i(t^{(2)}, x_i^{(2)}, v_i)\| \leq \lambda_i(G_i)(\|x_i^{(1)} - x_i^{(2)}\| + |t^{(1)} - t^{(2)}|), \tag{3}$$

где $\forall\ (t^{(j)}, x_i^{(j)}) \in [0,\vartheta) \times G_i\ (j = 1,2)$, а G_i — любое ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^{m_i}$, $\lambda_i(G_i) = const > 0$ — постоянная Липшица, зависящая от множества G_i; выполнено ограничение подлинейного роста: $\exists\ k_i = const > 0$, для которой $\|f_i(t,x_i,v_i)\| \leq k_i(1+\|x_i\|)$ при любых $(t,x_i,v_i) \in [0,\vartheta)\times\mathbb{R}^{m_i}\times Q_i$; кроме того функция выигрыша i-го игрока $F_i(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}^m$ $(i \in \mathbb{N})$.

1. Предварительные сведения

Систему (2) далее представим в виде

$$\dot{x} = f(t,x,v),\ x[t_0] = x_0, \tag{4}$$

здесь уже фазовый вектор $x = (x_1,\ldots,x_N) \in \mathbb{R}^m$, управляющие воздействия игроков $v = (v_1,\ldots,v_N) \in Q = \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} Q_i \in \mathbb{R}^n$ $(n = \sum\limits_{i\in\mathbb{N}} n_i)$, m-вектор-столбец $f = (f_1,\ldots,f_N)$.

Предполагаем далее, не оговаривая особо, что условия 3 выполнены для каждой i-ой подсистемы $(i \in \mathbb{N})$ из (2), откуда будет следовать, что эти же условия имеют место и для всей системы (4).

Напомним, что *стратегия* V_i для i-го игрока в игре (1) отождествляется с n_i-вектор-функцией $v_i(t,x) \in Q_i$ при любых $(t,x) \in [0,\vartheta)\times\mathbb{R}^m$ (этот факт обозначается $V_i \div v_i(t,x)$); множество таких стратегий $\{V_i\}$ представлено символом $\mathfrak{V}_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Используем также и ситуацию

$$V = (V_1,\ldots,V_N) \in \mathfrak{V} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathfrak{V}_i,\ V \div v(t,x) = (v_1(t,x),\ldots,v_N(t,x)) \in Q;$$

будем далее применять и пучки квазидвижений [6, с. 22-30].

БПДИ (1) может представлять, например, математическую модель конкуренции двух, трех и т. д. производителей, у которых отсутствуют прямые производственные связи (последним обстоятельством как раз и вызвана «разделенность» динамики в системе (4)). Это же БПДИ можно использовать и как математическую модель динамики нескольких механических самостоятельно управляемых объектов, осуществляющих, например, сближение к заданному моменту времени ϑ.

Определение 1. Ситуацию $V^B = (V_1^B,\ldots,V_N^B) \in \mathfrak{V}$ будем называть равновесной по Бержу для игры (1), если

$$\max_{x[\cdot]\in\mathscr{X}[t_0,x_0,V_i^B]} F_i(x[\vartheta,t_0,x_0,V_i^B]) \leq \min_{x[\cdot]\in\mathscr{X}[t_0,x_0,V^B]} F_i(x[\vartheta,t_0,x_0,V^B])\ (i \in \mathbb{N}). \tag{5}$$

Замечание 1. Согласно [6, с. 14] и включениям

$$\mathscr{X}[t_0,x_0,V^B] \subset \mathscr{X}[t_0,x_0,V_i^B]\quad (i \in \mathbb{N}),$$

$$X[\vartheta, t_0, x_0, V^B] \subset X[\vartheta, t_0, x_0, V_i^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

неравенства (5) эквивалентны выполнению неравенств

$$F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V_i^B]) \leq F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B]) \quad (i \in \mathbb{N})$$

при любых квазидвижениях [6, § 2] системы (4) $x[\cdot, t_0, x_0, V_i^B]) \in \mathscr{X}[t_0, x_0, V_i^B]$, $x[\cdot, t_0, x_0, V^B]) \in \mathscr{X}[t_0, x_0, V^B]$, порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) стратегией V_i^B и ситуацией V^B соответственно, причем значение $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B])$ будет *единственным* при $\forall\ i \in \mathbb{N}$ и $\forall\ x[\cdot, t_0, x_0, V^B] \in \mathscr{X}[t_0, x_0, V^B]$.

Замечание 2. Здесь и далее запись «стратегия $V_i \div Q_i$» будет означать, что «используется любая из стратегий $V_i \in \mathfrak{V}_i$». Из определения пучка квазидвижений $\mathscr{X}[t_0, x_0, V_i^B]$ следует, что пучок $\mathscr{X}[t_0, x_0, V_i^B]$ при $\forall\ i \in \mathbb{N}$ включает в себя все квазидвижения

$$x[\cdot, t_0, x_0, V_1 \div Q_1, \ldots, V_{i-1} \div Q_{i-1}, V_i^B \div v_i^B(t, x), V_{i+1} \div Q_{i+1}, \ldots, V_N \div Q_N],$$

а значит и квазидвижение $x[\cdot, t_0, x_0, V_1^B, \ldots, V_{i-1}^B, V_i^B, V_{i+1}^B, \ldots, V_N^B] = x[\cdot, t_0, x_0, V^B]$. Отсюда как раз и получаем единственность $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, V^B])$ $(i \in \mathbb{N})$ в (5).

2. Управление с поводырем

Надежда на существование ситуации равновесия по Бержу в игре (1) (в смысле определения 1) весьма и весьма проблематична. Для решения такой задачи привлечем идею управления с поводырем из [7, § 57], которую предложил академик Николай Николаевич Красовский при построении седловой точки антагонистической позиционной дифференциальной игры, устойчивой по отношению к информационным помехам. «Введение поводыря можно рассматривать как включение в схему управления некоторого регулятора, моделирующего управляемый объект на ЭВМ» [7, с. 248]. Следуя такому подходу, «расширим» для каждого $i \in \mathbb{N}$ управляемую систему (2), добавив к (2) динамическую систему, описывающую изменение (во времени) состояния $z_i(t)$ для i-го поводыря

$$\dot{z}_i = f_i(t, z_i, u_i), \ z_i[t_0] = x_i^0 \quad (i \in \mathbb{N}),$$

где $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $u_i \in Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Аналогично переходу от (2) к (4) приходим к векторному обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot{z} = f(t, z, u), \ z[t_0] = x_0 = (x_1^0, \ldots, x_N^0). \tag{6}$$

Здесь уже вектора $z = (z_1, \ldots, z_N) \in \mathbb{R}^m$, $z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i \in \mathbb{N})$, $u = (u_1, \ldots, u_N) \in Q = \prod_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, напомним, что вектор-столбец $f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathbb{R}^m$. Следуя «идее поводыря», присоединим (6) к системе (4) и тогда изменение (во времени) «новой расширенной» управляемой системы Σ_e будет описываться системой обыкновенных дифференциальных уравнений $2m$-го порядка

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = f(t, x, v),\ x[t_0] = x_0, \\ \dot{z} = f(t, z, u),\ z[t_0] = x_0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \{\dot{y} = \bar{f}(t, y, u, v), \quad y[t_0] = y_0\}, \tag{7}$$

где уже $2m$-вектор-столбцы $y = (x, z)$, $\bar{f}(t, y, u, v) = (f(t, x, v), f(t, z, u))$. Пучок квазидвижений системы (7) $y[t, t_0, y_0, U, V]$, $t_0 \leq t \leq \vartheta$, порожденных «расширенной» ситуацией $(\bar{U}, \bar{V}) \in \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{V}}$ из начальной позиции (t_0, y_0) будем обозначать через $\mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{U}, \bar{V}]$, аналогично $\mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{V}]$ — пучок квазидвижений $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}]$ этой же системы (7), построенный в соответствии с требованиями [6, с. 22-39].

Как уже отмечалось, уравнение (6) описывает движение (изменение состояния во времени t) поводыря, который, в свою очередь, представляет объединение N поводырей, заданных, в свою очередь, уравнениями $\dot{z}_i = f_i(t, z_i, u_i)$ $(i \in \mathbb{N})$. Стратегия $\bar{U} \div u(t, x, z) \in Q$ в процессе синтеза управляющих воздействий симулирует квазидвижение управляемой системы (6), заданных таким же как (4) уравнением (6) с теми же начальными условиями $(z[t_0] = x_0)$ и с теми же ограничениями на управляющие воздействия $(u_i \in Q_i)$.

Итак, от БПДИ (1) переходим (за счет добавления поводыря) к «расширенной» БПДИ

$$\Gamma_e = \langle \mathbb{N}, \Sigma_e \div (3.6), \{\bar{\mathfrak{A}}_i, \bar{\mathfrak{V}}_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{F_i(x[\vartheta])\}_{i \in \mathbb{N}} \rangle,$$

где, как и в (1), множество порядковых номеров игроков $\mathbb{N} = \{1, \ldots, N\}$, но, в отличие от (1), позицию игры Γ_e образует тройка $(t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, здесь фазовый вектор $(x, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, m-вектора $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $z = (z_1, \ldots, z_N)$ и $x_i, z_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ $(i \in \mathbb{N})$; поэтому стратегией i-го игрока уже будет $\bar{V}_i \div \bar{v}_i(t, x, z) \in Q_i$ $(i \in \mathbb{N})$ множество таких $\{\bar{V}_i\}$ обозначаем символом $\bar{\mathfrak{V}}_i$, аналогично для i-го поводыря $\bar{U}_i \div \bar{u}_i(t, x, z) \in Q_i$ $\forall (t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, а $\{\bar{U}_i\}$ обозначим $\bar{\mathfrak{A}}_i$; заметим, что выбор пары $(\bar{V}_i, \bar{U}_i) \in \bar{\mathfrak{V}}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_i$ осуществляется $i-$ым игроком $(i \in \mathbb{N})$; тогда «роль расширенной» ситуации в игре Γ_e выполняет пара $(\bar{V}, \bar{U}) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, где

$$\bar{V} = (\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_N) \in \bar{\mathfrak{V}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathfrak{V}}_i, \quad \bar{U} = (\bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_N) \in \bar{\mathfrak{A}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathfrak{A}}_i,$$

$$\bar{V}_i \div \bar{v}_i(t, x, z), \quad \bar{V}_i \in \bar{\mathfrak{V}}_i, \quad \bar{U}_i \div \bar{u}_i(t, x, z), \quad \bar{U}_i \in \bar{\mathfrak{A}}_i (i \in \mathbb{N});$$

одновременно далее будут использоваться и ситуации

$$(\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{i-1}, \bar{V}_i, \bar{U}_{i+1}, \dots, \bar{U}_N) = (\bar{U} \parallel \bar{V}_i) \in \bar{\mathfrak{A}}_1 \times \dots \times \bar{\mathfrak{A}}_{i-1} \times \bar{\mathfrak{V}}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_{i+1} \times \dots \times \bar{\mathfrak{A}}_N.$$

В игре Γ_e каждый i-ый игрок выбирает свою «расширенную» стратегию $(\bar{V}_i, \bar{U}_i) \in \bar{\mathfrak{V}}_i \times \bar{\mathfrak{A}}_i$ $(i \in \mathbb{N})$; в результате образуется «расширенная» ситуация $(\bar{V}, \bar{U}) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, где

$$\bar{V} \div \bar{v}(t,x,z) = (\bar{v}_1(t,x,z), \dots, \bar{v}_N(t,x,z)), \; \bar{U} \div \bar{u}(t,x,z) = (\bar{u}_1(t,x,z), \dots, \bar{u}_N(t,x,z)).$$

Затем, строятся пучки $\mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{V}, \bar{U}]$ квазидвижений $y[t, t_0, y_0, \bar{V}, \bar{U}]$, $t_0 \le t \le \vartheta$ системы (7), порожденные из начальной позиции (t_0, x_0, x_0) «расширенной» ситуацией $(\bar{V}, \bar{U})$, а сам пучок $\mathscr{Y}[t_0, x_0, x_0, \bar{V}, \bar{U}]$ образуют пары квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}]$, $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}]$ соответственно подсистем $\dot{x} = f(t,x,v)$, $x[t_0] = x_0$ и $\dot{z} = f(t,z,u)$, $z[t_0] = x_0$. Наконец, функция выигрыша i-го игрока определяется функционалом $F_i(x[\vartheta])$, здесь $x[\vartheta] \in X[\vartheta, t_0, x_0, V]$, сам *выигрыш* i-го игрока — значением этого функционала $F_i(x[\vartheta])$. Заметим, что функционалы $F_i(x[\vartheta])$ определены на «правых концах» квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}] \in \mathscr{X}[t_0, x_0, \bar{V}]$ системы (4), порожденных из (t_0, x_0) набором $\bar{V} \in \bar{\mathfrak{V}}$, т. е. $x[\vartheta] = x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}] \in X[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}] = \{\mathscr{X}[t_0, x_0, \bar{V}] \cap \{t = \vartheta\}\}$. Применяем далее и функционалы $F_i(z[\vartheta] \parallel x_i[\vartheta])$, где

$$(z[\vartheta] \parallel x_i[\vartheta]) = (z_1[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_1], \dots, z_{i-1}[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_{i-1}], x_i[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}_i],$$

$$z_{i+1}[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_{i+1}], \dots, z_N[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}_N]) \;\; \forall \bar{U}_j \in \bar{\mathfrak{A}}_j \;\; (j \in \mathbb{N} \backslash \{i\}).$$

Отметим также, что расширение пространства позиций от (t, x) до (t, x, z) и является основой доказательства существования равновесной по Бержу ситуации, конечно, наряду с применением гермейеровской свертки функций выигрыша и теории антагонистических позиционных дифференциальных игр (в квазидвижениях). Итак, подчеркнем еще раз, что в системе (7) (с «расширенной динамикой» за счет N поводырей $(i \in \mathbb{N})$) позицией игры, уже становится тройка $(t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$.

Аналогом определения 1 здесь уже можно считать

Определение 2. Набор стратегий $\bar{V}^B = (\bar{V}_1^B, \dots, \bar{V}_N^B) \in \bar{\mathfrak{V}} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \bar{\mathfrak{V}}_i$ назовем реализующим в игре Γ_e концепцию равновесности по Бержу, если

$$F_i(z[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}] \parallel x_i[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}_i^B]) \le F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B]) \;\; (i \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

при любых квазидвижениях $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}] \in \mathscr{Z}[t_0, x_0, \bar{U}]$ системы (6), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) любым возможным набором стратегий

$$\bar{U} = (\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_N) \div \bar{u}(t,x,z) \in Q \; \forall (t,x,z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$$

и любых квазидвижениях $x[t, t_0, x_0, \bar{V}^B]$ системы (4), порожденных из (t_0, x_0, x_0) набором стратегий $\bar{V}^B = (\bar{V}_1^B, \ldots, \bar{V}_N^B) \in \bar{\mathfrak{V}}$, $\bar{U}_i^B \div \bar{u}_i^B(t, x, z) \in Q_i$ $\forall (t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ $(i \in \mathbb{N})$, напомним, что $(z \parallel x_i) = (z_1, \ldots, z_{i-1}, x_i, z_{i+1}, \ldots, z_N)$.

Заметим, что пучки

$$\mathscr{Y}[t_0, y_0, V^B] \subset \mathscr{Y}_i[t_0, y_0, V_i^B] \quad (i \in \mathbb{N}),$$

и поэтому при «замороженных» $(t_0, y_0) = (t_0, x_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, $\bar{V}_i^B \in \bar{\mathfrak{V}}_i$ выигрыш каждого i-го игрока $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B])$ единственен (что сразу следует из (8)).

Целью этого раздела статьи является доказательство существования такого набора $\bar{V}^B$ (при выполнении условий 3).

3. Вспомогательная антагонистическая игра

Для доказательства существования набора $\bar{V}^B \in \bar{\mathfrak{V}}$, реализующего концепцию равновесности по Бержу (далее, для краткости называем *равновесным по Бержу набором стратегий в игре* Γ_e), будем использовать вспомогательную антагонистическую позиционную дифференциальную игру

$$\Gamma_a = \langle \{I, II\}, \Sigma \div (7), \bar{\mathfrak{V}}, \bar{\mathfrak{A}}, \varphi(x[\vartheta], z[\vartheta])) = \varphi(y[\vartheta]) \rangle. \tag{9}$$

В ней стратегии $\bar{V}$ у I-го игрока (минимизирующего функционал $\varphi(x[\vartheta], z[\vartheta])$) отождествляются с n-вектор-функциями $v(t, x, z) \in Q$ при любых $t \in [0, \vartheta)$ и $(x, z) \in \mathbb{R}^{2m}$, множество $\{\bar{V}\}$ обозначили символом $\bar{\mathfrak{V}}$; стратегии II-го игрока $\bar{U}$ (максимизирующего $\varphi(x[\vartheta], z[\vartheta])$) вводятся аналогично: $\bar{U} \div \bar{u}(t, x, z) \in Q$ при всех $(t, x, z) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ и $\{\bar{U}\} = \bar{\mathfrak{A}}$, применяем далее и ситуации $(\bar{V}, \bar{U}) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$. Затем, строим пучки квазидвижений $\mathscr{X}[t_0, x_0, \bar{V}]$ системы (4), $\mathscr{Z}[t_0, x_0, \bar{U}]$ системы (6) и $\mathscr{Y}[t_0, x_0, \bar{V}, \bar{U}]$ системы (7), порожденных из (t_0, x_0) стратегией I-го игрока $\bar{V} \in \bar{\mathfrak{V}}$, стратегией $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$ игрока II и ситуацией $(\bar{V}, \bar{U})$ соответственно, при этом используем также $2m$ вектор-столбец $y = (x, z)$.

Функция выигрыша игрока II (проигрыша игрока I) формируется следующим образом (с помощью функций выигрыша $F_i(x[\vartheta])$ для $i-$го игрока в игре Γ_e). Именно, каждая из скалярных функций $F_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ определена на области достижимости $X[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V} \div Q] = X[\bar{V} \div Q]$ системы (4), причем $X[\bar{V} \div Q]$ совпадает с областью достижимости $Z[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U} \div Q] = Z[\bar{U} \div Q]$ системы (6). Эти области достижимости являются компактами в $\mathbb{R}^m$. С помощью $F_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ уже аналитически конструируем используемую в (9) скалярную функцию

$$\varphi(y) = \max_{i \in \mathbb{N}} [F_i(z \parallel x_i) - F_i(x)]. \tag{10}$$

Утверждение 4. *При выполнении условий 3 в игре* Γ_a *существует седловая точка* $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, *определяемая цепочкой неравенств*

$$\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B]) \leq \varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0]) \leq \varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{U}^0]) \qquad (11)$$

для любых квазидвижений $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}^B] \in \mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B]$,

$$y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0] \in \mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0],\ y[\cdot, t_0, y_0, \bar{U}^0] \in \mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{U}^0]$$

системы (7), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) *стратегией I-го игрока* $\bar{V}^B$, *ситуацией* $(\bar{V}^B, \bar{U}^0)$ *и* $\bar{U}^0$ *— стратегией игрока II соответственно.*

Доказательство. Согласно теореме 3.1 из [6, с. 43] в игре Γ_a существует седловая точка $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$ при любом выборе начальной позиции $(t_0, y_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$, если выполнены условия 3, функция $\varphi(x, z)$ непрерывна на $X[V \div Q] \times Z[U \div Q]$ и имеет место условие седловой точки для маленькой игры [7, с. 56] . Если $F_i(x)$ непрерывна, то [8, с. 54] непрерывной по $x \in X[V \div Q]$ и $z \in Z[U \div Q]$ будет и $\varphi(x, z)$ (следует из компактности в $\mathbb{R}^m$ множеств $X[V \div Q]$ и $Z[U \div Q]$, а также непрерывности $F_i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$)). Проверим, наконец, выполнение условия седловой точки для маленькой игры: это требование означает, что для каждой позиции $(t, y) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{2m}$ и любого $2m$-вектора $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ существует седловая точка $(v^B, u^0) \in Q \times Q$

$$\max_{v \in Q} [s_1' f(t, x, v) + s_2' f(t, z, u^0)] = s_1' f(t, x, v^B) + s_2' f(t, z, u^0) =$$
$$= \min_{u \in Q} [s_1' f(t, x, v^B) + s_2' f(t, z, u)] \quad \forall u, v \in Q \qquad (12)$$

(напомним, что штрих сверху означает операцию транспонирования и поэтому s' есть m-вектор-строка).

Из «разделенности» (12) следует, что выполнение (12) эквивалентно существованию пары $(v^B, u^0) \in Q^2$, удовлетворяющей двум равенствам

$$\max_{v \in Q} s_1' f(t, x, v) = s_1' f(t, x, v^B),$$
$$\min_{u \in Q} s_2' f(t, z, u) = s_2' f(t, z, u^0),$$

а само существование (v^B, u^0) при «замороженных» $(t, x, z, s_1, s_2) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^{4m}$ сразу получаем из непрерывности $f(t, x, v)$, $f(t, z, u)$ по управляющим воздействиям $v \in Q$, $u \in Q$, а также компактности Q (теорема Вейерштрасса).

Итак, установлено, что при выполнении условий 3 в Γ_a существует седловая точка $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$. □

4. Теорема существования

Теорема 1. *Пусть для игры (1) выполнены условия 3. Тогда при любом выборе начальной позиции* $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$ *в бескоалиционной дифференциальной позиционной игре* Γ_e *существует равновесный по Бержу набор стратегий* $\bar{V}^B \in \bar{\mathfrak{V}}$*, т. е. для* $\bar{V}^B$ *имеет место (8).*

Доказательство. Согласно утверждению 4 в игре Γ_a существует седловая точка $(\bar{V}^B, \bar{U}^0) \in \bar{\mathfrak{V}} \times \bar{\mathfrak{A}}$, для которой имеет место цепочка неравенств (11). В правом неравенстве из (11) каждое квазидвижение $y[\cdot, t_0, y_0, \bar{U}^0]$ образует два квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}]$ и $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ систем (4) и (6) соответственно, где могут использоваться $\forall\ \bar{V} \in \bar{\mathfrak{V}}$. Положив здесь $\bar{V} = \bar{U}^0$ получаем, что при любых таких квазидвижениях $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ и $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ функция $\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{U}^0, \bar{U}^0]) = 0$. В самом деле, для каждого квазидвижения $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ найдется совпадающее (при каждом $t \in [t_0, \vartheta]$) с ним $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}^0]$ и обратно.

Из (11) и $\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{U}^0, \bar{U}^0]) = 0$ следует, с учетом единственности, что $\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B, \bar{U}^0]) \le 0$, и тогда снова, согласно (11), имеем

$$\varphi(y[\vartheta, t_0, y_0, \bar{V}^B]) \le 0 \quad \forall\ y[\cdot, t_0, y_0, \bar{V}^B] \in \mathscr{Y}[t_0, y_0, \bar{V}^B].$$

Любое квазидвижение $y[\cdot, t_0, y_0, V^B]$, согласно (7), образуют всякие пары квазидвижений $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}^B]$ и $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}]$ системы (4), порожденные набором $\bar{V}^B \in \bar{\mathfrak{V}}$ и системы (6), порожденные каким-либо набором $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$ соответственно из одной и той же начальной позиции (t_0, x_0).

Так как $\varphi(x, z) = \max\limits_{i \in \mathbb{N}}[F_i(z \parallel x_i) - F_i(x)] \le 0$ (см. (11)), то отсюда и из (12) для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$F_i(z[\vartheta, t_0, x_0, \bar{U}] \parallel x_i[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}_i^B]) - F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B]) \le 0 \tag{13}$$

при любых квазидвижениях $z[\cdot, t_0, x_0, U]$ системы (6) для всяких $\bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$ и всех квазидвижениях $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}^B]$ системы (4), порожденных из начальной позиции (t_0, x_0) набором $\bar{U}$ и $\bar{V}^B$ соответственно. Учитывая включение $\mathscr{Y}[t_0, y_0, V^B] \subset \mathscr{Y}[t_0, y_0, V_i^B]$ $(i \in \mathbb{N})$ и выполнение неравенств (13) для любых участвующих в них квазидвижениях, устанавливаем,

во-первых, единственность $F_i(x[\vartheta, t_0, x_0, \bar{V}^B])$ для каждого $i \in \mathbb{N}$,

во-вторых, справедливость (8) при $\forall\ x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}_i^B]$, $x[\cdot, t_0, x_0, \bar{V}^B]$, $z[\cdot, t_0, x_0, \bar{U}]$ $\forall \bar{U} \in \bar{\mathfrak{A}}$. □

Заключение

В работе получены следующие результаты: доказано существование ситуации равновесия по Бержу для дифференциально бескоалиционной позиционной игры при обычных для таких игр ограничениях. Основой доказательства является применение гермейеровской свертки функций выигрыша игроков, использование управления с поводырем и математической формализации квазидвижений динамической системы.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а и НАН Украины, проект №03-01-14.

Список литературы

1. Вайсман, К.С. Равновесие по Бержу: автореферат дис. ... канд. физ. мат. наук. — СПбГУ, 1995. — 13 с.

   VAISMAN, K. (1995) *The Berge equilibrium: abstract of diss. ... cand. of phys. math. sciences.* SPbSU.

2. ZHUKOVSKIY, V., SALUKVADZE, M. and VAISMAN, K. (1994) *The Berge equilibrium: preprint.* Tbilisi: Institute of Control Systems.

3. Вайсман, К.С. Равновесие по Бержу // Линейно-квадратичные дифференциальные игры / Жуковский, В.И., Чикрий, А.А.. — Киев: Наукова Думка, 1994. — С. 119–142.

   VAISMAN, K. (1994) *The Berge equilibrium. In ZHUKOVSKIY, V. and Chikrii, A.* Linear-quadratic differential games. .Kiev: Naukova Dumka

4. COLMAN, A., KORNER, T., MUSY, O. and TAZDAIT, T. (2011) Mutual support in games: some properties of Berge equilibria. *Journal of Mathematical Psychology, Article in Press.* . p. 1–10.

5. Гермейер, Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с.

   GERMEYER, Y. (1971) *Introduction to the theory of operations research.* Moscow: Nauka.

6. Жуковский, В.И., Салуквадзе, М.Е. Оптимизация гарантий в многокритериальных задачах управления. — Тбилиси: Мецниереба, 1996. — 447 с.

   ZHUKOVSKIY, V. and SALUKVADZE, M. (1994) *The Vector-Valued Maximin.* N.Y. inc.: Academic Press, Inc.

7. Красовский, Н.Н., Субботин, А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.

   KRASOVSKIY, N. and SUBBOTIN, A. (1974) *Differential games.* Moscow: Nauka.

8. Морозов, В.В., Сухарев, А.Г., Федоров, В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Наука, 1986. — 287 с.

   MOROZOV, V., SUKHAREV, A. and FEDOROV, V. (1986) *Operations research in problems and excercises.* Moscow: Nauka.

Статья поступила в редакцию 26.05.2015

УДК: 519.86
MSC2010: 34K18,91B55

ЭФФЕКТ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ЦИКЛЫ

© А. Н. Куликов, Д. А. Куликов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
ул. Советская, 14, Ярославль, 150000, Российская Федерация
e-mail: *anat_kulikov@mail.ru,kulikov_d_a@mail.ru*

The effect of delay and the economic cycles.

Kulikov A. N., Kulikov D. A.

Abstract. The paper considers one of the well-known mathematical models in economics, called "Aggregate Demand - Aggregate Supply model"(AD-AS). Originally this model takes the form of the following ordinary differential equation

$$\dot{p} = D(p) - S(p),$$

where $p = p(t)$ – price, $D(p)$ – demand, $S(p)$ – supply. This functions are considered with the natural assumptions for macroeconomics.

(i) Both of these functions are positive-definite and they are differentiable a sufficient number of times at $t \in (0, \infty)$;

(ii) $D'(p) < 0, S'(p) > 0$;

(iii) Let $\lim\limits_{p\to 0} D(p) = D_0$, $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = D_\infty, \lim\limits_{p\to 0} S(p) = D_0$, $\lim\limits_{p\to\infty} S(p) = D_\infty$. Suppose that constants D_0, S_∞ are sufficiently large (or $D_0 = \infty, S_\infty = \infty$). On the contrary, D_∞, S_0 – are sufficiently small constants (it is also possible that they are equal to 0).

We note that this equation has only one equilibrium - (global) attractor $p(t) = p_0 > 0$. In particular, the equation AD-AS does not have periodic solutions, i.e. it can not describe the cycles that are typical for the real economy.

In this paper we propose to consider the delay differential equation D.-D.-S. instead of the traditional equation D.-S.

$$\dot{p} = D(p) - S(p_h), p_h = p(t - h), h > 0.$$

In this functional differential equation the function of demand depends on the price at the previous moment of time. This assumption is quite natural and meaningful from an economic point of view.

Let $p(t) = p_0 + x(t)$. Then the D.-D.-S. equation will take the form

$$\dot{x} = -ax(t) - by + a_2x - b_2y + a_3x - b_3y + \ldots, \tag{α}$$

where $y = x(t - h)$, the point means terms of higher order of smallness.

We will also consider the linear form of the previous equation

$$\dot{x} = -ax - by.$$

Lemma. *There exist $b = b_*(a)$, such that at $b < b_*(a)$ the zero solution for both equations is asymptotically stable and unstable at $b > b_*(a)$.*

If $b = b_*(a)$, then the linear equation has the periodic solution

$$x(t) = \xi \exp(i\sigma t),$$

where $\xi \in C$, and σ we will find after the analysis of characteristic equation

$$\lambda = -a - b\exp(\lambda h).$$

Now let $b = b_*(1+\varepsilon)$, where $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$. For such parameter b the following statement is true.

Theorem. *There exist $\varepsilon_0 > 0$, such that for all $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ equation α has the asymptotically orbital stable cycle $x_*(t, \varepsilon)$, for which the amplitude is proportional to $\varepsilon^{1/2}$.*

The proof of the theorem is kept to studying of the normal form, i.e. to ordinary differential equation on the central two-dimensional manifold.

The cycle of the basic equation D.-D.-S. can be find by the formula

$$p_*(t, \varepsilon) = p_0 + x_*(t, \varepsilon).$$

Key words: differentional equations, economical cycle, delay, stability, bifurcation.

Введение

В работе рассматривается одна из известных динамических моделей макроэкономики, которую чаще всего называют моделью "спрос-предложение"[1–4]. Возможно, эта математическая модель не занимает первое место по популярности, но, безусловно, она одна из самых известных. Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{p} = D(p) - S(p), \tag{0.1}$$

где $p = p(t)$ – цена, $D(p)$ – функция, характеризующая спрос, $S(p)$ – предложение товара на рынке. Добавим, что эти функции зависят не только от p, но и других параметров характеризующих рынок, то есть $D(p) = D(p, \alpha), S(p) = S(p, \alpha), \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in R^l$, но далее акцентировать внимание на это обстоятельство не будем и будем в основном придерживаться краткого варианта обозначений.

Будем предполагать, что эти функции (см., например, с. 30 из [1]) обладают следующими свойствами:

1. Функция $D(p)$ определена при $p > 0 (p \geq 0)$ и достаточно гладко зависит от p. При всех $p > 0$ $(p \geq 0)$ справедливы неравенства $D(p) > 0, D'(p) < 0$, то есть $D(p)$ монотонно убывает при росте цены $p(t)$.

Наконец, $\lim\limits_{p\to\infty} D(p) = D_\infty$, где обычно $D_\infty = 0$ или D_∞ достаточно маленькая положительная постоянная. При этом более популярен и реалистичен вариант $D_\infty = 0$ (при цене равной "бесконечности"спрос на такой товар нулевой). В свою очередь, $D_0 = D(0)$ $(\lim\limits_{p\to 0} D(p) = D_0)$ достаточно большая положительная постоянная или $D_0 = \infty$.

С экономической точки зрения и остальные ограничения достаточно естественны. Например, вполне нормально, что спрос на товары падает, если их цена растет.

2. Функция $S(p)$ определена при $p \geq 0$, гладко зависит от p. Наконец, $S(p) > 0, S(p)|_{p=0} = 0, S'(p) \geq 0, \lim\limits_{p\to\infty} S(p) = S_\infty, S_\infty = \infty$ или S_∞ – достаточно большая положительная постоянная.

В рамках этих предположений просто проверяется, что уравнение (0.1) имеет единственное положительное и асимптотически устойчивое состояние равновесия. Действительно. Положим, $F(p) = D(p) - S(p)$ и заметим, что $F(0)$ (или при близких к нулю p) достаточно большая положительная постоянная, но $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) < 0$ (может быть и равным $-\infty$). Наконец, $F'(p) < 0$ при всех $p > 0 (p \geq 0)$. Поэтому уравнение $F(p)$ имеет единственный корень $p = p_0 > 0$.

Итак, уравнение (0.1) имеет одно состояние равновесия и все остальные его решения приближаются к нему. Понятно, что периодических решений уравнение (0.1) иметь не может. С другой стороны (см., например, [1–4]) для рыночной экономики характерна определенная цикличность спадов, депрессий (кризисов), подъемов (см. также [5-6]). Все это привело к необходимости модификаций этой модели и выработке таких новых математических моделей, которые могли бы иметь циклы, как решения соответствующих систем уравнений. Как правило, это приводило к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Пожалуй самая известная из них система из двух уравнений, которая широко известна под названием "аксельратор-мультипликатор"(см., например, главу 5 из [2]). Достаточно известна модель делового цикла Калдора (см., главу 4 из [1]).

Ниже предполагается в определенной степени более простая модификация дифференциального уравнения (0.1). Вместо уравнения (0.1) будем рассматривать (см., также [7]) уравнение с запаздыванием

$$\dot{p} = D(p) - S(p_h), \tag{0.2}$$

где $D(p), S(p_h)$ – те же функции, что и в уравнении (0.1), $p = p(t), p_h = p(t-h), h > 0$. Введение запаздывания вполне себя оправдало в математической экологии (см., например, [8-10]). Как будет показано ниже, введение в математическую модель экономики запаздывания столь же оправдано. Добавим, что в одной из своих лекций лауреат Нобелевской премии в области экономики В. Леонтьев выдвинул тезис о том, что причиной экономических кризисов рыночной (капиталистической) экономики является эффект запаздывания. В дискретных математических моделях экономики попытки ввести запаздывание делались неоднократно (см.[3]). Подчеркнем, что запаздывание введено в функцию предложения. Это вполне объяснимо, так как предложение должно в некоторой степени отставать от спроса. Понятно, что товар на рынке появляется после этапа его производства, доставки и других технологических процессов, то есть не "мгновенно".

В дифференциальном уравнении (0.2) положим

$$p(t) = p_0 + x(t) \ (p(t-h) = p_0 + x(t-h)).$$

В результате замены это уравнение перепишется в следующем виде

$$\dot{x} = f(x) - g(y), x = x(t), y = x(t-h), \tag{0.3}$$

где $f(x) = D(x + p_0), g(y) = S(y + p_0)$. Уравнение (0.3) удобно и целесообразно переписать в несколько иной форме

$$\dot{x} = Ax + F_2(x) + F_3(x) + F_0(x), \tag{0.4}$$

где

$$Ax = -ax(t) - by(t), y(t) = x(t-h), F_2(x) = a_2x^2 - b_2y^2, F_3(x) = a_3x^3 - b_3y^3,$$
$$a = -D'(p_0), b = S'(p_0), a_2 = D''(p_0)/2,$$
$$b_2 = S''(p_0)/2, a_3 = D'''(p_0)/6, b_3 = S'''(p_0)/6.$$

Наконец, $F_0(x) = F_0(x, y)$ – функция имеющая в нуле порядок малости выше третьего. Уравнения (0.3),(0.4) имеют состояние равновесия $x = 0 (y = 0)$. Напомним, что a и b положительные постоянные.

1. Об устойчивости нулевого решения

В этом разделе вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (0.4) рассмотрим в линейном приближении, то есть для линейного дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\dot{x} = -ax - by, x = x(t), y = y(t) = x(t-h). \tag{1.1}$$

Как известно (см., например, [10]) вопрос об устойчивости решений (1.1) может быть сведен к анализу характеристического уравнения

$$\lambda = -a - b\exp(-\lambda h). \tag{1.2}$$

Если $b = 0$ или очень мало, то все его корни лежат в левой полуплоскости, выделяемой неравенством $Re\lambda \le -\gamma_0 < 0$ и, следовательно, все решения дифференциального уравнения (1.1) асимптотически устойчивы. Впрочем, асимптотически устойчиво, тогда и нулевое решение уравнения (0.4) в норме пространства начальных условий (пространства функций $C[-h, 0]$).

Пусть теперь коэффициент b возрастает. Покажем, что можно найти такое $b = b_* > 0$, что для счетного семейства корней характеристического уравнения (1.2) справедливо следующее:

1. $\lambda_{1,2} = \pm i\sigma, \sigma > 0$;

2. $Re\lambda_j \le -\gamma < 0, j = 2, 3, \ldots$;

3. при $b > b_*$ в правую полуплоскость комплексной плоскости переходит пара простых комплекснозначных корней.

Для определения соответствующих значений b_* и σ получаем систему действительных уравнений

$$\begin{aligned} b\cos\sigma h &= -a, \\ b\sin\sigma h &= \sigma, \end{aligned} \tag{1.3}$$

у которой, согласно постановке задачи, следует найти решение $\sigma = \sigma_1 > 0, b = b_1 > 0$ с наименьшим положительным значением $b_1 (b_* = b_1)$. При этом σ можно найти из уравнения

$$\operatorname{tg}\sigma h = -\frac{\sigma}{a}. \tag{1.4}$$

Тогда $b = \dfrac{\sigma}{\sin\sigma h}$.

В уравнении (1.4) положим $\omega = \sigma h$ и оно перепишется в следующем виде

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{\omega}{ah}. \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) имеет корень $\omega = \omega_1 \in ((\pi/2); \pi)$. Для остальных положительных корней $\omega_j (j = 1, 2, 3, \ldots)$ справедливы неравенства (см. Рис.1)

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \ldots$$

На Рис. 1 сплошной линией нарисованы ветви графика $\psi = \operatorname{tg}\omega$, а штрихованной линией – $\psi = -\beta\omega, \beta = 1/(ah) > 0$. Ясно, что $\omega_j \in ((\pi/2) + \pi j, \pi j)$, где $j = 1, 2, 3, \ldots$. При этом, нас интересуют лишь те корни ω_j, для которых $\cos\omega_j < 0$ (см. (1.3)).

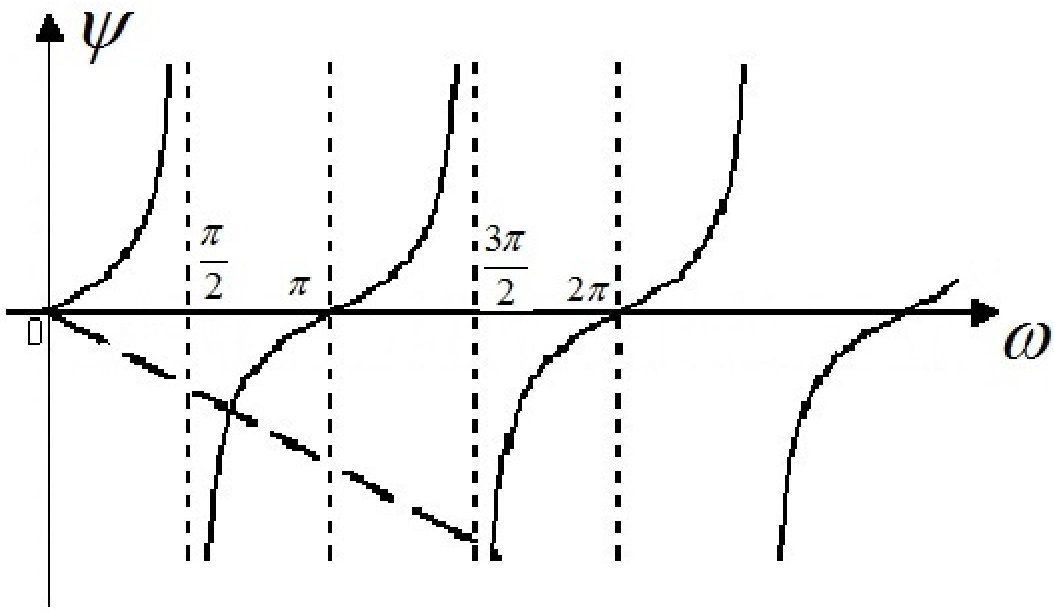

Рис. 1

Ясно, что последнее условие выполнено для нечетных j. Для таких ω_j справедливы равенства

$$\cos\omega_j = -(1+\beta^2\omega_j^2)^{-1/2},\ \sin\omega_j = \beta\omega_j(1+\beta^2\omega_j^2)^{-1/2},$$

$$b_j = \frac{\omega_j}{h\sin\omega_j} = \frac{((ah)^2+\omega_j^2)^{1/2}}{ah^2}, \sigma_j = \frac{\omega_j}{h}, j = 1,3,5,\ldots$$

Из последних равенств вытекает, что наименьшее значение b_j реализуется при $j=1$, то есть

$$b_* = b_1 = \frac{\sqrt{(ah)^2+\omega_1^2}}{ah^2},$$

где ω_1 – первый положительный корень уравнения (1.5), $\omega_1 \in (\pi/2, \pi)$.

Пусть теперь $b = b_*(1+\varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$ и рассмотрим уравнение

$$\lambda(\varepsilon) = -a + b_*(1+\varepsilon)\exp(-\lambda(\varepsilon)h).$$

Положим $\lambda_0' = \frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$. Из последнего уравнения находим, что

$$\lambda_0' = \frac{-b_*\exp(-i\sigma h)}{1-bh\exp(-i\sigma h)}.$$

Откуда получаем, что
$$Re\lambda_0' = \frac{a(1+ah)+h\sigma^2}{(1+ah)^2+(h\sigma)^2} > 0,$$
то есть при превышении параметром b критического значения b_* корни $\pm i\sigma$ спектра устойчивости переходят в правую полуплоскость комплексной плоскости и состояние равновесия теряет устойчивость. Здесь $\sigma = \omega_1/h$.

2. Нелинейное уравнение. Бифуркации циклов

Возвратимся к анализу уравнения (0.2). Напомним, что функции $D(p), S(p_h)$ зависят от параметров $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, т.е. $D(p) = D(p, \alpha), S(p) = S(p, \alpha)$. При любом допустимом их наборе уравнение (0.2) имеет положительное состояние равновесия $p_0 = p_0(\alpha)$, которое гладко зависит от α. Пусть при $\alpha = \alpha_0$ найдено состояние равновесия $p_0(0)$, для которого реализуется критический случай в задаче об устойчивости, то есть характеристическое уравнение
$$\lambda = -a(\alpha_0) - b(\alpha_0)\exp(-\lambda h)$$
имеем два чисто мнимых корня $\pm i\sigma(\alpha_0)$. Если теперь рассмотреть те α, для которых $||\alpha - \alpha_0||_{R^l} = O(\varepsilon)$, то при переходе к уравнению (0.4), его коэффициенты будут зависеть от ε и его можно записать в виде
$$\begin{gathered}\dot{x} = -a(\varepsilon)x - b(\varepsilon)y + a_2(\varepsilon)x^2 - \\ -b_2(\varepsilon)y^2 + a_3(\varepsilon)x^3 - b_3(\varepsilon)y^3 + \ldots,\end{gathered} \tag{2.1}$$
где точками обозначены слагаемые более высокого порядка малости относительно $x, y (x = x(t), y = x(t-h))$. Коэффициенты в правой части уравнения (2.1) гладко зависят от ε. Поэтому
$$\begin{gathered}a(\varepsilon) = a(\alpha_0) + \varepsilon\beta_1 a + o(\varepsilon), b(\varepsilon) = b(\alpha_0) + \varepsilon\beta_2 b + o(\varepsilon), \\ a_2(\varepsilon) = a_2(\alpha_0) + O(\varepsilon), b_2(\varepsilon) = b_2(\alpha_0) + O(\varepsilon), \\ a_3(\varepsilon) = a_3(\alpha_0) + O(\varepsilon), b_3(\varepsilon) = b_3(\alpha_0) + O(\varepsilon).\end{gathered}$$
Запись коэффициентов для $a(\varepsilon), b(\varepsilon)$ приведена в удобной форме. Далее в этом разделе для упрощения записи будем использовать укороченные обозначения
$$\begin{gathered}a(\alpha_0) = a, b(\alpha_0) = b, a_2(\alpha_0) = a_2, a_3(\alpha_0) = a_3, \\ b_2(\alpha_0) = b_2, b_3(\alpha_0) = b_3, \beta_1, \beta_2 \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\end{gathered}$$
где $0 < \varepsilon_0 << 1$. Подчеркнем еще раз, что линейное дифференциальное уравнение
$$\dot{x} + ax + by = 0$$

имеет два линейно независимых периодических решения $\exp(i\sigma t), \exp(-i\sigma t)$ периода $2\pi/\sigma$ (см. п.1.). Вся совокупность предположений и выбор параметров позволяет заключить, что для исследования нелинейного уравнения (2.1) применим метод исследования, который базируется на применении широко известной бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа (теоремы Хопфа в зарубежной литературе) (см., например, [11]). Для уравнений с запаздыванием она была обоснована в работе [12].

Ниже при ее применению следуем комплексному варианту реализации алгоритма построения циклов. Напомним, что в нашем случае решения задачи Коши для уравнения (2.1) с достаточно малыми по норме пространства начальных условий порождают гладкий полупоток, у которого есть двумерное инвариантное многообразие $M_2(\varepsilon)$ и динамика решений нелинейного уравнения (2.1) определяется поведением решений системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [13]). В комплексной форме записи эта система – нормальная форма (НФ) Пуанкаре – Дюлака приобретает вид

$$z'(s) = (\gamma_1 + i\gamma_2)z(s) + (l_1 + il_2)z(s)|z(s)|^2 + O(\varepsilon), \tag{2.2}$$

где $z(s)$ – функция со значениями в поле комплексных чисел, $s = \varepsilon t$ – медленное время, $l_1, l_2, \gamma_1, \gamma_2 \in R$. Последние 4 действительных коэффициента будут определены ниже в процессе реализации известного алгоритма построения НФ (см., например, [13]). Согласно этому алгоритму решения, принадлежащие $M_2(\varepsilon)$, можно и удобно искать в следующей форме

$$x(t, s, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(t, z, \overline{z}) + \varepsilon u_2(t, z, \overline{z}) + \varepsilon^{3/2}u_3(t, z, \overline{z}) + O(\varepsilon^2), \tag{2.3}$$

где $u_j(t, z, \overline{z}), (j = 1, 2, 3)$ – функции со следующими свойствами:

1. по переменной t они имеют период $2\pi/\sigma$ и достаточно гладко зависят от $t, z, \overline{z}$;

2. $u_j(t, 0, 0) = 0$;

3. $M_\pm(u_j) = \dfrac{\sigma}{2\pi}\displaystyle\int\limits_0^{2\pi/\sigma} u_j(t)\exp(\pm i\sigma t)dt = 0, j = 2, 3;$

4. $u_1(t, z, \overline{z}) = z\exp(i\sigma t) + \overline{z}\exp(-i\sigma t)$.

Отметим, что $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{ds}\varepsilon = z'\varepsilon$. После подстановки суммы (2.3) в уравнение (2.1) и выделения слагаемых, имеющих порядок $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ получаем неоднородные уравнения для определения u_2 и u_3. Так для u_2 получаем следующее уравнение

$$\dot{u}_2 + au_2 + bw_2 = a_2u_1^2 - b_2w_1^2, \tag{2.5}$$

где $u_2 = u_2(t), w_2 = u_2(t-h), u_1 = u_1(t), w_1 = u_1(t-h)$.

Для $u_3(t)$ получаем уравнение следующего вида

$$\begin{gathered}\dot{u}_3 + au_3 + bw_3 = -a\beta_1 u_1 - \beta_2 b w_1 + \\ +(bh\exp(-i\sigma h) - 1)z' + (bh\exp(i\sigma h) - 1)\overline{z}' + \\ +2a_2 u_1 u_2 - 2b_2 w_1 w_2 + a_3 u_1^3 - b_3 w_1^3.\end{gathered} \tag{2.6}$$

Как и ранее, $w_j(t) = u_j(t-h), j = 1, 2, 3.$

Анализ неоднородных уравнений (2.5), (2.6) предусматривает нахождение функций $u_j (j = 2, 3)$ с отмеченными выше свойствами. В частности, по переменной t они имеют период $2\pi/\sigma$, а также нулевое среднее $M_\pm(u_j) = 0, j = 2, 3.$

Подстановкой можно проверить, что

$$\begin{gathered}u_2(t, z, \overline{z}) = \eta z^2 \exp(2i\sigma t) + \xi z\overline{z} + \overline{\eta}\overline{z}^2 \exp(-2i\sigma t), \\ \xi = \frac{a_2 - b_2}{a + b}, \eta = \frac{a_2 - b_2\exp(2i\sigma t)}{2i\sigma + a + b\exp(2i\sigma t)}\end{gathered}$$

– функция с необходимыми свойствами. Напомним, то неоднородное уравнение

$$\dot{v} + bv_h + av = \varphi(t), v_h = v(t-h),$$

где $\varphi(t) - 2\pi/\sigma$ периодическая функция, имеет $2\pi/\sigma$ периодическое решение, если $M_\pm(\varphi) = 0$. Равенства

$$M_{pm}(v) = 0$$

выделяют одно такое решение. Равенства $M_{\pm 1}(\varphi) = 0$ традиционно называют условиями разрешимости неоднородного уравнения в классе периодических функций.

Применение условий разрешимости к неоднородному дифференциальному уравнению (2.6) приводит к уравнению для определения $z(s)$ $(\overline{z}(s))$

$$\begin{gathered}-a\beta_1 z - b\beta_2 z\exp(-i\sigma h) + \\ +(bh\exp(-i\sigma h) - 1)z' + (c_1 + ic_2)z|z|^2 = 0.\end{gathered}$$

Здесь

$$c_1 + ic_2 = 3a_3 + 2a_2(\xi + \eta) - \exp(-i\sigma h)(3b_3 + 2b_2(\xi + \eta)).$$

После элементарных преобразований последнее уравнение для $z(s)$ удается переписать в стандартной форме дифференциального уравнения, разрешенного относительно z' и тем самым выписать главную часть НФ.

$$z' = (\gamma_1 + i\gamma_2)z + (l_1 + il_2)z|z|^2, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{gathered}\gamma_1 + i\gamma_2 = -\frac{a\beta_1 + b\beta_2\exp(-i\sigma h)}{\delta_1 + i\delta_2}, l_1 + il_2 = \frac{c_1 + ic_2}{\delta_1 + i\delta_2}, \\ \delta_1 + i\delta_2 = 1 - bh\exp(-i\sigma h), \sigma = \frac{\omega_1}{h}.\end{gathered}$$

Наконец, ω_1 – первый положительный корень уравнения (1.5).

Вычисления из п.1 позволяют вывести упрощенный вариант записи для γ_1 и γ_2 :

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{a(\beta_2 - \beta_1) + i\sigma\beta_2}{1 + ah + i\sigma h}.$$

Следовательно,

$$\gamma_1 = \frac{(1+ah)a(\beta_2-\beta_1) + \sigma^2\beta_2 h}{(1+ah)^2 + (\sigma h)^2}, \gamma_1 = \frac{\sigma\beta_2(1+ah) - \sigma h(\beta_2-\beta_1)}{(1+ah)^2 + (\sigma h)^2}.$$

Перейдем к анализу НФ (2.6) предполагая априори, что $l_1 \neq 0$. При l_1 следует уточнить структуру правой части НФ (2.2). Величину l_1 принято называть первой ляпуновской величиной. Случай $l_1 \neq 0$ соответствует варианту общего положения в задаче А.М. Ляпунова по исследованию устойчивости нулевого решения в критическом случае простой пары собственных значений.

Положим в уравнении (2.7)

$$z = \rho\exp(i\varphi), z = z(s), \rho = \rho(s) \geq 0, \varphi = \varphi(s) \in R.$$

В результате получим систему

$$\rho' = \gamma_1\rho + l_1\rho^3, \tag{2.8}$$

$$\varphi' = \gamma_2 + l_2\rho^2. \tag{2.9}$$

В системе дифференциальных уравнений (2.8), (2.9) определяющую роль играет уравнение для амплитуды, то есть уравнение (2.8).

Теорема 1. *Пусть $l_1\gamma_1 < 0$. Тогда уравнение (2.8) имеет ненулевое состояние равновесия $P : \rho(s) = \rho_0 = \sqrt{-\gamma_1/l_1}$. Это состояние равновесия экспоненциально устойчиво, если $l_1 < 0(\gamma_1 > 0)$ и оно неустойчиво, если $l_1 > 0(\gamma_1 < 0)$. Доказательство стандартно.*

Устойчивому состоянию равновесия P соответствует притягивающий цикл НФ (2.7) $z(s) = \rho_0\exp(i\omega_0 s)$, где $\omega_0 = \gamma_2 - (l_2\gamma_1/l_1)$. Если состояние равновесия P было неустойчиво, то указанные периодические решения НФ (2.7) будут неустойчивыми.

Справедливо утверждение (см., например, [12]).

Теорема 2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ дифференциальное уравнение (2.1) имеет цикл, соответствующий $P(l_1\gamma_1 < 0)$. Этот цикл орбитально асимптотически устойчив, если асимптотически устойчиво состояние равновесия $P(l_1 < 0)$ и, напротив, цикл седловой, если неустойчиво $P(l_1 > 0)$.*

Для решений, порождающих данный цикл, справедлива асимптотическая формула

$$x_p(t,\varepsilon) = \rho_0[\exp(i(\sigma+\varepsilon\omega_0)t+i\psi)+\exp(-i(\sigma+\varepsilon\omega_0)t-i\psi)]+$$
$$+\varepsilon\rho_0^2[\xi+\eta\exp(2i(\sigma+\varepsilon\omega_0)t+2i\psi)+\overline{\eta}\exp(-2i(\sigma+\varepsilon\omega_0)t-2i\psi)]+O(\varepsilon^{3/2}),\psi\in R.$$

Если теперь возвратиться к исходному дифференциальному уравнению (0.4), то оно имеет предельный цикл

$$p(t,\varepsilon) = p_0 + x_p(t,\varepsilon),$$

если, конечно, в уравнении (0.4) параметры выбраны соответствующим образом. С прикладной точки зрения интерес представляют прежде всего устойчивые периодические решения. Проверка условий существования циклов, а также анализ их устойчивости предусматривает определения знаков γ_1 и l_1. Последнее, конечно, зависит, от выбора функций $D(p), S(p(t-h))$. В следующем разделе будет приведен пример их выбора, когда знаки γ_1, l_1 достаточно просто могут быть определены.

Заключение

В этом разделе сначала рассмотрим уравнение (0.2) при конкретном, но достаточно типичном выборе правой части

$$\dot{p} = \frac{\delta}{\rho^{1/2}} - \gamma p_h, p = p(t), p_h = p(t-h), \tag{3.1}$$

где δ, γ – некоторые положительные постоянные. Замена $p = \mu q$ приводит уравнение (3.1) к виду

$$\dot{q} = \gamma q^{-1/2} - \gamma q_h, \tag{3.2}$$

если μ выбрать таким образом, чтобы $\delta\mu^{-3/2} = 1(\mu = \delta^{2/3})$. Уравнение (3.2) имеет состояние равновесия $q = 1$ и замена

$$q(t) = 1 + x(t), q(t-h) = 1 + y(t), y = x(t-h)$$

приводит к уравнению аналогичному (0.4), то есть

$$\dot{x} = Ax + F_2(x) + F_3(x) + F_0(x). \tag{3.3}$$

При этом в данном случае

$$Ax = -(\gamma/2)x - \gamma y, F_2(x) = a_2x^2, F_3(x) = a_3x^3, a_2 = 3\gamma/8, a_3 = -5\gamma/16.$$

В данном частном случае исследование устойчивости нулевого решения приводит к рассмотрению характеристического уравнения

$$\lambda = -\frac{\gamma}{2} - \gamma\exp(-\lambda h)$$

– аналогичному (1.2). Повторяя построения п.1 находим $\gamma = \gamma_*$, при котором реализуется критический случай и соответствующее критическое σ. При этом γ_*, σ находим как решение системы ($\gamma \neq 0$)

$$\cos\sigma h = -0.5,$$
$$\gamma\sin\sigma h = \sigma.$$

Откуда получаем, что

$$\sigma h = \frac{2\pi}{3}, \gamma_* = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Если $\gamma = \gamma_*(1+\varepsilon), \varepsilon > 0$, то нетрудно, повторяя некоторые из предыдущих вычислений получить, что $\lambda_0' = \frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$. Оказалось, что

$$\lambda_0' = \frac{2i\pi}{3(1 + 2h\pi/(3\sqrt{3}) + 2i\pi h/3)}.$$

Откуда находим, что

$$Re\lambda_0' = l_0\frac{4\pi^2 h}{9}, Im\lambda_0' = l_0(1 + \frac{2\pi h}{3\sqrt{3}}),$$
$$l_0 = [\frac{4\pi^2 h^2}{9} + (1 + \frac{4\pi^2 h}{\sqrt{3}})^2]^{-1}.$$

Неравенство $Re\lambda_0' > 0$, как и ранее, подтверждает, что при $\gamma > \gamma_*$ два чисто мнимых корня $\pm i\sigma$ спектра устойчивости при $\gamma = \gamma_*$ переходят в правую полуплоскость комплексной плоскости.

Повторяя алгоритм построения НФ (см. п.2) получаем, что в данном случае

$$\gamma_1 = Re\lambda_0' > 0, \gamma_2 = Im\lambda_0', l_1 = -l_0\frac{\pi}{12\sqrt{3}}(7(1 + \frac{2\pi h}{3\sqrt{3}}) + \frac{8\pi h\sqrt{3}}{3}),$$
$$l_2 = -l_0\frac{\pi}{12\sqrt{3}}(4\sqrt{3}(1 + \frac{2\pi h}{3\sqrt{3}}) - \frac{14\pi h}{3}).$$

Из приведенных формул, в частности, вытекает, что $l_1 < 0$. Следовательно, при данном варианте выбора функций $D(p)$ и $S(p)$ реализуется мягкий вариант возбуждения колебаний и при $\gamma > \gamma_*$ в уравнении (3.2) появляется устойчивый цикл. Период соответствующего решения близок к $2\pi/\sigma = 3h$. Уместно отметить, что при достаточно большой величине h получаем периодическое решение с достаточно большим периодом. Такие решения можно интерпретировать как "длинные волны,"которые были открыты в экономике одним из основоположником применения математических методов при анализе рыночной экономики Н.Д. Кондратьевым (см., например, [3]). Вывод о наличии циклов с большим периодом он получил на основании обработки статистических данных именно при анализе спроса и предложения.

Работа поддержана грантом Президента РФ проект No МК-5932.2015.1, а также грантом РФФИ проект No 14–01–31159 мол_а.

Список литературы

1. Zhang, W.B. (Synergetic Economics) *W.B. Zhang.* Berlin-Hedelberg: Springer-Verlag. 1991.335 p.
2. Puu, T. (Economic Dynamics) *T. Puu.* Berlin-Hedelberg: Springer-Verlag. 1999.175 p.
3. Лебедев, В.В. Математическое моделирование нестационарных процессов / В.В. Лебедев, К.В. Лебедев. — М.: еТест, 2011. — 334 с.
   Lebedev, V.V. (Mathematical modelling of the nonstationary process) *V.V. Lebedev,K.V. Lebedev.* M.: eTest. 2011.334 p.
4. Агапова, Т.А. Макроэкономика / Т.А. Агапова, С.Ф. Серегина. — М.: Дело и сервис, 2004. — 448 с.
   Agapova, T.A. (Macroeconomics) *T.A. Agapova.* M.: Business and services. 2011.334 p.
5. Marx, K. (Capital) *K. Marx.* London: Lawrence and Wishart. 1978.211 p.
6. Ricardo, D. (Principles of Political Economy and Taxation) *D. Ricardo.* Harmonsworth: Penguin. 1971.478 p.
7. Куликов, А.Н. К вопросу об экономических циклах и математическом моделировании динамики рыночных цен // Колмогоровские чтения. — Ярославль.: ЯГПУ им. Ушинского, 2014. — С. 94–98.
   Kulikov, A. N. (2014) About Economical cycles and Mathematical Modelling of the Market. *Yaroslavl: Ushinsky University Education. Kolmogorov lectures.* . p. 94-98.
8. Колесов, Ю.С. Математические модели в экологии // Исследование по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль.: ЯРГУ им. П.Г. Демидова, 1979. — С. 3–40.
   Kolesov, Yu. S. (1979) Mathematical Modelling in the Ecology. *Yaroslavl: Demidov State University Education. Investigation in the stability and the theory of the oscillation.* . p. 3-40.
9. Колесов, Ю.С. Резонансы в экологии // Исследование по устойчивости и теории колебаний. — Ярославль.: ЯРГУ им. П.Г. Демидова, 1978. — С. 26–42.
   Kolesov, Yu. S. (1978) Resonance in the ecology. *Yaroslavl: Demidov state university education. Investigation in the stability and the theory of the oscillation.* . p. 26-42.
10. Hale, J. (Theory of functional differentional equation) *J. Hale.* Berlin: Springer-Verlag. 1977.419 p.
11. Marsden, J. (The Hopf Bifurcation and its application) *J. Marsden, M. Mak-Kraken.* New-York: Springer-Verlag. 1976.367 p.

12. Колесов, Ю.С. Гармонические автоколебания дифференциальных уравнений n-порядка с последействием // Вестник Ярославского гос. университета. — Ярославль.: ЯРГУ им. П.Г. Демидова, 1974. — 13. — С. 3–88.
Kolesov, Yu. S. (1974) Harmonic oscillations of the functional differentional equations of the n-order. *Yaroslavl: Demidov state university education. Proceeding of the Yaroslavl university.* 13. p. 3-88.

13. Мищенко, Е.Ф., Садовничий, В.А., Колесов, А.Ю., Розов, Н.Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией / Е.Ф. Мищенко, В.А. Садовничий, Ю.А. Колесов, Н.Х. Розов. — М.: Физматлит, 2005. — 431 с.
Mischenko, E.F.,Sadovnichiy V.A., Kolesov A. Yu., Rozov H.Kh. (Autowave processes in nonlinear media with diffusion) *E.F. Mischenko, V.A. Sadovnichiy, A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov.* M.: Fizmatlit. 2005.430 p.

Статья поступила в редакцию 14.07.2015

УДК: 519.82

MSC2010: 90C59

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С РАЗНЫМИ ПОДМНОЖЕСТВАМИ ПАРАМЕТРОВ

© О. В. Муравьева

Московский педагогический государственный университет

математический факультет

ул.Краснопрудная, 14, Москва, 107140, Российская Федерация

e-mail: *muraveva@tidm.ru*

Parametric Stability of Solutions to Systems of Linear Inequalities with Various Subsets of Parameters.

Murav'eva O. V.

Abstract. In this paper, the problem of minimal matrix correction of a system of linear algebraic inequalities was consider with the use of minimax criteria. The initial problem (a system of linear inequalities without a given property)

$$Ax \leq b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$$

there is assigned the class of corrected problems describing the independent variation of initial data

$$(A+H)x \leq b+h.$$

Among the corrected problem, we have to find a problem with the given property and "closest"to the initial problem and, in addition, with fixation (release of the correction) of various combinations of rows and columns of parameter matrix (A, b). As the criterion of proximity of the initial and corrected problems, we use the matrix norm $\|H\|_\infty = \max\limits_{i,j} |h_{ij}|$.

Determine the stability measure of a solution to consistent system of linear inequalities x as the value of the least change of the parameters after which x is not a solution to the system. We have proved that the problem of finding a solution that is the most stable to changes of various submatrices in extended matrix of the coefficients of the linear system by minimax criterion is reduced to a linear programming problem.

We have proposed some method for constructing a hyperplane separating two finite sets of points in $\mathbb{R}^n$. There is an exactly defined subset of incorrected coordinates (fixed columns in the parameter matrix). For the constructed hyperplane the limit change of the parameters (corrected coordinates of the given points) that preserves the separation property has the greatest value.

Key words: matrix correction, stability of compatible system of linear inequalities, separating hyperplane, minimax criteria.

Введение

Рассматриваются параметрические свойства системы линейных неравенств

$$Ax \leq b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m.$$

Коэффициенты этой системы можно интерпретировать как информационную составляющую модели, и рассматривать задачу определения минимального изменения параметров, в результате которого изменяются свойства модели, относительно разных информационных составляющих. Постановка параметрических задач линейного программирования, связанных с ними параметрических систем линейных уравнений и неравенств, основные подходы и методы решения изучались сначала в теории некорректных задач, а позднее в теории несобственных задач линейного программирования ([1]).

Определим радиус параметрической устойчивости решения x^0 как величину минимального изменения параметров, в результате которого x^0 не является решением системы

$$\Phi(x^0) = \inf_{\Delta I=(\Delta A,\Delta b)}\{\|\Delta I\|_\infty \colon\ x^0 \text{ не является решением } (A+\Delta A)x \leq b+\Delta b\}.$$

В качестве критерия величины изменения параметров используется равномерный критерий

$$\|H\|_\infty = \max_{i,j}|h_{ij}|,$$

где H — матрица изменений всех параметров или корректирующая матрица.

Если параметрами задачи являются все коэффициенты системы линейных неравенств $I=(A,b)$, то задача определения решения с наибольшим радиусом параметрической устойчивости сводится к задаче линейного программирования.

Будем обозначать a_i — строка матрицы A с номером i, a^j — столбец матрицы A с номером j.

Теорема 1 ([2]). *Решение системы линейных неравенств $Ax \leq b,\ A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m$, наиболее устойчивое к изменению всех параметров, определяется формулами*

$$\sup_{x\colon Ax\leq b}\inf_{\Delta A,\Delta b}\{\|(\Delta A,\Delta b)\|_\infty \colon (A+\Delta A)x \not\leq b+\Delta b\} = u^*,\quad x^* = \frac{1}{t^*}s^*,$$

где $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $s^*, z^* \in \mathbb{R}^n$ *— решение задачи линейного программирования:*

$$\max u,$$
$$u \le tb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$-z_j \le s_j \le z_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} z_j + t = 1, \quad t \ge 0.$$

Рассмотрим задачу определения решения с наибольшим радиусом параметрической устойчивости для разных информационных составляющих: подмножество строк расширенной матрицы коэффициентов, подмножество столбцов и произвольная подматрица.

1. Устойчивость совместных систем линейных неравенств с фиксированными строками или столбцами

Если фиксированы строки, система линейных неравенств разделяется на две подсистемы, и требуется найти наиболее устойчивое решение первой подсистемы с дополнительным условием выполнения второй подсистемы. Применяя к этой задаче теорему 1, получим задачу линейного программирования.

Рассмотрим задачу с фиксированными столбцами матрицы коэффициентов. Без ограничения общности можно считать, что корректируются первые n' столбцов, $1 \le n' \le n$.

Лемма 1 ([3]). *Система* $Hx = d$ *при заданных* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$, $d \in \mathbb{R}^m$ *имеет решение с минимальной матричной нормой*

$$\|H^*\|_\infty = \frac{\|d\|_\infty}{\|x\|_1} = \frac{\max\limits_i |d_i|}{\sum\limits_j |x_j|}, \quad H^* = \frac{1}{\sum\limits_j |x_j|}\, d \cdot (\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_n).$$

В частности, линейное уравнение $(h, x) = d$ *с неизвестными* $h = (h_1, \ldots, h_n)$ *при заданных* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \ne 0$, $d \in \mathbb{R}$ *имеет решение с минимальной векторной нормой*

$$\|h^*\|_\infty = \frac{|d|}{\|x\|_1} = \frac{|d|}{\sum\limits_j |x_j|}, \quad h^* = \frac{d}{\sum\limits_j |x_j|} \cdot (\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_n)^T.$$

Теорема 2. *Решение совместной системы* $Ax \le b$, *наиболее устойчивое к изменению параметров* $I = (a^1, \ldots, a^{n'})$, $1 \le n' \le n$, *определяется формулами*

$$\sup_{x\colon Ax \le b} \inf_H \{\|H\|_\infty \colon h_{ij} = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = n'{+}1, \ldots, n, \quad (A{+}H)x \not\le b\ \} = u^*, \quad x^* = \frac{1}{t^*} s^*,$$

где $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $s^* \in \mathbb{R}^n$, $z^* \in \mathbb{R}^{n'}$ *— решение задачи линейного программирования:*

$$\max u,$$
$$u \le tb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$-z_j \le s_j \le z_j, \quad j = 1, \ldots, n',$$
$$\sum_{j=1}^{n'} z_j = 1, \quad t \ge 0.$$

Доказательство. Для фиксированного решения x системы линейны неравенств $Ax \le b$ задача сводится к минимальной коррекции одного из неравенств. Выполняется декомпозиция по строкам, и для каждой строки применяется лемма 1.

Обозначим $\tilde{H} \in \mathbb{R}^{m' \times n}$ — матрицу, составленную из ненулевых элементов матрицы коррекции H, $x = (\tilde{x}, \bar{x})$ — разделение вектора x на векторы длины n' и $n - n'$, Получим

$$\Phi(x) = \inf_H \left\{ \|H\|_\infty \colon h_{ij} = 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = n' + 1, \ldots, n,\ (A + H)x \not\le b \right\} =$$
$$= \min_i \min_{h_i} \left\{ \|h_i\|_\infty \colon (a_i + h_i)x = b_i, h_{ij} = 0,\ j = n' + 1, \ldots, n \right\} =$$
$$\min_i \min_{\tilde{h}_i} \left\{ \|\tilde{h}_i\|_\infty \colon (\tilde{h}_i \tilde{x}) = b_i - (a_i, x) \right\} = \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_{j=1}^{n'} |\tilde{x}_j|} = \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_{j=1}^{n'} |x_j|},$$

$$\tilde{h}_i = \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_{j=1}^{n'} |x_j|} \cdot (\operatorname{sgn} x_1, \ldots, \operatorname{sgn} x_{n'})^T.$$

Покажем, что задача

$$\Phi(x^*) = \sup_{x \colon Ax \le b} \min_i \frac{b_i - (a_i, x)}{\sum\limits_{j=1}^{n'} |x_j|}$$

сводится к задаче линейного программирования.

Введем новые переменные $t = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n'} |x_j|} \in \mathbb{R}$, $s = tx \in \mathbb{R}^n$. Для переменных $z_j = |s_j|$, $j = 1, \ldots, n'$ должны выполняться ограничения $-z_j \le s_j \le z_j$. Из определения t, $t \sum\limits_{j=1}^{n'} |x_j| = t \sum\limits_{j=1}^{n'} z_j = 1$. Критерий $\frac{b_i - (a_i, x)}{\sum_{j=1}^{n'} |x_j|}$ примет вид $tb_i - (a_i, s)$. Введем еще одну скалярную переменную $u = \min\limits_{1 \le i \le m} (tb_i - (a_i, s))$, для которой должны выполняться ограничения $u \le tb_i - (a_i, s)$ для всех $i = 1, \dots, m$. В результате получим утверждение теоремы. □

2. Устойчивость совместных систем линейных неравенств с фиксированными строками и столбцами

Рассмотрим теперь в качестве множества изменяющихся параметров подматрицу матрицы A, $I = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m'$, $j = 1, \dots, n'$. Будем считать фиксированными последние $n - n'$ столбцов и $m - m'$ строк. Задача определения параметрически устойчивого решения также сводится к задаче линейного программирования.

Теорема 3. *Решение совместной системы линейных неравенств $Ax \le b$, наиболее устойчивое к изменению параметров $I = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m'$, $j = 1, \dots, n'$, определяется формулами*

$$\sup_{x\colon Ax \le b} \inf_H \{\|H\|_\infty \colon h_{ij} = 0, (i,j) = K_1 \cup K_2,\ (A+H)x \not\le b\ \} = u^*,$$

$$x^* = \frac{1}{t^*} s^*, \quad K_1 = \{m'+1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\},\ K_2 = \{1, \dots, m\} \times \{n'+1, \dots, n\},$$

где $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $s^* \in \mathbb{R}^n$, $z^* \in \mathbb{R}^{n'}$ — решение задачи линейного программирования:

$$\max u,$$
$$u \le tb_i - (a_i, s), \quad i = 1, \dots, m',$$
$$0 \le tb_i - (a_i, s), \quad i = m'+1, \dots, m,$$
$$-z_j \le s_j \le z_j, \quad j = 1, \dots, n',$$
$$\sum_{j=1}^{n'} z_j = 1, \quad t \ge 0.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Приведем также задачу линейного программирования, к которой сводится задача определения неотрицательного решения системы линейных неравенств с наибольшим радиусом параметрической устойчивости для информационной составляющей $I = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m'$, $j = 1, \dots, n'$.

Теорема 4. *Неотрицательное решение совместной системы линейных неравенств $Ax \le b$, наиболее устойчивое к изменению параметров $I = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, m'$, $j = 1, \dots, n'$, определяется формулами*

$$\sup_{x \ge 0\colon Ax \le b} \inf_H \{\|H\|_\infty \colon h_{ij} = 0, (i,j) = K_1 \cup K_2,\ (A+H)x \not\le b,\ x \ge 0\} = u^*,$$

$$x^* = \frac{1}{t^*}s^*, \quad K_1 = \{m'+1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\},\ K_2 = \{1,\dots,m\} \times \{n'+1,\dots,n\},$$

где $u^*, t^* \in \mathbb{R}$, $s^* \in \mathbb{R}^n$ *— решение задачи линейного программирования:*

$$\max u,$$
$$u \le tb_i - (a_i, s), \quad i = 1,\dots,m',$$
$$0 \le tb_i - (a_i, s), \quad i = m'+1,\dots,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n'} s_j = 1, \quad t, s \ge 0.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

3. Построение параметрически устойчивой разделяющей гиперплоскости

В качестве примера параметрической задачи, моделью которой является система линейных неравенств, рассмотрим следующую задачу разделения (классификации). В пространстве $\mathbb{R}^n$ даны два конечных множества $\{x^i\}_{i=1}^k$ и $\{x^i\}_{i=k+1}^m$. Будем считать, что точки соответствуют описаниям объектов, координаты точек соответствуют признакам, объекты разных множеств принадлежат разным классам. Для множеств рассмотрим свойство линейной разделимости, т.е. существования аффинной функции, принимающей значения разных знаков на объектах разных классов. Если множества строго линейно разделимы, то существуют коэффициенты $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, такие что выполняется следующая система линейных неравенств.

$$\begin{cases} (a, x^i) \leqslant b - 1,\ i = 1,\dots,k, \\ (a, x^i) \geqslant b + 1,\ i = k+1,\dots,m \end{cases} \quad \text{или} \quad X\bar{a} \le p,$$

где $X = \begin{pmatrix} x^1 & -1 \\ \dots & \dots \\ x^k & -1 \\ -x^{k+1} & 1 \\ \dots & \dots \\ -x^m & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{a} = (a, b)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, $p = (-1,\dots,-1)^T \in \mathbb{R}^m$.

В работе [4] предлагается метод построения задачи линейного программирования, решение которой позволяет найти приближенное разделение двух неразделимых множеств, минимизирующие отступы неправильно классифицированных точек.

В статьях [5, 6] рассмотрены методы построения оптимальных по разным критериям гиперплоскостей для неразделимых множеств, основанные на методах матричной коррекции несовместных систем линейных уравнений и неравенств.

Предположим, что данная система совместна. Объекты разных классов строго линейно разделимы, существуют разделяющие гиперплоскости, не проходящие через данные объекты. В [7] рассмотрена задача определения разделяющей гиперплоскости наибольшего радиуса параметрической устойчивости в предположении об изменениях всех параметров задачи (всех значений признаков всех объектов), $I = (x^1, \ldots, x^m)$.

Будем искать решение данной системы, наиболее устойчивое к изменению любого подмножества признаков. Пусть признаки объектов упорядочены так, что изменяемыми являются первые n' признаков. В качестве информационной составляющей задачи будем рассматривать подматрицу матрицы X, содержащую первые n' столбцов — множество $I = (x_{ij})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n'$. Радиус параметрической устойчивости разделяющей гиперплоскости с коэффициентами a, b $R(a, b)$ — наименьшее изменение параметров $\|\Delta I\|_\infty$, в результате которого точки разных классов не являются строго разделенными этой гиперплоскостью. Обозначим y — вектор ответов на заданных объектах, то есть

$$y^i = \begin{cases} 1, & i = 1, \ldots, k \\ -1, & i = k+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Матрицу X можно представить как состоящую из строк вида $(y^i x^i, \quad -y^i)$, $X = (y^i x^i \quad -y^i)_{i=1}^m$.

Теорема 5. *Если $u^*, t^*, s_0^* \in \mathbb{R}, s^* \in \mathbb{R}^n$, $z^* \in \mathbb{R}^{n'}$ — решение задачи линейного программирования*

$$\max u,$$
$$u \le -t - (y^i x^i, s) - y^i s_0, \quad i = 1, \ldots, m,$$
$$-z_j \le s_j \le z_j, \quad j = 1, \ldots, n', \quad \sum_{j=1}^{n'} z_j = 1, \ t \ge 0,$$

то $a^* = s^*$, $b^* = s_0^*$ — коэффициенты оптимальной разделяющей гиперплоскости, то есть

$$R(a^*, b^*) = \sup_{a,b\colon X\bar{a} \le p} R(a, b) = u^*.$$

Доказательство. Задача определения решения системы $X\bar{a} \leq p$ с наибольшим радиусом устойчивости относительно параметров I имеет вид

$$R(a^*, b^*) = \sup_{\bar{a}\colon X\bar{a}\leq p} \inf_H \{\|H\|_\infty\colon (X+H)\bar{a} \nleq p,\ h_{ij}=0,\ i=1,\ldots,m,\ j=n'+1,\ldots,n\}.$$

Утверждение теоремы следует из теоремы 2. □

Заключение

В статье исследована задача определение минимального изменения параметров системы линейных неравенств, в результате которого решение исходной системы не является допустимым. Предлагается метод определения решения с наибольшим радиусом параметрической устойчивости относительно любой подматрицы матрицы коэффициентов системы линейных уравнений. Приведена задача линейного программирования, решением которой являются коэффициенты оптимальной разделяющей гиперплоскости для двух конечных множеств точек в $\mathbb{R}^n$. Критерием оптимальности является радиус параметрической устойчивости при изменении любого подмножества признаков (координат) заданных точек.

Список литературы

1. Еремин, И.И. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования / И.И.Еремин, В.Д.Мазуров, Н.Н.Астафьев. — М.: Наука, 1983. — 336 с.

   Eremin, I., Mazurov, V. and Astaf'ev N (1983) *Improrer Problems of Linear and Convex Programming.* Moscow: Nauka.

2. Муравьева, О.В. Возмущение и коррекция систем линейных неравенств // Управление большими системами. — 2010. — Вып.28. — С. 40–57.

   Murav'eva, O. (2010) Correction and Perturbation of System of Linear Inequalities. *Upravlenie Bol'shimi Sistemami.* 28. p. 40–57.

3. Murav'eva, O. (2011) Robustness and correction of linear models. *Automation and Remote Control.* 72 (3). p. 556–569.

4. Bennett, K.P., Mangasarian, O.L. (1992) Robust linear programming discrimination of two linearly inseparable sets. *Optimization Methods and Software.* 1. p. 23–34.

5. Горелик, В.А., Золтоева, И.А., Печенкин, Р.В. Методы коррекции несовместных линейных систем с разреженными матрицами // Дискретный анализ и исследование операций. — 2007. — Т. 14. №2. — С. 62–75.

   Gorelik, V.A., Zoltoeva, I.A. and Pechenkin, R.V. (2007) Correction Methods for Incompatible Linear Systems with Sparse Matrices. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii.* 14 (2). p. 62–75.

6. Горелик, В.А., Ле Ньят Зюи Метод декомпозиции в задачах минимаксной коррекции несовместных систем уравнений с матрицами блочной структуры // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2011. — 23. — С. 83–92.

   Gorelik V.A. and Le Nyat Zui (2011) Decomposition method in the problems of minimax correction of inconsistent equation systems with block structure matrices. *Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics.* 23. p. 83–92.

7. Murav'eva, O. (2014) Studying the Stability of Solutions to System of Linear Inequalities and Constructing Separating Hyperplanes. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 8 (3). p. 1–8.

Статья поступила в редакцию 31.05.2015

УДК: УДК 519.816

MSC2010: 91A80

ГАРАНТИРОВАННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИНАНСОВЫХ ВЛОЖЕНИЙ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© Н. Г. Солдатова

Московский государственный областной гуманитарный институт

факультет математики и физики

ул. Зелёная, 22, Орехово-Зуево, 142611, Российская Федерация

e-mail: *solnata@pochta.ru*

The guaranteed allocation of financial investments under uncertainty.

Soldatova N. G.

Abstract.

In this paper the problem of deposit allocation between the assets is considered.

The sum of the individual deposit between the three assets (unrisky and two risky) increased within a year one can offer in the form

$$f(x, y) = r(1 - x_1 - x_2) + x_1 y_1 + x_2 y_2,$$

where r – profitability of unrisky assets; y_i – profitability of risky assets i; action $x = (x_1, x_2)$ and x_i $(i = 1, 2)$ – part of investing funds in assets i.

The profit of the decision maker is defined both by the plan of diversification $(1-x_1-x_2, x_1, x_2)$ and by uncertaintes (value of profitability of risky assets) $y = (y_1, y_2) \in Y$. It should be noted that between profitabilities of risky assets some kind of dependence may exist. In this case

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_1 \in [a, b], \psi_1(y_1) \leqslant y_2 \leqslant \psi_2(y_1)\}.$$

The profitability of portfolio is defined by the sum $f(x, y)$.

It is demanded for the depositor to define parts of one ruble x_i $(i = 1, 2)$ under which final cash $f(x, y)$ will be as much as possible.

So one can suppose the mathematical model on deposit diversification between three assets as ordered the three

$$\langle X, Y, f(x, y)\rangle,$$

where criterion $f(x, y)$ is defined over. Set X actions x of the decision maker is

$$X = \{x = (x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leqslant 1 \wedge x_i \geqslant 0 (i = 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

So the decision maker does not know the real profitability of risky assets, and has to look at some «corridor change» for them. Any characteristics of probability are absent.

The depositor wants to have the greatest possible profit or possible less risks. To estimate risk we use Savage functions of regret (from principle of minimax regret).

In this paper a guaranteed on outcome solution and a guaranteed on risk solution to this problem is given. This solution is based on the principle of guaranteed result and function of regret used by Savage.

Key words: uncertainty, outcome, risk, deposit diversification, guaranteed result.

Введение

Наращенную за год сумму единичного вклада между тремя активами (безрисковым и двумя рисковыми) можно представить в виде

$$f(x, y) = r(1 - x_1 - x_2) + x_1 y_1 + x_2 y_2, \tag{1}$$

где r – доходность безрискового актива; y_i – доходность i-го рискового актива; действие $x = (x_1, x_2)$ и x_i $(i = 1, 2)$ – доля вложения средств в i-ый актив.

Доход ЛПР определяется как планом диверсификации $(1 - x_1 - x_2, x_1, x_2)$, так и неопределенностями (величиной доходностей рисковых активов) $y = (y_1, y_2) \in Y = [a_1, b_1] \times [a_i, b_i]$. Эта доходность портфеля определяется суммой $f(x, y)$ из (1).

Для вкладчика требуется определить доли одного рубля x_i $(i = 1, 2)$, при которых итоговая наличность $f(x, y)$ будет возможно большей. Одновременно следует учесть, что доходности рисковых активов y_i $(i = 1, 2)$, как правило, неизвестны. Но они все-таки могут быть заданы коридором возможных значений, именно, $y_i \in [a_i, b_i]$ $(i = 1, 2)$, где постоянные $b_i > a_i > 0$ заданы заранее или выбраны априори (например, на основе экспертных оценок).

Итак, математическую модель задачи о диверсификации вклада между тремя активами можно представить упорядоченной тройкой

$$\langle X, Y, f(x, y)\rangle, \tag{2}$$

где *критерий* $f(x, y)$ определен в (1). Множество X *действий* x у ЛПРа есть

$$X = \{x = (x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leqslant 1 \wedge x_i \geqslant 0 (i = 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Множество *неопределенностей* y тогда

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_i \in [a_i, b_i] (i = 1, 2)\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2.$$

Следует заметить, что между доходностями рисковых активов может существовать какая-либо зависимость. В этом случае

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_1 \in [a, b], \psi_1(y_1) \leqslant y_2 \leqslant \psi_2(y_1)\}.$$

$f(x,y)$ – оценочная функция вкладчика, конкретное значение которой называем *исходом*. «С точки зрения» теории исследования операций, (2) представляет собой *однокритериальную* задачу при неизвестных действиях реактивных агентов.

1. Распределение средств вкладчиком, ориентирующимся на исход

Для ориентирующегося на исход вкладчика (стремящегося получить возможно больший доход) при решении задач типа (2) естественно применять принцип гарантированного результата (по Абрахаму Вальду [1]). Согласно этому подходу гарантированным по исходам решением (ГИР) задачи (2) называем пару $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$, определяемую цепочкой равенств

$$f^g = \min_{y\in Y} f(x^g, y) = \max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y). \tag{3}$$

Согласно (3), операция внутреннего минимума $\min\limits_{y\in Y} f(x,y) = f(x, y(x)) = f[x]$ реализует для каждой стратегии $x \in X$ гарантию $f[x]$, ибо $f[x] \leqslant f(x,y)$ $\forall y \in Y$; операция внешнего максимума $\max\limits_{x\in X} f[x] = f[x^g] = f^g$ выделяет из всех гарантий $f[x]$ наибольшую, так как $f^g = f[x^g] \geqslant f[x]$ $\forall x \in X$ и $f^g = f[x^g] = f(x^g, y(x^g)) \leqslant f(x^g, y)$ $\forall y \in Y$. Стратегию x^g из ГИР предлагается ЛПРу использовать, ибо она «обеспечит» ЛПР наибольшую гарантию f^g.

Определение 1. *Четверку* $(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g)$ *назовем гарантированным по исходам решением задачи* (2), *если*

1^o *для каждого действия* $x \in X$ *существует гарантия* $f[x]$, *при которой*

$$\min_{y\in Y} f(x,y) = f[x];$$

2^o *пара* $(x^g = (x_1^g, x_2^g), f^g) \in X \times \mathbb{R}$ *удовлетворяет равенству* (3):

$$\max_{x\in X} f[x] = f[x^g] = f^g.$$

В статье [2] получено гарантированное по исходам решение задачи (2) в случае, когда доходности рисковых активов определены выражением

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_i \in [a_i, b_i] (i = 1, 2)\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2.$$

Используя подход [2] в случае, когда

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_1 \in [a, b], \psi_1(y_1) \leqslant y_2 \leqslant \psi_2(y_1), \psi_i(y_1) = k_i y_1 + l_i (i = 1, 2)\},$$

при $x \in X$ и $x_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ получим гарантированное по исходам решение

$$(1 - x_1^g - x_2^g, x_1^g, x_2^g, f^g) = \begin{cases} (1, 0, 0, r) \text{ при } \alpha_i \leqslant 0 \ (i = 1, 2), \\ (0, 1, 0, a) \text{ при } \{\alpha_1 > 0,\ \alpha_2 \leqslant 0\} \vee \{\alpha_1 > \alpha_2 > 0\}, \\ (0, 0, 1, k_1 a + l_1) \text{ при } k_1 \geqslant 0, \\ \qquad\qquad \{\alpha_1 \leqslant 0,\ \alpha_2 > 0\} \vee \{\alpha_2 > \alpha_1 > 0\}, \\ (0, 0, 1, k_1 b + l_1) \text{ при } k_1 \leqslant 0, \\ \qquad\qquad \{\alpha_1 \leqslant 0,\ \alpha_2 > 0\} \vee \{\alpha_2 > \alpha_1 > 0\}, \\ (0, x_1^g, 1 - x_1^g, r + \alpha_i)\ \forall x_1^g \in [0, 1] \text{ при } \alpha_1 = \alpha_2 > 0, \end{cases}$$

где

$$\alpha_1 = a - r,\ \alpha_2 = \begin{cases} k_1 a + l_1 - r \ \text{ при } \ k_1 \geqslant 0, \\ k_1 b + l_1 - r \ \text{ при } \ k_1 \leqslant 0. \end{cases}$$

2. Распределение средств вкладчиком, ориентирующимся на риск

Перейдем к способу принятия решения в (2) для вкладчика (ЛПР), который ориентируется на риск. Особенность (2) в том, что в ней о неопределенностях ЛПРу известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют. Наличие неопределенностей в (2) как раз и позволяет говорить о риске ЛПР, возникающем при использовании любых стратегий $x \in X$. Здесь применяем следующее понятие риска: «риск - это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемый значений», а под мерой риска понимаем «разницу между желаемым значением показателя качества функционирования процесса и реализовавшимся значением».

Указанному виду неопределенностей как раз и отвечает принцип минимаксного сожаления, предложенный Леонардом Сэвиджем в 1951 г. в статье [3]. Напомним, что, согласно этому принципу, *гарантированным по риску решением* (ГРР) задачи (2) будем называть пару (x^r, Φ^r), определяемую цепочкой равенств

$$\Phi^r = \max_{y \in Y} \Phi(x^r, y) = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Phi(x, y), \tag{4}$$

где функция сожаления

$$\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y). \tag{5}$$

Итак, построение ГРР (гарантированного по рискам решения) в задаче (2) проводится в 4 этапа.

Этап 1. Каждой ситуации $x \in X$ ставится в соответствие функция $f[y] = \max\limits_{x\in X} f(x,y)$.

Этап 2. Строится функция сожаления $\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y)$.

Этап 3. В результате операции внутреннего максимума из (4) определяется гарантия по риску $\max\limits_{y\in Y}\Phi(x,y) = \Phi[x] \geqslant \Phi(x,y)\ \forall y \in Y$ для каждой стратегии $x \in X$.

Этап 4. Согласно операции внешнего минимума, из (4) находится наименьший гарантированный риск $\Phi^r = \min\limits_{x\in X}\Phi[x] = \Phi[x^r]$ и тогда пара: план диверсификации $(1 - x_1^r - x_2^r, x_1^r, x_2^r)$ и гарантия Φ^r объявляются ГРР задачи (2).

Рассмотрим задачу (2)

$$\langle X, Y, f(x,y)\rangle,$$

где *критерий* $f(x,y)$ определен в (1). Множество X *действий* x у ЛПРа есть

$$X = \{x = (x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leqslant 1 \wedge x_i \geqslant 0 (i = 1,2)\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Множество *неопределенностей*

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_1 \in [a,b], \psi_1(y_1) \leqslant y_2 \leqslant \psi_2(y_1), \psi_i(y_1) = k_i y_1 + l_i \ \ (i = 1,2)\}. \quad (7)$$

Построение ГРР (гарантированного по рискам решения) в этом случае осуществим согласно описанным выше четырем этапам.

Этап 1. В задаче (2) каждой неопределенности y ставится в соответствие множество X, которое в прямоугольной декартовой системе координат представляет собой прямоугольный треугольник OAB с вершинами в точках $O = (0,0)$, $A = (1,0)$, $B = (0,1)$.

Для всякого $y \in Y$ функция $f(x,y)$ из (1) линейна по компонентам вектора $x = (x_1, x_2)$ и поэтому может достигать своего $\max\limits_{x\in X} f(x,y)$ в угловых точках – вершинах треугольника OAB. Поэтому, с учетом явного вида $f(x,y)$ из (1), будет

$$\max_{x\in X} f(x,y) = \{r \vee y_1 \vee y_2\} = f[y].$$

Этап 2. Согласно (5) тогда функция риска будет

$$\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y) =$$

$$= \begin{cases} \Phi_1(x,y) = r - f(x,y), \\ \vee\Phi_2(x,y) = y_1 - f(x,y), \\ \vee\Phi_3(x,y) = y_2 - f(x,y), \end{cases} = \begin{cases} [r - y_1]\, x_1 + [r - y_2]\, x_2, \\ \vee\, [y_1 - r]\,(1 - x_1) + [r - y_2]\, x_2, \\ \vee\, [r - y_1]\, x_1 + [y_2 - r]\,(1 - x_2). \end{cases}$$

Этап 3. Для каждой стратегии $x \in X$ найдем гарантированный риск

$$\Phi[x] = \max_{y \in Y} \Phi(x, y) = \max_{i=1,2,3} \{\Phi_i[x]\},$$

где

$$\Phi_1[x] = \left\{ \begin{array}{l} [r-a]\, x_1 + [r - l_1 - k_1 a]\, x_2, \text{ если } k_1 > 0, \\ [r-a]\, x_1 + [r - l_1 - k_1 b]\, x_2, \text{ если } k_1 < 0, \end{array} \right\}$$

$$\Phi_2[x] = \left\{ \begin{array}{l} [b-r]\,(1 - x_1) + [r - l_1 - k_1 a]\, x_2, \text{ если } k_1 > 0, \\ [b-r]\,(1 - x_1) + [r - l_1 - k_1 b]\, x_2, \text{ если } k_1 < 0, \end{array} \right\}$$

$$\Phi_3[x] = \left\{ \begin{array}{l} [r-a]\, x_1 + [l_2 + k_2 b - r]\,(1 - x_2), \text{ если } k_2 > 0, \\ [r-a]\, x_1 + [l_2 + k_2 a - r]\,(1 - x_2), \text{ если } k_2 < 0, \end{array} \right\}$$

т.к. постоянные $r > 0$, $b > a > 0$ $(i = 1, 2)$.

Далее, для сокращения записей, будем использовать обозначения

$$\alpha_0 = r - a,\ \alpha_1 = r - l_1 - k_1 a,\ \alpha_2 = l_2 + k_2 a - r,$$
$$\beta_0 = b - r,\ \beta_1 = r - l_1 - k_1 b,\ \beta_2 = l_2 + k_2 b - r.$$

Отметим, что одновременно условия $\alpha_0 < 0$ и $\beta_0 < 0$ не могут быть выполнены, так как $b > a > 0$, а условия $\alpha_1 < 0$ и $\alpha_2 < 0$ ($\beta_1 < 0$ и $\beta_2 < 0$) не выполняются одновременно, ибо $l_2 + k_2 a > l_1 + k_1 a > 0$ ($l_2 + k_2 b > l_1 + k_1 b > 0$).

Лемма 1. *Если постоянные $\alpha_i \geq 0$ и $\beta_i \geq 0$ $(i = 0, 1, 2)$, то*

$$\begin{gathered} a \leq r \leq b,\ l_1 + k_1 a \leq r \leq l_2 + k_2 a,\ l_1 + k_1 a \leq r \leq l_2 + k_2 b, \\ l_1 + k_1 b \leq r \leq l_2 + k_2 a,\ l_1 + k_1 b \leq r \leq l_2 + k_2 b. \end{gathered} \tag{8}$$

С учетом обозначений (7), для (6) имеем

$$\begin{gathered} \Phi_1[x] = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 x_1 + \alpha_1 x_2, \text{ если } k_1 > 0, \\ \alpha_0 x_1 + \beta_1 x_2, \text{ если } k_1 < 0, \end{array} \right\} \\ \Phi_2[x] = \left\{ \begin{array}{l} \beta_0 (1 - x_1) + \alpha_1 x_2, \text{ если } k_1 > 0, \\ \beta_0 (1 - x_1) + \beta_1 x_2, \text{ если } k_1 < 0, \end{array} \right\} \\ \Phi_3[x] = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 x_1 + \beta_2 (1 - x_2), \text{ если } k_2 > 0, \\ \alpha_0 x_1 + \alpha_2 (1 - x_2), \text{ если } k_2 < 0. \end{array} \right\} \end{gathered} \tag{9}$$

Этап 4. Чтобы обеспечить (согласно (5) и (9)) неравенство $\Phi(x, y) \geq 0\ \ \forall (x, y) \in$ $\in X \times Y$ достаточно считать выполненным

Условие 1. Постоянные $\alpha_i \geq 0$, $\beta_i \geq 0$ $(i = 0, 1, 2)$.

Очевидно, что условие 1 имеет место, если справедливы (8).

Далее воспользуемся тем, что минимум выпуклой (и, в частности, линейной) функции на выпуклом многограннике достигается на его границе. Поэтому находим минимизаторы $x^r = arg\min\limits_{x}\Phi[x]$ из (9) на сторонах OA, OB и AB треугольника AOB отдельно, и затем, в качестве Φ^r используем наименьшее из $\min\limits_{x\in X}\Phi[x]$. С этой целью выделим три случая.

Случай 1. (Сторона $AO = \{x_1 \in [0,1], x_2 = 0\}$, тогда $x = (x_1, 0)$).

Из (9) с учетом $x_2 = 0$, получаем

$$\Phi[x] = \max\{\Phi_1[x_1,0] = \alpha_0 x_1,\ \Phi_2[x_1,0] = (1-x_1)\beta_0,\ \Phi_3[x_1,0] = \alpha_0 x_1 + \gamma\},$$

где

$$\gamma = \begin{cases} \alpha_2, \text{ если } k_2 \le 0, \\ \beta_2, \text{ если } k_2 \ge 0. \end{cases}$$

Используя подход, изложенный в [4], можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Утверждение 5. *Если в задаче* (2), (6), (7) $x_2 = 0$ *и выполнено условие 1, то гарантированное по риску решение (ГРР) этой задачи будет*

$$(1 - x_1^r, x_1^r, 0, \Phi_1^r) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha_0+\gamma}{\alpha_0+\beta_0}, \frac{\beta_0-\gamma}{\alpha_0+\beta_0}, 0, \frac{\beta_0(\alpha_0+\gamma)}{\alpha_0+\beta_0}\right), \text{ если } \beta_0 > \gamma > 0, \\ (1,0,0,\gamma), \text{ если } \gamma \ge \beta_0 > 0. \end{cases}$$

Утверждение 6. *Если в задаче* (2), (6), (7)

1) $\alpha_0 > 0,\ \beta_0 > 0,\ \gamma \le 0$, *то ГРР этой задачи имеет вид* $\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_0+\beta_0}, \frac{\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}, 0, \frac{\alpha_0\beta_0}{\alpha_0+\beta_0}\right)$;

2) $\alpha_0 > 0,\ \beta_0 \le 0,\ \gamma \le 0$, *то ГРР будет* $(1,0,0,0)$;

3) $\alpha_0 > 0,\ \beta_0 \le 0,\ \gamma > 0$, *то ГРР имеет вид* $(1,0,0,\gamma)$;

4) $\alpha_0 \le 0,\ \beta_0 > 0,\ \gamma \le 0$ *или* $\alpha_0 < 0,\ \beta_0 > 0,\ \gamma + \alpha_0 \le 0$, *то ГРР имеет вид* $(0,1,0,0)$;

5) $\alpha_0 < 0,\ \beta_0 > 0,\ \gamma + \alpha_0 > 0$, *то ГРР имеет вид* $(0,1,0,\gamma+\alpha_0)$;

6) $\alpha_0 = 0,\ \gamma > 0$, *то ГРР имеет вид* $(1-x^*, x^*, 0, \gamma)$, *где* $x^* \in [0,1]$ *при* $\beta_0 \le \gamma$ *и* $x^* \in \left[1 - \frac{\gamma}{\beta_0}, 1\right]$ *при* $\beta_0 > \gamma$;

7) $\alpha_0 \le 0,\ \beta_0 = 0,\ \gamma \le 0$ *или* $\alpha_0 = 0,\ \beta_0 < 0,\ \gamma \le 0$, *то ГРР имеет вид* $(1-x^*, x^*, 0, 0)$, *где* $x^* \in [0,1]$;

8) $\alpha_0 < 0,\ \beta_0 = 0,\ \gamma > 0$, *то ГРР имеет вид* $(1-x^*, x^*, 0, 0)$, *где* $x^* \in \left[\frac{-\gamma}{\alpha_0}, 1\right]$.

Случай 2. (Сторона $BO = \{x_1 = 0, x_2 \in [0,1]\}$).

Из (9) с учетом $x_1 = 0$, получаем

$$\Phi[x] = \max\{\Phi_1[0,x_2] = \gamma_1 x_2,\ \Phi_2[0,x_2] = \beta_0 + \gamma_1 x_2,\ \Phi_3[0,x_2] = \gamma_2(1-x_2)\},$$

где

$$\gamma_1 = \begin{cases} \alpha_1, \text{ если } k_1 \geq 0, \\ \beta_1, \text{ если } k_1 \leq 0, \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} \alpha_2, \text{ если } k_2 \leq 0, \\ \beta_2, \text{ если } k_2 \geq 0. \end{cases}$$

Справедливы утверждения, аналогичные утверждениям 5 и 6.

Утверждение 7. *Если в задаче* (2), (6), (7) *имеет место* $x_1 = 0$ *и выполнено условие 1, то гарантированное по риску решение (ГРР) этой задачи будет*

$$(1 - x_2^r, 0, x_2^r, \Phi_2^r) = \begin{cases} \left(\frac{\gamma_1+\beta_0}{\gamma_1+\gamma_2}, 0, \frac{\gamma_2-\beta_0}{\gamma_1+\gamma_2}, \frac{\gamma_2(\gamma_1+\beta_0)}{\gamma_1+\gamma_2}\right), & \textit{если } \gamma_2 > \beta_0 > 0, \\ (1, 0, 0, \beta_0), & \textit{если } \beta_0 \geq \gamma_2 > 0. \end{cases}$$

Утверждение 8. *Если в задаче* (2), (6), (7)

1) $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta_0 \leq 0$, *то ГРР этой задачи имеет вид* $\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}, \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}, 0, \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\right)$;

2) $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 \leq 0$, $\beta_0 \leq 0$, *то ГРР будет* $(1, 0, 0, 0)$*;*

3) $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 \leq 0$, $\beta_0 > 0$, *то ГРР имеет вид* $(1, 0, 0, \beta_0)$*;*

4) $\gamma_1 \leq 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta_0 \leq 0$ *или* $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta_0 + \gamma_1 \leq 0$, *то ГРР имеет вид* $(0, 1, 0, 0)$*;*

5) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta_0 + \gamma_1 > 0$, *то ГРР имеет вид* $(0, 1, 0, \beta_0 + \gamma_1)$*;*

6) $\gamma_1 = 0$, $\beta_0 > 0$, *то ГРР имеет вид* $(1 - x^*, x^*, 0, \beta_0)$, *где* $x^* \in [0, 1]$ *при* $\gamma_2 \leq \beta_0$ *и* $x^* \in \left[1 - \frac{\beta_0}{\gamma_2}, 1\right]$ *при* $\gamma_2 > \beta_0$*;*

7) $\gamma_1 \leq 0$, $\gamma_2 = 0$, $\beta_0 \leq 0$ *или* $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 < 0$, $\beta_0 \leq 0$, *то ГРР имеет вид* $(1 - x^*, x^*, 0, 0)$, *где* $x^* \in [0, 1]$*;*

8) $\gamma_1 < 0$, $\gamma_2 = 0$, $\beta_0 > 0$, *то ГРР имеет вид* $(1 - x^*, x^*, 0, 0)$, *где* $x^* \in \left[\frac{-\beta_0}{\gamma_1}, 1\right]$.

Случай 3. ($AB = \{x_1 + x_2 = 1, x_i \geq 0 \ (i = 1, 2)\}$.)

В этом случае (9) примет, с учетом $x_1 = 1 - x_2$, вид

$$\begin{gathered} \Phi[x] = \max\{\Phi_1[x] = \alpha_0 + (\gamma_1 - \alpha_0)x_2, \ \Phi_2[x] = (\beta_0 + \gamma_1)x_2, \\ \Phi_3[x] = (\alpha_0 + \gamma_2)(1 - x_2)\}. \end{gathered} \tag{10}$$

Очевидно, что результаты, полученные в (10) и соответствующем разделе [4], совпадают с точностью до обозначений.

Таким образом, решение задачи (2), где множество

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_1 \in [a, b], \psi_1(y_1) \leqslant y_2 \leqslant \psi_2(y_1), \psi_i(y_1) = k_i y_1 + l_i (i = 1, 2)\},$$

может быть сведено к решению этой задачи при

$$Y = \{y = (y_1, y_2) | y_i \in [a_i, b_i] (i = 1, 2)\} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2.$$

Заключение

Полученные результаты показывают, что оптимальное решение задачи (2) зависит от граничных значений неопределенностей. Если же применить к решению задачи диверсификации вклада (выбора оптимального портфеля) подход нобелевского лауреата Гарри Марковица [5], то оптимальное решение будет зависеть от вероятностных характеристик случайных величин доходностей активов: средних ожидаемых доходностей, стандартных отклонений доходностей. Подход Марковица связан с необходимостью описывать корреляционные связи между доходностями различных активов. Если возникает новый актив, то в начальный период его существования будет недостаточно статистических данных, позволяющих определить эти связи и найти оптимальное решение по Марковицу. Однако возможно определить границы изменения доходности нового актива и применить способ, предложенный в данной работе.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-00-90408 Укр_а и НАН Украины проект № 03-01-14.

Список литературы

1. WALD, A. (1939) Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis. *Annuals Math. Statist.* 10. p. 299-326.

2. Жуковский, В.И., Солдатова, Н.Г. К задаче диверсификации по трем депозитам // Вестник Удмурского университета. Математика, механика, компьютерные науки. — 2013. — № 4. — С. 55–61.

   ZHUKOVSKIY, V. & SOLDATOVA, N. (2013) On the problem of diversification of contribution on the three deposits. *Bulletin of Udmurt university. Mathematics, mechanics, computer science.* 4. p. 55–61.

3. SAVAGE, L.Y. (1951) The theory of statistical decision. *J. American Statistic Association.* 46. p. 55-67.

4. Жуковский, В.И., Ахрамеев, П.К. Гарантированное по риску решение в задаче диверсификации вклада по трем депозитам (рублевому, в долларах и евро) // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. — Симферополь: ТНУ имени В.И. Вернадского, 2014. — Т. 27(67).1. — С. 177–197.

   ZHUKOVSKIY, V. & ACHRAMEEV, P. (2014) Guaranteed on risk solution in problem of sum distribution into three deposits (in rubles, dollars and euros). *Scientific notes of Taurida National University named after V.I. Vernadsky.* 27 (1). p. 177–197.

5. MARKOWITZ, H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance.* 7 (1). p. 77-91.

Статья поступила в редакцию 26.05.2015

УДК: 517.98+517.977.5

MSC2010: 47D06+49J27

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

© В. М. Статкевич

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Учебно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа»

просп. Победы, 37, Киев, 03056, Украина

e-mail: *mstatckevich@yahoo.com*

On one optimal control problem for the system of first-order linear equations with essentially infinite-dimensional elliptic operator.

Statkevich V. M.

Abstract. The paper deals with the essentially infinite-dimensional elliptic operator $(Lu)(x) = j(u''(x))$ (of the Laplace-Lévy type), proposed by Yu.V. Bogdansky in 1977, for functions on the infinite-dimensional separable real Hilbert space. Here j denotes the nonzero nonnegative linear continuous functional that vanishes on all finite rank operators. Such operator generalizes the classic Laplace-Lévy operator, proposed by Paul Lévy in 1922. The essentially infinite-dimensional elliptic operator doesn't have finite-dimensional analogues. This second-order differential operator possesses the Leibniz property $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ and vanishes on the cylindrical functions. The current state of the theory of the Laplace-Lévy operator is described by M.N. Feller in 2005.

Systems of equations with the Laplace-Lévy operator were studied by G.E. Shilov (1967), the ones with the quasidifferentiation operator (the Laplace-Lévy operator's modification) were studied by V.Ya. Sikiryavyi (1972), the ones with essentially infinite-dimensional elliptic operator were studied in the author's paper (2011). The relations of controlled systems with equations with the Laplace-Lévy operator were studied by E.M. Polishchuk (1972).

We consider the optimal control problem for the system of first-order linear equations with the essentially infinite-dimensional elliptic operator. The cost function is defined as the deviation of the state function from the given function. The semigroup theory techniques are used. We obtain the following results. The infimum of the cost function is proved to be equal to zero. The explicit formula for the control is proposed and the continuous dependence of the control on initial data is proved under additional condition. The obtained results can be used in further investigations of essentially infinite-dimensional equations.

Key words: infinite-dimensional space, Laplace-Lévy operator, essentially infinite-dimensional elliptic operator, optimal control, stability problem, system of linear equations.

Введение

Классический оператор Лапласа-Леви, предложенный П. Леви [1], не имеет конечномерных аналогов. Этот дифференциальный оператор второго порядка, определённый на функциях бесконечномерного аргумента, обладает лейбницевским свойством $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ и обращается в нуль на цилиндрических функциях. Последнее свойство дало основание Г.Е. Шилову, редактору перевода [1], назвать такой оператор «существенно бесконечномерным». Современное состояние теории оператора Лапласа-Леви и обширная библиография изложены в монографии М.Н. Феллера [2]. Системы уравнений рассмотрены в [3], а системы уравнений с оператором квазидифференцирования (одним из обобщений оператора Лапласа-Леви) – в [4]. Е.М. Полищуком [5, 6] доказана связь существенно бесконечномерных уравнений с теорией управляемых систем.

Существенно бесконечномерный эллиптический оператор, предложенный Ю.В. Богданским [7] (см. также [8, 9]), обобщает оператор Лапласа-Леви и наследует его специфические свойства. Системы уравнений с таким оператором рассматривались в [10].

Задачи оптимального управления в бесконечномерном пространстве имеют свою специфику, для их решения используются методы теории многозначных отображений, операторных уравнений и включений, дифференциально-операторных уравнений и включений, вариационных неравенств и другие методы (см., например, монографию [11] и указанную в ней библиографию). Задача оптимального управления для линейного уравнения первого порядка с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором рассмотрена в [12]. В данной работе ставится задача оптимального управления для системы линейных уравнений первого порядка.

1. Постановка задачи

$\mathbb{R}^n$ является коммутативной алгеброй относительно поточечных операций, $\|\mathbf{y}\| = |y^1| + \ldots + |y^n|$ для $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Пусть $C^b(H;\mathbb{R}^n)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных функций на H со значениями в $\mathbb{R}^n$ с нормой $|||\mathbf{u}||| = \sup\limits_{x \in H} \|\mathbf{u}(x)\|$, $B_C(H)$ – банахово (относительно операторной нормы) пространство всех самосопряжённых ограниченных линейных операторов на H, $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$ – фиксированный шар радиуса R ($R > 0$). Множество $D \subset B_C(H)$ называется почти компактным, если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество $K \subset B_C(H)$ и числа $n \in \mathbb{N}$, $d > 0$ такие, что $K + Q_{n,d}$ является ε-сетью для D (здесь $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ – множество операторов, ранг которых не превышает n, а норма не превышает d).

Пусть Z – множество вещественных функций класса $C^2(H)$, носители которых лежат в шаре B_R, $u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на H, а множество $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ почти компактно. X – замыкание Z в $C^b(H;\mathbb{R})$ – вещественная коммутативная банахова алгебра относительно поточечных операций. Пусть Z^n (соответственно X^n) – множество функций $\mathbf{u}(x) = (u^1(x), \dots, u^n(x))$ таких, что каждая координатная функция u^i, $i = 1, \dots, n$, принадлежит Z (соответственно X). Z^n является вещественной коммутативной нормированной (с нормой $|||\cdot|||$) алгеброй относительно поточечных операций, а X^n совпадает с замыканием Z^n в $C^b(H;\mathbb{R}^n)$ и является банаховой алгеброй.

Пусть j – неотрицательный ненулевой линейный функционал на $B_C(H)$, ядру которого принадлежат все операторы конечного ранга. Существенно бесконечномерный эллиптический оператор $L\colon X \supset Z \to X$ задаётся формулой $(Lu)(x) = \frac{1}{2}j(u''(x))$ [7]–[9], он допускает замыкание $\bar{L}$, которое порождает (C_0)-полугруппу сжатий $T(t)$ в X. Полугруппа является нильпотентной ($\exists t_0 > 0\colon T(t_0) = 0$) и мультипликативной ($\forall u, v \in X\colon T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$) [8, 9]. Тогда для функции $g \in C(\mathbb{R})$ такой, что $g(0) = 0$, имеет место равенство $T(t)(g \circ u) = g \circ T(t)u$, в частности, $T(t)(|u|) = |T(t)u|$.

Оператор $\mathscr{L}\colon X^n \supset Z^n \to X^n$, заданный формулой $(\mathscr{L}\mathbf{u})(x) = ((Lu^1)(x), \dots, (Lu^n)(x))$, обладает лейбницевским свойством и допускает замыкание $\bar{\mathscr{L}}$: $(\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u})(x) = ((\bar{L}u^1)(x), \dots, (\bar{L}u^n)(x))$ с областью определения $D(\bar{\mathscr{L}}) \subset X^n$.

Если $\mathbf{u} \in D(\bar{\mathscr{L}})$, то $D(\mathscr{L}) \ni \mathbf{u}_m \to \mathbf{u}$, $\mathscr{L}\mathbf{u}_m \to \mathbf{v} = \bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}$, $D(L) \in u^i_m \to u^i$, $Lu^i_m \to v^i$ при $m \to \infty$; потому $u^i \in D(\bar{L})$. В обратную сторону: если $u^i \in D(\bar{L})$, то $D(L) \ni u^i_{m_i} \to u^i$, $Lu^i_{m_i} \to v^i = \bar{L}u^i$ $(m \to \infty)$; потому в $D(\mathscr{L})$ существует последовательность $\mathbf{u}_m$, сходящаяся к $\mathbf{u}$, для которой $\mathscr{L}\mathbf{u}_m \to \mathbf{v}$, откуда следует $\mathbf{u} \in D(\bar{\mathscr{L}})$. Указанные рассуждения доказывают, что отображение $D(\bar{L}) \ni u^i \mapsto (0, \dots, 0, u^i, 0, \dots, 0)$ изоморфно отображает $D(\bar{L})$ на подпространство в $D(\bar{\mathscr{L}})$; $D(\bar{\mathscr{L}})$ изоморфно $D(\bar{L}) \dot{+} \dots \dot{+} D(\bar{L})$.

Семейство $S(t)$ такое, что $S(t)\mathbf{u} = (T(t)u^1, \dots, T(t)u^n)$ является (C_0)-полугруппой в X^n. Действительно, каждая координата $(S(t)\mathbf{u})^i$ принадлежит X, потому $S(t)\mathbf{u} \in X^n$; полугрупповой закон и равенство $S(0) = I$ проверяются покоординатно; из непрерывности $T(t)$ в нуле следует $T(t)u^i \to u^i$ при $t \to 0$, потому $S(t)\mathbf{u} \to \mathbf{u}$. Полугруппа $S(t)$ нильпотентна, так как $S(t_0) = 0$. Она также является полугруппой сжатий (проверка опирается на равенство $T(t)(|u^i|) = |T(t)u^i|$). Её порождает оператор $\bar{\mathscr{L}}$, область определения которого $D(\bar{\mathscr{L}})$ плотна в X^n.

Рассмотрим систему линейных уравнений первого порядка с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором

$$(\bar{L}u^i)(x)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(x)u^k(x)=f^i(x), \tag{1}$$

где $u^i\in D(\bar{L})$, $a_{ik}\in X$ – переменные коэффициенты, $f^i\in X$, $i=1,\dots,n$. В векторной форме система (1) имеет вид

$$(\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u})(x)+a(x)\mathbf{u}(x)=\mathbf{f}(x), \tag{2}$$

где $a(x)=(a_{ik}(x))_{i,k=1}^n$, $\mathbf{u}\in D(\bar{\mathscr{L}})$, $\mathbf{f}\in X^n$. В иных функциональных классах системы вида (1) с оператором Лапласа-Леви рассматривались в работе [3] (для случая $f^i\equiv 0$, $i=1,\dots,n$), а с оператором квазидифференцирования – в [4] (для случая $f^i\neq 0$, $i=1,\dots,n$). В [3, 4] предложены явные формулы решений. В данном функциональном классе система (1) с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором рассматривалась в работе [10], она имеет, и притом единственное решение

$$\mathbf{u}(x)=-\int_0^{t_0}\exp\left(\int_0^t(S(\tau)a)(x)d\tau\right)(S(t)\mathbf{f})(x)dt. \tag{3}$$

Поясним формулу (3). В каждой точке (τ,x) выражение $(S(\tau)a)(x)=((T(\tau)a_{ik})(x))_{i,k=1}^n$ представляет собой квадратную матрицу размерности n. В каждой точке (t,x) выражения $\exp\left(\int_0^t(S(\tau)a)(x)d\tau\right)$ и $(S(t)\mathbf{f})(x)=((T(t)f^1)(x),\dots,(T(t)f^n)(x))$ представляют собой квадратную матрицу размерности n и вектор из $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Поставим для системы (2) задачу управления

$$(\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u})(x)+a(x)\mathbf{u}(x)+(B\mathbf{v})(x)=\mathbf{f}(x), \tag{4}$$

$$J(\mathbf{v})=|||\mathbf{u}(\cdot,\mathbf{v})-\mathbf{u}_\partial|||\to\inf, \tag{5}$$

где $B=(B_{ik})_{i,k=1}^n\in L(X^n)$ – ограниченный линейный оператор в X^n, $\mathbf{v}=(v^1,\dots,v^n)\in X^n$ – управление, $J(\mathbf{v})$ – критерий оптимальности, $\mathbf{u}_\partial=(u^1_\partial,\dots,u^n_\partial)\in X^n$ – заданная функция, к которой нужно привести функцию $\mathbf{u}$. Подчеркнём, что функция $\mathbf{u}(x)=\mathbf{u}(x,\mathbf{v})$ зависит от управления $\mathbf{v}$. Такой тип задач относится к задачам стабилизации.

2. Основной результат

Теорема. *Пусть существует* $B^{-1}\in L(X^n)$*. Тогда:*

1. *если* $\mathbf{u}_\partial \in D(\bar{\mathscr{L}})$, *то управление* $\mathbf{v}(x) = B^{-1}(\mathbf{f}(x) - (\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial)(x) - a(x)\mathbf{u}_\partial(x))$ *минимизирует критерий оптимальности:* $J(\mathbf{v}) = 0$*;*
2. *если* $\mathbf{u}_\partial \in X^n$, *то* $\inf\limits_{\mathbf{v}\in X^n} J(\mathbf{v}) = 0$.

Доказательство. Оператор $\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I$ имеет обратный (см. формулу (3))

$$((\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I)^{-1}\mathbf{u})(x) = -\int\limits_0^{t_0} \exp\left(\int\limits_0^t (S(\tau)a)(x)d\tau\right)(S(t)\mathbf{u})(x)dt.$$

Поскольку $T(t)$ полугруппа сжатий (см. п. 1), то для нормы $|||a||| = \sup\limits_{X^n \ni \mathbf{v}\neq \mathbf{0}} \frac{|||a\mathbf{v}|||}{|||\mathbf{v}|||}$, подчинённой норме $|||\cdot|||$, справедлива оценка $|||S(t)a||| \leqslant |||a|||$. Тогда из неравенства

$$\left|\left|\left|-\int\limits_0^{t_0} \exp\left(\int\limits_0^t S(\tau)ad\tau\right)S(t)\mathbf{u}dt\right|\right|\right| \leqslant \int\limits_0^{t_0} \exp\left(\int\limits_0^t |||a|||ds\right)|||\mathbf{u}|||dt =$$
$$= \frac{1}{|||a|||}(e^{|||a|||t_0} - 1)|||\mathbf{u}|||$$

следует оценка $|||(\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I)^{-1}||| \leqslant \frac{1}{|||a|||}(e^{|||a|||t_0} - 1)$.

Пусть $\mathbf{u}_\partial \in D(\bar{\mathscr{L}})$. Тогда из (4) имеем $\mathbf{u} = (\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I)^{-1}(\mathbf{f} - B\mathbf{v})$. Подставляем в (5):

$$J(\mathbf{v}) = |||(\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I)^{-1}(\mathbf{f} - B\mathbf{v}) - \mathbf{u}_\partial||| = |||(\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I)^{-1}(\mathbf{f} - B\mathbf{v} - (\bar{\mathscr{L}} + aI)\mathbf{u}_\partial)||| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|||a|||}(e^{|||a|||t_0} - 1)|||\mathbf{f} - B\mathbf{v} - (\bar{\mathscr{L}} + aI)\mathbf{u}_\partial|||.$$

Ввиду неотрицательности нормы управление $\mathbf{v}(x) = B^{-1}(\mathbf{f}(x) - (\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial)(x) - a(x)\mathbf{u}_\partial(x))$ реализует минимум критерия оптимальности $J(\mathbf{v})$, что доказывает п. 1 теоремы.

Пусть $\mathbf{u}_\partial \in X^n$. Выберем последовательность $\{\mathbf{u}_m\} \subset Z^n$ такую, что $\mathbf{u}_m \to \mathbf{u}_\partial$ при $m \to \infty$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|||\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_\partial||| < \varepsilon$. Для $\mathbf{v}_N(x) = B^{-1}(\mathbf{f}(x) - (\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_N)(x) - a(x)\mathbf{u}_N(x))$ аналогичными рассуждениями получим $J(\mathbf{v}_N) \leqslant |||(\bar{\mathscr{L}} + a(\cdot)I)^{-1}(\mathbf{f} - B\mathbf{v}_N) - \mathbf{u}_N||| + |||\mathbf{u}_N - \mathbf{u}_\partial||| < \varepsilon$. □

Следствие. *Пусть* $\mathbf{u}_\partial \in D(\bar{\mathscr{L}})$. *Тогда управление* $\mathbf{v}$ *непрерывно зависит от функций* $\mathbf{f}$, $\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial$ *и* a.

Доказательство. Оценка $|||\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial - \bar{\mathscr{L}}\mathbf{w}_\partial||| \leqslant \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ приводит к оценке

$$|||\mathbf{u}_\partial - \mathbf{w}_\partial||| = \left|\left|\left|-\int\limits_0^{t_0} S(t)\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial dt - \left(-\int\limits_0^{t_0} S(t)\bar{\mathscr{L}}\mathbf{w}_\partial dt\right)\right|\right|\right| \leqslant t_0\varepsilon.$$

Потому для управлений $\mathbf{v} = B^{-1}(\mathbf{f} - \bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial - a\mathbf{u}_\partial)$ и $\mathbf{v}_0 = B^{-1}(\mathbf{f}_0 - \bar{\mathscr{L}}\mathbf{w}_\partial - a\mathbf{w}_\partial)$ имеем

$$|||\mathbf{v} - \mathbf{v}_0||| \leqslant |||B^{-1}|||(|||\mathbf{f} - \mathbf{f}_0||| + |||\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial - \bar{\mathscr{L}}\mathbf{w}_\partial|||+$$
$$+|||a||| \cdot |||\mathbf{u}_\partial - \mathbf{w}_\partial||| + |||a - a_0||| \cdot |||\mathbf{w}_\partial|||).$$

Приведенная оценка доказывает следствие. □

Пример. Для системы

$$\begin{cases} (\bar{L}u^1)(x) + a_{11}(x)u^1(x) + a_{12}(x)u^2(x) + (B_1v^1)(x) = f^1(x), \\ (\bar{L}u^2)(x) + a_{21}(x)u^1(x) + a_{22}(x)u^2(x) + (B_2v^2)(x) = f^2(x) \end{cases}$$

соответствующее управление (при условии существования $B_1^{-1}, B_2^{-1} \in L(X)$) имеет вид

$$\begin{cases} v^1(x) = B_1^{-1}(f^1(x) - (\bar{L}u^1_\partial)(x) - a_{11}(x)u^1_\partial(x) - a_{12}(x)u^2_\partial(x)), \\ v^2(x) = B_2^{-1}(f^2(x) - (\bar{L}u^2_\partial)(x) - a_{21}(x)u^1_\partial(x) - a_{22}(x)u^2_\partial(x)). \end{cases}$$

Заключение

В работе рассмотрена задача оптимального управления (4), (5) для системы линейных уравнений первого порядка с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором. Доказан следующий факт: $\inf\limits_{\mathbf{v} \in X^n} J(\mathbf{v}) = 0$. При дополнительном условии $\mathbf{u}_\partial \in D(\bar{\mathscr{L}})$ оптимальное управление $\mathbf{v}$ приведено в явном виде, а также доказана непрерывная зависимость управления $\mathbf{v}$ от функций $\mathbf{f}$, $\bar{\mathscr{L}}\mathbf{u}_\partial$ и a.

Список литературы

1. Леви, П. Конкретные проблемы функционального анализа. — М.: Наука, 1967. — 512 с.

   LÉVY, P. (1967) *Lessons in Functional Analysis.* Moscow: Nauka.

2. FELLER, M.N. (2005) *The Lévy Laplacian.* Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press.

3. Шилов Г.Е. О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III // Мат. сб. — 1967. — Т. 74(116), № 1. — С. 161–168.

   SHILOV, G.E. (1967) On some problems of analysis in Hilbert space. III. *Mat. Sbornik.* 74(116) (1). p. 161–168.

4. Сикирявый В.Я. Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1972. — Т. 27. — С. 195–246.

   SIKIRYAVYI, V.Ya. (1972) Operator of quasidifferentiation and boundary-value problems related to it. *Trudy Mosk. Mat. Obshchestva.* 72. p. 195–246.

5. Полищук Е.М. О некоторых новых связях управляемых систем с уравнениями математической физики. I // Дифференциальные уравнения. — 1972. — Т. 8, № 2. — С. 333–348.

   POLISHCHUK, E.M. (1972) On some new interrelations of controlled systems with equations of mathematical physics. I. *Differential equations.* 8 (2). p. 333–348.

6. Полищук Е.М. О некоторых новых связях управляемых систем с уравнениями математической физики. II // Дифференциальные уравнения. — 1972. — Т. 8, № 5. — С. 857–870.

   POLISHCHUK, E.M. (1972) On some new interrelations of controlled systems with equations of mathematical physics. II. *Differential equations.* 8 (5). p. 857–870.

7. Богданский Ю.В. Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. — 1977. — Т. 29, № 6. — С. 781–784.

   BOGDANSKY, Yu.V. (1977) Cauchy problem for parabolic equations with essentially infinite-dimensional elliptic operators. *Ukr. Mat. Zh.* 29 (6). p. 781–784.

8. Богданский Ю.В. Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 5. — С. 584–590.

   BOGDANSKY, Yu.V. (1989) Cauchy problem for heat equation with non-regular elliptic operator. *Ukr. Mat. Zh.* 41 (5). p. 584–590.

9. BOGDANSKY, Yu.V. and DALECKY, Yu.L. (1991) *Cauchy problem for the simpliest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator.* Suppl. to chapters IV, V in book: DALECKY, Yu.L. and FOMIN, S.V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space.* Amsterdam–New York: Kluwer Acad. Publ.

10. Статкевич В.М. Системы существенно бесконечномерных дифференциальных уравнений (укр.) // Укр. мат. журн. — 2011. — Т. 63, № 9. — С. 1257–1262.

    STATKEVICH, V.M. (2011) Systems of essentially infinite-dimensional differential equations. *Ukr. Mat. Zh.* 63 (9). p. 1257–1262.

11. Згуровский М.З. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями / М.З. Згуровский, В.С. Мельник, А.Н. Новиков. — К.: Наук. думка, 2004. — 588 с.

    ZGUROVSKY, M.Z., MELNIK, V.S. and NOVIKOV, A.N. (2004) *Applied Methods of Analysis and Control of Nonlinear Processes and Fields.* K.: Naukova Dumka.

12. Андреев Н.В. Об одной задаче оптимального управления для линейного уравнения первого порядка с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором / Н.В. Андреев, В.М. Статкевич // Анализ, моделирование и управление. Сборник научных трудов отдела прикладного нелинейного анализа Института прикладного системного анализа НТУУ «КПИ». — 2014. — Вып. 2. — С. .

    ANDREEV, N.V. and STATKEVICH, V.M. (2014) On one optimal control problem of the first-order linear equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator. *Analysis, Modeling and Control. Book of papers on applied nonlinear department of IASA NTUU «KPI».* 2. p. .

Статья поступила в редакцию 28.05.2015

Marchenko V. M. 2015. DAD Dynamical Systems: Stability, Reachability and Observability. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 1, pp. 8–20.

Рассматриваются линейные гибридные дифференциально-разностные (ГДР или дифференциально-алгебраические) системы, состоящие из дифференциальных и разностных уравнений. Для таких систем исследуются такие основные проблемы качественной теории управления и наблюдения, как устойчивость, управляемость (достижимость) и наблюдаемость. Получены необходимые, достаточные условия асимптотической и экспоненциальной устойчивости ГДР систем. В скалярном случае эти условия уточняются и выражаются через исходные параметры системы. Вводятся определяющие уравнения, на решения которых обобщается известная из теории матриц теорема Гамильтона-Кэли, что позволяет установить эффективные ранговые критерии достижимости и наблюдаемости изучаемых ГДР систем.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические, ГДР системы, запаздывание, устойчивость, достижимость, наблюдаемость.

Адуков В. М, Адукова Н. В., Кудрявцев К. Н. Одна дискретная модель оптимизации рекламой стратегии / В. М. Адуков, Н. В. Адукова, К. Н. Кудрявцев // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 21–32.

В работе предложена дискретная нелинейная модель оптимального планирования расходов на рекламу фирмы-монополиста, занимающей значительную долю на рынке некоторого продукта. Как частные случаи приведенной модели, получаются дискретные аналоги моделей Сети и Видаля-Вольфа. С помощью метода динамического программирования Беллмана в явном виде найдена оптимальная рекламная стратегия. Предложенный алгоритм построения оптимальной рекламной стратегии реализован в пакете Maple. Рассмотрены модельные примеры.

Ключевые слова: реклама, конкуренция, оптимальное управление, дискретная модель, динамическое программирование.

Бардин А. Е., Житенева Ю. Н., Макаркина Т. В. Построение оптимального портфеля в условиях неопределенности с учетом рисков и сожалений / А. Е. Бардин, Ю. Н. Житенева, Т. В. Макаркина // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 33–45.

В статье рассмотрен новый подход к формированию портфеля ценных бумаг в условиях действия неопределенных факторов. Формализация оптимального портфеля базируется на понятиях гарантированного по Вальду решения, минимаксного сожаления по Сэвиджу из теории задач при неопределенности.

Ключевые слова: неопределенность, максиминный критерий Вальда, принцип минимаксного сожаления Сэвиджа, оптимальность по Парето.

Высокос М. И, Жуковский В. И Золотое правило в модели дуополии Курно / М. И. Высокос, В. И. Жуковский // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 46–54.

В работе с помощью метода динамического программирования найден явный вид равновесия по Бержу в одношаговом варианте управляемой модели дуополии Курно.

Ключевые слова: дуополия Курно, равновесие по Бержу, равновесие по Нэшу, одношаговая бескоалиционная позиционная линейно-квадратичная игра, динамическое программирование.

Горбатов А. С., Жуковский В. И. Равновесие по Бержу в олигополии Бертрана при учете импорта / А. С. Горбатов, В. И. Жуковский // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 55–64.

В последние годы происходит активное становление математической теории равновесия по Бержу, предложенного в 1994 г. российским математиком К.С. Вайсманом (умер в 1998 году, не дожив и до 36 лет). Однако применение этого равновесия пока, в основном, не выходит за рамки матричных игр двух лиц. Предлагаемая читателю статья по-видимому впервые нарушает эту «традицию». В статье с помощью динамического программирования найден явный вид сильно

гарантированного равновесия по Бержу в математической модели олигополии Бертрана при учете неопределенности (импорта, неожиданно появившегося на рынке сбыта).

Ключевые слова: бескоалиционная игра, олигополия Бертрана, динамическое программирование, равновесие по Бержу, неопределенность

Жуковский В. И., Макаркина Т. В. Учет импорта в дуополии Курно / В. И. Жуковский, Т. В. Макаркина // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 65–76.

Рассматривается конкуренция двух фирм на рынке сбыта одного продукта с учетом импорта. Оба производителя не знают о конкретном объеме продукции, поставляемой на рынок импортером, а им известен лишь априори "диктуемыми"рынком ограничения на такой объем. Математической моделью здесь будет бескоалиционная игра двух лиц при неопределенности, причем "роль"неопределенности "исполняет"количество экспортного товара, поставленного ими на продажу, функция выигрыша – прибыль игрока. Используются два понятия гарантированного решения игроков – сильно гарантированное равновесие (по Нэшу) и Парето-гарантированное. Первое лежит на стыке концепции максимина и равновесия по Нэшу. Вторoе – минимума по Парето и равновесного по Нэшу решения. Для указанной математической дуополии Курнот с учетом импорта в статье найден явный вид обоих гарантированных равновесий.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, минимум по Парето, гарантированные равновесия.

Жуковский В. И., Смирнова Л. В. Существование по Бержу в дифференциальной игре с “разделенной” динамикой / В. И. Жуковский, Л. В. Смирнова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 77–86.

Понятие «равновесия по Бержу» (РБ) появилось в России в 1994-1995 годах в диссертации Константина Семеновича Вайсмана (тогда аспиранта В. И. Жуковского; К.С. Вайсман умер в 1998 г., не дожив до 36 лет). Затем понятие РБ было вывезено из России Муссой Ларбани и Мухамедом Раджефом (в то время алжирскими стажерами В. И. Жуковского) и получило за пределами России *широкое распространение. В настоящее время количество публикаций по РБ насчитывает уже свыше 100 названий. Как показали эти публикации, в математической теории РБ заканчивается период накопления фактов и зарождается этап эволюционного развития. Предлагаемая статья относится ко второму эволюционному периоду и является пионерской в построении нового математического направления: исследование вопросов существования равновесия по Бержу в позиционных дифференциальных играх многих лиц. В ней установлено существование равновесной по Бержу ситуации в одной бескоалиционной позиционной дифференциальной игре многих лиц с «разделенной» динамикой. Доказательство базируется на применении, во-первых, гермейеровской свертки функций выигрыша, во-вторых, теории антагонистических позиционных дифференциальных игр, именно, использовании математической формализации квазидвижений и, наконец, в-третьих, предложенным российским академиком Николаем Николаевичем Красовским способом управления с поводырем.*

Ключевые слова: позиционная дифференциальная игра, гермейеровская свертка, седловая точка, стратегии, квазидвижение, равновесие по Нэшу и по Бержу.

Куликов А. Н., Куликов Д. А. Эффект запаздывания и экономические циклы / А. Н. Куликов, Д. А. Куликов // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 87–100.

Рассматривается известная модель макроэкономики "спрос-предложение". Показано, что учет запаздывания приводит к возможности появления устойчивых периодических решений, то есть позволяет объяснить наличие экономических циклов. Для изучения данного вопроса у соответствующего дифференциального уравнения были использованы методы теории бифуркаций. В частности, использован метод инвариантных многообразий и нормальных форм для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, экономические циклы, запаздывание, устойчивость, бифуркации

Муравьева О. В. Параметрическая устойчивость решений систем линейных неравенств / О. В. Муравьева // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 101–109.

Рассматривается задача минимальной матричной коррекции системы линейных неравенств. Исходной задаче (системе линейных неравенств, не обладающей заданным свойством) ставится в соответствие класс параметрических задач, полученных при малых вариациях коэффициентов системы. Среди всех скорректированных задач требуется найти "ближайшую"к исходной, обладающую заданным свойством, при дополнительных ограничении в виде фиксированных строк и столбцов матрицы параметров. Для фиксированного решения системы линейных неравенств определено минимальное изменение параметров, при котором хотя бы одно неравенство не выполняется. Для совместной системы неравенств задача определения наиболее параметрически устойчивого решения сводится к задача линейного программирования. Для двух линейно разделимых конечных множеств точек предлагается метод построения разделяющей гиперплоскости. Построенная гиперплоскость имеет наибольший радиус устойчивости — величину предельного изменения координат заданных точек, при котором данная гиперплоскость остается разделяющей. Рассматривается дополнительное ограничение на параметры — некоторые координаты фиксированы (не корректируются).

Ключевые слова: матричная коррекция, устойчивость совместной системы линейных неравенств, разделяющая гиперплоскость, минмаксный критерий

Солдатова Н. Г. Гарантированное распределение финансовых вложений при неопределенности / Н. Г. Солдатова // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 110–118.

В работе рассмотрена задача распределения вклада между активами (безрисковым и двумя рисковыми) в случае, когда вкладчик ориентируется на «коридор изменения» доходностей рисковых активов. Получен явный вид гарантированных решений этой задачи для вкладчика, стремящегося иметь возможно больший доход или возможно меньший риск.

Ключевые слова: неопределенность, исход, риск, диверсификация вклада, гарантированный результат.

Статкевич В. М. Об одной задаче оптимального управления для системы линейных уравнений / В. М. Статкевич // Таврический вестник информатики и математики. — 2015. — № 2 (27). — С. 119–125.

В бесконечномерном пространстве рассматривается задача оптимального управления для системы линейных уравнений первого порядка с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором (типа Лапласа-Леви). В качестве критерия оптимальности выбрано отклонение состояния от некоторого заданного состояния. В работе получена точная нижняя грань критерия оптимальности, а при дополнительном условии оптимальное управление получено в явном виде.

Ключевые слова: бесконечномерное пространство, оператор Лапласа-Леви, существенно бесконечномерный эллиптический оператор, оптимальное управление, задача стабилизации, система линейных уравнений.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Марченко Владимир Матвеевич — д.ф-м.н, профессор кафедры высшей математики, Белорусский государственный технологический университет, г. Минск, Беларусь; Bialystok University of Technology, Poland
e-mail: vladimir.marchenko@gmail.com

Адуков Виктор Михайлович — д.ф-м.н, профессор кафедры математического и функционального анализа факультета математики, механики и компьютерных наук Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, РФ
e-mail: eadukovvm@susu.ac.ru

Адукова Наталия Викторовна — студентка факультета математики, механики и компьютерных наук Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, РФ
e-mail: adnatasha94@mail.ru

Кудрявцев Константин Николаевич — к.ф-м.н, доцент кафедры математического и функционального анализа факультета математики, механики и компьютерных наук Южно-Уральского государственного университета (НИУ), г. Челябинск, РФ
e-mail: kudrkn@gmail.com

Бардин Александр Евгеньевич — к.ф-м.н, доцент кафедры информатики факультета информатики Московского государственного областного гуманитарного института, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: intch2006@rambler.com

Житенева Юлия Александровна — к.ф-м.н, доцент кафедры информатики факультета информатики Московского государственного областного гуманитарного института, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: unzh2011@mail.com

Макаркина Татьяна Владимировна — к.ф-м.н, доцент кафедры информатики факультета информатики Московского государственного областного гуманитарного института, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: tatmak147@yandex.ru

Высокос Мария Ивановна

к.ф-м.н, доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Московского государственного областного гуманитарного института, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: mvysokos@mail.ru

Жуковский Владислав Иосифович

д.ф-м.н, профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, г. Москва, РФ
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Горбатов Антон Сергеевич

аспирант кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, г. Москва, РФ
e-mail: gorbatovanton@gmail.com

Макаркина Татьяна Владимировна

к.ф-м.н, доцент кафедры информатики факультета информатики Московсгого государственного областного гуманитарного института, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: tatmak147@yandex.ru

Смирнова Лидия Викторовна

к.ф-м.н, доцент кафедры естественнонаучных дисциплин филиала Московского государственного университета технологий и управления им. К.Г. Разумовского в г. Орехово-Зуево, г. Орехово-Зуево, РФ
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

Куликов Анатолий Николаевич

к.ф-м.н, доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им.П.Г.Демидова, г. Ярославль, РФ
e-mail: anat_kulikov@mail.ru

Куликов Дмитрий Анатольевич

к.ф-м.н, доцент кафедры дифференциальных уравнений Ярославского государственного университета им.П.Г.Демидова, г. Ярославль, РФ
e-mail: kulikov_d_a@mail.ru

Муравьева Ольга Викторовна	к.ф-м.н, доцент кафедры теоретической информатики и дискретной математики математического факультета Московского педагогического государственного университета, г. Москва, РФ *e-mail: muraveva@tidm.ru*
Солдатова Наталья Геннадьевна	старший преподаватель кафедры математики и физики Московского государственного областного гуманитарного института, г. Орехово-Зуево, РФ *e-mail: solnata@pochta.ru*
Статкевич Виталий Михайлович	к.ф-м.н., научный сотрудник Учебно-научного комплекса «Институт прикладного системного анализа» Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина *e-mail: mstatckevich@yahoo.com*

Подписано к печати 04.12.2015. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 14 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского
просп. Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007