Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 1 (30) ' 2016

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свидетельство о регистрации средства массовой информации

ПИ №ФС77-61826 от 18.05.2015

TAURIDA JOURNAL OF COMPUTER SCIENCE THEORY AND MATHEMATICS

2016, No. 1

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER–REVIEWED JOURNAL
CRIMEA FEDERAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

FOUNDED IN 2002
The State Registration Certificate
ПИ No ФС77-61826 (18.05.2015)

ISSN 1729-3901
Key title: Tavriceskij vestnik informatiki i matematiki

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Таврический вестник информатики и математики
Факультет математики и информатики, Таврическая академия КФУ им. В. И. Вернадского
пр-т Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, Российская Федерация, 295007

Тел. гл. редактора:	+7 (3652) 63-75-42
Тел. редакции:	+7 (3652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	vidonskoy@mail.ru
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению ученого совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского.
Протокол № 7 от 21 июня 2016 г.

OFFICE ADDRESS:
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

JOURNAL SITE: www.tvim.info

FOR CORRESPONDENCE:
Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,
Faculty of Mathematics and Computer Science Theory, Taurida Academy of Vemadsky CFU
Vernadsky Avenue, 4, Simpferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

Tel. +7 3652 637 542 — editor-in-chief
+7 3652 602 466 — office
Email: vidonskoy@mail.ru — editor-in-chief
article@tvim.info — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

THEMATIC SECTIONS:

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

СОДЕРЖАНИЕ

Zhukovskiy V. I., Kirichenko M. M. and Boldyrev M. V. Garanteed Outcomes and Risks in Multicriteria Problem 7

Zhukovskiy V. I. and Smirnova L. V. Berge-Vaisman Equilibrium for One Linear-quadratic Differential Game 19

Балашова Г. С. Исследование разрешимости задачи Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка методом выделения главной части 29

Брук В. М. О граничных задачах для интегральных уравнений с операторными мерами 38

Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. О радиусе T_1-устойчивости многокритериальной линейной булевой задачи с нормами Гельдера в пространствах параметров 49

Жуковский В. И., Высокос М. И., Горбатов А. С. Исход и риск в многошаговой позиционной задаче при неопределенности 65

Жуковский В. И., Макаркина Т. В. Сравнение равновесий по Нэшу и Бержу в модели дуополии Бертрана 78

Копачевский Н. Д., Радомирская К. А. Смешанные краевые задачи сопряжения 89

Рефераты 109

Список авторов номера 114

TABLE OF CONTENTS

Zhukovskiy V. I., Kirichenko M. M. and Boldyrev M. V. Garanteed Outcomes and Risks in Multicriteria Problem 7

Zhukovskiy V. I. and Smirnova L. V. Berge-Vaisman Equilibrium for One Linear-quadratic Differential Game 19

Balashova G. S. Study of Solvability of the Dirichlet Problem for Nonlinear Differential Equations of Infinite Order by the Method of Selection Main Part . . . 29

Bruk V. M. On Boundary Value Problems for Integral Equations with Operator Measures 38

Emelichev V. A. and Kuzmin K. G. On the T_1-stability Radius of a Multicriteria Linear Boolean Problem with Hölder Norms in Parameter Spaces 49

Zhukovskiy V. I., Vysokos M. I. and Gorbatov A. S. Outcome and Risk in a Multi-step Positional Problem under Uncertainty 65

Zhukovskiy V. I. and Makarkina T. V. Compare Nash Equilibria and Berzh in a Model of Bertrand Duopoly 78

Kopachevsky N. D. and Radomirskaya K. A. Mixed Boundary Transmission Problems 89

Abstracts 109

Authors 114

UDC: 519.833.2

MSC2010: 91A06

GARANTEED OUTCOMES AND RISKS IN MULTICRITERIA PROBLEM

© V. I. Zhukovskiy, M. M. Kirichenko and M. V. Boldyrev

Moscow State University named after Lomonosov
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics
Department of Optimal Control
Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru, moyomylo11@gmail.com, boldyrev@list.ru*

Garanteed Outcomes and Risks in Multicriteria Problem.

V. I. Zhukovskiy, M. M. Kirichenko, M. M. Boldyrev

Abstract. The method of strategy construction in multicriteria problems under uncertainty (MPU) is examined. Moreover, this strategy provides the Pareto maximality of guaranteed outcome with minimal risk. As application two variants of the problem of diversifying contribution under two deposits (local and foreign) are examined.

Keywords: *Pareto maximum, strategy, uncertainty, vector guarantee, Savage risk, principle of minimax regret*

Introduction

In 1939, Romanian mathematician, who migrated to America in 1938, Abraham Wald (1902–1950) introduced [1] the maximin principle (principle of guaranteed outcome), which allows finding a guaranteed result in a one-criterion problem under uncertainty (OCPU). In almost 10 years, German mathematician Jürg Niehans in 1948 and American mathematician, economist, and statistician Leonard Savage (1917–1971) in 1951 suggested [2, 3] the principle of minimax regret, which allows building guaranteed risks for OCPUs; it would later be referred to as “Savage risk” (later named “Niehans–Savage criterion”). Naturally arises the question of building a strategy, which would simultaneously guarantee a maximum possible outcome and a minimum possible risk.

If we consider the base criterion and the “minus” Savage risk as a second criterion, then the OCPU transforms to two-criteria problem under uncertainty. The present article seeks to provide a mathematical justification of building strategies in multicriteria problems under uncertainty, which would simultaneously increase the guarantees of all outcomes and decrease the accompanying risks.

1. Definition of the problem

A multicriteria problem under uncertainty (MPU) is defined by an ordered set as follows:

$$< X, Y, f_i(x, y)_{i \in \mathbb{N}} > \tag{1}$$

Possible strategies $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ (belong to the set X from Euclidian n-dimensional space $\mathbb{R}^n$); $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ is a subset of pure uncertainties y; criteria $f_i(x, y)$ are scalar functions, defined in the Cartesian product $X \times Y$; $\mathbb{N} = 1, \ldots, N$, and $N \geq 2$ is a set of index numbers of the criteria. In the problem (1), the decision maker seeks to adopt a strategy $x \in X$ to increase values of each criterion $f_i(x, y)$ (called *outcomes*) to maximum possible ones. The decision maker also must take in account the effects from any possible uncertainty $y \in Y$. Ergo each strategy $x \in X$ and each criterion $f_i(x, y)$ is bound to a set of outcomes $f_i(x, Y) = \cup_{y \in Y} f_i(x, y)$. To "narrow down" this set, we will use the Savage risks $R_i(x, y)$, accompanying realizations of each criterion $f_i(x, y)$. At this point, we will proceed to building the Savage *risk function* $R_i(x, y)$ for each criterion $f_i(x, y)$. Under the Nyquist–Savage criterion [2, 3]:

$$R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y) \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Values of $R_i(x, y)$ are called *Savage risks* under the realization of pair $(x, y) \in X \times Y$. Building $R_i(x, y)$ is conducted in two stages: *first*, the function

$$\phi_i[y] = \max_{z \in X} f_i(z, y) \qquad \forall y \in Y \tag{3}$$

is found; *second*, the Savage risk function $R_i(x, y)$ is built under formula (2).

Lemma 1. [4, p. 54] *If sets X and Y are compact and criteria $f_i(x, y)$ are continuous in product $X \times Y$, then*
a) function $\phi_i[y]$ from (3) *is continuous in Y;*
b) functions

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y) \qquad \forall x \in X \tag{4}$$

are continuous in X.

Remark 1. From (4) follows that $f_i[x]$ is a guarantee for $f_i(x, y)$ for any $y \in Y$, since, according to (4),

$$f_i[x] \leq f_i(x, y) \qquad \forall y \in Y,\ i \in \mathbb{N}.$$

From this point, *comp* $\mathbb{R}^n$ is the designation for the set of compacts within $\mathbb{R}^n$, and the continuousness of $f_i(x, y)$ in $X \times Y$ is denoted as $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$.

Remark 2. In problem (1), if criterion $f_i(x, y) \in C(X \times Y)$ and $X \in comp\, \mathbb{R}^n$, $Y \in comp\, \mathbb{R}^n$, then the Savage risk function $R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ in (2) is continuous in $X \times Y$. Indeed, continuousness of $\phi_i[y]$ in (3) follows from Lemma 1, statement a), and, accordingly, the Savage risk function is continuous as a difference of continuous functions: $R_i(x, y) = \phi_i[y] - f_i(x, y)\, (i \in \mathbb{N})$.

Remark 3. The Savage risk function from (2) characterizes deviation of criterion $f_i(x, y)$ from the "desired" value $\max_{x \in X} f_i(x, y)$. This prompts the decision maker to choose a strategy $x \in X$, which would decrease the difference $R_i(x, y)$ from (2) to the greatest extent possible or, equivalently, increase $-R_i(x, y)$. Then the given MPU (1) is assigned to a $2N$-criteria problem

$$\left\langle X, Y, f_i(x, y), -R_i(x, y)_{i \in \mathbb{N}} \right\rangle. \tag{5}$$

The goal of the decision maker in (5) is to choose a strategy $x \in X$ so that the $2N$ criteria $f_i(x, y), -R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ assume the greatest values possible; the decision maker must also expect a possibility of emergence of uncertainty $y \in Y$.

2. Formalization of a guaranteed solution

MPUs are well-described in the literature (in particular, we refer to the monography [5] published in the United States). In the present article, we will use the approaches from a recent series of articles [6, 7]. In this formalization, we will use two N-vectors, $f = (f_1, \ldots, f_N), R = (R_1, \ldots, R_N)$, and, finally, the $2N$-vector $F = (F_1, \ldots, F_N, F_{N+1}, \ldots, F_{2N})$, where $F_i = f_i, F_{i+N} = -R_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Then (5) may be rewritten as

$$\left\langle X, Y, \{F_j(x, y)\}_{j=1,\ldots,2N} \right\rangle. \tag{6}$$

Remark 4. Consider the guarantees of the risk functions $-R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$:

$$-R_i[x] = \min_{y \in Y}[-R_i(x, y)] = \min_{y \in Y}[-F_{N+i}(x, y)] = -\max_{y \in Y} F_{N+i}(x, y) = -F_{N+i}[x],$$

from which follows the equation:

$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y)(i \in \mathbb{N}) \tag{7}$$

and thus $R_i[x] \geq R_i(x,y)$ $\forall y \in Y$. Then $R_i[x]$ is the guarantee of Savage risk function for the decision maker using strategy $x \in X$ (it must be remembered that that decision maker strives to decrease the risk and, according to (7), the risk function $R_i(x,y)$ cannot exceed $R_i[x]$ for any $y \in Y$).

We will now proceed to building a *multicriteria problem of guarantees*. For the problem (1) and, accordingly, in the MPUs extended with risks (5), (6), we will only limit ourselves to *interval* uncertainties $y \in Y$. We only know that y may assume any value from Y, and probabilistic characteristics of arrangement of $y \in Y$ are absent or unknown for some reasons. Thus, the MPU (5) (or, equivalently, (6)) is assigned to a *multicriteria problem of guarantees*

$$\left\langle X, \left\{ F_j[x] = \min_{y \in Y} F_j(x,y) \right\}_{j=1,\dots,2N} \right\rangle. \tag{8}$$

We recall that $F_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x,y)$ and $F_{i+N}[x] = -\max_{y \in Y} R_i(x,y) = R_i[x]$ $(i \in \mathbb{N})$. For a formalization of an optimal solution of (1) under risks we will use the term, introduced in 1909 [8] by Italian economist and sociologist Vilfredo Pareto (1848–1923), later named "the Pareto maximum".

Definition 1. Strategy $x^P \in X$ is called **Pareto maximal** (sometimes also **effective**) for a $2N$-criteria problem (8), if for any $x \in X$, the system of inequalities

$$F_j[x] \geq F_j[x^P] \qquad (j = 1, \dots, 2N),$$

of which at least one inequality is strict, is not consistent.

Lemma 2. [9, p. 71] *Assume* $\alpha_j = const > 0$ $(j = 1, \dots, 2N)$ *, then* $x^P \in X$*, complying with the equation*

$$\sum_{j=1}^{2N} \alpha_j F_j[x^P] = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{2N} \alpha_j F_j[x],$$

is the Pareto maximal strategy for (8)*.*

Corollary 1. *If* $X \in comp\ \mathbb{R}^n$ *and* $F_j[x] \in C(X)$ $(j = 1, \dots, 2N)$*, then a Pareto maximal strategy exists for* (8)*.*

Definition 2. A tripod $(x^P, f[x^P], R[x^P]) \in X \times \mathbb{R}^{2N}$ is called **Pareto guaranteed under outcomes and risks solution of an MPU** (1), if:

1) the following functions exist: $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x,y)$, $R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x,y)$ $\forall x \in X$ $(i \in \mathbb{N})$,

2) x^P is Pareto maximal for a multicriteria problem of guarantees (8).

It must be remembered that

$$f[x] = (f_1[x], \ldots, f_N[x]),\ \ R[x] = (R_1[x], \ldots, R_N[x]),$$
$$R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y),\ \ R_i(x, y) = \max_{z \in X} f_i(z, y) - f_i(x, y).$$

Why is the Pareto guaranteed under outcomes and risks solution (PGOR) suggested as a "good" solution of the MPU (1)?

First, it provides an answer to the indigenous Russian question: "What is to be done?" It is suggested the decision maker follow the strategy x^P of the tripod $(x^P, f[x^P], R[x^P])$.

Second, this strategy x^P "provide" outcomes $f_i(x^P, y)$ greater than or equal to $f_i[x^P]$ with a risk of $R_i(x^P, y)$ not greater than $R_i[x^P]$ for any $i \in \mathbb{N}$, under implementation of any uncertainty $y \in Y$ (i.e. x^P set lower limits for outcomes implemented under $x = x^P$ and upper limits for risks accompanying this implementation).

Third, situation x^P implements "the greatest" Pareto maximal outcomes and corresponding "minus" risks; otherwise speaking, there is no situation $x \neq x^P$, in which all risk guarantees $f_i[x^P]$ would increase and at the same time, all risk guarantees would decrease $R_i[x^P]$.

It should be noted that the union of "second" and "third" is somewhat analogous to the maximin strategy for a one-criterion problem under uncertainty, with the difference being the substitution of the inner minimum with $min_{y \in Y} F_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ and the substituition of the outer maximum with the Pareto maximum. Two possible research routes are available at this point. The first one of them is to substitute the Pareto maximum with the Slater, Borwein, Geoffrion optimums and conical optimality, and to establish connection between such different solutions. The second route is based on the desire of the decision maker for higher profits, while the guarantees in Definition 2 are the "lowest". Therefore it is possible to substitute scalar minimums (from the inner minimum in the maximin) with a vectorial one (listed above), therefore increasing the guarantees. Connections between solutions are also of interest (some attempts to build such connection the first author lists in the monography [5]).

Fourth, Definition 2 allows suggesting a constructive method of building a PGOR. It may be reduced to four steps.

Step 1. Using $f_i(x, y)$, find $\max_{x \in X} f_i(x, y) = \phi_i[y]$ and build the Savage risk function for criterion $f_i(x, y)$, assuming $R_i(x, y) = \phi_i[y] - f_i(x, y)(i \in \mathbb{N})$.

Step 2. Build outcome guarantees $f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y)$ and risk guarantees $R_i[x] = \max_{y \in Y} R_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$.

Step 3. For a $2N$-criteria guarantees problem $\langle X, Y, \{f_i[x], -R_i[x]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$, calculate a Pareto maximal stategy x^P. Lemma 2 may be used here, assuming $\alpha_j = 1$ $(j = 1, \dots, 2N)$.

Step 4. Using x^P, determine the values of guarantees $f_i[x^P]$ and $R_i[x^P]$ $(i \in \mathbb{N})$ and collect them into two N-vectors $f[x^P] = (f_1[x^P], \dots, f_N[x^P]), R[x^P] = (R_1[x^P], \dots, R_N[x^P])$.

The resulting tripod $(x^P, f[x^P], R[x^P])$ forms the desired PGOR, which complies with Definition 2, i.e. using strategy x^P results in a guaranteed outcome $f_i[x^P]$ with a guaranteed Savage risk $R_i[x^P]$ for each criterion $f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$.

We will now proceed to the proof of existence of PGOR for requirements "usual" for mathematical programming.

Theorem 1. *If in problem* (1),

1. *sets X and Y are compact,*
2. *criteria $f_i(x, y)$ are continuous in $X \times Y$, then a PGOR exists.*

Proof. Given the continuousness of the criteria $f_i(x, y)$, according to Lemma 1, functions $f_i[x] = \min_{y\in Y} f_i(x, y)$, $\phi_i[y] = \max_{x\in X} f_i(x, y)$ $(i \in \mathbb{N})$ are continuous; according to Remark 2, this implies that the Savage risk functions $R_i(x, y) \in C(X \times Y)$ are continuous as well. From Lemma 1 also follows the continuousness of the functions $R_i[x] = \max_{y\in Y} R_i(x, y)(i \in \mathbb{N})$. So, under compliance with both requirements of the theorem, in a multicrireria problem of guarantees (8) all criteria $F_j[x]$ are continious $(j = 1, \dots, 2N)$. As follows from Corollary 1, a Pareto maximal strategy x^P exists in (8), and for this strategy, vectors $f[x^P]$ and $R[x^P]$ are immediately defined. The tripod $(x^P, f[x^P], R[x^P])$ forms the sought-after PGOR (8). □

3. Risks and outcomes for diversification of a deposit into sub-deposits in different currencies

In publications on microeconomics, for example, in [10, p. 103] all decision makers are divided into three categories: risk-averse, risk-neutral, and risk-seeking. In the present article, a solution of the problem of diversification of a deposit into sub-deposits in rubles and in a foreign currency is found for a risk-neutral person in two cases. It should be noted that another article [11, p. 9] addresses the problem, and it presents results different from those below. The case is that Pareto solutions form a set the elements of which are in general different. Different elements of the same Pareto set appear in [11] as well as in the present article. We will now proceed to the diversification problem.

The amount of money in a singular deposit diversified into two sub-deposits (in rubles and a foreign currency) accumulated by the end of the year may [12, p. 58–60] be represented as

$$f(x,y) = x(1+r) + \frac{1-x}{k}(1+d)y \tag{9}$$

where r and d are the rates of interest for the sub-deposits in rubles and a foreign currency, accordingly; k and y are the exchange rates (to the ruble) in the beginning and the end of the year, accordingly; $x \in [0,1]$ is a fraction defining the proportion, in which the singular deposit is divided into the sub-deposits. In accordance with (9), x is then the fraction of the sub-deposit in rubles, and the remaining part $1-x$ is converted into a foreign currency $\frac{1-x}{k}$ and allocated in a sub-deposit. In the end of the year it is converted back into rubles $\frac{1-x}{k}(1+d)y$ and the resulting amount of money is determined by the sum in (9). It is required to determine the fraction x, under the implementation of which the resulting amount of money $f(x,y)$ is the greatest possible one. It must be taken in account the future exchange rate y is normally unknown. We will, however, assume it may be defined in a corridor of possible values, precisely, $y \in [a,b]$, where the constants $b > a > 0$ are set or obtained at first. So, the mathematical model of the diversification problem in hand may be represented as an ordered tripod

$$\Gamma = \langle X = [0,1], Y = [a,b], f(x,y) \rangle\,, \tag{10}$$

where function $f(x,y)$ is defined in (9); here, $X = [0,1]$ is the set of strategies x of the decision maker; $Y = [a,b]$ is the set of uncertainties y; finally, $f(x,y)$ is the function of usefulness (criterion), the value of which is called outcome. From the perspective of operations research, Γ is a one-criterion problem of making decisions under uncertainties. Presence of an uncertainty, as well as the intent to consider it is strongly tied to risks — “the possibility of deviation of any variables from the desired values” [13, p.15].

Statement. *For the diversification problem of a deposit into sub-deposits in rubles and a foreign currency, the Pareto guaranteed under outcomes and risks solution is*

$$(x^P, f[x^P], R[x^P]) = \begin{cases} \left(0, \dfrac{1+d}{k}a, 0\right), & k\dfrac{1+r}{1+d} \le a, \\ (1, 1+r, 0)\,, & k\dfrac{1+r}{1+d} \ge b. \end{cases}$$

Proof. Consider two cases:
first, $k\frac{1+r}{1+d} \le a$,
second, $k\frac{1+r}{1+d} \ge b$.

These cases correspond to the two possibilities of relative of the point $k\frac{1+r}{1+d}$ and the interval $[a,b]$ in the y-axis (see Fig. 1).

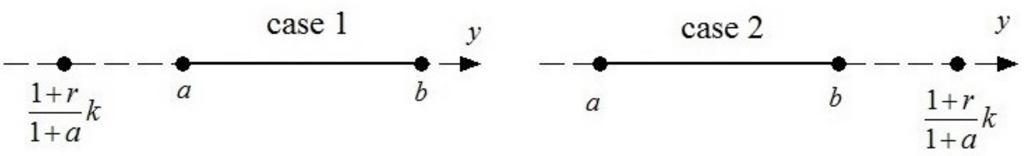

Fig. 1. Possible cases of relative location of the interval $[a,b]$ and the point $k\frac{1+r}{1+d}$.

Case 1. $\left[k\frac{1+r}{1+d} \leq a\right] \implies \left[1+r \leq \frac{1+d}{k}a\right]$. Using the suggested method of finding a PGOR (after Definition 2), we get the following results:

Stage 1. Building the Savage risk functions in accordance with (2). We have to find the x-maximal value of the criterion $f(x,y)$, i.e. $\max_{x\in X} f(x,y)$. For that, we will make an upper estimate of this function and show that it is attainable (and thus the optimal one). Indeed,

$$f(x,y) = x(1+r) + \frac{1-x}{k}(1+d)y \leq \frac{1+d}{k}ax + \frac{1-x}{k}(1+d)y =$$
$$= \frac{1+d}{k}x\underbrace{(a-y)}_{\leq 0} + \frac{1+d}{k}y \leq \frac{1+d}{k}y.$$

And then the maximum is implemented under $x=0$. Therefore, $\max_{x\in X} f(x,y) = \frac{1+d}{k}y$. Then the risk function $R(x,y) = \frac{1+d}{k}y - x(1+r) - \frac{1-x}{k}(1+d)y = x\frac{1+d}{k}(y - \frac{1+r}{1+d}k)$.

Stage 2. Building guarantees of outcomes and risks. It is easy to see that

$$f[x] = \min_{a\leq y\leq b} f(x,y) = f(x,a) = x\frac{1+d}{k}\left(\frac{1+r}{1+d}k - a\right) + \frac{1+d}{k}a,$$
$$-R[x] = \min_{a\leq y\leq b}[-R(x,y)] = -R(x,b) = -x\frac{1+d}{k}\underbrace{\left(b - \frac{1+r}{1+d}k\right)}_{\geq 0}.$$

Stage 3. Finding the Pareto maximal strategy x^P in the two-criteria problem $< X, f[x], -R[x] >$. For that, we may find x^P knowing that

$$\max_{x\in[0,1]}(f[x] - R[x]) = f[x^P] - R[x^P].$$

Consider the case 1 (see Fig. 2), where the bold line denotes the graph of the sum of the functions.

Stage 4. From the figure 2 follows that $\max_{x\in[0,1]}(f[x]-R[x])$ is achieved in the point $x=0$. Thus, $x^P=0$. Therefore, $f[x^P]=\frac{1+d}{k}a$ and $R[x^P]=0$.

Case 2. Analogous reasoning may be provided for case 2. The implication $\left[k\frac{1+r}{1+d}\geq b\right] \implies \left[1+r\geq \frac{1+d}{k}b\right]$ is obvious.

Stage 1. The maximum of the function

$$f(x,y)=x(1+r)+\frac{1-x}{k}(1+d)y\leq x(1+r)+(1-x)\underbrace{\frac{1+d}{k}b}_{<1+r}\leq$$
$$\leq x(1+r)+(1-x)(1+r)=1+r$$

is attained under $x=1$. Thus, $\max_{x\in X} f(x,y)=1+r$. Therefore, the risk function $R(x,y)=(1+r)-x(1+r)-\frac{1-x}{k}(1+d)y=(1-x)\frac{1+d}{k}(\frac{1+r}{1+d}k-y)$.

Stage 2. Finding the guarantees of outcomes and risks.

$$f[x]=\min_{a\leq y\leq b} f(x,y)=f(x,a)=x\frac{1+d}{k}\left(\frac{1+r}{1+d}k-a\right)+\frac{1+d}{k}a,$$
$$-R[x]=\min_{a\leq y\leq b}[-R(x,y)]=-R(x,a)=-(1-x)\frac{1+d}{k}\underbrace{\left(\frac{1+r}{1+d}k-a\right)}_{\geq 0}.$$

Stage 3. The requisite graphs are found in Fig. 3, with the bold line representing the sum of the two functions $f[x]-R[x]$.

Stage 4. Therefore, $\max_{x\in[0,1]}(f[x]-R[x])$ is attained in the point $x=1$. Thus, $x^P=1$ and, accordingly, $f[x^P]=1+r$ and $R[x^P]=0$.

Therefore, a Pareto guaranteed solution under outcomes and risks for the problem of diversification of a deposit into two sub-deposits, one in rubles and one in a foreign currency, is

$$(x^P,f[x^P],R[x^P])=\begin{cases}\left(0,\dfrac{1+d}{k}a,0\right), & k\dfrac{1+r}{1+d}\leq a,\\[2ex] (1,1+r,0), & k\dfrac{1+r}{1+d}\geq b.\end{cases}$$

□

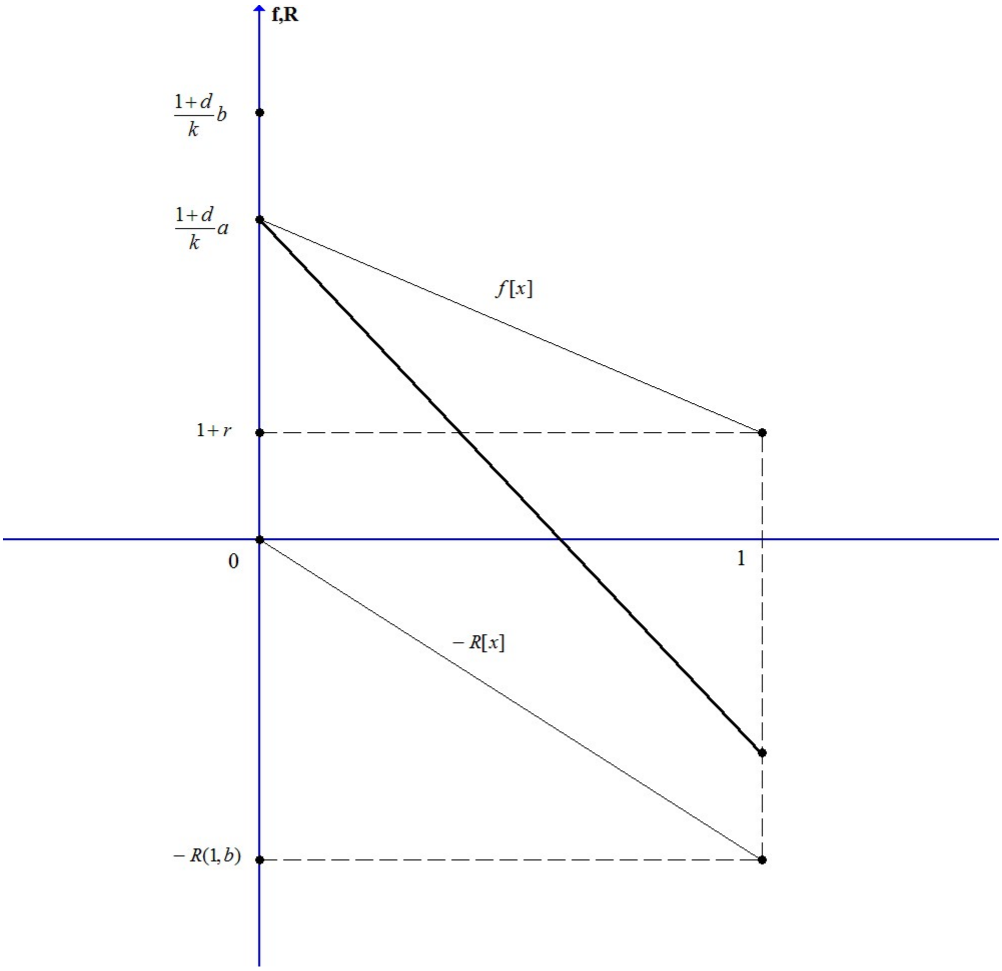

Fig. 2. Pareto maximal strategy for case $k\frac{1+r}{1+d} \leq a$.

Conclusion

A solution of the problem of diversification of a deposit into sub-deposits in rubles and in a foreign currency is found for a risk-neutral person in two cases.

The authors thank the participants of the seminar "Risks in complex control systems" in the Computational Mathematics and Cybernetics Faculty of the Moscow State University for the discussion of the present work and their remarks.

The research has been conducted within the frameworks of the scientific effort of the Department of Optimal Control of Computational Mathematics and Cybernetics Faculty of the Lomonosov Moscow State University.

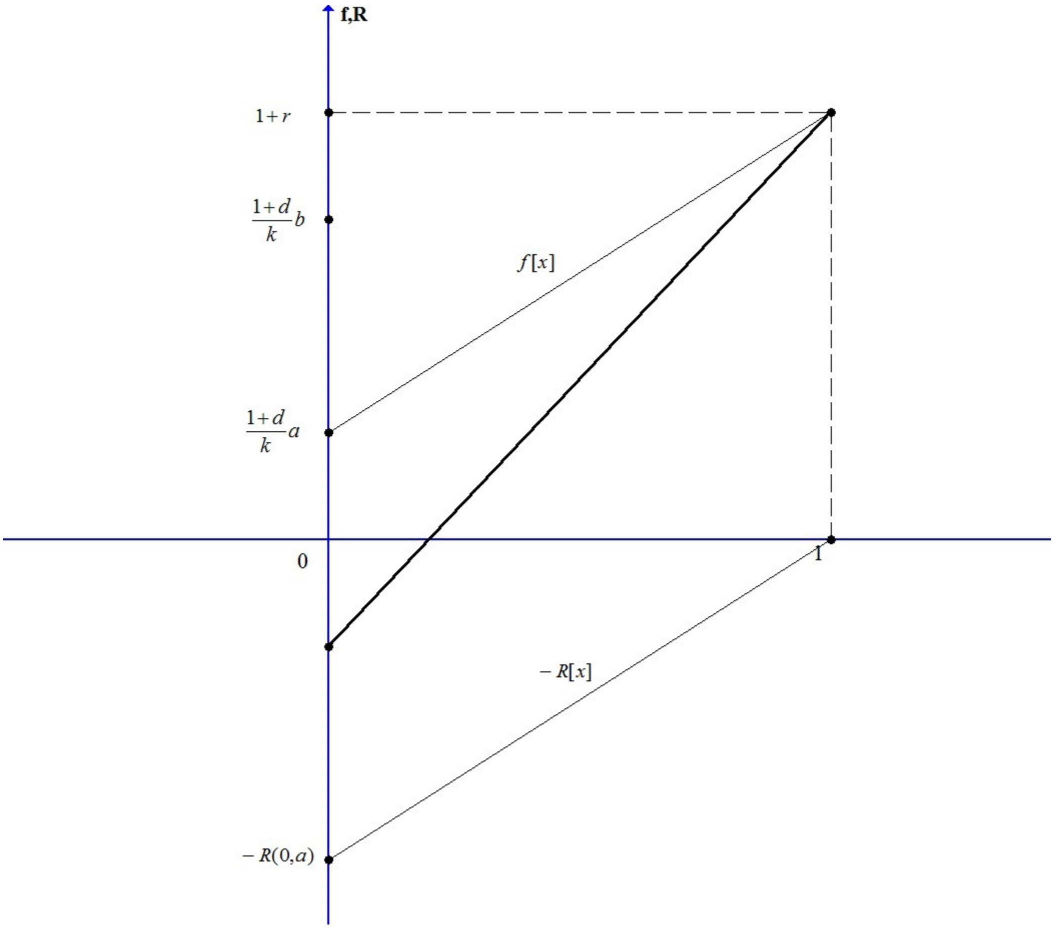

Fig. 3. Pareto maximal strategy for case $k\frac{1+r}{1+d} \geq b$.

References

1. Wald, A. (1939) Contribution to the theory of statistical estimation testing hypothesis. *Annuals Math. Statist.*. 10. p. 299–326.

2. NIEHANS, J. (1948) Zur Preisbildung bei ungewissen Erwartungen. *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft and Statistik.* 84 (5). p. 433–456.

   NIEHANS, J. (1948) On pricing of unknown expectations. *Swiss Journal for Popular Economics and Statistics.* 84 (5). p. 433–456.

3. SAVAGE, A. (1951) The theory of statistical division. *Journal of the American Statistical Association.* 46 (253). p. 55–67.

4. Морозов, В. В. Исследование операций в задачах и упражнениях / В. В. Морозов, А. Г. Сухарев, В. В. Федоров. — М.: Высшая школа, 1968. — 286 с.

   MOROZOV, V. V., SUKHAREV, A. G. and FEDOROV, V. V. (1968) *Operational research in problems and exercises.* Moscow: Higher school.

5. ZHUKOVSKIY, V. I. and SALUKVADZE, M. E. (1994) *The Vector – Valued Maximin.* New York: Academic Press.

6. Жуковский, В. И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев // Математические основы теории игр и приложения. — 2013. — Т. 5. — № 1. — С. 27–44.

   ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Solving conflicts under uncertainty. I. Analog of saddle point. *Mathematical foundation of game theory and applications.* 5 (1). p. 27–44.

7. Жуковский, В. И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев // Математические основы теории игр и приложения. — 2013. — Т. 5. — № 2. — С. 3–45.

   ZHUKOVSKIY, V. I. and KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Solving conflicts under uncertainty. II. Analog of maximin. *Mathematical foundation of game theory and applications.* 5 (2). p. 3–45.

8. PARETO, V. (1909) *Manuel d'economic politique.* Paris: Genard.

9. Подиновский, В. В. Парето-оптимальное решение многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М.: Физматлит, 2007. — 256 с.

   PODINOVSKIY, V. V. and NOGIN, V. D. (2007) *Pareto optimal solution of multicriteria problems.* Moscow: Fizmatlit.

10. Черемных, Ю. Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень / Ю. Н. Черемных. — М.: ИНФРА, 2008. — 843 с.

    CHEREMNYKH, Yu. N. (2008) *Microeconomics. Advanced level.*. Moscow: INFRA.

11. ZHUKOVSKIY, V. I., MOLOSTVOV, V. S. and TOPCHISHVILI, A. L. (2014) Problem of multicurrency deposit diversification – three possible approaches to risk accounting. *International Journal of Operations and Quantitative Management.* 20 (1). p. 1–15.

12. Капитоненко, В. В. Финансовая математика и ее приложения / В. В. Капитоненко. — М.: ПРИОР, 2000. — 140 с.

    KAPITONENKO, V. V. (2000) *Fiscal mathematics and its applications.* Moscow: PRIOR.

13. Шахов, В. В. Введение в страхование. Экономический аспект / В. В. Шахов. — М.: Финансы и статистика, 2001. — 286 с.

    SHAKHOV, V. V. (2001) *Introduction into insurance. Economical aspect.* Moscow: Finansy i statistika.

UDC: 519.833.2

MSC2010: 91A06

BERGE-VAISMAN EQUILIBRIUM FOR ONE LINEAR-QUADRATIC DIFFERENTIAL GAME

© V. I. Zhukovskiy

Moscow State University named after Lomonosov
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics
Department of Optimal Control
Leninskiye Gory, GSP-1, Moscow, 119991, Russian Federation
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© L. V. Smirnova

Moscow State University of Technologies and Management named after Rasumovskiy
Zemlyanoy Val, 73, Moscow, 109004, Russian Federation
e-mail: *smirnovalidiya@rambler.ru*

Berge-Vaisman equilibrium for one linear-quadratic differential game.

Zhukovskiy V. I., Smirnova L. V.

Abstract. We obtained coefficient criteria for the existence of the Berge-Vaisman equilibrium in a non-cooperative positional linear-quadratic game of two persons with small parameter.

Keywords: *non-cooperative positional linear-quadratic differential game, dynamic programming, Berge-Vaisman equilibrium, Nash equilibrium, continuous dependence and analyticity of the solution by parameter*

Introduction

The notion of "Berge equilibrium" appeared in Russia in 1994 during the critical discussion of the published book [1] by Claude Berge in Paris. Berge equilibrium (BE) removes "selfish" nature promoted in [1] Nash equilibrium due to the altruistic approach, dictated by the concept of BE. In 1995 Constantin S. Vaisman (then a graduate student of Zhukovskiy) defended his Ph.D. thesis on Berge equilibrium, at the Leningrad University in 1995. Unfortunately, Vaisman died three years after the Ph.D. defense of the thesis, before the age of 36 years. During these three years he published 19 works, a list of which we present at the end of the article. We observe also that Vaisman together with the first author of this article wrote individual chapters in two books [9, 19].

Vaisman merit lies in the fact that he presented the example that the property of individual rationality for BE, generally speaking, does not take place. Therefore Vaisman added this requirement in the definition of Berge equilibrium, after which BE was naturally called as the equilibrium by Berge–Vaisman.

BE has not got the bright destiny. Because of Vaisman's death, who was the greatest enthusiast of Berge equilibrium, they suspended the investigation of it in Russia. Furthermore, the publication of the book [1] aroused the acute review of Martin Shubic. However, the Algerian trainees of Zhukovskiy Radjef Mohamed Said and Larbani Moussa managed to publish the works [21, 22], which caused widespread interest in the West to BE. As shown by the review [23], right now the research of BE stuck at an early stage. Namely, they are the initial accumulation of facts, the formalization of modification BE, a comparison with Nash equilibrium. Futhermore, basically, all the studies are limited to only finite non-cooperative games. We believe it is time to proceed to the second heuristic stage, that is to answer the following two questions:

1) Is there Berge equilibrium and how to build it?

2) How should one take into account the dynamics of the conflict?

The recently published book [24] was dedicated to the answer to the first question, it is true only within static version of non-cooperative games. We expect to dedicate a separate book to Dynamic version of the problem (within the mathematical formalization of the positional differential game proposed by Russian academician Krasovsky). Though this article is devoted to a partial answer to the second question.

1. Formulation of the problem

Let us consider a non-cooperative positional linear-quadratic differential game of two persons, where one of the players has small influence on the rate of the change of the phase vector

$$\langle \{1,2\}, \Sigma, \{\mathfrak{A}_i\}_{i=1,2}, \{\mathscr{J}_i(U,t_0,x_0)\}_{i=1,2}\rangle. \tag{1}$$

Here $\{1,2\}$ is a set of the serial numbers of the players. Variation of the control system Σ with respect to the time t is described by the linear equation

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2, \quad x(t_0) = x_0,$$

where the $n \times n$-dimensional matrix $A(\cdot) \in C_{n\times n}[t_0,\vartheta]$; $t_0 \geq 0$ is the moment of beginning and $\vartheta > t_0$ is the fixed moment of finishing of the game; $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ is a phase n-column-vector. The pair $(t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$ forms a position of the game, (t_0,x_0) is the initial position of the game, $(t,x(t))$ is the current position of the game at the moment of the time $t \in [t_0,\vartheta]$; $u_i \in \mathbb{R}^n$ is a control action of the i-th player $(i = 1,2)$, the constant $\varepsilon \geq 0$ is the small scalar parameter. A set of strategies of the i-th player is $\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x\}$, i. e., a strategy U_i of the i-th player identified with a vector-valued function $u_i(t,x)$ (denoted by $U_i \div u_i(t,x)$), that is linear with respect to $x \in \mathbb{R}^n$ and continuous with respect to t. Thus, the choice of strategy U_i for the i-th player means the choice of an $n \times n$-dimensional matrix $Q(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta)$ with the continuous elements on interval $[0,\vartheta)$. A system $U = (U_1, U_2) \in \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ is called a situation of the game (1).

The game (1) proceeds in the following way. Each i-th player chooses its strategy $U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x$, $U_i \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1,2)$. Substituting $u_i = u_i(t,x)$ in (1), we have an inhomogeneous linear system of differential equations containing continuous coefficient with respect to t:

$$\dot{x} = [A(t) + Q_1(t) + \varepsilon Q_2(t)]x, \quad x(t_0) = x_0.$$

For any fixed $\varepsilon = const \geq 0$ this system has the unique continuous solution $x(t)$, which can be extended for interval $[t_0, \vartheta]$. Using $x(\cdot) \in C_n[t_0,\vartheta]$, we construct *realizations* $u_i[t] = Q_i(t)x(t)$ of the chosen by the players strategies $U_i \in \mathfrak{A}_i$. On continuous triples $(x(t), u_1[t], u_2[t] \mid t \in [t_0,\vartheta])$ we define the payoff functions of the players, which are given by quadratic functionals:

$$\mathscr{I}_1(U,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_1x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{11}u_1[t] - u_2'[t]D_{12}u_2[t] + x'(t)G_1x(t))dt,$$

$$\mathscr{I}_2(U,t_0,x_0) = x'(\vartheta)C_2x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (-u_1'[t]D_{21}u_1[t] + u_2'[t]D_{22}u_2[t] + x'(t)G_2x(t))dt,$$

where the prime on the top indicates the operation of transposition, $n \times n$-dimensional matrices C_i, G_i, D_{ij} $(i,j = 1,2)$ are symmetric and constant. Further, the fact that the quadratic form $u'Mu$ is definitely negative (positive, nonnegative and nonpositive) we denote by $M < 0$ $(>, \geq, \leq)$.

Definition. A situation $U^B = (U_1^B, U_2^B) \in \mathfrak{A}$ is called a Berge-Vaisman equilibrium for the game (1) if the following conditions for any choice of the initial position $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta) \times \mathbb{R}^n$ hold:

$$\begin{aligned} &\mathscr{I}_1(U_1^B, U_2, t_0, x_0) \leq \mathscr{I}_1(U^B, t_0, x_0) \ \forall\, U_2 \in \mathfrak{A}_2, \\ &\mathscr{I}_2(U_1, U_2^B, t_0, x_0) \leq \mathscr{I}_2(U^B, t_0, x_0) \ \forall\, U_1 \in \mathfrak{A}_1, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\max_{U_1}\min_{U_2} \mathscr{J}_1(U_1, U_2, t_0, x_0) \leq \mathscr{J}_1(U^B, t_0, x_0), \\ &\max_{U_2}\min_{U_1} \mathscr{J}_2(U_1, U_2, t_0, x_0) \leq \mathscr{J}_2(U^B, t_0, x_0). \end{aligned} \tag{3}$$

2. Existence of the Berge-Vaisman equilibrium

So, we will consider a differential positional linear-quadratic game of two persons (1). Recall that dynamics of the game is described by the ordinary linear differential equation

$$\dot{x} = A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2, \quad x(t_0) = x_0,$$

where $x, u_i \in \mathbb{R}^n$ $A(\cdot) \in C_{n\times n}[t_0, \vartheta]$, $\varepsilon = const$ is a small parameter, constant $\vartheta > t_0 \geq 0$. A set of strategies of the i-th player is

$$\mathfrak{A}_i = \{U_i \div u_i(t,x) = Q_i(t)x \mid \forall t \in [0,\vartheta), x \in \mathbb{R}^n, Q(\cdot) \in C_{n\times n}[0,\vartheta)\} \quad (i = 1,2),$$

payoff functions of the players are:

$$\mathscr{J}_1(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_1x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (u_1'[t]D_{11}u_1[t] - u_2'[t]D_{12}u_2[t] + x'(t)G_1x(t))dt,$$

$$\mathscr{J}_2(U_1, U_2, t_0, x_0) = x'(\vartheta)C_2x(\vartheta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} (-u_1'[t]D_{21}u_1[t] + u_2'[t]D_{22}u_2[t] + x'(t)G_2x(t))dt,$$

where symmetric constant matrices C_i, G_i, D_{ij} are such that $C_2 \leq 0$, $G_2 \leq 0$, $D_{ij} > 0$ $(i, j = 1, 2)$. Berge-Vaisman equilibrium is formalized by definition 1.

Statement. *If the constant $\varepsilon \geq 0$ is sufficiently small and the matrices*

$$C_2 \leq 0, G_2 \leq 0, D_{ij} > 0 \ (i, j = 1, 2), \tag{4}$$

then a situation of Nash equilibrium doesn't exist, but a situation of Berge-Vaisman equilibrium

$$(U_1^B, U_2^B) \div (u_1^B(t,x), u_2^B(t,x)), \ \ U_i^B \in \mathfrak{A}_i \ \ (i = 1, 2)$$

exists in the game (1) for any choice of the initial position $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$. Moreover, $u_i^B(t,x)$ can be represented in the form $u_i^B(t,x) = Q_i^B(t,\varepsilon)x$ $(i = 1, 2)$, where the matrices $Q_i^B(t,\varepsilon) \in C_{n\times n}[t_0, \vartheta]$ for mentioned constant $\varepsilon \geq 0$.

Proof. First of all we note two facts. Firstly, according to $D_{11} > 0$ and (or) $D_{22} > 0$ the situation of Nash equilibrium doesn't exist in the game (1) [25, p. 115]. Secondly, maximins in the left parts of the inequalities (3) don't exist too (by $D_{12} > 0$, $D_{21} > 0$ and [26, p. 272-273]). Therefore, to prove the existence of Berge equilibrium it is sufficient to establish the correctness of the implication $[D_{12} > 0, D_{21} > 0] \Rightarrow [\exists\ \forall(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n]$. We can establish this fact using the method of the dynamic programming and Poincare's theory about small parameter [27]. According to the method of the dynamic programming we construct two scalar functions

$$\begin{aligned} W_1(t, x, u_1, u_2, V_1, V_2) &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]' [A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2] + \\ &+ u_1' D_{11} u_1 - u_2' D_{12} u_2 + x' G_1 x, \\ W_2(t, x, u_1, u_2, V_1, V_2) &= \frac{\partial V_2}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2}{\partial x}\right]' [A(t)x + u_1 + \varepsilon u_2] - \\ &- u_1' D_{21} u_1 + u_2' D_{22} u_2 + x' G_2 x. \end{aligned} \tag{5}$$

In the usual way (such as in [25, p. 62-67]) the correctness of the next proposition can be established, where $V = (V_1, V_2) \in \mathbb{R}^2$, 0_n is the n-dimensional zero vector; $0_{n\times n}$ is the $n \times n$-dimensional zero matrix; $Idem\{u \to u^*\}$ implies that in the expression which is situated in the braces u is replaced by u^*:

Assume that for the game (1) we find two continuously differentiable scalar functions $V_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ such that the following conditions hold:

1. $$V_i(\vartheta, x) = x' C_i x \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n; \tag{6}$$
2. there are two n-dimensional vector-valued functions $u_i(t, x, V)$ $(i = 1, 2)$ such that following expressions
$$\begin{aligned} &\max_{u_2} \{W_1(t, x, u_1(t, x, V), u_2, V)\} = Idem\{u_2 \to u_2(t, x, V)\}, \\ &\max_{u_1} \{W_2(t, x, u_1, u_2(t, x, V), V)\} = Idem\{u_1 \to u_1(t, x, V)\} \end{aligned} \tag{7}$$
are valid for any $t \in [0, \vartheta)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $V \in \mathbb{R}^2$;
3. there are the continuously differentiable solutions $V_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ of the system of two partial differential equation
$$W_i[t, x, V] = W_i(t, x, u_1(t, x, V), u_2(t, x, V), V(t, x)) = 0, \ \ (i = 1, 2) \tag{8}$$
with boundary conditions (6);
4. the inclusions $U_i^B \div u_i^B(t, x) = u_i(t, x, V_1(t, x), V_2(t, x)) \in \mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2)$ hold.

Then:

a) situation Berge-Vaisman equilibrium has a form: $U^B = (U_1^B, U_2^B)$;

b) the payoff of the players are $\mathscr{J}_i(U^B, t_0, x_0) = V_i(t_0, x_0)$ $(i = 1, 2)$ for the any initial position $(t_0, x_0) \in [0, \vartheta) \times \mathbb{R}^n$.

Now, we use this proposition. Firstly, the requirements (7) are valid, if

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial W_1(t,x,u_1(t,x,V),u_2,V)}{\partial u_2}\right|_{u_2=u_2(t,x,V)} &= \varepsilon\frac{\partial V_1}{\partial x} - 2D_{12}u_2(t,x,V) = 0_n, \\ \left.\frac{\partial W_2(t,x,u_1,u_2(t,x,V),V)}{\partial u_1}\right|_{u_1=u_1(t,x,V)} &= \frac{\partial V_2}{\partial x} - 2D_{21}u_1(t,x,V) = 0_n, \end{aligned} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 W_1(t,x,u_1(t,x,V),u_2,V)}{\partial u_2^2} = -2D_{12} < 0,$$

$$\frac{\partial^2 W_2(t,x,u_1,u_2(t,x,V),V)}{\partial u_1^2} = -2D_{21} < 0.$$

From (9) we get

$$\begin{aligned} u_2(t,x,V) &= \frac{\varepsilon}{2}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial x}, \\ u_1(t,x,V) &= \frac{1}{2}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2}{\partial x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Taking into account (10) and (8) from (5) we have

$$\begin{aligned} W_1[t,x,V] &= \frac{\partial V_1}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_1}{\partial x}\right]' A(t)x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)' D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2}{\partial x} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)' D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)' D_{21}^{-1}D_{11}D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2}{\partial x} + \\ &+ x'G_1x = 0,\ V_1(\vartheta,x) = x'C_1x, \\ W_2[t,x,V] &= \frac{\partial V_2}{\partial t} + \left[\frac{\partial V_2}{\partial x}\right]' A(t)x + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right)' D_{21}^{-1}\frac{\partial V_2}{\partial x} + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\partial V_2}{\partial x}\right]' D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)' D_{12}^{-1}D_{22}D_{12}^{-1}\frac{\partial V_1}{\partial x} + \\ &+ x'G_2x = 0,\ V_2(\vartheta,x) = x'C_2x. \end{aligned} \tag{11}$$

We search the Lyapunov-Bellman functions $V_i(t,x)$ $(i = 1, 2)$ in the kind of the quadratic form

$$V_i(t,x) = x'\Theta_i(t)x,\ \Theta_i'(t) = \Theta_i(t)\ (i=1,2). \tag{12}$$

Substituting (12) in (11) and taking into account $\frac{\partial V_i(t,x)}{\partial x} = 2\Theta_i x$ $(i=1,2)$, we obtain the quadratic forms with respect to the components of the vector x. Equating to zero the coefficients of these quadratic forms, we get the system of two matrix equations

$$\begin{gathered}\dot{\Theta}_1 + \Theta_1(A + D_{21}^{-1}\Theta_2) + (A' + \Theta_2 D_{21}^{-1})\Theta_1 + G_1 + \\ +\Theta_2 D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1}\Theta_2 + \varepsilon^2\Psi_1(\Theta_1,\Theta_2) = 0_{n\times n},\ \Theta_1(\vartheta) = C_1, \\ \dot{\Theta}_2 + \Theta_2 A + A'\Theta_2 + G_2 + \Theta_2 D_{21}^{-1}\Theta_2 + \\ +\varepsilon^2\Psi_2(\Theta_1,\Theta_2) = 0_{n\times n},\ \Theta_2(\vartheta) = C_2,\end{gathered} \tag{13}$$

where by symbol $\Psi_i(\Theta_1,\Theta_2)$ the addends are denoted. They are quadratic with respect to the elements of the matrices Θ_1 and Θ_2.

Let's prove that the system (13) has the extendable to interval $[0,\vartheta]$ solution $(\Theta_1(t),\Theta_2(t))$ for sufficiently small ε.

Indeed, for $\varepsilon = 0$ from (13) we get

$$\begin{gathered}\dot{\Theta}_1 + \Theta_1(A + D_{21}^{-1}\Theta_2) + (A' + \Theta_2 D_{21}^{-1})\Theta_1 + G_1 + \\ +\Theta_2 D_{21}^{-1} D_{11} D_{21}^{-1}\Theta_2 = 0_{n\times n},\ \Theta_1(\vartheta) = C_1,\end{gathered} \tag{14}$$

$$\dot{\Theta}_2 + \Theta_2 A + A'\Theta_2 + G_2 + \Theta_2 D_{21}^{-1}\Theta_2 = 0_{n\times n},\ \Theta_2(\vartheta) = C_2. \tag{15}$$

Now we note that since $G_2 \le 0$, $D_{21} > 0$ and $C_2 \le 0$ then the matrix equation (15) has the unique extendable to interval $[0,\vartheta]$ continuous solution $\Theta_2(t)$ [28, p. 207]. Substituting given $\Theta_2 = \Theta_2(t)$ in (14), we obtain the matrix system of the linear inhomogeneous equations which are relative to Θ_1 with the continuous (with respect to t) coefficients. This equation also has the unique extendable to interval $[0,\vartheta]$ continuous solution $\Theta_1(t)$.Thus, for $\varepsilon = 0$ the system (13) and hence the system (11) has the extendable to interval $[0,\vartheta]$ solution $(\Theta_1(t),\Theta_2(t))$. According to the theorem about the continuous dependence of the solution on parameter [27, p. 8], it follows that for sufficiently small ε the solution of the system (13) is defined on the same interval. Moreover, by Poincare's theorem about analyticity of the solution by parameter [27, p. 8] this solution can be represented in the form of the uniformly convergent on interval $[0,\vartheta]$ series

$$\Theta_i^*(t,\varepsilon) = \Theta_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Theta_i^{(k)}(t)\ \ (i=1,2).$$

This fact gives the possibility to search the solution (13) in the form of a series in terms of powers of ε. In conclusion, we notice that by (10) we obtain

$$u_1^B(t,x,\varepsilon) = u_1^B(t,x,V_2(t,x,\varepsilon) = x'\Theta_2(t,\varepsilon)x) = \\ = D_{21}^{-1}\Theta_2(t,\varepsilon)x, \;\; U_1^B \div u_1^B(t,x,\varepsilon);$$

$$u_2^B(t,x,\varepsilon) = u_2^B(t,x,V_1(t,x,\varepsilon) = x'\Theta_1(t,\varepsilon)x) = \\ = \varepsilon D_{12}^{-1}\Theta_1(t,\varepsilon)x, \;\; U_2^B \div u_2^B(t,x,\varepsilon).$$

With that the payoffs of the players for any initial positions $(t_0, x_0) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$ are $\mathscr{J}_i(U^B, t_0, x_0) = x_0'\Theta_i(t,\varepsilon)x_0$ $(i = 1, 2)$. This completes the proof.

□

Conclusion

We obtained coefficient criteria for the existence of the Berge-Vaisman equilibrium in a non-cooperative positional linear-quadratic game of two persons with small parameter.

References

1. BERGE, C. (1957) *Théorie Générale des Jeux a n Personnes Games.* Paris: Gauthier-Villar.

   BERGE, C. (1957) *General game theory of several persons.* Paris: Gauthier-Villar.

2. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу в одной дифференциальной игре / К. С. Вайсман // Сложные динамические системы: сборник научных трудов. — Псков: Псковский педагогический институт, 1994. — С. 58–63.

   VAISMAN, K. (1994) Berge equilibrium in one differential game. *Complex Dynamical Systems: collection of scientific articles* . . p. 58-63.

3. VAISMAN, K. (1994) The Berge equilibrium for linear-quadratic differential game. *Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts of the 3-d International Workshop.* . p. 96.

4. Вайсман, К. С., Жуковский, В. И. Свойства равновесия по Бержу / К. С. Вайсман, В. И. Жуковский // Математические проблемы экологии: тез. докл. — Чита, 1994. — С. 27–28.

   VAISMAN, K. and ZHUKOVSKIY, V. (1994) Properties of Berge equilibrium . *Mathematical problems of ecology: Abstr. of Intern. Workshop.* . p. 27-28.

5. Вайсман, К. С. Структура равновесных по Бержу решений / К. С. Вайсман, В. И. Жуковский // Понтрягинские чтения – V: тез. докл. — Воронеж, 1994. — С. 29.

   VAISMAN, K. and ZHUKOVSKIY, V. (1994) The structure of Berge equilibrium solution . *Pontryagin reading-V: Abstr. of Intern. Workshop.* . p. 29.

6. VAISMAN, K. and ZHUKOVSKIY, V. (1994) The Berge equilibrium under uncertainty. *Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts of the 3-d International Workshop.* . p. 97-98.

7. ZHUKOVSKIY, V., SALUKVADZE, M. and VAISMAN, K. (1994) *The Berge equilibrium: preprint.* Tbilisi: Institute of Control Systems.

8. Житомирский, Г. И. О равновесии по Бержу / Г. И. Житомирский, К. С. Вайсман // Сложные динамические системы: сборник научных трудов. — Псков: Псковский педагогический институт, 1994. — С. 52–57.

   ZHITOMIRSKIY, G. and VAISMAN, K. (1994) About Berge equilibrium. *Complex Dynamical Systems: Collection of scientific articles.* . p. 52-57.

9. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу / К. С. Вайсман // Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий. — Киев: Наукова думка, 1994. — С. 119–143.

   VAISMAN, K. (1994) The Berge equilibrium. *In the book Zhukovskiy, V. and Chikrii, A. Linear-quadratic differential games.* . p. 119-143.

10. Вайсман, К. С. Существование гарантированного равновесия по Бержу в одной дифференциальной игре / К. С. Вайсман // Понтрягинские чтения – VI: тез. докл. — Воронеж, 1995. — С. 19.

    VAISMAN, K. (1995) Existence of Berge equilibrium for one differential game . *Pontryagin reading-VI: Abstr. of Intern. Workshop.* . p. 19.

11. Вайсман, К. С. Об одном решении строго выпуклой бескоалиционной игры / К. С. Вайсман // Сложные управляемые системы: Межвуз. сб. науч. тр. — М.: РосЗИТЛП, 1996. — С. 13–16.

    VAISMAN, K. (1996) About one solution for strictly convex differential game . *Complex Dynamical Systems: Collection of scientific articles.* . p. 13–16.

12. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу в дифференциально-разностной игре / К. С. Вайсман, Н. Ж. Аймуханов // Сложные управляемые системы: Межвуз. сб. науч. тр. — М.: РосЗИТЛП, 1996. — С. 90–93.

    VAISMAN, K. and AYMUKHANOV, N. (1996) Berge equilibrium for the differential game . *Complex Dynamical Systems: Collection of scientific articles* . . p. 90–93.

13. VAISMAN, K. (1996) About differential game under uncertainty. *Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimization: Abstr. of Third Intern. Workshop.* . p. 45–48.

14. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу: автореферат дис. ... канд. физ. мат. наук / К. С. Вайсман. — СПбГУ, 1995. — 15 с.

    VAISMAN, K. (1995) *The Berge equilibrium: abstract of diss. ... cand. of phys. math. sciences.* SPbSU.

15. ZHUKOVSKIY, V. and VAISMAN, K. (1996) About one solution in non-cooperative game. *Game Theory and Economics: Abstr. of N.N. Vorob'ev Memorial Conference.* . p. 77.

16. ZHUKOVSKIY, V., MOLOSTVOV, V. and VAISMAN, K. (1997) Non-cooperative games under uncertainty. *Game Theory and Application.* 3. p. 189–222.

17. VAISMAN, K. (1997) Nash equilibriums routing and Networks. *Game Theory and Application.* 3. p. 147–160.

18. Zhukovskiy V. I., Vaisman K. S. To a problem about Berge equilibrium // Вестник Псковского Вольного ун-та. Математика и информатика. — Псков, 1997. — Вып. 1. — С. 49–70.

    ZHUKOVSKIY, V. and VAISMAN, K. (1997) To a problem about Berge equilibrium. *Mathematics and Informatics. Bulleten of Pscov Free University.* 1. p. 49–70.

19. Вайсман, К. С. Арбитражная схема Нэша при неопределенности / К. С. Вайсман // Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. — М.: Эдиториал URSS, 2010. — С. 231 – 249.

    VAISMAN, K. (2010) Arbitration scheme Nash under uncertainty. *In the book Zhukovskiy, V. Cooperative games under uncertainty and their applications.* . p. 231–249.

20. SHUBIC, M. (1961) Review of C. Berge «General theory of n-person games». *Econometrica.* V. 29. (4). p. 1 – 821.

21. RADJEF, M. (1998) Sur l'existenced'un èquilibre de Berge pour un jeu diffèrentiel a n porsonnes.. *Cahiers Mathèmatiques de l'Universitè d'Oran.* 1. p. 89–93.

22. LARBANI, M. and LEBBAH, H. (1998) A concept of equilibrium for a game under uncertainty. *Europ. J. Oper. Res..* 117. p. 145–156.

23. COLMAN, A., KORNER, T., MUSY, O. and TAZDAIT, T. (2011) Mutual support in games: some properties of Berge equilibria. *Journal of Mathematical Psychology, Article in Press.* . p. 1–10.

24. Гусейнов, А. А. Математические основы Золотого правила: альтруистский способ разрешения конфликтов в противоположность эгоистическому равновесию по Нэшу / А. А. Гусейнов, В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев. — М.: USRR, 2016. — 256 с.

    GUSEYNOV, A., ZHUKOVSKIY, V. and KUDRYAVTSEV, K. (2016) *Mathematical foundations of the Golden Rule: the altruistic way of the conflict solution as opposed to the selfish Nash equilibrium.* Moscow: USSR.

25. Жуковский, В. И. Линейно-квадратичные дифференциальные игры / В. И. Жуковский, А. А. Чикрий. — Киев: Наукова думка, 1994. — 320 с.

    ZHUKOVSKIY, V. and CHIKRII, A. (1994) *Linear-quadratic differential games.* Kiev: Naukova Dumka.

26. Жуковский, В. И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения / В. И. Жуковский. — М.: Эдиториал USSR, 2010. — 336 с.

    ZHUKOVSKIY, V. (2010) *Cooperative games under uncertainty and their applications.* Moscow: Editorial URSS.

27. Мищенко, Е. Ф., Розов, Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. — М.: Наука, 1975. — 247 с.

    MISCHENKO, E. and ROZOV, N. (1975) *Differential equation with small parameter and relaxation fluctuations.* Moscow: Nauka.

28. Ли, Э. Б. Основы теории оптимального управления / Э. Б. Ли, Л. Маркус. — М.: Наука, 1972. — 547 с.

    LEE, E. and MARCUS, L. (1972) *Foundations of Optimal Control Theory.* Moscow: Nauka.

УДК: 517.518.23

MSC2010: 26A

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ВЫДЕЛЕНИЯ ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© Г. С. Балашова

НИУ «МЭИ» (Московский энергетический институт)

Кафедра высшей математики

Красноказарменная, 14, Москва, 111250, Российская Федерация

e-mail: *BalashovaGS@mpei.ru*

Study of Solvability of the Dirichlet Problem for Nonlinear Differential Equations of Infinite Order by the Method of Selection Main Part.

Balashova G. S.

Abstract. This paper studies the solvability of the Dirichlet problem for nonlinear differential equations of infinite order. Previously, this was considered a sequence of truncated equations and boundary conditions of order $2m$ and using the limit transition as the m tends to infinity have established the existence of a generalized solution of the original problem. In this article we propose a new approach, namely:to study the solvability of the Dirichlet problem for nonlinear differential equations of infinite order is proposed to introduce a differential operator of infinite order as a sum of two operators of infinite order, of which one main and the other subordinate to him. The basis of their comparison, the expected ratio of the corresponding energy of a Sobolev space of infinite order. Then when certain conditions for main and subordinate operators are able to prove a theorem on the existence of a generalized solution to the original equation, with any right part from the space conjugate to the space corresponding to the main operator. Namely, the main operator is the operator, the energy space which is compactly embedded in energy space corresponding to the second (called subordinates). Embedding theorems and compact attachment of a Sobolev space of infinite order, like a one-dimensional and multidimensional regions, rather fully developed by the author.

The obtained results are illustrated on the example of a particular Dirichlet problem for a differential equation of infinite order on two-dimensional square. It is shown how for a given two-dimensional matrix, describing the main operator and containing infinitely many zeros, built a regularized matrix with positive terms, defining the space of the matching element by element energy space corresponding to the main operator. This allowed just install the subordination of one operator to another and to check that all conditions of the theorem.

Keywords: *solvability, embedding theorems, spaces, infinite order, subordinate operator.*

Разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения бесконечного порядка в ограниченной области ранее была установлена с помощью предельного перехода при $m \to \infty$ решений уравнений конечного порядка $2m$, левая и правая части которых представлялись частичными суммами правых и левых частей исходного уравнения (см. [1]).

В данной работе предложен новый подход, использующий представление дифференциального оператора бесконечного порядка в виде суммы двух операторов, один из которых главный, а другой ему подчиненный, в то время как оба оператора бесконечного порядка.

Итак, исследуем разрешимость задачи Дирихле для дифференциального уравнения бесконечного порядка в некоторой ограниченной области $G \subset R_\nu$, $\nu \geq 1$ с границей Γ, левая часть которого есть эллиптический оператор L_1 с возмущением L_2:

$$\begin{gathered} L_1(u) + L_2(u) \equiv \\ \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad x \in G, \end{gathered} \tag{1}$$

$$D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \ldots . \tag{2}$$

Так как оба оператора L_1 и L_2 имеют бесконечный порядок, поэтому принцип сравнения операторов конечного порядка для них не применим. В основу их сравнения положено сравнение пространств, являющихся областями определения этих операторов.

Определение 1. Дифференциальный оператор L_1 называется *главным* по сравнению с оператором L_2, в дальнейшем — *подчиненным*, если пространство

$$W^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \left\{ u(x) \in C^\infty(G): \quad \rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha u||_p^p < \infty \right\},$$

где $a_\alpha \geq 0$, $p > 1$ — некоторые действительные числа, $||\cdot||_p$ — норма в пространстве Лебега $\mathscr{L}_p(G)$, соответствующее оператору L_1, компактно вложено в пространство $W^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, соответствующее оператору L_2.

Теоремы вложения таких пространств получены автором в работах [2], [3]. Они позволяют из дифференциального оператора бесконечного порядка выделить главный. Однако в каждом конкретном случае это требует глубокого анализа поведения функций $A_\alpha(x, D^\gamma u)$ и $B_\alpha(x, D^\gamma u)$. В данной работе на этом не останавливаемся, а предполагаем, что исходный оператор представлен в виде суммы двух дифференциальных операторов бесконечного порядка (см. (1)).

Правая часть уравнения (1) принадлежит пространству

$$W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)} \equiv \left\{ h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha h_\alpha(x) : \quad \rho'(h) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||h_\alpha||_{p'}^{p'} < \infty \right\},$$

(здесь $p' = \frac{p}{p-1}$, $h_\alpha(x) \in \mathscr{L}_{p'}(G)$).

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$, $B_\alpha(x, \xi_\gamma)$ —- непрерывные функции аргументов $x \in G$ и всевозможных ξ_γ (α и γ —- целочисленные индексы, $|\gamma| \ \le \ |\alpha|$), такие что для любых $x \in G$, ξ_γ и η_α справедливы неравенства:

$$\left| \sum_{|\alpha|=0}^{m} A_\alpha(x, \xi_\gamma) \eta_\alpha \right| \le \delta_1 \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha (|\xi_\alpha|^{p-1} + 1)|\eta_\alpha|,$$

$$\sum_{|\alpha|=0}^{m} A_\alpha(x, \xi_\gamma) \xi_\alpha \ge \delta_2 \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha |\xi_\alpha|^p - K,$$

$$\left| \sum_{|\alpha|=0}^{m} B_\alpha(x, \xi_\gamma) \eta_\alpha \right| \le \delta_3 \sum_{|\alpha|=0}^{m} b_\alpha (|\xi_\alpha|^{p-1} + 1)|\eta_\alpha|, \quad m = 0, 1, \dots\ ,$$

где $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $a_\alpha \ge 0$, $b_\alpha \ge 0$ — некоторые числовые последовательности; δ_1, δ_2, δ_3, K — положительные постоянные, не зависящие от m.

2) Пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)} \equiv \{u(x) \subset C_0^\infty(G), \rho(u) < \infty\}$ нетривиально.

3) Пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ компактно вложено в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$.

4) Для оператора L_1 существует непрерывный относительно $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$ обратный оператор $L_1^{-1} = R$.

5) Для любых $u_t(x) \in \overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, являющихся решениями задач

$$\begin{gathered} L_1(u) + t(L_2(u) - h(x)) = 0, \quad 0 \le t \le 1, \\ D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| \ = 0, 1, \dots\ , \end{gathered} \tag{3}$$

имеет место априорная оценка

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha u_t(x)||_p^p < K_0. \tag{4}$$

Тогда при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$ задача (1), (2) имеет по крайней мере одно обобщенное решение.

Определение 2. Функция $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ называется *обобщенным решением* задачи (1), (2), если для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ выполняется тождество

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle A_\alpha(x, D^\gamma u), D^\alpha v\rangle + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u), D^\alpha v\rangle = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \langle h_\alpha, D^\alpha v\rangle .$$

Доказательство. Рассмотрим сначала задачу

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad x \in G, \tag{5}$$

$$D^\omega u(x)|_\Gamma = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots . \tag{6}$$

Известно (см. [4]), что при выполнении условий 1), 2) задача (5), (6) имеет единственное решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$. Кроме того, по условию 4) существует обратный оператор

$$R(h) = u, \tag{7}$$

непрерывный относительно $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$.

Установим, что оператор $L_2(u)$ непрерывно отображает пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$. Для этого достаточно показать, что оператор $L_2(u)$ всякую последовательность $\{u_k(x)\}$, сходящуюся к $u_0(x)$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, переводит в последовательность

$$L_2(u_k) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha B_\alpha(x, D^\gamma u_k), \quad k = 1, 2, \dots ,$$

сходящуюся равномерно на единичном шаре $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, т. е. для любой функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ с нормой

$$|||v(x)|||_{\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}} \equiv \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha v(x)||_p^p \right)^{1/p} \le 1 \tag{8}$$

имеет место соотношение

$$\langle L_2(u_k), v(x)\rangle = \textstyle\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u_k), D^\alpha v(x)\rangle \xrightarrow[k\to\infty]{} \\ \xrightarrow[k\to\infty]{} \textstyle\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u_0), D^\alpha v(x)\rangle .$$

Из сходимости последовательности $\{u_k(x)\}$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ на шаре (8) следует, что для любого α последовательность $\{D^\alpha u_k\}$ является его компактным подмножеством, а потому из критерия компактности множества, принадлежащего $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ (см. [5]), имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\sum_{|\alpha|=N}^{\infty} b_\alpha ||D^\alpha u_k(x)||_p^p < \varepsilon. \tag{9}$$

Проведем следующую оценку

$$\left| \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \int\limits_G \left(B_\alpha(x, D^\gamma u_k) - B_\alpha(x, D^\gamma u_0)\right) D^\alpha v(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \sum_{|\alpha|=0}^{N-1} \int\limits_G \left|B_\alpha(x, D^\gamma u_k) - B_\alpha(x, D^\gamma u_0)\right| \cdot \left|D^\alpha v(x)\right| dx +$$

$$+ \left| \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \int\limits_G B_\alpha(x, D^\gamma u_k) D^\alpha v(x) dx \right| + \left| \sum_{|\alpha|=N}^{\infty} \int\limits_G B_\alpha(x, D^\gamma u_0) D^\alpha v(x) dx \right| =$$

$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3.$$

В силу сходимости $\{u_k(x)\}$ по норме пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ следует, что для любого α $\{D^\alpha u_k(x)\}$ равномерно стремится к $D^\alpha u_0(x)$ при $k \to \infty$, и так как $B_\alpha(x, \xi_\gamma)$ — непрерывные функции своих аргументов, то каждое из слагаемых, входящих в Σ_1, для достаточно больших k как угодно мало, при этом Σ_1 содержит конечное число таких членов, потому $|\Sigma_1|$ может быть сделан меньше любого $\varepsilon > 0$.

Проведя аналогичные оценки для $|\Sigma_2|$ и $|\Sigma_3|$ с использованием условий 1), 3) теоремы, неравенства Гёльдера, соотношений (8), (9) и критерия компактности вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, получим $|\Sigma_2|$ и $|\Sigma_3|$ как угодно малыми для достаточно больших k. Таким образом, непрерывность оператора L_2, действующего из $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$ в $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$, доказана.

Далее рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = -t \left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (B_\alpha(x, D^\gamma v) - h(x) \right), \tag{10}$$

где $v(x)$ — некоторая функция из $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$, t — число из промежутка $[0; 1]$. В силу установленного выше свойства оператора L_2 правая часть уравнения (10) есть элемент пространства $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'\}_{(G)}$, и потому оператор R из (7), примененный к правой части уравнения (10), представим в виде

$$R_t(v) = R\left(-t\sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}B_{\alpha}(x, D^{\gamma}v) + th\right).$$

Очевидно, что решением исходной задачи (1) является неподвижная точка отображения $v \to R_1(v)$, т. е. $v = R_1(v)$. Оператор $R_t(v)$, действующий из $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, можно представить как суперпозицию следующих операторов

$$v \to Jv \to tL_2(Jv) - th \to R(tL_2(Jv) - th) = R_t v = u,$$

где J — оператор вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_\alpha, p\}_{(G)}$. Из условия 3) следует, что J вполне непрерывен, оператор $L_2(u)$, как доказано выше, тоже непрерывен и R непрерывен по условию 4), то R_t вполне непрерывен.

Заметим, что $R_0(v) = 0$ при $t = 0$, так как единственным решением задачи (5), (6) при $h = 0$ является функция $v(x) \equiv 0$. Это означает, что степень покрытия нуля [6] при отображении $v \to v - R_0(v)$ равна единице. Тогда в силу условия 5) для всех $v(x)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha v(x)||_p^p = 2K_0,$$

$v - R_t(v) \neq 0$. В самом деле, из условия 5) следует, что все решения задачи (3) имеют в $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ норму, не превосходящую $K_0^{1/p}$ при любом $t \in [0; 1]$. Поэтому степень покрытия нуля при отображении $v \to v - R_t(v)$ шара

$$\left(\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha v(x)||_p^p\right)^{1/p} = (2K_0)^{1/p}$$

не зависит от t и при $t = 0$ равна единице, то и при $t = 1$ она также равна единице. Следовательно, существует такая функция $v(x)$, что $v(x) - R_1(v(x)) = 0$. Функция $u(x) \equiv v(x)$ и является решением задачи (1), (2). Теорема доказана. □

Замечание 1. Нахождение условий, при которых выполняется 4), представляет самостоятельный интерес. В работе [7] дано простое достаточное условие непрерывной обратимости оператора $L_1(u)$ при $p \geq 2$, именно

$$\frac{\partial A_\alpha(x, \xi_\alpha)}{\partial \xi_\alpha} > K a_\alpha |\xi_\alpha|^{p-2}, \quad K = \text{const}. \tag{11}$$

Кроме того, в [9] доказана непрерывная обратимость оператора

$$L(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha|D^\alpha u|^{p-2}D^\alpha u), \quad \text{при } p > 1.$$

Замечание 2. Приведем одно из легко проверяемых достаточных условий выполнения пункта 4). Пусть функция $u_t(x)$ является решением уравнения (3), т. е. удовлетворяет равенству

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle A_\alpha(x, D^\gamma u_t), D^\alpha u_t\rangle = -t \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle B_\alpha(x, D^\gamma u_t), D^\alpha u_t\rangle + t \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle a_\alpha h_\alpha, D^\alpha u_t\rangle . \qquad (12)$$

Используя условие 1), неравенство Гёльдера, соотношение (12) и обозначая через $||\mathscr{A}||$ норму оператора вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_\alpha, p\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_\alpha, p\}_{(G)}$, при естественном предположении $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha ||D^\alpha u_t||_p^p \geq 1$, получим, что для выполнения условия 4) достаточно, чтобы

$$\delta_2 - (1 + (mesG)^{1/p'})\delta_3 ||\mathscr{A}||^p > 0. \qquad (13)$$

Пример. Рассмотрим в квадрате $G = [0; 1] \times [0; 1]$ следующую задачу:

$$\begin{gathered} Lu = L_1(u) + \lambda L_2(u) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k D_x^k (2^{-k^2} |D_x^k u|^{p-2} D_x^k u) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m D_y^m (2^{-m^2} |D_y^m u|^{p-2} D_y^m u) + \\ + \sum_{k,\, m=1}^{\infty} D_{xy}^{2k+2m} (2^{-2(k+m)^2} |D_{xy}^{2k-2m} u|^{p-2} D_{xy}^{2k+2m} u) + \\ +\lambda \sum_{k,\, m=0}^{\infty} (-1)^{k+m} D_{xy}^{k+m} \left(\frac{(x-0{,}5)(y-0{,}5)}{2^{(k+m)^3}} |D_{xy}^{k+m} u|^{p-2} D_{xy}^{k+m} u \right) = h(x), \end{gathered} \qquad (14)$$

$$D_{xy}^{k+m} u(x,y)\big|_\Gamma = 0, \quad k,\ m = 0, 1, \ldots\ . \qquad (15)$$

Здесь $p > 1$, $\lambda \in R$ — некоторый параметр, $h(x) \in W^{-\infty}\{a_{km}, p'\}_{(G)}$.

Оператор $L(u)$ такой, что из известных результатов [4] не следует разрешимость задачи (14), (15). В самом деле, для $k = m = 2n + 1$ нарушается условие коэрцитивности для оператора L. Для оператора $L_1(u)$ условие 1) выполнено с $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $K = 0$ и последовательностью

$$a_{km} = \begin{cases} 2^{-k^2}, \quad k = 0, 1, \ldots\ , \ \ m = 0; \\ 2^{-m^2}, \quad k = 0, \ \ m = 0, 1, 2; \\ 2^{-(k+m)^2}, \quad k = 2j, \ \ m = 2s, \ \ s, j = 1, 2, \ldots; \\ 0, \quad k = 2j + 1 \ \ 8; 8 \ \ m = 2s + 1, \ \ s, j = 0, 1, \ldots\ . \end{cases}$$

Для оператора $L_2(u)$ условие 1) выполнено с $\delta_3 = 1$ и $b_{km} = \ |\lambda| 2^{-(k+m)^3}$.

Для проверки условия 2) строится выпуклая регуляризация посредством логарифмов последовательности

$$M_n = \left(\sum_{k+m=n} a_{km} \right)^{-1} \geq 2^{n^2} \frac{1}{n},$$

для которой $M_n^c \geq 2^{n^2}\frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, и потому

$$\sum_{n=1}^{\infty}(M_n^c)^{-\frac{1}{np}} < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{p}} < \infty,$$

т. е. пространство $W^\infty\{a_{km}, p\}$ нетривиально.

Для проверки условия 3) проводится регуляризация двумерной матрицы $\{a_{km}\}$ методом, предложенным в [8], т. е. сначала проводится регуляризация по переменному индексу k при фиксированном m, получаем матрицу $\{a_{km}^{(1)}\}$, в которой еще есть нулевые элементы. Затем проводится регуляризация матрицы $\{a_{km}^{(1)}\}$ по переменному индексу m при фиксированном k. В результате все элементы $a_{km}^{(2)} > 0$ для всех k и m, причем $W^\infty\{a_{km}^{(2)}, p\} = W^\infty\{a_{km}, p\}$ поэлементно. При этом

$$||u(x,y)||^p_{\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km}^{(2)},p\}(G)} \leq 2^{2(p+2)}||u(x,y)||^p_{\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km},p\}(G)}. \tag{16}$$

Тогда для компактности вложения $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km}^{(2)}, p\}_{(G)}$ в пространство $\overset{\circ}{W}{}^\infty\{b_{km}, p\}_{(G)}$ достаточно убедиться, что

$$\lim_{k,m\to\infty} b_{km}(a_{km}^{(2)})^{-1} = 0.$$

Выполнение условия 4) следует из вида оператора $L_1(u)$ и замечания 1. Остается выяснить при каких ограничениях выполнено условие 5). Как указано в замечании 2, для этого можно использовать условие (13) и соотношение (16)

$$||\mathscr{A}||^p \leq 2^{2(p+2)} \sup_{u\in\overset{\circ}{W}{}^\infty\{a_{km}^{(2)},p\}_{(G)}} \frac{\sum_{k+m=0}^\infty b_{km}||D_{xy}^{k+m}u||_p^p}{\sum_{k+m=0}^\infty a_{km}^{(2)}||D_{xy}^{k+m}u||_p^p} \leq 4|\lambda|2^{2(p+2)}. \tag{17}$$

Из условия (13) и оценки (17) следует, что при

$$|\lambda| < 2^{-2(p+3)} \tag{18}$$

условие 5) выполнено. Таким образом, при любом λ, удовлетворяющем условию (18), задача (14), (15) имеет по крайней мере одно решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_{km}, p'\}_{(G)}$.

Список литературы

1. Балашова, Г. С. Равномерная корректность семейства нелинейных краевых задач бесконечного порядка / Г. С. Балашова, Ю. А. Дубинский // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 4. — С. 610 – 620.

BALASHOVA, G. and DUBINSKY, Yu. (1994) The uniform correctness of a family of nonlinear boundary value problems of infinite order.. *Differential equations.*. 30 (4). p. 610–620..

2. Балашова, Г. С. Теоремы вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций нескольких переменных / Г. С. Балашова // Математические заметки. — 1990. — Т. 47. — № 6. — С. 3–14.

   BALASHOVA, G. (1990) Embedding theorems for Banach spaces of infinitely differentiable functions of several variables. *Mathematical notes.* 47 (6). p. 3–14..

3. Балашова, Г. С. Об условиях продолжения следа и вложения для банаховых пространств бесконечно дифференцируемых функций / Г. С. Балашова // Математический сборник. — 1993. — Т. 184. — № 1. — С. 105–128.

   BALASHOVA, G. (1993) On the conditions for the continuation of the trail and attachments for Banach spaces of infinitely differentiable functions. *Mathematical sbornik.* 184 (1). p. 105–128..

4. Дубинский, Ю. А. Пространства Соболева бесконечного порядка и поведение решений некоторых краевых задач при неограниченном возрастании порядка уравнения / Ю. А. Дубинский // Математический сборник. — 1975. — Т. 98. — № 2. — С. 163–184.

   DUBINSKIJ, Ju. (1975) Sobolev Spaces of infinite order and the behavior of solutions of some boundary value problems with unbounded increase of the order of the equations. *Mathematical sbornik.* 98 (2). p. 163–184.

5. Дубинский, Ю. А. Пределы банаховых пространств. Теоремы вложения. Применения к пространствам Соболева бесконечного порядка / Ю. А. Дубинский // Математический сборник. — 1979. — Т. 110 (152). — № 3. — С. 428–439.

   DUBINSKIJ, Ju. (1979) Limits of Banach spaces. Embedding theorems. Application to a Sobolev space of infinite order. *Mathematical sbornik.* 110 (152) (3). p. 428–439.

6. Красносельский, М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М. А. Красносельский. — М.: Ростехиздат, 1956. — 392 с.

   KRASNOSELSKII, M. (1956) *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations.* Moscow: Rostehizdat.

7. Дубинский, Ю. А. О нетривиальности некоторых классов функций и разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений бесконечного порядка / Ю. А. Дубинский // Дифференциальные уравнения. — 1974. — Т. 10. — № 2. — С. 231–240.

   DUBINSKY, Yu. (1974) On the triviality of certain classes of functions and the solvability of nonlinear differential equations of infinite order. *Differential equations.* 10 (2). p. 231–240.

8. DUBINSKIJ, Ju. (1986) *Sobolev Spaces of infinite Order and differential equtions.* Leipzig.BSB.Tubner.

9. Мандельбройт, С. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения / С. Мандельбройт. — М.: Издательство иностранной литературы, 1955. — 268 с.

   MANDELBROJT, S. (1952) *Adjacent rows. Regularization of sequences. Applications.*. Moscow: MIR.

УДК: 517.983

MSC2010: 47A06, 47A10

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРНЫМИ МЕРАМИ

© В. М. Брук

Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю. А.

Политехническая, 77, Саратов, 410054, Российская Федерация

e-mail: *vladislavbruk@mail.ru*

On Boundary Value Problems for Integral Equations with Operator Measures.

Bruk V. M.

Abstract. On a segment $[a, b]$, we consider integral equations

$$y_k(t) = y_k(a) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{p}_k) y_k(s) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{m}_k) f_k(s) ds, \quad k = 0, 1, 2, \dots ,$$

where $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ are operator-valued measures defined on Borel sets $\Delta \subset [a, b]$ and taking values in a set of linear bounded operators acting in a separable Hilbert space H; $f_k \in L_1(H, \mathbf{m}_k; a, b)$; y_k are unknown functions. The measures $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ are assumed to have bounded variations on $[a, b]$. For these equations we consider boundary conditions

$$\Gamma_k y_k = c_k, \quad k = 0, 1, 2 \dots ,$$

where $\Gamma_k : \widetilde{C} \to B$ are linear continuous mappings; $c_k \in B$; $\widetilde{C}$ is a space of functions continuous from the left on $[a, b]$ and taking values in H; B is a Banach space; $k = 0, 1, 2, \dots$.

Let $\mathscr{K}_0$ be a set of solutions of integral equation for $k = 0$, $f_0 = 0$, and $\widetilde{\Gamma}_0$ the restriction of Γ_0 to $\mathscr{K}_0$, and $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p})$ a variation of a measure $\mathbf{p}$. The aim of this paper is to prove following statement.

Theorem. *Suppose the operator $\widetilde{\Gamma}_0$ is a one-to-one mapping of $\mathscr{K}_0$ onto B and $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) \to 0$, $f_n \to f_0$ uniformly on $[a, b]$, $c_n \to c$ in B as $n \to \infty$. Then the problem stated above has a unique solution y_n for large enough n and $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ as $n \to \infty$ uniformly with respect to t.*

We use the following statement to prove the theorem formulated above.

Theorem. *Suppose a measure $\mathbf{p}$ has a bounded variation on $[a, b]$. Then there exists a unique solution of the equation*

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{p}(s) y(s) + g(t)$$

on the interval $[t_0 - \delta, b]$, where $g \in \widetilde{C}$, $\delta = \delta(t_0)$ is small enough and $\delta = 0$ if $t_0 = a$.

Keywords: *integral equation, operator measure, boundary value problem, Hilbert space, linear operator.*

Введение

В данной работе на отрезке $[a,b]$ рассматриваются интегральные уравнения

$$y_0(t) = y_0(a) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{p}_0) y_0(s) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{m}_0) f_0(s) ds, \qquad (1)$$

$$y_n(t) = y_n(a) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{p}_n) y_n(s) + \int\limits_{[a,t)} (d\mathbf{m}_n) f_n(s) ds, \quad n = 1, 2, \ldots\,, \qquad (2)$$

где $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ $(k=0,1,2,...)$ — операторные меры, определенные на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H; y_k — неизвестные функции, $f_k \in L_1(H, \mathbf{m}_k; a, b)$. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ имеют ограниченные вариации на $[a,b]$. Эти меры продолжены на отрезок $[a,b_0]$, $b_0 > b$ с помощью равенства: $\mathbf{p}_k(\Delta) = \mathbf{m}_k(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset (b, b_0]$.

Для уравнений (1), (2) рассматриваются следующие граничные условия

$$\Gamma_0 y_0 = c_0, \qquad (3)$$

$$\Gamma_n y_n = c_n, \quad n = 1, 2\ldots\,, \qquad (4)$$

где $\Gamma_k : \widetilde{C}[a,b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $c_k \in B$; $k=0,1,2,...$; B – банахово пространство; $\widetilde{C}[a,b_0]$ — пространство измеримых по Борелю функций со значениями в H, непрерывных слева на $(a,b_0]$ и ограниченных на $[a,b_0]$.

Введем обозначения: $\mathscr{K}_0$ — множество решений уравнения (1) при $f_0 = 0$, $\widetilde{\Gamma}_0$ — сужение Γ_0 на $\mathscr{K}_0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p})$ — вариация меры $\mathbf{p}$ на $[a,b]$. Основным результатом статьи является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть оператор $\widetilde{\Gamma}_0$ взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}_0$ на B и пусть $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) \to 0$, $f_n \to f_0$ равномерно на $[a,b]$, $c_n \to c$ в B при $n \to \infty$. Тогда при достаточно больших n задача* (2), (4) *имеет единственное решение y_n и $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ равномерно по t.*

В случае, когда $\mathbf{m}_k$ — «обычные» меры Лебега (т. е. $\mathbf{m}_k([\alpha,\beta)) = (\beta - \alpha)E$, где $-\infty < \alpha < \beta < \infty$, E — тождественный оператор), задачи (1) — (4) при более жестких ограничениях на решения уравнений (1), (2), рассматривались в [1]. В этой работе, кроме ослабления требований на решения (1), (2), изменены доказательства, а также исправлены погрешности, допущенные [1].

Пусть $\mathbf{m}_k$ — «обычные» меры Лебега и операторные меры $\mathbf{p}_k$ $(k = 0,1,2,...)$ абсолютно непрерывны, т. е. существуют такие функции $t \to p_k(t)$ $(t \in [a,b])$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, что $\|p_k\| \in L_1(a,b)$

и $\mathbf{p}_k(\Delta) = \int_\Delta p_k(t)dt$ для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$. Тогда уравнения (1), (2) переходят в дифференциальные уравнения $y_k'(t) = p_k(t)y_k(t) + f_k(t)$. Для таких уравнений в конечномерном случае сходимость решений граничных задач изучалась во многих работах. Наиболее общие результаты получены в статье [2], где приведена подробная библиография.

1. Решение интегральных уравнений

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим функцию $\Delta \to \mathbf{p}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{p}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [3, гл. 5, с. 324]), если $\mathbf{p}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{p}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{p}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{p}$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$, продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0] \supset [a,b_0) \supset [a,b]$, полагая $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset [a,b_0] \backslash [a,b]$.

Обозначим $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p}) = \rho(\Delta) = \sup \sum_i \|\mathbf{p}(\Delta_i)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_i \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_\Delta(\mathbf{p})$ называется вариацией меры $\mathbf{p}$ на борелевском множестве Δ. Пусть мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi \in [a,b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$ справедливо

$$\mathbf{p}(\Delta) = \int\limits_\Delta \Psi(\xi)d\rho. \tag{5}$$

Функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры. Интеграл (5) сходится в смысле обычной нормы операторов ([3, гл. 5, с. 325]). Очевидно, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}_{[a,b_0]}(\mathbf{p}) = \rho([a,b])$.

Функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$, если существует интеграл (в смысле Бохнера)

$$\int\limits_\Delta \Psi(t)h(t)d\rho = \int\limits_\Delta (d\mathbf{p})h(t). \tag{6}$$

Из (6) следует, что если измеримая по Борелю функция h ограничена, то

$$\left\| \int\limits_\Delta (d\mathbf{p})h(t) \right\| \leqslant \sup_{t\in\Delta} \|h(t)\|\, \rho(\Delta). \tag{7}$$

Символом $\int_{t_0}^{t}$ обозначим $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{p}$ на $[a, b_0]$. Тогда функция $y(t) = \int_{t_0}^{t}(d\mathbf{p})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле (здесь $t_0, t \in [a, b_0]$).

Пусть $[l_1, l_2] \subset [a, b_0]$. Рассмотрим множество измеримых по Борелю функций со значениями в H, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева на $(l_1, l_2]$ и постоянных, если $b < t \leqslant b_0$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{p}(s)y(s) + g(t), \quad a \leqslant t_0 \leqslant b_0. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть мера* $\mathbf{p}$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a, b]$. *Тогда для любой функции* $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ *существует единственное решение уравнения* (8), *принадлежащее пространству* $\widetilde{C}[t_0 - \delta, b_0]$, *где* $\delta = \delta(t_0) > 0$ *достаточно мало и* $\delta = 0$ *при* $t_0 = a$.

Доказательство. Сначала докажем существование такого отрезка $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, что уравнение (8) имеет единственное решение в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0}) = \widetilde{C}[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ ($\delta > 0$). (Если $t_0 = a$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0, t_0 + \delta]$, а если $t_0 = b_0$, то $\mathscr{I}_{\delta,t_0} = [t_0 - \delta, t_0]$.)

Пусть $t \to \widehat{\rho}(t)$ — какая-либо непрерывная слева функция, порождающая меру ρ. Через $\widehat{\rho}_{t_0}$ обозначим скачок функции $\widehat{\rho}$ в точке t_0 (возможно, что $\widehat{\rho}_{t_0} = 0$). Положим $\widehat{r}_{t_0}(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$ и $\widehat{r}_{t_0}(t) = \widehat{\rho}_{t_0}$ при $t > t_0$. Обозначим $\widehat{r}(t, t_0) = \widehat{\rho}(t) - \widehat{r}_{t_0}(t)$. Функция $t \to \widehat{r}(t, t_0)$ непрерывна в точке t_0. Определим операторные меры равенствами

$$\mathbf{r}(\Delta, t_0) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi) d\widehat{r}(\xi, t_0), \quad \mathbf{r}_{t_0}(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \Psi(\xi) d\widehat{r}_{t_0}(\xi).$$

Тогда $\mathbf{p}(\Delta) = \mathbf{r}(\Delta, t_0) + \mathbf{r}_{t_0}(\Delta)$.

В этих обозначениях уравнение (8) примет вид $y = Ay + z$, где

$$(Ay)(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{r}(s, t_0)y(s) = \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\xi)y(\xi)d\widehat{r}(\xi, t_0), \tag{9}$$

$$z(t) = \int\limits_{t_0}^{t} d\mathbf{r}_{t_0}(s)y(s) + g(t) = \widetilde{\mathbf{r}}_{t_0}(t)x_0 + g(t), \quad x_0 = g(t_0), \tag{10}$$

$\widetilde{\mathbf{r}}_{t_0}(t) = 0$ при $t \leqslant t_0$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_{t_0}(t) = \mathbf{r}_{t_0}(\{t_0\}) = \mathbf{p}(\{t_0\})$ при $t > t_0$.

Учитывая (7), (9), непрерывность функции $\widehat{r}(\cdot,t_0)$ в точке t_0, получим

$$\|(Ay)(t)\| \leqslant \sup_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|\,|\widehat{r}(t,t_0)-\widehat{r}(t_0,t_0)| < \varepsilon \sup_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|\,. \tag{11}$$

Таким образом, $\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|(Ay)(t)\| \leqslant \varepsilon \sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta,t_0}} \|y(t)\|$. Выберем такое $\delta>0$, при котором $\varepsilon<1$. Тогда $\|A\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})}<1$. Поэтому оператор $E-A$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})$. Функция z тогда и только тогда равна нулю при всех t, когда $g=0$ на $\mathscr{I}_{\delta,t_0}$ (и, следовательно, $x_0=0$). Поэтому существует единственное решение уравнения (8) на отрезке $\mathscr{I}_{\delta,t_0}$. Это решение находится по формуле

$$y=(E-A)^{-1}z. \tag{12}$$

Докажем существование решения на всем интервале $[t_0-\delta,b_0]$. Можно считать, что $t_0<b_0$. Достаточно установить, что решение u, определенное на интервале $[t_0-\delta,d)$, можно продолжить за пределы этого интервала, если $d\neq b_0$.

Сохраняем обозначения из приведенного выше доказательства, заменив t_0 на t'_0. Положим $t'_0=d$. Фиксируем $\varepsilon<1/4$ и выберем δ так, чтобы $t'_0+\delta\leqslant b_0$ и $|\widehat{r}(t,t'_0)-\widehat{r}(t'_0,t'_0)|<\varepsilon$ при всех $t\in\mathscr{I}_{\delta,t'_0}$. Фиксируем точку $t_1=t'_0-\delta/8$. Тогда для всех t со свойством $|t-t_1|\leqslant\delta/2$ выполняется неравенство

$$|\widehat{r}(t,t'_0)-\widehat{r}(t_1,t'_0)|\leqslant|\widehat{r}(t,t'_0)-\widehat{r}(t'_0,t'_0)|+|\widehat{r}(t'_0,t'_0)-\widehat{r}(t_1,t'_0)|<2\varepsilon<1/2. \tag{13}$$

Рассмотрим оператор

$$(By)(t)=\int\limits_{t_1}^{t} d\mathbf{r}(s,t'_0)y(s)=\int\limits_{t_1}^{t}\Psi(\xi)y(\xi)d\widehat{r}(\xi,t'_0).$$

Из (13) следует, что $\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}}\|(By)(t)\|\leqslant(1/2)\sup\limits_{t\in\mathscr{I}_{\delta/2,t_1}}\|y(t)\|$. Поэтому оператор $E-B$ имеет всюду определенный ограниченный обратный в пространстве $\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta/2,t_1})$.

Пусть $v=(E-B)^{-1}z_1$, $w=(E-B)^{-1}z_2$, где $z_1(t)=u(t_1)-g(t_1)+g(t)$, $z_2(t)=z_1(t)+h(t)$, $h(t)=\widetilde{\mathbf{r}}_{t'_0}(t)v(t'_0)$ и, как и выше, $\widetilde{\mathbf{r}}_{t'_0}(t)=0$ при $t\leqslant t'_0$ и $\widetilde{\mathbf{r}}_{t'_0}(t)=\mathbf{p}(\{t'_0\})$ при $t>t'_0$. Тогда на отрезке $[t_1-\delta/2,t_1+\delta/2]$

$$v(t)=\int\limits_{t_1}^{t}\Psi(\xi)v(\xi)d\widehat{r}(\xi,t'_0)+u(t_1)-g(t_1)+g(t), \tag{14}$$

$$w(t)=\int\limits_{t_1}^{t}\Psi(\xi)w(\xi)d\widehat{r}(\xi,t'_0)+u(t_1)-g(t_1)+h(t)+g(t). \tag{15}$$

При $t \in [t_1 - \delta/2, t'_0]$ имеем из (15)

$$w(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi) w(\xi) d\widehat{r}(\xi, t'_0) + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \qquad (16)$$

Из (13) следует, что уравнение

$$y(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi) y(\xi) d\widehat{r}(\xi, t'_0) + \widetilde{g}(t), \quad \widetilde{g} \in \widetilde{C}[a, b_0], \qquad (17)$$

где y — неизвестная функция, имеет единственное решение на интервале $(t_1 - \delta/8, t'_0)$. Тогда из (14), (16) получаем, что на интервале $(t_1 - \delta/8, t'_0)$ функции v, w совпадают. Следовательно, $w(t'_0) = v(t'_0)$. Кроме того, равенство $\widehat{\rho}(t) = \widehat{r}(t, t'_0) + \widehat{r}_{t'_0}(t)$ и (15) при $t \in \mathscr{I}_{\delta/2, t_1}$ (т. е. при $t_1 - \delta/2 \leqslant t \leqslant t_1 + \delta/2 = t'_0 + (3/8)\delta$) влекут

$$w(t) = \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{p}) w(s) + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \qquad (18)$$

С другой стороны, функция u является решением уравнения (8) на $[t_0 - \delta, t'_0)$. Поэтому

$$u(t) = \int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}) u(s) + g(t) = u(t_1) - g(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{p}) u(s) + g(t). \qquad (19)$$

Учитывая, что $\widehat{r}(t, t'_0) = \widehat{\rho}(t)$, если $t \leqslant t'_0$, получим из (19)

$$u(t) = \int\limits_{t_1}^{t} \Psi(\xi) u(\xi) d\widehat{r}(\xi, t'_0) + u(t_1) - g(t_1) + g(t). \qquad (20)$$

Из единственности решения уравнения (17) и из (14), (16), (20) получаем, что на интервале $(t_1 - \delta/8, t'_0)$ функции u, v, w совпадают. Отсюда следует, что существует $\lim\limits_{t \to t'_0 - 0} u(t) = w(t'_0) = v(t'_0)$.

Обозначим через $\widetilde{u}$ функцию, равную u на $[t'_0 - \delta, t'_0)$ и w на $[t'_0, t'_0 + (3/8)\delta]$. Функция $\widetilde{u}$ является решением уравнения (8). Действительно, при $t < t'_0$ это утверждение следует из того, что u является решением (8). Пусть $t_1 \leqslant t \leqslant t'_0 + (3/8)\delta$. Из (18), (19) получаем

$$\int\limits_{t_0}^{t} (d\mathbf{p}) \widetilde{u}(s) + g(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (d\mathbf{p}) u(s) + \int\limits_{t_1}^{t} (d\mathbf{p}) w(s) + g(t) =$$

$$= (u(t_1) - g(t_1)) + w(t) - u(t_1) + g(t_1) = \widetilde{u}(t).$$

Итак, $\widetilde{u}$ — решение (8) и $\widetilde{u}$ есть продолжение u на интервал $[t_0', t_0' + (3/8)\delta]$.

Докажем единственность решения уравнения (8). Пусть существуют два решения u_1, u_2, тогда $u_1(t) = u_2(t)$ при $t \in \mathscr{I}_{\delta,t_0}$. Обозначим через T верхнюю грань множества таких t, что $u_1(t) = u_2(t)$ при всех $t < T$. Тогда $u_1(T) = u_2(T)$ в силу непрерывности слева функций u_1, u_2. При $t > T$ имеем

$$u_i(t) = x_1 - g(T) + \int\limits_T^t (d\mathbf{p})u_i(s) + g(t), \quad x_1 = u_1(T) = u_2(T), \ \ i = 1, 2. \tag{21}$$

По доказанному выше, решение уравнения (21) в некоторой окрестности точки T единственно. Поэтому $T = b_0$. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{p}$ *— мера с ограниченной вариацией. Тогда при* $t_0 = a$ *уравнение* (8) *имеет единственное решение для любой функции* $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$.

Замечание 1. В доказательстве теоремы 1 выберем δ так, чтобы в неравенстве (11) $\varepsilon \leqslant 1/2$. Тогда $\|(E - A)^{-1}\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})} \leqslant 2$. Из (10), (12) следует

$$\|y\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})} \leqslant 2(1 + \mathbf{V}_{\mathscr{I}_{\delta,t_0}}(\mathbf{p}))\,\|g\|_{\widetilde{C}(\mathscr{I}_{\delta,t_0})}\,.$$

Замечание 2. При $t < t_0$ решение уравнения (8) может быть не единственным и, кроме того, может не продолжаться влево.

Пример. Пусть $H = \mathbb{C}$. Рассмотрим на отрезке $[0, 2]$ меру $\mathbf{p}$, заданную производящей функцией $\widehat{p}(t)$, равной нулю при $t \leqslant 1$ и -1 при $t > 1$. Тогда решением уравнения $y = \int_2^t y d\mathbf{p}$, кроме функции, тождественно равной нулю, является функция $\omega(t)$, равная 1, если $t \leqslant 1$, и 0, если $t > 1$. Далее, функция $y = 1$ является решением уравнения $y = 1 + \int_2^t y d\mathbf{p}$ при $1 < t \leqslant 2$. Однако это решение не продолжается влево за точку 1. Действительно, пусть оно продолжено каким-либо образом за точку 1. Тогда $y(1) = 1 - \int_{[1,2)} y(s) d\mathbf{p}$. Отсюда $y(1) = 1 + y(1)$, что является невозможным.

Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int\limits_a^t (d\mathbf{p})y(s) + g(t), \quad a \leqslant t \leqslant b_0, \ \ g \in \widetilde{C}[a, b_0]. \tag{22}$$

По следствию 1 уравнение (22) имеет единственное решение. В пространстве $\widetilde{C}[a, b_0]$ определим оператор $\mathscr{P}$ равенством

$$(\mathscr{P}u)(t) = \int\limits_a^t (d\mathbf{p})u(s), \quad u \in \widetilde{C}[a, b_0], \quad a \leqslant t \leqslant b_0. \tag{23}$$

Из (7) получаем $\|\mathscr{P}u\| \leqslant \mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}) \sup_{t\in[a,b_0]} \|u(t)\|$. Поэтому оператор $\mathscr{P}$ ограничен. Из следствия 1 вытекает, что оператор $(E-\mathscr{P})^{-1}$ существует, всюду определен (и, следовательно, ограничен). Решение уравнения (22) имеет вид $y = (E-\mathscr{P})^{-1}g$.

Введем в рассмотрение оператор $U(t) = U(t,a)$, ставящий в соответствие каждому элементу $x \in H$ значение решения $y(t)$ уравнения (22) при $g(t) = x$. Функция $t \to U(t)x$ удовлетворяет уравнению

$$U(t)x = x + \int\limits_a^t d\mathbf{p}(s)U(s)x, \quad x \in H, \quad a \leqslant t \leqslant b_0. \tag{24}$$

Функция $U(\cdot)x$ непрерывна слева и $U(a)x = x$. Равенства (23), (24) влекут

$$U(\cdot)x = (E-\mathscr{P})^{-1}x, \tag{25}$$

где $x \in H$ (здесь символ x обозначает как элемент из H, так и постоянную функцию, равную x). Через $\mathscr{U}$ обозначим оператор, ставящий в соответствие элементу $x \in H$ функцию $U(\cdot)x$.

Пусть $\mathscr{K}$ — множество функций $t \to U(t)x$, где $x \in H$. Линейное многообразие $\mathscr{K}$ замкнуто в $\widetilde{C}[a,b_0]$. Действительно, если последовательность $\{U(\cdot)x_n\}$ фундаментальна, то такой же является последовательность $\{x_n\}$. Поэтому $\{x_n\}$ сходится к некоторому элементу $x_0 \in H$. Тогда последовательность $\{U(\cdot)x_n\}$ сходится в $\widetilde{C}[a,b_0]$ к $U(\cdot)x_0 \in \mathscr{K}$. Из изложенного вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Оператор $\mathscr{U}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H на $\mathscr{K}$.*

Далее рассматривается интегральное уравнение

$$y(t) = y(a) + \int\limits_a^t (d\mathbf{p})y(s) + \int\limits_a^t (d\mathbf{m})f(s), \tag{26}$$

где f интегрируема по мере $\mathbf{m}$ и записывается как $f \in L_1(H,\mathbf{m};a,b)$.

Лемма 2. *Функция y тогда и только тогда является решением уравнения* (26), *когда выполняется равенство*

$$y(\cdot) = U(\cdot)y(a) + (E-\mathscr{P})^{-1}h, \quad h(t) = \int\limits_a^t (d\mathbf{m})f(s). \tag{27}$$

Доказательство. Очевидно, функция y, определенная (27), является решением уравнения (26). Обратно, из (26), (25) следует

$$y = (E-\mathscr{P})^{-1}(y(a)+h) = (E-\mathscr{P})y(a) + (E-\mathscr{P})^{-1}h = U(\cdot)y(a) + (E-\mathscr{P})^{-1}h.$$

Лемма доказана. □

Пусть B — банахово пространство; $\Gamma : \widetilde{C}[a,b_0] \to B$ — линейное непрерывное отображение. Сужение оператора Γ на $\mathscr{K}$ обозначим $\widetilde{\Gamma}$.

Лемма 3. *Пусть оператор* $\widetilde{\Gamma}$ *взаимно однозначно отображает* $\mathscr{K}$ *на* B*. Тогда для любой функции* $f \in L_1(H,\mathbf{m};a,b)$ *и любого элемента* $c \in B$ *уравнение* (26) *имеет единственное решение, удовлетворяющее условию*

$$\Gamma y = c. \tag{28}$$

Доказательство. Из условия леммы следует, что задача (26), (28) имеет не более одного решения. В (27) обозначим $z = (E-\mathscr{P})^{-1}h$, $y(a) = x$. Если y — решение задачи (26), (28), то $\Gamma y = \widetilde{\Gamma}U(\cdot)x + \Gamma z = c$. Отсюда $\widetilde{\Gamma}\mathscr{U}x = c - \Gamma z$. Из леммы 1 вытекает, что $\widetilde{\Gamma}\mathscr{U}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H на B. Поэтому $x = (\widetilde{\Gamma}\mathscr{U})^{-1}(c-\Gamma z)$. Из леммы 2 получим, что y — решение задачи (26), (28) тогда и только тогда, когда

$$y(\cdot) = U(\cdot)(\widetilde{\Gamma}\mathscr{U})^{-1}(c-\Gamma z)+z(\cdot), \quad z = (E-\mathscr{P})^{-1}h, \quad h(t)=\int_a^t (d\mathbf{m})f(s). \tag{29}$$

Лемма доказана. □

2. Сходимость решений граничных задач

Рассмотрим интегральные уравнения

$$y_k(t) = y_k(a) + \int_a^t (d\mathbf{p}_k)y_k(s) + \int_a^t (d\mathbf{m}_k)f_k(s), \quad a\leqslant t\leqslant b_0, \quad k = 0,1,2,\dots, \tag{30}$$

с граничным условиями

$$\Gamma_k y_k = c_k. \tag{31}$$

Здесь операторные меры $\mathbf{p}_k$, $\mathbf{m}_k$ имеют ограниченные вариации; $f_k \in L_1(H,\mathbf{m}_k;a,b)$; $\Gamma_k : \widetilde{C}[a,b_0] \to B$ — линейные непрерывные отображения; $k=0,1,2,\dots$; B — банахово пространство, $c_k \in B$.

Операторы $\mathscr{P}_k$, $U_k(t)$ $(k = 0,1,2,\dots)$ определяются соответственно по формулам (23), (24), в которых мера $\mathbf{p}$ заменена на $\mathbf{p}_k$, $\mathscr{P}$ на $\mathscr{P}_k$, U на U_k. Через $\mathscr{U}_k$ обозначается оператор $x \to U_k(\cdot)x$ $(x \in H)$. Множество функций $t \to U_k(t)x$ обозначается $\mathscr{K}_k$. Сужение оператора Γ_k на $\mathscr{K}_k$ обозначим $\widetilde{\Gamma}_k$.

Теорема 2. *Пусть оператор* $\widetilde{\Gamma}_0$ *взаимно однозначно отображает* $\mathscr{K}_0$ *на* B *и пусть* $\|\Gamma_n - \Gamma_0\| \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0) \to 0$, $\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) \to 0$, $f_n \to f_0$ *равномерно на* $[a,b]$,

$c_n \to c$ *в* B *при* $n \to \infty$. *Тогда при достаточно больших* n *задача* (30), (31) *имеет единственное решение* y_n *и* $\|y_n(t) - y_0(t)\| \to 0$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по* t.

Доказательство. Неравенство (7) влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\mathscr{P}_n\}$ к $\mathscr{P}_0$. Поэтому последовательность $\{(E - \mathscr{P}_n)^{-1}\}$ сходится к $(E - \mathscr{P}_0)^{-1}$ в равномерной операторной топологии. Тогда из (25) следует, что $\|U_n(t) - U_0(t)\| \to 0$ равномерно по t. Поэтому последовательность $\{\mathscr{U}_n\}$ сходится к $\mathscr{U}_0$ при $n \to \infty$. Это влечет сходимость в равномерной операторной топологии последовательности $\{\widetilde{\Gamma}_n \mathscr{U}_n\}$ к $\widetilde{\Gamma}_0 \mathscr{U}_0$. По лемме 1 операторы $\mathscr{U}_k$ непрерывно и взаимно однозначно отображают H на $\mathscr{K}_k$. Поэтому $\widetilde{\Gamma}_0 \mathscr{U}_0 : H \to B$ — биективное отображение. Следовательно, при больших n таким же отображением является $\widetilde{\Gamma}_n \mathscr{U}_n : H \to B$. Поэтому $\widetilde{\Gamma}_n$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathscr{K}_n$ на B. По лемме 3 задача (30), (31) имеет единственное решение при достаточно больших n. Согласно (29), это решение имеет вид

$$y_n(\cdot) = U_n(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_n \mathscr{U}_n)^{-1}(c_n - \Gamma_n z_n) + z_n(\cdot),\ z_n = (E - \mathscr{P}_n)^{-1} h_n,\ \ h_n(t) = \int_a^t (d\mathbf{m}_n) f_n(s). \quad (32)$$

По условию последовательность $\{f_n\}$ сходится к f_0 равномерно на $[a, b_0]$. Поэтому $f_n \in L_1(H, \mathbf{m}_0; a, b)$ и $f_0 \in L_1(H, \mathbf{m}_n; a, b)$ при достаточно больших n. Кроме того, последовательность $\{\mathbf{V}_{[a,b]}(\mathbf{m}_n)\}$ ограничена. Обозначим $h_k(t) = \int_a^t (d\mathbf{m}_k) f_k(s)$. Тогда

$$\|h_n(t) - h_0(t)\| = \left\| \int_a^t d(\mathbf{m}_n - \mathbf{m}_0) f_0(s) + \int_a^t (d\mathbf{m}_n)(f_n(s) - f_0(s)) \right\| \to 0$$

равномерно по t при $n \to \infty$. Поэтому $z_n = (E - \mathscr{P}_n)^{-1} h_n \to z_0 = (E - \mathscr{P}_0)^{-1} h_0$ в пространстве $\widetilde{C}[a, b_0]$. Отсюда и из (32) следует, что последовательность решений y_n задачи (30), (31) сходится при $n \to \infty$ в $\widetilde{C}[a, b_0]$ к решению y_0, задаваемому равенством

$$y_0(\cdot) = U_0(\cdot)(\widetilde{\Gamma}_0 \mathscr{U}_0)^{-1}(c_0 - \Gamma_0 z_0) + z_0(\cdot), \quad z_0 = (E - \mathscr{P}_0)^{-1} h_0, \quad h_0(t) = \int_a^t (d\mathbf{m}_0) f_0(s).$$

Теорема доказана. □

Список литературы

1. Брук, В. М. О сходимости решений граничных задач для интегральных уравнений с операторными мерами / В. М. Брук // Таврический вестник информатики и математики. — Симферополь, 2015. — № 1. — С. 20–33.

BRUK, V. M. (2015) On the convergence of solutions of boundary value problems for integral equations with operator measures. *Taurida Journal of Computer science theory and Mathematics.* No 1. p. 20–33.

2. Кодлюк, Т. И. Предельные теоремы для одномерных краевых задач / Т. И. Кодлюк, В. А. Михайлец, Н. В. Рева // Укр. мат. журнал. — Киев, 2013. — Т. 65. — №1. — С. 70–81.

   KODLYUK, T. I., MIKHAILETS, V. A. and REVA, N. V. (2013) Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. *Ukrainian Mathematical Journal.* 65 (No 1). p. 77–90.

3. Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 798 с.

   BEREZANSKI, Yu. M. (1968) *Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

УДК: 519.8

MSC2010: 90C09, 90C27, 90C29, 90C31

О РАДИУСЕ T_1-УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ БУЛЕВОЙ ЗАДАЧИ С НОРМАМИ ГЕЛЬДЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ ПАРАМЕТРОВ

© В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин

Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Просп. Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь
e-mail: *vemelichev@gmail.com, kuzminkg@mail.ru*

On the T_1-stability Radius of a Multicriteria Linear Boolean Problem with Hölder Norms in Parameter Spaces.

Emelichev V. A. and Kuzmin K. G.

Abstract. Discrete optimization models of decision making are widespread in design, control, economics and many other fields of applied research. Many of the decision-making problems can be formulated as multicriteria Boolean problems. Solutions of the problems are reduced to a choice of variables values from a discrete set that are the best in some sense, which is determined by the physical or economical meaning. Pareto-optimal alternatives are usually regarded as the best solutions. One of the approaches to investigate these problems is the stability analysis carried out under the uncertainty assumption, which means that the given coefficients of the objective vector-function are known up to a certain accuracy degree or may change unpredictably. In these conditions, an investigation of the Pareto set behavior becomes topical since these investigations allow one to specify reliability limits of the decisions made.

In this work, we address an issue of deriving quantitative stability characteristics. Such a characteristic called stability radius is defined as the limit level of perturbations that retains a certain property of a solutions set given in advance. Stability of a multicriteria optimization problem is usually understood as a property of semi-continuity of a multi-valued mapping, which determines the choice function in the Hausdorff sense; i. e., there exists a neighborhood in the space of the initial parameters such that new Pareto optimums are impossible to arise inside it. A weakening of this requirement results in the T_1-stability concept, which is treated as an existence of an initial data neighborhood of in a space of problem parameters such that, although new Pareto optimums may arise within it, for each perturbation, there exists at least one efficient solution to the initial problem (not necessarily the same) that retains Pareto optimality.

We study the T_1-stability radius of Pareto set to parameter perturbations in the vector criterion on an assumption that arbitrary Hölder norms are given in criteria and solutions spaces of the multicriteria Boolean problem. Specifying problems classes for which bounds estimates have obtained guarantees that the estimates are achievable. We also present an easily computable achievable upper-bound estimate, which is equal to a norm of a vector criterion coefficients matrix. These results naturally lead to the known estimates for the T_1-stability radius for the case of Chebyshev norm in the spaces of solutions and criteria.

Keywords: *multicriteria Boolean problem, Pareto set, stability radius, T_1-stability, Hölder norm.*

Введение

Многие проблемы принятия многоцелевых решений (индивидуальных или групповых) в управлении, планировании и проектировании могут быть сформулированы как многокритериальные (векторные) задачи дискретной оптимизации. Характерной особенностью подобных задач, возникающих на практике, является неточность исходной информации. Эта неточность обусловлена влиянием различных факторов неопределенности и случайности: неадекватностью математических моделей реальным процессам, ошибками округления, погрешностями измерений и прочими факторами. В таких условиях математическая задача не может быть корректно поставлена и решена без хотя бы неявного использования результатов теории устойчивости. При этом естественным образом возникают следующие два вопроса: каким условиям должна удовлетворять задача и в каких пределах можно варьировать ее исходные данные, чтобы множество оптимальных решений обладало некоторым наперед заданным свойством инвариантности к возмущениям исходных данных? Они определяют два основных направления исследования проблемы устойчивости задач дискретной оптимизации: качественное и количественное. В рамках качественного направления авторы концентрируют свое внимание на выявлении условий различных типов устойчивости задачи (см. монографию [1], обзор [2] и работы [3, 4, 5, 6, 7, 8]), установлении связи между различными видами устойчивости [9, 10], а также на поиске и описании региона устойчивости оптимального решения [11]. Количественное направление, достаточно подробно изложенное в монографии [12] (см. также недавние обзоры [2, 13]), связано с получением количественных оценок допустимых изменений в исходных данных [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25] и разработкой алгоритмов вычисления этих оценок [26, 27, 28].

Настоящая работа лежит в русле направления, связанного с исследованием количественных характеристик устойчивости многокритериальных задач дискретной оптимизации. Одна из таких характеристик, называемая обычно радиусом устойчивости, определяется как предельный уровень возмущений параметров задачи в метрическом пространстве, сохраняющих некоторое наперед заданное свойство множества ее решений. В качестве возмущаемых параметров обычно выступают коэффициенты скалярного или векторного критерия.

Под устойчивостью многокритериальной задачи дискретной оптимизации, состоящей в поиске множества Парето, понимают [1] дискретный аналог свойства полунепрерывности сверху по Хаусдорфу точечно-множественного отображения, задающего паретовскую функцию выбора. Тем самым, свойство устойчивости определяет наличие такой окрестности для исходных параметров задачи, внутри которой невозможно появление новых оптимумов Парето. Иными словами, множество Парето внутри этой окрестности может лишь сузиться. Ослабление этого требования приводит к такому типу устойчивости, который трактуется как существование окрестности первоначальных данных задачи, внутри которой хотя и возможно появление новых оптимумов Парето, однако для каждого возмущения должно существовать хотя бы одно Парето-оптимальное решение исходной задачи (не обязательно одно и то же), сохраняющее свою оптимальность. Следуя терминологии [1], будем называть такой тип устойчивости T_1-устойчивостью.

Впервые T_1-устойчивость была исследована в [14] для однокритериальной линейной траекторной задачи. Позднее в [15, 17] получены нижняя и верхняя оценки радиуса этого типа устойчивости для многокритериальной линейной булевой задачи, а также найдена нижняя оценка для многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования. Статья [22] посвящена получению аналогичных оценок для векторной инвестиционной задачи с критериями Вальда. Отметим также работу [4], где установлены необходимые и достаточные условия T_1-устойчивости многокритериальных задач минимизации пороговых булевых функций. Перечисленные выше результаты соответствуют случаю, когда в пространствах параметров задач задана чебышевская норма l_∞.

В данной работе найдены нижняя и верхняя оценки радиуса T_1-устойчивости многокритериальной линейной булевой задачи в предположении, что в критериальном пространстве и пространстве решений заданы произвольные нормы Гельдера. В качестве следствий приведены утверждения, свидетельствующие о достижимости полученных оценок.

1. Постановка задачи и основные определения

Пусть $\mathbf{R}^m$ – критериальное пространство, $\mathbf{R}^n$ — пространство решений, $C = [c_{ij}]$ — матрица размера $m \times n$ со строками $C_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m := \{1, 2, \ldots, m\}$,

$m \geq 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in X \subseteq \mathbf{E}^n$, $n \geq 2$, $\mathbf{E} = \{0, 1\}$ $|X| \geq 2$. Под m-критериальной линейной булевой задачей

$$Z^m(C): \qquad Cx = \big(C_1x, C_2x, \ldots, C_mx\big)^T \to \min_{x \in X}$$

будем понимать задачу поиска множества Парето (множества эффективных решений):

$$P^m(C) = \{x \in X : \ X(x, C) = \emptyset\},$$

где

$$X(x, C) = \{x' \in X : x \underset{C}{\succ} x'\},$$

$$x \underset{C}{\succ} x' \ \Leftrightarrow \ Cx \geq Cx' \ \& \ Cx \neq Cx'\}.$$

Таким образом, $X(x, C)$ — множество решений x' задачи $Z^m(C)$, которые доминируют решение x.

В силу конечности X множество Парето $P^m(C)$ непусто при любой матрице $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$.

Возмущение элементов матрицы C будем осуществлять путем прибавления к ней матриц C' из $\mathbf{R}^{m \times n}$. Таким образом, возмущенная задача $Z^m(C + C')$ имеет вид

$$(C + C')x \to \min_{x \in X},$$

а множество эффективных решений такой задачи – вид $P^m(C + C')$.

В пространстве решений $\mathbf{R}^n$ зададим произвольную норму Гельдера l_p, $p \in [1, \infty]$, т. е. под нормой вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T \in \mathbf{R}^n$ будем понимать число

$$\|a\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j \in N_n} |a_j|^p\right)^{1/p}, & \text{если } 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{j \in N_n} |a_j|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

В критериальном пространстве $\mathbf{R}^m$ определим произвольную норму Гельдера l_q, отличную, вообще говоря, от нормы l_p. Под нормой матрицы C будем понимать норму вектора, компонентами которого являются нормы строк матрицы. Тем самым,

$$\|C\|_{pq} = \Big\| \big(\|C_1\|_p, \|C_2\|_p, \ldots, \|C_m\|_p\big) \Big\|_q.$$

В пространстве $\mathbf{R}^n$ наряду с нормой l_p будем использовать сопряженную к ней норму $l_{p'}$, где числа p и p', как известно, связаны равенством

$$1/p + 1/p' = 1.$$

При этом полагаем $p' = 1$, если $p = \infty$, и $p' = \infty$, если $p = 1$. Поэтому далее считаем, что областью изменений чисел p и p' является отрезок $[1, \infty]$, а сами числа связаны указанным выше условием. В этих обозначениях будем считать, что $1/p = 0$ при $p = \infty$.

Не сложно заметить, что для вектора $a \in \mathbf{R}^n$ с условием $|a_j| = \alpha$, $j \in N_n$, при любом числе $p \in [1, \infty]$ справедливо равенство

$$\|a\| = \alpha n^{1/p}. \tag{1}$$

Кроме того, известно, что для любых векторов $a, b \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство Гельдера

$$|a^T b| \leq \|a\|_p \|b\|_{p'}. \tag{2}$$

Следуя [1], радиусом T_1-устойчивости (в терминологии [16, 17, 4, 19] — радиусом сильной устойчивости) задачи $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, с нормами Гельдера l_p и l_q в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно назовем число

$$\rho_m(p,q) = \begin{cases} \sup \Xi_{pq}, & \text{если } \Xi_{pq} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi_{pq} = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi_{pq} = \{\varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad (P^m(C) \cap P^m(C + C') \neq \emptyset)\},$$

$$\Omega_{pq}(\varepsilon) = \left\{C' \in \mathbf{R}^{m \times n} : \|C'\|_{pq} < \varepsilon\right\} \text{ —}$$

множество возмущающих матриц C' со строками C'_i, $i \in N_m$.

Таким образом, радиус T_1-устойчивости задачи $Z^m(C)$ – это предельный уровень всех таких возмущений элементов матрицы C в метрическом пространстве $\mathbf{R}^{m \times n}$, для каждого из которых в возмущенной задаче $Z^m(C + C')$ сохраняется эффективность хотя бы одного (не обязательно одного и того же) решения исходной задачи $Z^m(C)$.

Очевидно, что при выполнении равенства $P^m(C) = X$ для каждой матрицы $C \in \mathbf{R}^{m \times n}$ множество $P^m(C) \cap P^m(C + C')$ непусто при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$ и всяком числе $\varepsilon > 0$. Поэтому радиус T_1-устойчивости такой задачи не ограничен сверху. Задачу $Z^m(C)$, для которой $P^m(C) \neq X$, будем называть нетривиальной.

2. Оценки радиуса устойчивости

Для нетривиальной задачи $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, при любых $p, q \in [1, \infty]$ положим

$$\varphi_m(p) = \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P(x,C)} \min_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_{p'}},$$

$$\psi_m(p,q) = \max_{x' \in P^m(C)} \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \frac{\|[C(x-x')]^+\|_q}{\|x-x'\|_{p'}},$$

$$\chi_m(p,q) = n^{1/p} m^{1/q} \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P^m(C)} \max_{i \in N_m} \frac{C_i(x-x')}{\|x-x'\|_1}.$$

Здесь

$$P(x,C) = X(x,C) \cap P^m(C),$$

$[y]^+ = (y_1^+, y_2^+, \dots, y_m^+)^T$ – положительная свертка вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbf{R}^m$, т. е. $y_i^+ = \max\{0, y_i\}$, $i \in N_m$.

Теорема. *При любых $p, q \in [1, \infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ для радиуса T_1-устойчивости $\rho_m(p,q)$ нетривиальной задачи $Z^m(C)$ справедливы следующие оценки*

$$0 < \max\{\varphi_m(p), \psi_m(p,q)\} \le \rho_m(p,q) \le \min\{\chi_m(p,q), \|C\|_{pq}\}.$$

Доказательство. Поскольку справедлива формула

$$\forall x' \in P^m(C) \;\; \forall x \in X \setminus P^m(C) \;\; \exists i \in N_m \quad (C_i(x-x') > 0),$$

то справедливо неравенство

$$\psi_m(p,q) > 0,$$

свидетельствующее о том, что нижняя оценка радиуса T_1-устойчивости и сам он — положительные величины.

Теперь докажем справедливость неравенства $\rho_m(p,q) \ge \varphi_m(p)$. Будем предполагать, что $\varphi_m(p) > 0$ (в противном случае это неравенство очевидно).

Пусть возмущающая матрица $C' \in \Omega_{pq}(\varphi_m(p))$. Тогда согласно определению числа $\varphi_m(p)$ для любого решения $x \in X \setminus P^m(C)$ существует такое эффективное решение $x^0 \in P(x,C)$, что выполняются неравенства

$$\frac{C_i(x-x')}{\|x-x'\|_{p'}} \ge \varphi_m(p) > \|C'\|_{pq} \ge \|C'_i\|_p, \quad i \in N_m.$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера (2), находим

$$(C_i + C'_i)(x - x^0) \ge C_i(x-x^0) - \|C'_i\|_p \|x - x^0\|_{p'} > 0, \quad i \in N_m.$$

Это значит

$$x^0 \underset{C+C'}{\not\succ} x,$$

т. е. $x \in X \setminus P^m(C+C')$. Резюмируя, заключаем, что любое неэффективное решение задачи $Z^m(C)$ остается таковым и в любой возмущенной задаче $Z^m(C+C')$, а значит, верны соотношения $\emptyset \ne P^m(C+C') \subseteq P^m(C)$.

Следовательно, $P^m(C) \cap P^m(C + C') \neq \emptyset$ при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{pq}(\varphi_m(p))$, т. е. $\rho_m(p, q) \geq \varphi_m(p)$.

Далее докажем, что $\rho_m(p, q) \geq \psi_m(p, q)$. Как и в предыдущем случае, выберем произвольную возмущающую матрицу $C' \in \mathbf{R}^{m\times n}$, принадлежащую множеству $\Omega_{pq}(\psi_m(p, q))$, где, как уже было установлено, $\psi_m(p, q)$ — положительное число. Для доказательства неравенства $\rho_m(p, q) \geq \psi_m(p, q)$ достаточно убедиться в существовании решения $x^* \in P^m(C) \cap P^m(C + C')$.

В соответствии с определением величины $\psi_m(p, q)$ существует такое решение $x^0 \in P^m(C)$, что для всякого решения $x \in X \setminus P^m(C)$ имеют место неравенства

$$0 < \psi_m(p, q)\|x - x^0\|_{p'} \leq \|[C(x - x^0)]^+\|_q. \tag{3}$$

Сначала покажем, что

$$\forall x \in X \setminus P^m(C) \;\; \forall C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p, q)) \quad (x \notin X(x^0, C + C')). \tag{4}$$

Если предположить наличие такого решения $\widetilde{x} \in X \setminus P^m(C)$ и такой возмущающей матрицы $\widetilde{C} \in \Omega_{pq}(\psi_m(p, q))$, что $\widetilde{x} \in X(x^0, C + \widetilde{C})$, то для любого индекса $i \in N_m$ выполняется неравенство

$$(C_i + \widetilde{C}_i)\widetilde{x} \leq (C_i + \widetilde{C}_i)x^0,$$

а, стало быть, и неравенство

$$C_i(\widetilde{x} - x^0) \leq \widetilde{C}_i(x^0 - \widetilde{x}).$$

Откуда легко приходим к соотношению

$$[C_i(\widetilde{x} - x^0)]^+ \leq |\widetilde{C}_i(\widetilde{x} - x^0)|,$$

из которого с учетом (2) находим

$$[C_i(\widetilde{x} - x^0)]^+ \leq \|\widetilde{C}_i\|_p\|\widetilde{x} - x^0\|_{p'}.$$

В итоге получаем противоречие неравенству (3)

$$\|[C(\widetilde{x} - x^0)]^+\|_q \leq \|\widetilde{C}\|_{pq}\|\widetilde{x} - x^0\|_{p'} < \psi_m(p, q)\|\widetilde{x} - x^0\|_{p'},$$

свидетельствующее о справедливости формулы (4).

Далее укажем способ выбора необходимого решения $x^* \in P^m(C) \cap P^m(C + C')$, где $C' \in \Omega_{pq}(\psi_m(p, q))$. Если $x^0 \in P^m(C + C')$, то полагаем $x^* = x^0$. Если $x^0 \notin P^m(C + C')$, то в силу внешней устойчивости множества Парето $P^m(C + C')$ (см., например, [29] стр. 39) можно выбрать такое решение $x^* \in P^m(C + C')$, что $x^* \in X(x^0, C + C')$. Принимая во внимание доказанную формулу (4), легко понять, что $x^* \in P^m(C)$. Тем самым доказано неравенство $\rho_m(p, q) \geq \psi_m(p, q)$.

Теперь докажем неравенство $\rho_m(p,q) \leq \chi_m(p,q)$. В соответствии с определением величины $\chi_m(p,q)$ найдется такое решение $x^0 \in X \setminus P^m(C)$, что для каждого эффективного решения $x \in P^m(C)$ и любого индекса $i \in N_m$ верно неравенство

$$\chi_m(p,q)\|x^0 - x\|_1 \geq n^{1/p} m^{1/q} C_i(x^0 - x). \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon > \chi_m(p,q)$. Элементы c^0_{ij} возмущающей матрицы $C^0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ зададим по правилу

$$c^0_{ij} = \begin{cases} -\delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 1, \\ \delta, & \text{если } i \in N_m,\ x^0_j = 0, \end{cases}$$

где

$$\chi_m(p,q) < \delta n^{1/p} m^{1/q} < \varepsilon. \tag{6}$$

Отсюда, согласно (1), находим

$$\|C^0_i\|_p = \delta n^{1/p}, \quad i \in N_m,$$

$$\|C^0\|_{pq} = \delta n^{1/p} m^{1/q}, \quad C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon),$$

$$C^0_i(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0, \quad i \in N_m. \tag{7}$$

Поэтому, используя (5) и (6), заключаем, что для каждого решения $x \in P^m(C)$ и всякого индекса $i \in N_m$ имеют место соотношения

$$(C_i + C^0_i)(x^0 - x) \leq \Big(\chi_m(p,q)\big(n^{1/p} m^{1/q}\big)^{-1} - \delta\Big)\,\|x^0 - x\|_1 < 0.$$

Таким образом, $x \notin P^m(C + C^0)$ при $x \in P^m(C)$. Поэтому для любого числа $\varepsilon > \chi_m(p,q)$ существует такая возмущающая матрица $C^0 \in \Omega_{pq}(\varepsilon)$, что $P^m(C) \cap P^m(C + C^0) = \emptyset$, т. е. $\rho_m(p,q) < \varepsilon$ для всякого числа $\varepsilon > \chi_m(p,q)$. Следовательно, $\rho_m(p,q) \leq \chi_m(p,q)$.

Наконец, убедимся в справедливости неравенства $\rho_m(p,q) \leq \|C\|_{pq}$. Пусть $x^0 \in X \setminus P^m(C)$ и $\varepsilon > \|C\|_{pq}$. Зафиксируем число δ с условием

$$0 < \delta n^{1/p} < \varepsilon - \|C\|_{pq}. \tag{8}$$

Введем в рассмотрение вектор-строку $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с компонентами

$$\xi_j = \begin{cases} -\delta, & \text{если } x^0_j = 1, \\ \delta, & \text{если } x^0_j = 0. \end{cases}$$

Тогда, согласно (1), получаем

$$\|\xi\|_p = \delta n^{1/p}.$$

Кроме того, для любого решения задачи $Z^m(C)$ и, в частности, для $x \in P^m(C)$ верно соотношение

$$\xi(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0. \tag{9}$$

Строки $C_i^0 \in \mathbf{R}^n$, $i \in N_m$, возмущающей матрицы $C^0 \in \mathbf{R}^{m\times n}$ зададим по правилу

$$C_i^0 = \begin{cases} \xi - C_1, & \text{если } i = 1, \\ -C_i, & \text{если } i \neq 1. \end{cases}$$

В результате, учитывая (9), для любого решения $x \in P^m(C)$ имеем

$$C_1^0(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 - C_1(x^0 - x)$$

и благодаря (8) выводим

$$\|C^0\|_{pq} \leq \|\xi\|_p + \|C\|_{pq} = \delta n^{1/p} + \|C\|_{pq} < \varepsilon.$$

Отсюда для каждого решения $x \in P^m(C)$ получаем

$$(C_1 + C_1^0)(x^0 - x) = -\delta\|x^0 - x\|_1 < 0,$$

$$(C_i + C_i^0)(x^0 - x) = 0, \quad i \in N_m \setminus \{1\}.$$

Это означает, что $x^0 \in X(x, C + C^0)$. Тем самым, если $x \in P^m(C)$, то $x \notin P^m(C + C^0)$, что свидетельствует о пустоте множества $P^m(C) \cap P^m(C + C^0)$. Итак, $\rho_m(p, q) < \varepsilon$ для всякого числа $\varepsilon > \|C\|_{pq}$. Следовательно, $\rho_m(p, q) \leq \|C\|_{pq}$. □

3. Следствия

Из теоремы вытекают следующие два известных результата, полученные соответственно в [17] и [14] (см. также [1]).

Следствие 1. *Если $p = q = \infty$, то при любом $m \in \mathbf{N}$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(C)$ справедливы оценки*

$$\max_{x' \in P^m(C)} \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1} \leq \rho_m(\infty, \infty) \leq \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P^m(C)} \max_{i \in N_m} \frac{C_i(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Следствие 2. *Если $p = \infty$, то при любом $q \in [1, \infty]$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной однокритериальной задачи $Z^1(C)$ верны равенства*

$$\rho_1(\infty, q) = \varphi_1(\infty) = \chi_1(\infty, q) = \min_{x \in X \setminus P^m(C)} \max_{x' \in P^m(C)} \frac{C_1(x - x')}{\|x - x'\|_1}.$$

Отметим, что следствие 2 доказывает достижимость оценок $\varphi_m(p)$ и $\chi_m(p, q)$ при $p = \infty$ и $m = 1$. Далее предъявим еще несколько классов задач $Z^m(C)$, для которых оценки, указанные теоремой, достижимы.

Радиусом устойчивости эффективного решения $x^0 \in P^m(C)$ задачи $Z^m(C)$, $m \in \mathbf{N}$, с нормами Гельдера l_p и l_q в пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ назовем число

$$\rho_m(x^0, p, q) = \begin{cases} \sup \Xi_{pq}, & \text{если } \Theta_{pq} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Theta_{pq} = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Theta_{pq} = \left\{ \varepsilon > 0 : \forall C' \in \Omega_{pq}(\varepsilon) \quad \left(x^0 \in P^m(C + C') \right) \right\}.$$

В работе [20] показано, что при любых $p, q \in [1, \infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ для радиуса устойчивости эффективного решения $x^0 \in P^m(C)$ задачи $Z^m(C)$ справедлива формула

$$\rho_m(x^0, p, q) = \min_{x \in X \setminus \{x^0\}} \frac{\|[C(x - x')]^+\|_q}{\|x - x'\|_{p'}}. \tag{10}$$

Очевидно, что $\rho_m(p, q) = \rho_m(x^0, p, q)$, если $P^m(C) = \{x^0\}$. Поэтому на основании формулы (10) из теоремы вытекают два утверждения, свидетельствующих о достижимости нижних оценок.

Следствие 3. *Если $P^1(C) = \{x^0\}$, то при любых $p, q \in [1, \infty]$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной однокритериальной задачи $Z^1(C)$ справедлива формула*

$$\rho_1(p, q) = \varphi_1(p).$$

Следствие 4. *Если $P^m(C) = \{x^0\}$, то при любых $p, q \in [1, \infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ для радиуса T_1-устойчивости нетривиальной задачи $Z^m(C)$ справедлива формула*

$$\rho_m(p, q) = \psi_m(p, q).$$

Следствие 5. *При любых $p, q \in [1, \infty]$ и $m \in \mathbf{N}$ существует такой класс нетривиальных задач $Z^m()$, что для радиуса устойчивости любой задачи из этого класса справедлива формула*

$$\rho_m(p, q) = \|C\|_{pq}.$$

Доказательство. Данный класс задач можно построить, например, следующим образом. Пусть $X = \{x^0, x^1, \ldots, x^n\} \subset \mathbf{E}^n$, где решение x^0 – это нулевой вектор, а каждое решение x^j, $j \in N_n$, — единичный вектор. И пусть $C^* = [c^*_{ij}] \in \mathbf{R}^{m \times n}$ такая матрица с отрицательными элементами, что

$$P^m(C^*) = X \setminus \{x^0\}.$$

Тогда для того чтобы решение x^0 стало эффективным в возмущенной задаче $Z^m(C^* + C')$, $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{m\times n}$, для каждого $x \in X \setminus \{x^0\}$ необходимо выполнение отношения

$$x^0 \underset{C^*+C'}{\not\succ} x.$$

Поэтому $C'x \geq -C^*x$. Отсюда получаем

$$c'_{ij} \geq -c^*_{ij}, \quad i \in N_m,\ j \in N_n.$$

Таким образом, верно неравенство $\rho_m(p,q) \geq \|C^*\|_{pq}$, которое с учетом теоремы убеждает нас в справедливости равенства $\rho_m(p,q) = \|C^*\|_{pq}$. □

4. Сравнение оценок

Покажем, что каждая из нижних (верхних) оценок, может быть лучше другой.

Прежде всего очевидно, что есть случаи, когда

$$\varphi_m(p) < \psi_m(p,q), \tag{11}$$

поскольку $\psi_m(p,q) > 0$, а число $\varphi_m(p)$ может быть и нулем.

Кроме того, так как при $q \neq \infty$, $m \geq 2$ и $P^m(C) = \{x^0\}$ для всякого решения $x \neq x^0$ верно неравенство

$$\|[C(x-x^0)]^+\|_q > \min_{i\in N_m} C_i(x-x^0),$$

то (11) имеет место и при одновременном выполнении условий $P^m(C) = \{x^0\}$, $m \geq 2$, $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty)$.

Также нетрудно понять, что при $p \in [1,\infty)$ для класса задач $Z^m(C)$, описанного в доказательстве следствия 5, справедливо неравенство

$$\chi_m(p,q) > \|C\|_{pq}. \tag{12}$$

Конечно, возможны и противоположные неравенства. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Пример. Пусть $m = 2$, $n = 8$, $p = q = \infty$, $X = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$, $x^1 = (0,1,1,1,0,0,0,0)^T$, $x^2 = (0,0,0,0,1,1,1,0)^T$, $x^3 = (0,0,0,0,0,1,1,1)^T$, $x^4 = (1,1,1,0,0,0,0,0)^T$,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 4 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$Cx^1 = Cx^3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}, Cx^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, Cx^4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$
$$P^2(C) = \{x^2, x^4\},$$
$$X \setminus P^2(C) = \{x^1, x^3\}.$$

В результате получаем $\varphi_2(\infty) = 1$, $\psi_2(\infty,\infty) = 1/2$, $\chi_2(\infty,\infty) = 3/2$, $\|C\|_{\infty\infty} = 7$. Тем самым верны неравенства противоположные к (11) и (12).

Далее покажем, что радиус T_1-устойчивости такой задачи равен 5/4.

Рассмотрим возмущающую матрицу C^* вида

$$C^* = C^*(\delta) = \begin{bmatrix} 5/4+\delta & 0 & 0 & -5/4-\delta & 5/4+\delta & 0 & -1/2-\delta & -5/4-\delta \\ 5/4+\delta & -1/2-\delta & 0 & -5/4-\delta & 5/4+\delta & 0 & 0 & -5/4-\delta \end{bmatrix},$$

где δ — произвольное положительное число. Тогда очевидны равенства

$$\|C^*\|_{\infty\infty} = 5/4 + \delta,$$
$$(C+C^*)x^1 = \begin{bmatrix} 15/4-\delta \\ 21/4-\delta \end{bmatrix}, \quad (C+C^*)x^2 = \begin{bmatrix} 15/4+\delta \\ 21/4+\delta \end{bmatrix},$$
$$(C+C^*)x^3 = \begin{bmatrix} 13/4-\delta \\ 23/4-\delta \end{bmatrix}, \quad (C+C^*)x^4 = \begin{bmatrix} 13/4+\delta \\ 23/4+\delta \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для любого $\delta > 0$ имеем

$$P^2(C+C^*) = \{x^1, x^3\},$$
$$X \setminus P^2(C+C^*) = \{x^2, x^4\}.$$

Поэтому для всякого числа $\varepsilon > 5/4$ существует такая возмущающая матрица $C^* \in \Omega_{\infty\infty}(\varepsilon)$, что $P^2(C) \cap P^2(C+C^*) = \emptyset$. Следовательно,

$$\rho_2(\infty,\infty) \leq 5/4. \tag{13}$$

С другой стороны, чтобы оба решения x^2 и x^4 перестали быть эффективными в возмущенной задаче $Z^2(C+C')$, $C' = [c'_{ij}] \in \mathbf{R}^{2\times 8}$ решения x^1 и x^3 должны их доминировать. Нетрудно убедиться, что $x^4 \underset{C+C'}{\succ} x^1$ только при $\|C'\|_{\infty\infty} \geq 3/2$. Такое же утверждение верно и для пары решений x^2 и x^3. Это означает, что при любой возмущающей матрице $C' \in \Omega_{\infty\infty}(3/2)$ верны соотношения

$$x^4 \underset{C+C'}{\not\succ} x^1 \quad \text{и} \quad x^2 \underset{C+C'}{\not\succ} x^3.$$

Таким образом, при $C' \in \Omega_{\infty\infty}(3/2)$ только решение x^1 может доминировать x^2 и только решение x^3 может доминировать x^4. Для этого необходимо одновременное выполнение неравенств:

$$C_1'(x^1 - x^2) \leq -2 = C_1(x^2 - x^1),$$

$$C_1'(x^3 - x^4) \leq -3 = C_1(x^4 - x^3),$$
$$C_2'(x^1 - x^2) \leq -3 = C_2(x^2 - x^1),$$
$$C_2'(x^3 - x^4) \leq -2 = C_2(x^4 - x^3).$$

Откуда выводим

$$-c_{i1}' + c_{i4}' - c_{i5}' + c_{i8}' \leq -5, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Поэтому $\|C'\|_{\infty\infty} \geq 5/4$ и, следовательно, $\rho_2(\infty, \infty) \geq 5/4$, что вместе с (13) убеждает нас в справедливости равенства $\rho_2(\infty, \infty) = 5/4$.

Итак, в рассмотренном примере верна цепочка неравенств

$$\psi_2(\infty, \infty) < \varphi_2(\infty) < \rho_2(\infty, \infty) < \chi_2(\infty, \infty) < \|C\|_{\infty\infty}.$$

Заключение

Поскольку исходные данные реальных задач оптимизации, как правило, задаются с некоторой степенью неопределенности (точности), возникает потребность в исследовании устойчивости искомых решений к возмущениям параметров задачи.

В работе исследована количественная характеристика T_1-устойчивости множества Парето многокритериальной линейной булевой задачи в предположении, что в пространствах решений и критериев заданы различные нормы Гельдера. Получены следующие результаты: 1) найдены две нижние и две верхние оценки радиуса T_1-устойчивости; 2) доказана достижимость этих оценок; 3) выявлены случаи, когда каждая оценка из пары нижних (верхних) оценок лучше другой; 4) приведен иллюстрационный числовой пример.

Список литературы

1. Сергиенко, И. В. Задачи дискретной оптимизации. Проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. — Киев: Наукова думка, 2003. — 261 с.

   SERGIENKO, I. and SHILO, I. (2003) *Discrete Optimization Problems. Problems, methods, research.* Kiev: Naukova dumka.

2. Емеличев, В. А. Устойчивость и эффективные алгоритмы решения задач дискретной оптимизации с многими критериями и неполной информацией / В. А. Емеличев, В. М. Котов, К. Г. Кузьмин и др. // Проблемы управления и информатики. — 2014. — № 1. — С. 53–67.

EMELICHEV, V., KOTOV, V., KUZMIN, K., LEBEDEVA, T., SEMENOVA, N., and SERGIENKO, T. (2004) Stability in the combinatorial vector optimization problems. *Journal Automation and Information Sciences.* 26 (2). p. 27–41.

3. Емеличев, В. А. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации // Автоматика и телемеханика / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин, А. М. Леонович. — 2004. — № 2. — С. 79–92.

   EMELICHEV, V., KUZMIN, K. and LEONOVICH, A. (2004) Stability in the combinatorial vector optimization problems. *Automation and Remote Control.* 62 (2). p. 227–240.

4. Емеличев, В. А. О сильной устойчивости решений векторной задачи минимизации пороговых булевых функций // Информатика. — 2005. — № 1. — С. 16–27.

   EMELICHEV, V. & KUZMIN, K. (2008) On the strong stability of a vector problem of threshold Boolean functions minimization. *Informatics.* (1). p. 16–27.

5. Емеличев, В. А. Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 103–111.

   EMELICHEV, V. and KUZMIN, K. (2008) Stability criteria in vector combinatorial bottleneck problems in terms of binary relations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 44 (3). p. 397–404.

6. EMELICHEV, V., GUREVSKY, E. and KUZMIN, K. (2010) On stability of some lexicographic integer problem. *Control and Cybernetics.* 39 (3). p. 811–826.

7. EMELICHEV, V., KARELKINA, O. and KUZMIN, K. (2012) Qualitative stability analysis of multicriteria combinatorial minimin problems. *Control and Cybernetics.* 41 (1). p. 57–79.

8. GUREVSKY, E, BATTAIA, O. and DOLGUI, A (2012) Balancing of simple assembly lines under variations of task processing times. *Annals of Operation Research.* 201. p. 265–286.

9. Лебедева, Т. Т. Устойчивость векторных задач целочисленной оптимизации: взаимосвязь с устойчивостью множества оптимальных и неоптимальных решений / Т. Т. Лебедева, Н. В. Семенова, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 4. — С. 90–100.

   LEBEDEVA, T., SEMENOVA, N. and SERGIENKO, T. (2005) Stability of vector problems of integer optimization: relationship with the stability of sets of optimal and nonoptimal solutions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 41 (4). p. 551–558.

10. Лебедева, Т. Т. Разные типы устойчивости векторной задачи целочисленной оптимизации: общий подход / Т. Т. Лебедева, Т. И. Сергиенко // Кибернетика и системный анализ. — 2008. — № 3. — С. 142–148.

    LEBEDEVA, T. and SERGIENKO, T. (2008) Different types of stability of vector integer optimization problem: general approach. *Cybernetics and Systems Analysis.* 44 (3). p. 429–433.

11. LIBURA, M., VAN DER POORT, E., SIERKSMA, G. and VAN DER VEEN, J. (1998) Stability aspects of the traveling salesman problem based on k-best solutions. *Discrete Applied Mathematics.* 87 (1-3). p. 159–185.

12. SOTSKOV, YU., SOTSKOVA, N., LAI, T.-C. and WERNER, F. (2010) *Scheduling under uncertainty: theory and algorithms.* Minsk: Belorusskaya nauka.

13. Гордеев, Э. Н. Сравнение трех подходов к исследованию устойчивости решений задач дискретной оптимизации и вычислительной геометрии / Э. Н. Гордеев // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22. — № 3. — С. 18–35.

    GORDEEV, E. (2015) Comparison of three approaches to studying stability of solutions to problems of discrete optimization and computational geometry. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 9 (3). p. 358–366.

14. Леонтьев, В. К. Устойчивость в линейных дискретных задачах / В. К. Леонтьев // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1979. — Вып. 35. — С. 169–184.

    LEONTIEV, V. (1979) Stability in linear discrete problems. *Problems of Cybernetics.* 35. p. 169–184.

15. EMELICHEV, V. and NIKULIN, Yu. (1999) Numerical measure of strong stability and strong quasistability in the vector problem of integer linear programming. *Computer Science Journal of Moldova.* 7 (1). p. 105–117.

16. Емеличев, В. А. Устойчивость и регуляризация векторных задач целочисленного линейного программирования / В. А. Емеличев, Д. П. Подкопаев // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. — 2001. — Т. 8. — № 1. — С. 47–69.

    EMELICHEV, V. and PODKOPAEV, D. (2001) Stability and regularization of vector problems of integer linear programming. *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii. Ser. 2.* 8 (1). p. 47–69.

17. EMELICHEV, V., GIRLICH, E., NIKULIN, YU. and PODKOPAEV, D. (2002) Stability and regularization of vector problem of integer linear programming. *Optimization.* 51 (4). p. 645–676.

18. EMELICHEV, V., NIKULIN, Yu. and KUZMIN, K. (2005) Stability analysis of the Pareto optimal solution for some vector Boolean optimization problem. *Optimization.* 54 (6). p. 545–561.

19. Емеличев, В. А. Об одном типе устойчивости многокритериальной задачи целочисленного линейного программирования в случае монотонной нормы / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 5. — С. 45–51.

    EMELICHEV, V. and KUZMIN, K. (2007) On a type of stability of a multicriteria integer linear programming problem in the case of a monotone norm. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 46 (5). p. 714–720.

20. Емеличев, В. А. Общий подход к исследованию устойчивости парето-оптимального решения векторной задачи целочисленного линейного программирования / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19. — Вып 3. — С. 79–83.

    EMELICHEV, V. and KUZMIN, K. (2007) A general approach to studying the stability of a Pareto optimal solution of a vector integer linear programming problem. *Discrete Mathematics and Applications.* 17 (4). p. 349–354.

21. EMELICHEV, V. and PODKOPAEV, D. (2010) Quantitative stability analysis for vector problems of 0-1 programming. *Discrete Optimization.* 7 (1–2). p. 48–63.

22. Емеличев, В. А. Об одном типе устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями Вальда / В. А. Емеличев, В. В. Коротков // Труды института математики НАН Беларуси. — 2012. — Т. 20. — № 2. — С. 10–17.

    EMELICHEV, V. and KOROTKOV, V. (2012) Stability of lexicographical investment problem with Wald's maximin criteria. *Proceedings of the Institute of Mathematics.* 20 (2). p. 10–17.

23. Бухтояров, С. Е. Об устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями крайнего оптимизма / С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — Т. 25. — № 2. — С. 7–13.

    BUKHTOYAROV, S. and EMELICHEV, V. (2014) On stability of vector investment problem with extreme optimism criteria. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics.* 25 (2). p. 7–13.

24. Бухтояров, С. Е. О мере устойчивости решений векторного варианта одной инвестиционной задачи / С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22. — № 2. — С. 5–16.

    BUKHTOYAROV, S. and EMELICHEV, V. (2015) On the stability measure of solutions to a vector version of an investment problem. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 9 (3). p. 328–334.

25. Кузьмин, К. Г. Единый подход к получению количественных характеристик устойчивости задачи о максимальном разрезе графа / К. Г. Кузьмин // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22. — № 5. — С. 30–51.

    KUZMIN, K. (2015) A general approach to the calculation of stability radii for the max-cut problem with multiple criteria. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 9 (4). p. 527–539.

26. CHAKRAVARTI, N. and WAGELMANS, A. (1998) Calculation of stability radius for combinatorial optimization problems. *Operations Research Letters.* 23 (1). p. 1–7.

27. VAN HOESEL, S. and WAGELMANS, A. (1999) On the complexity of postoptimality analysis of 0-1 programs. *Discrete Applied Mathematics.* 91. p. 251–263.

28. ROLAND, J., DE SMET, Y. and RUI FIGUEIRA, J. (2012) On the calculation of stability radius for multi-objective combinatorial optimization problems by inverse optimization. *4OR.* 10 (4). p. 379–389.

29. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 256 с.

    PODINOVSKII, V. and NOGHIN, V. (2007) *Pareto-Optimal Solutions of Multicriteria Problems.* Moscow: FIZMATLIT.

УДК: 517.977.54

MSC2010: 91A10

ИСХОД И РИСК В МНОГОШАГОВОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

© В. И. Жуковский, А. С. Горбатов

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
кафедра оптимального управления
Ленинские горы, МГУ, ВМК, ГСП-1, Москва, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru, gorbatovanton@gmail.com*

© М. И. Высокос

Государственный гуманитарно-технологический университет
Физико-математический факультет
кафедра математики и физики
ул. Зеленая, 22, Орехово-Зуево, 142611, Российская Федерация
e-mail: *mvysokos@mail.ru*

Outcome and Risk in a Multi-step Positional Problem under Uncertainty.

Zhukovskiy V. I., Vysokos M. I. and Gorbatov A. S.

Abstract. In single-criteria problem under strategical uncertainty from the point of view of DM tasks of decision making are examined. DM tries to increase the guaranteed outcome with possible smaller guaranteed risk. We are based on the principle of minimax regret (Savage-Nichans) with the help of mathematical apparatus of the method of dynamic programming for discrete problems.

First, we examine single-criteria problem of two forms which differs by pairs: contrstrategy — pure uncertainty and pure strategy — strategical uncertainty.

In the problem of the first type, a hierarchical procedure of formation the counterstrategies of DM is used. The discrimination of uncertainty appears: the decision-maker learns the uncertainty which has realized and only then he chooses his strategy, namely for example for single-criteria problem under uncertainty

$$\Gamma = \langle \Sigma, \mathbf{U}_Z, \mathbf{Z}, J(U_Z, Z, x_0)\rangle$$

$$\Sigma \div x(k+1) = f(k, x(k), u(k, x(k), z(k, x(k)))),\ \ x(0) = x_0\ k = 0, ..., K,$$

$$U_Z = (U_Z(0), U_Z(1), ..., U_Z(K-1)) \div (u(0, x, z), u(1, x, z), ..., u(K-1, x, z)),$$

$$Z = (Z(0), Z(1), ..., Z(K-1)) \div (z(0, x), ..., z(K-1, x)),$$

$$\mathbf{U}_Z = \{U_Z\},\ \ \mathbf{Z} = \{Z\}.$$

$$J(U_Z, Z, x_0) = \Phi(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} F_i(k, x(k), u[k], z[k]),$$

the functions of risk are defined

$$R(U_Z, Z, x_0) = \max_{U_Z \in \mathbf{U}_Z} J(U_Z, Z, x_0) - J(U_Z, Z, x_0).$$

In the problem of the second type strategic uncertainties are used. They are formed on the assumption of discrimination DM, who transmits them to the researcher selected by him pure strategy for the formation of strategic uncertainty.

In the problem about uncertainties only boundaries of changes are known (any probabilistic characteristics are absent).

In the first case the regret function is constructed, in the second case — guarantee of outcome and risk. Secondly, it is offered the initial single -criteria problem to set in accordance two-criteria discrete positional problem, where the first criteria — the guaranteed outcomes, the second one — “minus” guaranteed risk. For this two-criteria problem we construct the Pareto maximal pure strategy, which defines the value of guaranteed outcomes and guaranteed risk accompanying the realization of guaranteed outcome.

As the example, the explicit form of suggested solution for linear-quadratic one step variant of single-criteria problem is obtained.

Keywords: *multi-step problem, management problem strategy, multicriteria problem, guarantees, Pareto maximum.*

1. Постановка задачи

Рассматриваем однокритериальную многошаговую позиционную задачу при неопределенности.

Функция риска Севиджа–Ниханса.

Здесь ограничимся интервальными неопределенностями. Для построения функции риска рассматриваем однокритериальную многошаговую оптимизационную задачу

$$\Gamma_Z = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}_Z, \mathbf{Z}, J(U_Z, Z, x_0) \rangle,$$

изменение управляемой системы $\mathbf{\Sigma}$ описывается векторным разностным уравнением

$$\begin{aligned} x(k+1) = f(k, x(k), u(k, x(k), z(k, x(k))), z(k, x(k))), \\ x(0) = x_0, (k = 0, 1, ..., K-1) \end{aligned} \tag{1}$$

(момент окончания управления) постоянную $K > 0$ фиксируем; в (1) фазовый $n-$вектор (вектор состояния) в момент времени k есть $x(k) \in \mathbb{R}^n$, пара $(k, x(k))$ — позиция в момент k в задаче Γ_Z, $(0, x_0)$ — начальная позиция; стратегия ЛПР (лица, принимающего решения) в момент времени k, именно $U_Z(k)$ отождествляется с m-вектор-функцией $u(k, x, z) \in \mathbb{R}^m$, этот факт обозначается $U_Z(k) \div u(k, x, z)$. В теории дифференциальных игр $U_Z(k)$ называется контрстратегией в момент времени k и множество контрстратегий в момент времени k обозначим $\mathbf{U}_Z(k)$. Стратегией ЛПР в Γ_Z является набор

$$U_Z = (U_Z(0), U_Z(1), ..., U_Z(K-1)) \div (u(0,x,z), u(1,x,z), ..., u(K-1,x,z)),$$

множество таких контрстратегий U_Z обозначим $\mathbf{U}_Z$.

Согласно теории дифференциальных позиционных игр, задача Γ_Z относится к категории *минимаксных.* В ней применяем в момент $k = 0, ..., K-1$ *чистую неопределенность* $Z(k) \div z(k,x)$, $z \in \mathbb{R}^S$, множество таких неопределенностей в момент k обозначим $\mathbf{Z}(k) = \{Z(k)\}$, а сама неопределенность Z тогда определится набором

$$Z = (Z(0), Z(1), ..., Z(K-1)) \div (z(0,x), z(1,x), ..., z(K-1,x)),$$

множество которых обозначим $\mathbf{Z} = \prod\limits_{k=0}^{K-1} \mathbf{Z}(k)$.

При формировании контрстратегии $U_Z(k)$ в момент k используем *иерархическую* процедуру. Именно на k-м ходу неопределенность $Z(k) \div z(k,x)$ поступает к ЛПР. Лицо, принимающее решение, на этой основе и исходя из некоторых соображений (например, оптимизации своего критерия, об этом далее) выбирает в момент времени k свою стратегию $U_z(k) \div u(k,x,z)$; как раз эти вектор-функции $u(k,x,z)$ и $z(k,x)$ и фигурируют в (1).

В этом проявляется *дискриминация неопределенности*: при формировании своей стратегии ЛПР становится известной реализовавшаяся в момент k неопределенность $Z(k) \div z(k,x)$.

Перейдем к *динамике* задачи Γ_Z. В момент $k = 0$ ЛПР узнает неопределенность $Z(0) \div z(0,x)$ и формирует свою стратегию $U_Z(0) \div u(0,x_0,z(0,x_0))$. С помощью системы (1) при $k = 0$ находит

$$x(1) = f(0, x_0, u(0, x_0, z(0,x_0)), z(0,x_0)).$$

В следующий момент $k = 1$ ЛПР, получив информацию о реализовавшейся чистой неопределенности $Z(1) \div z(1,x)$, формирует свою стратегию $U(1) \div u(1,x,z(1,x))$ и опять-таки с помощью (1) при $k = 1$ находит

$$x(2) = f(1, x(1), u(1, x(1), z(1, x(1))), z(1, x(1))),$$

затем процедура с очевидными изменениями повторяется до момента $k = K-1$ и в этот момент K уже ЛПР находит на основе (1)

$$x(K) = f(K-1, x(K-1), u(K-1, x(K-1), z(K-1, x(K-1))), z((K-1), x(K-1))).$$

В результате получаем дискретную траекторию

$$x_0, x(1), ..., x(K),$$

порожденную ей реализацию выбранных ЛПР стратегий

$$u[0] = u(0, x_0, z(0, x_0)), u[1] = u(1, x(1), z(1, x(1))), ..., u[K-1] = \\ = u(K-1, x(K-1), z(K-1, x(K-1))),$$

и реализовавшихся, появившихся независимо от действий ЛПР, последовательности неопределенностей

$$z[0] = z(0, x_0),\ z[1] = z(1, x(1)), ..., z[K-1] = z(K-1, x(K-1)).$$

На полученных таким образом трех последовательностях:

$$\{x(k)\}_{k=0}^{K},\ \{u[k]\}_{k=0}^{K-1},\ \{z[k]\}_{k=0}^{K-1}$$

определен критерий, оценивающий качество поведения ЛПР (результат от выбранной им стратегии $U_Z = (U_Z(0), ..., U_Z(K-1)))$, который задается функционалом

$$J(U_Z, Z, x_0) = \Phi(x(K)) + \sum_{k=0}^{K-1} F(k, x(k), u[k], z[k]), \tag{2}$$

первое слагаемое в (2) называется *терминальным*, а второе — *интегральным*.

На содержательном уровне цель ЛПР состоит в выборе стратегии $U_Z^* \in \mathbf{U}_Z$, при которой критерий (2) принимает как можно большее (максимальное) значение; при этом ЛПР учитывает возможность реализации любой чистой неопределенности $Z \in \mathbf{Z}$.

Наконец перейдем к построению самой функции риска Сэвиджа–Ниханса [2, 3]. Для этого следует найти

$$\max_{U_Z \in \mathbf{U}_Z} J(U_Z, Z, x_0) = J(U_Z^*, Z, x_0) = J[Z, x_0]$$

при любых $Z \in \mathbf{Z}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Далее, формировать указанную функцию риска по формуле

$$R(U, Z, x_0) = J[Z, x_0] - J(U, Z, x_0). \tag{3}$$

Гарантии исхода и риска

При построении гарантий будем следовать подходу, предложенному в недавно опубликованной серии работ [5, 6]. Для этого в задаче приходится использовать так называемые *стратегические неопределенности* Z_U, а сама Γ_Z изменится на

$$\Gamma_U = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}_U, J(U, Z_U, x_0) \rangle. \tag{4}$$

Здесь употребляемая система $\mathbf{\Sigma}$ также имеет вид (1), но вместо $\mathbf{U}_Z$ используем множество чистых позиционных стратегий в момент k, именно вида $U(k) \div u(k,x)$, множество их есть $\mathbf{U}(k)$, а сама позиционная стратегия становится

$$U = (U(0), ..., U(K-1)) \div (u(0,x), ..., u(K-1,x)),$$

множество таких чистых стратегий в (4) обозначено через $\mathbf{U}$. Стратегические неопределенности в момент k уже будут $Z_U(k) \div z(k,x,u)$. Они формируются в предположении *дискриминации* ЛПР, которое на первом ходу передает для формирования неопределенности $Z_U(k)$ в момент k выбранную им стратегию $U(k) \div u(k,x)$. Сама стратегическая неопределенность Z для случая (4) представляется рядом

$$Z_U = (Z_U(0), ..., Z_U(k-1)) \div (z(0,x,u(0,x)), ..., z(K-1,x,u(K-1,x))).$$

Множество таких стратегических неопределенностей в задаче (4) обозначено через $\mathbf{Z}_U$. Далее гарантии исхода и риска строим для Γ_U из (4), а также для

$$\Gamma_U = \langle \mathbf{\Sigma}, \mathbf{U}, \mathbf{Z}_U, -R(U, Z_U, x_0) \rangle, \tag{5}$$

где $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Z}_U$ те же, что в (4), а “минус” критерий взят из (3).

Перейдем к динамике задач (4) и (5). В момент $k=0$ ЛПР передает выбранную им чистую стратегию $U(0) \div u(0,x)$ исследователю, формирующему стратегическую неопределенность при $k=0$, именно $Z_U(0) \div z(0,x,u)$; тот определяет $z(0,x,u(0,x))$ и подставляет в систему (1), заменяя $z(0,x)$ на $z(0,x,u(0,x))$, а $u(0,x,z(0,x))$ на $u(0,x)$. В результате получаем из (1) при $k=0$

$$x(1) = f(0, x_0, u(0,x_0), z(0,x_0,u(0,x_0))),$$

аналогично на втором шаге (при $k=2$)

$$x(2) = f(1, x(1), u(1,x(1)), z(1,x(1),u(1,x(1)))).$$

Эта процедура продолжается до $k = K-1$ и на последнем шаге получаем

$$x(K) = f(K-1, x(K-1), u(K-1, x(K-1)), z(K-1, x(K-1), u(K-1, x(K-1)))).$$

Получаем три последовательности: векторов состояния $\{x(k)\}_{k=0}^{K}$, последовательность реализаций выбранных чистых стратегий $\{u[k] = u(k,x(k))\}_{k=0}^{K-1}$ и последовательность стратегических неопределенностей $\{z[k] = z(k,x(k),u(k,x(k)))\}_{k=0}^{K-1}$.

На них по формуле (2) определяется критерий $J(U,Z,x_0)$ (значение которого называется *исходом*) и по формуле (3) функция риска по Севиджу–Нихансу (значение которой называют *риском*).

Тогда гарантия по исходу, с учетом (4), будет

$$J[U, x_0] = \min_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} J(U, Z_U, x_0), \tag{6}$$

а по риску, с учетом (3), будет

$$-R[U, x_0] = \min_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} [-R(U, Z_U, x_0)]. \tag{7}$$

2. Формализация гарантированного решения

Наличие неопределенности в Г доставляет “большой простор” для определения гарантированных решений задачи Г.

Во-первых, применение общеиспользуемых принципов: максимина, минимаксного сожаления, Гурвица, Лапласа и т. д. (см. [1]).

Во-вторых, одновременно с указанными принципами учитывать и собственное значение критерия (2) и тем самым переходить к двух-, трех- и т. д. критериальным задачам.

В настоящей работе будем следовать второму подходу, заключающемуся в добавлении к (2) еще одного критерия — “минус” функции риска Севиджа–Ниханса [2, 3], и поиске максимальной по Парето стратегии в полученной в результате двухкритериальной задаче.

При этом основываемся на “трех китах”:

1. способе доказательства метода динамического программирования для дискретных систем, предложенном Болтянским В. Г. в книге [4];

2. двух способах построения гарантий из недавно опубликованной серии работ [5, 6];

3. математической теории оптимумов по Парето из книги [7].

Итак, прежде всего перейдем к формализации *сильно гарантированного по исходу и риску максимального по Парето решения* (СГИРП) задачи Г.

Следуя подходу из [2, 3], построим для критерия (2) функцию риска по Севиджу–Нихансу в два этапа.

Во-первых, найдем в задаче Γ_Z стратегию $U_Z^* \in \mathbf{U}_Z$, $U_Z^* = (U_Z^*(0), ..., U_Z^*(K-1))$, $U_Z^*(k) \in \mathbf{U}_Z(k)$, удовлетворяющую условию

$$\max_{U_Z \in \mathbf{U}_Z} J(U_Z, Z, x_0) = J[Z, x_0] \ \forall Z \in \mathbf{Z},\ x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

при этом используя класс чистых неопределенностей

$$Z = (Z(0), ..., Z(K-1)),\ Z(k) \div z(k, x),\ Z(k) \in \mathbf{Z}(k),\ \mathbf{Z} = \prod_{k=0}^{K-1} \mathbf{Z}(k).$$

Во-вторых, построим с учетом (3) саму функцию риска по Сэвиджу–Нихансу

$$R(U, Z, x_0) = J[Z, x_0] - J(U, Z, x_0),$$

значение которой для каждой пары $(U, Z) \in \mathbf{U} \times \mathbf{Z}$ как раз и определяет риск, сопровождающий использование чистой стратегии U. Естественно, что ЛПР желает за счет подходящего выбора своей стратегии $U \in \mathbf{U}$ уменьшить риск $R(U, Z, x_0)$ и одновременно *увеличить исход*, т. е. значение критерия $J(U, Z_U, x_0)$. В результате приходим к двухкритериальной многошаговой позиционной задаче при стратегической неопределенности

$$\langle \mathbf{\Sigma},\ \mathbf{U},\ \mathbf{Z}_U, \{J(U, Z_U, x_0), -R(U, Z_U, x_0)\}. \tag{8}$$

В (8), как и в Г, управляемая ситема $\mathbf{\Sigma}$ описывается разностным уравнением (1), $\mathbf{U}$ — множество чистых позиционных стратегий $U \div (u(0, x), ..., u(K-1, x))$, $\mathbf{Z}_U$ — множество стратегических позиционных неопределеннностей $Z_U \div (z(0, x, u), ..., z(K-1, x, u))$. Стремление увеличить оба критерия одновременно, благодаря “минусу” перед вторым критерием (функция риска по Сэвиджу), эквивалентно стремлению увеличить исход (первый критерий $J(U, Z_U, x_0)$) и одновременно уменьшить второй (риск) $R(U, Z_U, x_0)$. При этом ЛПР вынуждено ориентироваться на возможность реализации любой неопределенности $Z_U \in \mathbf{Z}_U$.

Подход, предложенный в [5, 6], позволяет учесть “действия” неопределенности в (8) за счет оценки действия гарантий обоих критериев. Для этого решим две вспомогательные задачи: найти $Z_U^{(l)} \in \mathbf{Z}_U$ $(l = 1, 2)$ такие, что

$$\begin{aligned} \min_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} J(U, Z_U, x_0) &= J(U, Z_u^{(1)}, x_0) = J[U, x_0], \\ \min_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} [-R(U, Z_U, x_0)] &= -R(U, Z_U^{(2)}, x_0) = -R[U, x_0] \end{aligned} \tag{9}$$

при $\forall\ U \in \mathbf{U}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Найденные согласно (9) критерии $J[U, x_0]$ и $-R[U, x_0]$ действительно будут гарантиями, ибо из (9) следует

$$\begin{aligned} J(U, Z_U, x_0) &\geq J[U, x_0], \\ -R(U, Z_U, x_0) &\geq -R[U, x_0] \end{aligned} \tag{10}$$

при $\forall\ U \in \mathbf{U}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и поэтому имеют место при $\forall\ Z_U \in \mathbf{Z}_U$.

Итак, от задачи (4) перейдем к двухкритериальной многошаговой позиционной “задаче гарантий”

$$\langle \mathbf{\Sigma},\ \mathbf{U},\ \{J[U, x_0], -R[U, x_0]\rangle, \tag{11}$$

но уже без неопределенности.

Тогда в качестве решения (СГИРП) задачи (1) предлагается тройка

$$(U^P, J^P[x_0], R^P[x_0]) \tag{12}$$

такая, что позиционная стратегия $U^P \in \mathbf{U}$ максимальна по Парето в (11), т. е. при $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\forall\ U \in \mathbf{U}$ несовместна система неравенств

$$\begin{gathered} J[U, x_0] \geq J[U^P, x_0] = J^P[x_0], \\ R[U, x_0] \leq R[U^P, x_0] = R^P[x_0], \end{gathered}$$

из которых хотя бы одно строгое.

Замечание 1. Почему же тройка (12) выбрана в качестве гарантированного решения задачи Г?

Во-первых, (12) отвечает на вопрос: "Что делать?" Ответ — использовать указанную выше максимальную по Парето стратегию U^P.

Во-вторых, вследствие (10), стратегия U^P гарантирует исход $J(U^P, Z, x_0)$ не меньший гарантированного $J^P[x_0]$, а так же риск не больший $R^P[x_0]$ при $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$, любых неопределенностях Z_U и всяких стратегиях $U \in \mathbf{U}$, не совпадающих с U^P.

Более того, увеличение исхода (за счет использования $U \neq U^P$) автоматически приведет к увеличению риска и обратно, уменьшение риска вызовет уменьшение исхода (цель же ЛПР — увеличить исход при одновременном уменьшении риска).

Перейдем к строгому определению.

Определение 1. Тройку $(U^P, J^P[x_0], R^P[x_0])$ назовем сильно гарантированным по исходам и рискам Парето-максимальным решением (СГИРП) задачи Γ_U, если:
1^0. в задаче Γ_Z существует контрстратегия $U_Z^* \in \mathbf{U}_Z$, для которой

$$\max_{U_Z \in \mathbf{U}_Z} J(U_Z, Z, x_0) = J(U_Z^*, Z, x_0) = J[Z, x_0] \tag{13}$$

при $\forall Z \in \mathbf{Z}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
2^0. (далее используем функцию риска по Сэвиджу (3) и исход (2)) в задаче Γ_Z существуют две стратегические неопределенности $Z_U^{(l)}$ $(l = 1, 2)$ такие, что при $\forall\ U \in \mathbf{U}$ и $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\min_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} J(U, Z_U, x_0) = J(U, Z_U^{(1)}, x_0) = J[U, x_0], \\ &\min_{Z_U \in \mathbf{Z}_U} [-R(U, Z_U, x_0)] = -R(U, Z_U^{(2)}, x_0) = -R[U, x_0]; \end{aligned} \tag{14}$$

3^0. чистая позиционная стратегия $U^P \in \mathbf{U}$ максимальна по Парето в двухкритериальной задаче

$$\langle \mathbf{\Sigma},\ \mathbf{U},\ \{J[U,x_0],\ -R[U,x_0]\}\rangle \tag{15}$$

при $\forall\ x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда для $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ имеем $J^P[x_0] = J[U^P, x_0]$, $R^P[x_0] = R(U^P, x_0)$.

3. Достаточные условия

В этом разделе статьи используем следующие обозначения:
$V_{\text{и}}^{(k)}(x,z)$ — функция Беллмана для исходов,
$V_p^{(k)}(x,z)$ — функция Беллмана для рисков,

$$W_{\text{и}}(k,x,z,u,V_{\text{и}}^{(k+1)}(f(k,x,z,u),z)) = F(k,x,z,u) + V_{\text{и}}^{(k+1)}(f(k,x,z,u),z) \tag{16}$$

для задачи Γ_Z построим

$$\begin{aligned} V_{\text{и}}^{(k)}(x,z) = W_{\text{и}}[k,x,z] = \max_u\{W_{\text{и}}(k,x,z,u,V_{\text{и}}^{(k+1)}(f(k,x,z,u),z))\} = \\ = Idem\{u \to u^*(k,x,z)\}\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R}^m\ (k = K-1,...,1,0); \end{aligned} \tag{17}$$

здесь и далее $Idem\{u \to u^*(k,x,z)\}$ означает, что в выражении в фигурных скобках заменяется u на $u^*(k,x,z)$, т.е. максимум достигается при $u = u^*(k,x,z)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^s$; составим

$$R(k,x,z,u) = W_{\text{и}}[k,x,z] - W_{\text{и}}(k,x,z,u,V_{\text{и}}^{(k+1)}(f(k,x,z,u),z)); \tag{18}$$

для задачи Γ_Z найдем

$$\begin{aligned} R[k,x,u] = \max_z\{R(k,x,z,u)\} = Idem\{z \to z^{(2)}(k,x,u)\}, \\ W_{\text{и}}[k,x,u] = \min_z\{W_{\text{и}}(k,x,z,u,V_{\text{и}}^{(k+1)}(f(k,x,z,u),z))\} = \\ = Idem\{z \to z^{(1)}(k,x,u)\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь опять-таки $Idem\{z \to z^{(l)}(k,x,u)\}$ означает замену z на $z_u^{(l)}$ соответственно $(l = 1,2)$.

Справедливость следующего положения теоретически обоснована утверждением и способом доказательства метода динамического программирования, примененными В. Г. Болтянским в монографии [4].

Утверждение 1. *Пусть для задачи* Γ_U *существует последовательность функций Беллмана* $\{V_u^{(k)}(x,z)\}_0^K$, *определенных на* $\mathbb{R}^{n+m}$ *и таких, что*
1^0. $V_u^{(K)}(x,z) = \Phi(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n$;
2^0. *при каждом* $k = K-1,...,0$ *последовательно существует контрстратегия в момент* k, *т.е.* $U_Z^*(k) \div u^*(k,x,z)$, $U_Z^*(k) \in \mathbf{U}_Z(k)$, *удовлетворяющая (17) при*

$\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^m$ в задаче Γ_U;
3^0. с учетом (16) и (18) для задачи Γ_Z при каждом $k = K-1, ..., 0$ существуют по две стратегические неопределенности $Z_U^{(l)}(k)$, $Z_U^{(l)}(k) \div z^{(l)}(k, x, u)$, $Z_U^{(l)}(k) \in \mathbf{Z}_U(k)$ $(l = 1, 2)$, для которых имеют место оба тождества (19) при $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$;
4^0. в результате для $k = 0$ получаем две стратегические неопределенности $Z^{(l)} \in \mathbf{Z}_U$, определяющие две гарантии $J(U, Z^{(1)}, x_0) = J[U, x_0]$, $-R(U, Z^{(2)}, x_0) = -R[U, x_0]$, затем в задаче (1) строим максимальную по Парето чистую стратегию, например, найдя чистую стратегию $U^P \in \mathbf{U}$, реализующую максимум

$$\max_{U \in \mathbf{U}} \{J[U, x_0] - R[U, x_0]\} = Idem\{U \to U^P\}.$$

Находим гарантии $J^P[x_0] = J[U^P, x_0]$, $R^P[x_0] = R[U^P, x_0]$.

Тогда при любом выборе начального состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ СГИРП образует тройка $(U^P, J^P[x_0], R^P[x_0])$.

4. Линейно-квадратичная одношаговая задача при неопределенности

Предполагаем, что в Γ_Z, управляемая система (1) одношаговая, линейна и имеет вид

$$x(1) = Ax(0) + u + z,\ x(0) = x_0, \tag{20}$$

n-вектора $x,\ u,\ z \in \mathbb{R}^n$ и момент окончания $K = 1$, $n \times n$-матрица A постоянна (далее множество таких матриц обозначаем $\mathbb{R}^{n \times n}$). Чистую стратегию $U \div Px$, их множество $\mathbf{U}^n = \{U \div Px \mid \forall P \in \mathbb{R}^{n\times n}\}$, используем также множество контрстратегий $\mathbf{U}_Z^n = \{U_Z \div P_1 x + P_2 z \mid \forall P_i \in \mathbb{R}^{n \times n}\ (i = 1, 2)\}$, множество чистых неопределенностей $\mathbf{Z}^n = \{Z \div Qx \mid \forall Q \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$, множество стратегических неопределенностей $Z_U^n = \{Z_U \div Q_1 x + Q_2 u \mid \forall Q_i \in \mathbb{R}^{n\times n}\ (i = 1, 2)\}$; штрих сверху означает операцию транспонирования.

Тогда Γ_Z превращается в

$$\Gamma_Z^n = \langle \mathbf{\Sigma} \div (20), \mathbf{U}_Z^n, \mathbf{Z}^n, J(U_Z, Z, x_0) \rangle,$$

а Γ_U в

$$\Gamma_U^n = \langle \mathbf{\Sigma} \div (20), \mathbf{U}^n, \mathbf{Z}_U^n, J(U, Z_U, x_0) \rangle,$$

где

$$J(U, Z_U, x_0) = -x^{'}(1)Cx(1) - u^{'}[1]Du[1] + z^{'}[1]Mz[1].$$

Причем предполагаем выполненным

Условие 1. *Матрицы* $C, D, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *симметричны и квадратичные формы* $y'Cy$, $y'Dy$, $y'My$ *определенно положительны (обозначаем этот факт,* $C > 0$, $D > 0$, $M > 0$*).*

Задача: построить СГИРП для Γ_U^n.

Утверждение 2. *Пусть* $n \times n$*-матрицы* $C > 0$, $M > 0$, $D > 0$. *Тогда при любом выборе начального ненулевого фазового вектора* x_0 *СГИРП будет* $(U^P, J^P[x_0], R^P) = (0_n, 0, 0)$.

Доказательство. В соответствии с утверждением 1 разделим построение СГИРП на четыре этапа. Ищем функции Беллмана в виде квадратичных форм $x'\Theta_i(k)x$ $(i = ,)$.

1 этап: Используем тождества

$$V_i(1, x, z) = x'\Theta_i(1)x = -x'C'x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

откуда

$$\Theta_i(1) = -C \ (i = ,).$$

2 этап: для задачи Γ_Z^n, согласно (16), (17), построим $U_Z^* \div P_1^*x + P_2^*z$ исходя из условия

$$\max_u W_{\text{и}}(0, x, z, u, V_{\text{и}}^{(1)}(Ax + u + z, z)) = \max_u\{-u'Du + z'Mz- \\ -(Ax + u + z)'C(Ax + u + z)\} = Idem\{u \to u^*(0, x, z) = P_1^*(0)x + P_2(0)z\}.$$

Достаточными условиями здесь будут

$$\begin{cases} -2Du^*(0, x, z) - 2C(Ax + u(0, x, z) + z) = 0_n, \\ -2(D + C) < 0. \end{cases}$$

Второе требование выполнено (ибо $D > 0$ и $C > 0$), а из первого тождества получаем

$$u^*(0, x, z) = -D^{-1}C(Ax + z).$$

Тогда, подставляя $u = u^*(0, x, z)$ в $W_{\text{и}}(...)$, приходим к

$$\max_u W_{\text{и}}(...) = -(Ax + z)'\mathfrak{M}(Ax + z) + z'Mz,$$

где симметричная постоянная $n \times n$ матрица

$$\mathfrak{M} = C(D + C)^{-1}D(D^{-1} + C^{-1})D(D + C)^{-1}C > 0. \tag{21}$$

Используя (18), имеем

$$R(0, x, u, z) = -(Ax + z)'\mathfrak{M}(Ax + z) + z'Mz + u'Du - z'Mz+ \\ +(Ax + z + u)C(Ax + z + u) = u'(D + C)u+ \\ +(Ax + z)'(C - \mathfrak{M})(Ax + z) + 2u'C(Ax + z). \tag{22}$$

<u>3 этап:</u> для задачи Γ_U^n построим гарантии по рискам и исходам. Используя при этом (19), для гарантии по риску имеем

$$\max_z\{R(0,x,u,z)\} = \{z \to z^*(0,x,u)\}.$$

Но это соотношение имеет место, если при $\forall x, u \in \mathbb{R}^n$ будет

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial R(0,x,u,z)}{\partial z}\Big|_{z^*(0,x,u)} = -2\mathfrak{M}[Ax + z(0,x,u)] + 2C(Ax + u + z(0,x,u)) = 0,\\ &\tfrac{\partial^2 R(0,x,u,z)}{\partial z^2} = -2(C - \mathfrak{M}) < 0.\end{aligned} \tag{23}$$

Из (23) также

$$Ax + u + z^*(0,x,u) = C^{-1}\mathfrak{M}(Ax + z^*(0,x,u)),$$

и тогда для (22) получаем

$$R(0,x,u,z^*(0,x,u)) = u^{'}Du + (Ax + z^*(0,x,u))^{'}\mathfrak{M}(\mathfrak{M}^{-1} - C^{-1})\mathfrak{M}(Ax + z^*(0,x,u)).$$

Поэтому с учетом эквиваленции

$$[0 < C < \mathfrak{M}] \Leftrightarrow [0 < \mathfrak{M}^{-1} < C^{-1}]$$

приходим к

$$z^*(0,x,u) = -Ax$$

и тогда

$$\max_z R(0,x,u,z) = R[0,x,u] = u^{'}Du. \tag{24}$$

Перейдем к гарантии по исходам

$$\min_z\{-u^{'}Du + z^{'}Mz - (Ax + u + z)^{'}C(Ax + u + z)\} = Idem\{z \to z^0(0,x,u)\}.$$

Тождество имеет место, если

$$\begin{cases} 2Mz^0(0,x,u) - 2C(Ax + u + z^0(0,x_0,u)) = 0\\ [2(M - C) > 0] \Leftrightarrow [M > C],\end{cases}$$

из первого тождества также имеем

$$Ax + u + z(0,x,u) = C^{-1}Mz(0,x,u).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&W_{\text{и}}(0,x,z^0(0,x,n),u,V_{\text{и}}^{(1)}(Ax + z^0(0,x,u) + u)) = W_{\text{и}}[0,x,u] =\\ &= -u^{'}Du + [z^0(0,x,u)]^{'}Mz^0(0,x,u) - z^0(0,x,u)MC^{-1}Mz^0(0,x,u) =\\ &= -u^{'}Du + z^0(0,x,u)M(M^{-1} - C^{-1})Mz^0(0,x,u).\end{aligned} \tag{25}$$

<u>4 этап:</u> из (24) и (25) сразу следует, что в задаче (11) максимальной по Парето является чистая стратегия $U^P \div 0_n$.

□

Исследования выполнены в рамках проекта кафедры оптимального управления МГУ им. М. В. Ломоносова: «Методы решения динамических задач управления, оптимизации и идентификации».

Список литературы

1. Мушек, Э. Методы принятия технических решений / Э. Мушек, П. Миллер. — М.: Мир, 1990. — 208 с.

   MUSCHICK, E., MULLER, P. (1990) *Methods of technical decisions.* Moscow: Mir.

2. SAVAGE, L. Y. (1954) *The Foundation of Statistics.* New York: Wiley.

3. NICHANS, J. (1951) Zur Preisbuldung bei undewissen Erwartungen. *Schweizerische Zeitschrift Assotiation.* Vol.46 (No 253). p. 55–67.

4. Болтянский, В. Г. Оптимальное управление дискретными системами / В. Г. Болтянский. — М.: Наука, 1973. — 488 с.

   BOLTYANSKII, V. G. (1973) *Optimal control of discrete systems.* Moscow: Nauka.

5. Жуковский, В. И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. I. Аналог седловой точки // Математические основы теории игр и приложения / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев. — 2013. — Т. 5. — № 1. — С. 27–44.

   ZHYKOVSKY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Balancing conflicts uncertainty. I. An analogue of the saddle point. *Mathematical foundations of the theory of games and applications.* 5 (1). p. 27–44.

6. Жуковский, В. И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев // Математические основы теории игр и приложения. — 2013. — Т. 5. — № 2. — С. 3–45.

   ZHYKOVSKY, V. I., KUDRYAVTSEV, K. N. (2013) Balancing conflicts uncertainty. II. The analogue maximin. *Mathematical foundations of the theory of games and applications.* 5 (2). p. 3–45.

7. Подиновский, В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

   PODINOVSKII, V. V., NOGIN, V. D. (1982) *Pareto-optimal solutions for multiobjective problems.* Moscow: Nauka.

УДК: 519.833.2

MSC2010: 91A10

СРАВНЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ ПО НЭШУ И БЕРЖУ В МОДЕЛИ ДУОПОЛИИ БЕРТРАНА

© В. И. Жуковский

Московский государственный университет им. В. М. Ломоносова
факультет вычислительной математики и кибернетики
Ленинские горы, МГУ, ВМК, 2-ой учебный корпус, Москва, ГСП-1, 119991, Российская Федерация
e-mail: *zhkvlad@yandex.ru*

© Т. В. Макаркина

Государственный гуманитарно-технологический университет
факультет информатики
ул. Зеденая, д.22, 1 учебный корпус, г.Орехово-Зуево, Московская область, 142600,
Российская Федерация
e-mail: *tatmak147@yandex.ru*

Compare Nash Equilibria and Berzh in a Model of Bertrand Duopoly.

Zhukovskiy V. I. and Makarkina T. V.

Abstract. In mathematical game theory, recent years are characterized by active studying of the concept of Berge equilibrium as antipode to widely used Nash equilibrium. Difference is in the fact that the concept of Nash equilibrium has "egoistic character" — every player tries to increase his payoff only. On the contrary, Berge equilibrium has altruistic character: its goal is to increase payoffs of all other players. The Golden rule of morality forms the basis of it: Do as you would be done by. Such approach obviously excludes "hard" measures of balancing of conflict — wars, conflicts, bloodshed. In the article offered to the reader we prove that the Berge equilibrium can be used in economics. So, let two firms producing the same product function on the market. The strategy of the firm (player) let be the price fixed by the firm for its product. Thus we consider that every firm declares its price $p_i = const \geq 0$ $(i = 1, 2)$.

After that the situation (set price) is created — vector $\vec{p} = (p_1, p_2)$. The demand on the product of i-player $(i \in \{1, 2\})$, appeared on the market we offer as linear concerning declared prices, namely

$$Q_1(\vec{p}) = q - l_1 p_1 + l_2 p_2, \quad Q_2(\vec{p}) = q - l_1 p_2 + l_2 p_1.$$

Here q — the initial demand, the coefficient of elasticity $l_1 = const > 0$ shows how much the demand on the offered product under raising of the price per unit is reduced. In turn, coefficient of elasticity $l_2 = const > 0$ shows how much the demand under extention per unit of the price of substitute goods is increased. If we set the cost price of unit of the product by $c > 0$, so the profit of i-firm (called payoff function of i-player $i \in \{1, 2\}$) will be

$$f_1(\vec{p}) = [q - l_1 p_1 + l_2 p_2](p_1 - c),$$

$$f_2(\vec{p}) = [q - l_1p_2 + l_2p_1](p_2 - c).$$

As a result the mathematical model of interaction among firms-sellers described above one can suppose as ordered triple

$$\Gamma = \left\langle \{1,2\}, \{P_i = (c,\beta]\}_{i=1,2}, \{f_i(\vec{p}\}_{i=1,2} \right\rangle.$$

We note the following peculiarities of the game Γ:

first, it is supposed that maximal price β and the cost price c for both players are equal (it's naturally for the market of one product);

secondly, the coalition $\{1,2\}$ is prohibited by the rules of the game (in particular the "non-cooperative character" of the game is appeared in that);

thirdly, the price $p_i > c$ $(i = 1,2)$ for otherwise the i-player hardly may appear on the market.

For the game Γ Berge and Nash equilibriums are formalized.

The relations among coefficients are found, under the realization of them the Berge equilibrium delivers the players more payoffs than the Nash equilibrium.

Keywords: *Nash equilibrium, Berge equilibrium, mathematical game theory, mathematical model of Bertran duopoly.*

Введение

Найдены ограничения на параметры математической модели дуополии Бертрана, при которых участники конфликта в ситуации равновесия по Бержу получают большие выигрыши, чем в ситуации равновесия по Нэшу.

1. Математическая модель

Приводится модель в виде бескоалиционной игры двух лиц, выявлены ее особенности.

В 1883 г. французский математик Жозеф Луи Франсуа Бертран (1822–1900) построил модель [1] ценовой конкуренции на олигопольном рынке, на котором фирмы конкурируют между собой, меняя цену продукции. Заметим, что такая модель не "блистала новизной"; математик Антуан Огюст Курно (1801–1877) в "Исследовании математических принципов теории богатства" в разделе 7 "О конкуренции производителей" [2] рассмотрел частный случай олигополии — дуополию (участвуют только два производителя). В ней уже математическая модель основывалась на том, что оба производителя выбирают объем поставляемой продукции, цена же варьируется в результате равновесия между спросом и предложением. Рыночная цена устанавливается на том же уровне, на котором покупателями будет предъявлен спрос на весь "выкинутый на рынок" товар. Однако Бертран основывался на более естественном поведении продавца, именно на выборе им цены, а не количества "выброшенного" товара, как у Курно.

Заметим, что покупатели обычно рассматривают продукцию одинакового назначения разных фирм как разные товары. Поэтому будем считать, что на рынок каждая фирма выходит со своим товаром, причем все эти товары взаимозаменяемы.

Итак, пусть на рынке функционируют две фирмы, производящие один и тот же товар. Стратегией фирмы (игрока) пусть будет цена, назначаемая фирмой за свой товар. Таким образом, считаем, что каждая фирма объявляет свою цену $p_i = const \geq 0$ $(i = 1, 2)$. После объявления цен всеми фирмами складывается ситуация (набор цен) — вектор $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Спрос на товар i-го игрока ($i \in \{1, 2\}$), возникающий на рынке, предполагаем линейным относительно объявленных цен, именно

$$Q_1(\vec{p}) = q - l_1 p_1 + l_2 p_2, \quad Q_2(\vec{p}) = q - l_1 p_2 + l_2 p_1.$$

Здесь q — начальный спрос, коэффициент эластичности $l_1 = const > 0$ указывает насколько снижается спрос на предлагаемый товар при повышении цены на единицу. В свою очередь, коэффициент эластичности $l_2 = const > 0$ показывает насколько увеличивается спрос при увеличении на единицу цены товара-заменителя. Если обозначить себестоимость единицы товара через $c > 0$, то прибыль i-ой фирмы (далее называемой функцией выигрыша игрока $i \in \{1, 2\}$) будет

$$\begin{aligned} f_1(\vec{p}) &= [q - l_1 p_1 + l_2 p_2](p_1 - c), \\ f_2(\vec{p}) &= [q - l_1 p_2 + l_2 p_1](p_2 - c). \end{aligned} \tag{1}$$

В результате математическую модель описанного выше взаимодействия между фирмами-продавцами можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma = \left\langle \{1, 2\}, \{P_i = (c, \beta]\}_{i=1,2}, \{f_i(\vec{p} \div (1)\}_{i=1,2} \right\rangle.$$

В этой бескоалиционной игре двух лиц в нормальной форме через $\{1, 2\}$ обозначено множество порядковых номеров игроков; $\beta = const > c$ — максимальная для игрока i цена, установленная рынком (и совестью продавцов!) порой независимо от желания игрока; стратегией игрока i является выбранная им цена $p_i = (c, \beta]$ в складывающейся на рынке "ценовой политике" — ситуации $\vec{p} = (p_1, p_2)$. Качество функционирования игрока i оценивается его выигрышем $f_i(\vec{p})$ — значением функции выигрыша $f_i(\vec{p})$ в создавшейся ситуации $\vec{p} = (p_1, p_2) \in P = P_1 \times P_2$; полный вид $f_i(\vec{p})$ приведен выше в (1) (поэтому и использовано обозначение $f_i(\vec{p}) \div (1)$). Отметим следующие особенности игры Γ:

во-первых, предполагается, что максимальная цена β и себестоимость c для обоих игроков одинаковы (что естественно для рынка одного товара);

во-вторых, правилами игры запрещена коалиция $\{1, 2\}$ (в этом проявляется, в частности, "бескоалиционный характер" игры);

в-третьих, цена $p_i > c$ $(i = 1, 2)$, ибо в противном случае i-му игроку появляться на рынке вряд ли целесообразно.

2. Основные понятия

Формализуются равновесия по Бержу и Нэшу для дуополии Бертрана.

В 1849 г. двадцатиоднолетний американский математик и экономист Джон Форбс Нэш (1928–2015) — тогда аспирант Пристанского университета, а через 45 лет лауреат Нобелевской премии по экономике — предложил [3] понятие "равновесие", которое для игры Γ примет вид:

Определение 1. *Пару* $(\vec{p}^e, f(\vec{p}^e) = f^e) \in P \times R^2$ *назовем равновесием по Нэшу для игры* Γ*, если*

$$\max_{p_i \in P_i} f_i(\vec{p}^e \| p_i) = f_i(\vec{p}^e) \quad (i = 1, 2). \tag{2}$$

Здесь и далее используется общепринятое в теории бескоалиционных игр обозначение $(\vec{p}^e \| p_1) = (p_1, p_2^e)$, $(\vec{p}^e \| p_2) = (p_1^e, p_2)$, кроме того, применяется также вектор $\vec{f} = (f_1, f_2) \in R^2$.

Приведенное равновесие оказалось настолько привлекательным в экономике, социологии, военном деле и во многих других областях человеческой деятельности, что прямо-таки вызвало звездопад Нобелевских премий по экономике, кстати, не прекращающийся до сих пор. Однако и "на солнце бывают пятна" – с нашей точки зрения, требование (2) отвечает "эгоистическому характеру", ибо, согласно (2), каждый игрок стремится увеличить только свой собственный выигрыш, забывая об интересах остальных, и, в частности, забывая даже о золотом правиле нравственности: "поступай по отношению к другому так, как бы ты хотел, чтобы он поступил по отношению к тебе". Именно такой альтруистический подход проявляется в равновесии по Бержу.

Определение 2. *Пару* $(\vec{p^B}, \vec{f}(\vec{p}^B) = \vec{f}^B) \in P \times R^2$ *назовем равновесием по Бержу для игры* Γ*, если*

$$\max_{p_i \in P_i} f_i(\vec{p} \| p_i^B) = f_i(\vec{p}^B) \quad (i = 1, 2). \tag{3}$$

а ситуацию $(\vec{p}^B) = (p_1^B, p_2^B)$*, удовлетворяющую (3) — равновесной по Бержу.*

Напомним об истории появления равновесия по Бержу. Понятие "равновесная по Бержу ситуация" возникло в России [4], [5], [6] в 1994 г. в диссертации Константина

Семеновича Вайсмана (тогда аспиранта Орехово-Зуевского педагогического института, скоропостижно скончавшегося, не дожившего и до 36 лет). Само понятие появилось в процессе изучения книги Клода Бержа [7] и "мозговой атаки" на достоинства и недостатки равновесной по Нэшу ситуации $\vec{p}^e$. Понятие "равновесие по Бержу" в самой книге [7] отсутствует, но оно само "напрашивается" (ибо (3) отличается от (2) только заменой $\vec{p}^e$ на $\vec{p}^B$ и p_i на p_i^B). Однако именно уже такая замена "снимает эгоистический характер" равновесия по Нэшу. Действительно, следуя своим стратегиям из равновесной по Бержу ситуации $\vec{p}^B$, игроки забывают о себе, о своих интересах и направляют свои усилия на увеличение выигрышей всех оставшихся игроков. Такой альтруистический подход свойственен родственным отношениям (конечно, в дружных и любящих семьях!), религиозным сообществам, элементы такого альтруизма присутствуют при благотворительности, в спонсорской поддержке. Заметим, что в силу (3), применение равновесных по Бержу ситуаций заведомо исключает вооруженные столкновения, кровопролития, войны. Эта ситуация также решает проблему Таккера в знаменитой игре "дилемма заключенных".

Судьба монографии [7], к сожалению, незавидна. Ёе публикация вызвала к жизни резкую рецензию известного специалиста в математической теории игр Мартина Шубика [8], в которой указывалось (как мы считаем совершенно справедливо), что в книге [7] "...никакого внимания не уделено приложению к экономике..." (но опять-таки, по нашему мнению, несправедливо) "...книга мало интересна экономистам...". Как раз последние слова и вызвали к жизни статью [9], где проведено подробное исследование ситуаций равновесия по Бержу и по Нэшу, и также выявлены случаи, когда одна из них доставляет всем игрокам выигрыши большие, чем другая в известной модели конкурентной олигополии Курно [2]. Такой же задаче, но уже для модели дуополии Бертрана, посвящена и предлагаемая читателю статья. В ней выявлена возможность всех игроков, следуя равновесной по Бержу ситуации $\vec{p}^B$, достичь выигрышей больших, чем равновесные по Нэшу выигрыши. Причем это происходит в той общеизвестной экономической задаче — дуополии Бертрана, с которой практически начались большинство исследований математических вопросов ценовой конкуренции.

3. ЯВНЫЙ ВИД РАВНОВЕСИЙ ПО БЕРЖУ И НЭШУ

Итак, задана игра Г. В этом разделе найдем явный вид равновесий по Нэшу и по Бержу для игры Г, введенных определениями 1 и 2 соответственно.

Равновесие по Бержу. Применяя определение 2 к (1) и (3), получаем

Утверждение 3. *Если коэффициенты эластичности l_1 и l_2 из (1) удовлетворяют условиям:*

$$l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c}, \quad l_1 = const > 0 \quad (i = 1, 2), \tag{4}$$

то равновесие по Бержу игры Γ имеет вид

$$(p^B; f(p^B)) = \left(\beta, \beta; \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}, \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)}\right), \tag{5}$$

где $\beta = \frac{q+c(l_2-l_1)}{2(l_1-l_2)}$ — максимальная цена товара, установившаяся на рынке.

Доказательство. Напомним, как себестоимость c, так и максимальную цену β для обоих игроков считаем совпадающей, что характерно для рынка одного товара. Тогда функции выигрыша обоих игроков, согласно (1), при $p_i = \beta$ $(i = 1, 2)$ совпадают, именно с

$$f_i[\beta] = [q + \beta(l_2 - l_1)](\beta - c) = (l_2 - l_1)(\beta - c)^2 + [q + c(l_2 - l_1)](\beta - c), \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Так как

$$\frac{df_i[\beta])}{d(\beta - c)}\Big|_{(\beta-c)_*} = 2(l_2 - l_1)(\beta - c)_* + [q + c(l_2 - l_1)] = 0,$$

$$\frac{d^2 f_i[\beta]}{d(\beta - c)^2)} = 2(l_2 - l_1) < 0,$$

то функция $f_i[\beta]$ строго вогнута при $\beta >$, достигает максимума $\left(\max\limits_{0<\beta-c} f_i[\beta] = f_i[\beta_*]\right)$ при

$$\beta_* = (\beta -)_* + = -\frac{q + c(l_2 - l_1)}{2(l_2 - l_1)} + c = \frac{q + c(l_1 - l_2)}{2(l_1 - l_2)} > 0.$$

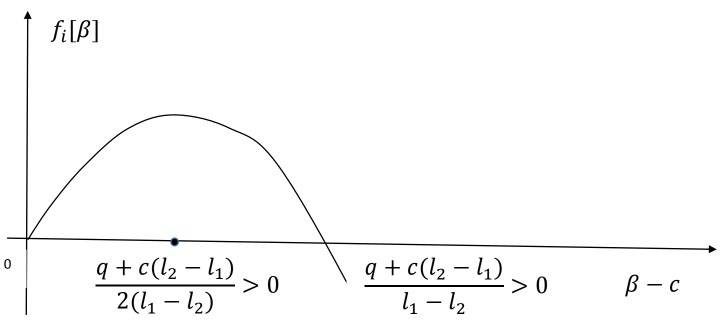

Рис. 1. График $f_i[\beta]$ при $l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c}$.

Функция $f_i[\beta]$ пересекает ось $\beta - c$ в двух точках: $(\beta - c)_1 = 0$ и $(\beta - c)_2 = -\frac{q+c(l_2-l_1}{l_2-l_1} = = \frac{q+c(l_2-l_1)}{l_1-l_2} > 0$ (здесь учтено второе неравенство из (4)).

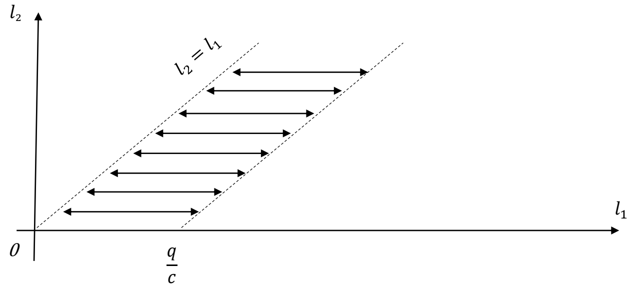

Рис. 2. Множество $l = (l_1, l_2) \in \{(l_1, l_2) | l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c} \wedge l_i > 0 (i = 1, 2)\}$.

Поэтому график $f_i[\beta]$ имеет вид, представленный на рисунке 1. В результате получаем, что для любых

$$l = (l_1, l_2) \in \left\{ (l_1, l_2) \middle| l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c} \right\}$$

(см. рис. 2), лежащих внутри заштрихованной на рис. 2 "тупиковой" дорожки, и максимальной цене $\beta_* = \frac{q+c(l_1-l_2)}{2(l_1-l_2)}$, выигрыши обоих игроков будут $f_i[\beta_*] = \frac{[q+c(l_2-l_1)]^2}{4(l_1-l_2)}$ $(i = 1, 2)$. □

Равновесие по Нэшу.

Применяя определение 1 к (1) и (2), получаем

Утверждение 4. *Равновесие по Нэшу игры* Γ *имеет вид* $(\vec{p}^e, \vec{f}(\vec{p}^e) = (f_1(\vec{p}^e), f_2(\vec{p}^e))$, *где*

$$\vec{p}^e = (p_1^e, p_2^e), \quad p_i^e = \frac{q + l_1 c}{2l_1 - l_2} = p^H \quad (i = 1, 2), \tag{7}$$

а компоненты вектора равновесных по Нэшу выигрышей

$$f_i(\vec{p}^e) = l_1(p^N - c)^2 = l_1 \left(\frac{q + [l_2 - l_1]c}{2l_1 - l_2} \right)^2 \quad (i = 1, 2). \tag{8}$$

Доказательство. Из (1) и $\frac{\partial^2 f_i(p^e||p_i)}{\partial p_i^2} = -2l_1 < 0$, а также из следующей отсюда строгой вогнутости $f_i(p)$ по p_i получаем, что, например, $\max_{p_1 \in P_1} f_1(p_1, p_2^e)$ достигается на p_1^e, если

$$\frac{\partial f_1(p_1, p_2^e)}{\partial p_1} \Big|_{p_1 = p_1^e} = q - 2l_1 p_1^e + l_2 p_2^e + l_1 c = 0, \tag{9}$$

аналогично

$$\frac{\partial f_2(p_1^e, p_2)}{\partial p_2} \Big|_{p_2 = p_2^e} = q + l_2 p_1^e - 2l_1 p_2^e + l_1 c = 0.$$

В результате для построения равновесной по Нэшу ситуации $\vec{p}^e = (p_1^e, p_2^e)$, приходим к системе из двух линейных уравнений

$$\begin{cases} -2l_1 p_1^e + l_2 p_2^e & = & -(q + l_1 c), \\ l_2 p_1^e - 2l_1 p_2^e & = & -(q + l_1 c). \end{cases}$$

Решением ее будут

$$p_1^e = p_2^e = \frac{q + l_1 c}{2l_1 - l_2} = p^H. \tag{10}$$

Из (9) также получаем, с учетом обозначений из (7),

$$q - l_1 p_1^e + l_2 p_2^e = l_1(p_1^e - c)$$

и поэтому $f_i(\vec{p}^e) = l_1(p^H - c)^2$. Отсюда и из (7) сразу следует справедливость (8). □

4. Использовать равновесие по Бержу иногда выгоднее, чем применять равновесие по Нэшу

Найдены ограничения на параметры в модели дуополии Бертрана, при выполнении которых равновесные по Бержу выигрыши для обоих игроков оказываются больше, чем их выигрыши в ситуации равновесия по Нэшу. Из утверждений 1 и 2, получаем

Утверждение 5. *Пусть в игре* Γ *для коэффициентов эластичности* $l_i = const > 0$ $(i = 1, 2)$ *выполнены ограничения*

$$l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c}.$$

Тогда в ситуации равновесия по Бержу p^B *оба игрока получают большие выигрыши, чем в ситуации равновесия по Нэшу, т. е.*

$$f_i(\vec{p}^B) > f_i(\vec{p}^e) \quad (i = 1, 2). \tag{11}$$

Доказательство. В первую очередь отметим цепочку импликаций

$$[l_1 > l_2] \Rightarrow [2l_1 > l_2] \Rightarrow [2l_1 - l_2 > 0]$$

и тогда, согласно утверждению 2, существует равновесие по Нэшу $(\vec{p}^e, f(\vec{p}^e))$, определенное в (7) и (8). Напомним также две импликации $[l_1 > l_2] \Rightarrow [l_1 - l_2 > 0]$ и $[l_2 > l_1 - q/c] \Rightarrow [q + c(l_2 - l_1) > 0]$. Согласно им в Γ существует равновесие по Бержу, определенное в (5). Сравнивая (5) с (8), получим

$$f_i(p^B) - f_i(p^e) = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{4(l_1 - l_2)} - l_1 \cdot \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2}{(2l_1 - l_2)^2} = \frac{[q + c(l_2 - l_1)]^2 l_2^2}{4(l_1 - l_2)(2l_1 - l_2)^2} > 0 \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда сразу приходим к справедливости (11). □

Замечание 1. Можно говорить о двояком применении утверждения 3: *во-первых*, к исследованию уже функционирующих конкурентных экономик, описываемых математической моделью дуополии по Бертрану, *во-вторых*, при аналитическом конструировании таких рынков.

Первый способ.

Шаг 1. Для уже функционирующего конкурентного рынка идентифицировать численные значения 5 параметров:

l_1^*, l_2^* — коэффициенты эластичности,

c — себестоимость,

q — величина начального спроса,

β — максимальная цена.

Шаг 2. С помощью найденных на предыдущем шаге двух чисел c и q построить в первой четверти плоскости $\{l_1, l_2\}$ рисунок 2.

Шаг 3. Ответить на два вопроса:

a) "Принадлежит ли точка $l^* = (l_1^*, l_2^*)$ внутренности заштрихованной на рисунке дорожке?"

b) "Совпадает ли максимальная цена β с $\frac{q+c(l_1^*-l_2)}{2(l_1^*-l_2^*)}$?"

Шаг 4. При утвердительном ответе на оба вопроса игрокам лучше использовать свои стратегии из ситуации равновесия по Бержу $p^B = (p_1^B, p_2^B) = (\beta, \beta) = \left(\frac{q+c(l_1^*-l_2^*)}{2(l_1^*-l_2^*)}, \frac{q+c(l_1^*-l_2^*)}{2(l_1^*-l_2^*)}\right)$ и получить при этом свои выигрыши $f_i(p^B) = \frac{[q+c(l_1^*-l_2^*)]^2}{4(l_1^*-l_2^*)}$ $(i = 1, 2)$, которые оказываются больше выигрышей $f_i(p^e) = l_1 \left(\frac{q+c(l_1^*-l_2^*}{2(l_1^*-l_2^*)^2}\right)^2$ $(i = 1, 2)$ в ситуации равновесия по Нэшу $p^e = \left(\frac{q+l_1^*c}{2l_1^*-l_2^*}, \frac{q+l_1^*c}{2l_1^*-l_2^*}\right)$.

Второй способ возникает при проектировании конкурентных экономик.

Шаг 1. По желательным числовым значениям себестоимости и начального спроса q построить в первой четверти плоскости $\{l_1, l_2\}$ биссектрису $l_1 = l_2$ и параллельно перенести (сдвинуть) ее вправо на $\frac{q}{c}$ (см. рисунок 3).

Шаг 2. С помощью экономических, государственных и прочих "рычагов" довести максимальную цену β до величины $\frac{q+c(l_1-l_2)}{2(l_1-l_2)}$.

Шаг 3. Тогда для всех $l = (l_1, l_2)$, лежащих внутри "тупиковой дорожки" (образованной двумя полупрямыми $l_2 = l_1$, $l_2 = l_1 - \frac{q}{c}$ при $l_i > 0$ $(i = 1, 2)$ и оканчивающейся "тупиком" $[0, \frac{q}{c}]$ на оси l_1, заштрихованной на рисунке 2), игрокам будет выгоднее использовать свои стратегии $\beta = \frac{q+c(l_1-l_2)}{2(l_1-l_2)}$ из равновесной по Бержу ситуации $p^B = (\beta, \beta)$, ибо они обеспечат выигрыши $\frac{[q+c(l_1-l_2)]^2}{4(l_1-l_2)}$ большие, чем $l_1 \left(\frac{q+c(l_1-l_2)}{2(l_1-l_2)^2}\right)^2$ (достигаемые в ситуации равновесия по Нэшу $\vec{p}^e = \left(\frac{q+l_1c}{2l_1-l_2}, \frac{q+l_1c}{2l_1-l_2}\right)$).

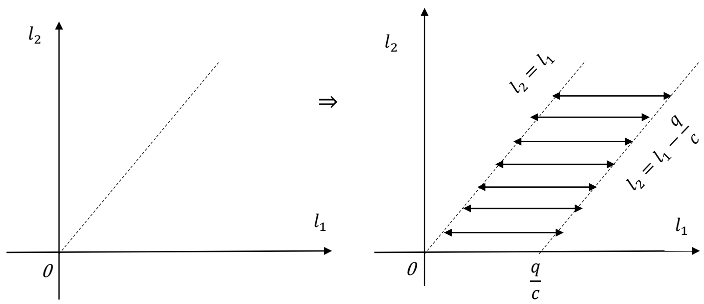

Рис. 3. Множество $l = (l_1, l_2) \in \{(l_1, l_2) | l_1 > l_2 > l_1 - \frac{q}{c} \wedge l_i > 0 (i = 1, 2)\}$.

Заключение

В работе получены следующие результаты: найдены коэффициенты в математической модели дуополии Бертрана, при которых равновесие по Бержу доставляет игрокам большие выигрыши, чем равновесие по Нэшу.

Список литературы

1. BERTRAN, J. Book review of theorie mathematique de la richessesociale and recherch sur les principles mathematiques de la theorie des richesses // Journal de Savants. — 1883, V. 67. — C. 499–508.

2. COURNOT, A. A. Recherchersurles Principes Mathematiques de la Theorie des Recheses. — Paris: L. Huchette, 1838. — 230 c.

3. NASH, J. F. Equilibrium point in N-person games // Proc. Nat. Academ. Sci. USA. — 1950, V. 36. — C. 48–49.

4. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу / К. С. Вайсман. — Автореферат дис.. . . кандидата физико-математических наук: 01.01.09 / Санкт-Петербургский гос. ун-т. Факультет прикладной математики — процессов управления. — Санкт-Петербург, 1995. — 15 с.

   VAISMAN, K. S. The Berge Equilibrium / The dissertation on competition of a scientific degree of candidate of physical and mathematical Sciences. — SPSU, 1995. — 16 c.

5. Вайсман, К. С. Равновесие по Бержу / К. С. Вайсман // Раздел 3.2 из книги Жуковского В. И. и Чикрия А. А. “Линейно-квадратичные дифферециальные игры”. — Киев: Наукова думка, 1994. — С. 119–142.

   VAISMAN, K. S. The Berge Equilibrium // Section 3.2 from the book of V. I. Zhukovsky and Zikria A. A. “Linear-quadratic differential games”. — Kiev: Naukova Dumka, 1994. — C. 119–142.

6. ZHUKOVSKIY, V. I., SALUKVADZE, M. E. and VAISMAN, K. S. The Berge Equilibrium: Preprint. — Tbilisi: Institute of Control System, 1994. — 28 c.

7. Берж, С. Общая теория игр нескольких лиц / С. Берж. — М.: Физматгиз, 1961. — 126 с.

   BERGE, S. The General theory of games of n persons. — M.:Fizmatgiz, 1961. — 126 c.

8. SHUBIK, M., Review of C. Berge "General" theory of n-person games // Econometrica. — 1961, V. 29. — № 4. — С. 821.

9. Жуковский, В. И. Равновесие по Бержу в модели олигополии Курно / В. И. Жуковский, К. Н. Кудрявцев, А. С. Горбатов // Вестник Удмуртского университета. Серия Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25 .—№ 2. — С. 147–156.

   ZHUKOVSKIY, V. I., KUDRYAVZEV, K. N., and GORBATOV A. S. The Berge Equilibrium in a model of the Cournot oligopoly // Bulletin of Udmurt University. Series: Mathematics, Mechanics, Computer science. — 2015, T. 25. — №2. — C. 147–156.

10. COLMAN, A. M., KORNER, T. W., MUSY, O. and TAZDAIT, T. Mutualsupportin games: some propetues of Berge equilibria // Journal of Mathematical Psychology, Articlein Press. — 2011. — C. 1–10.

11. Мащенко, С. О. Концепция равновесия по Нэшу и ее развитие // Журнал обчисловальной та прикладнoi математики / С. О. Мащенко. — 2012. — № 1. — С. 40–61.

    MASHCHENKO, S. O. The Concept of Nash equilibria and its development // Journal of mathematics obcessively prikladno. — 2012, № 1. — C. 40–61.

12. ZHUKOVSKIY, V. I., TOPCHISHVILI, A. and SACHKOV S. N. Application of Probability measures of the Exist-ence Problem of Berge-Vaisman Guarantied Equilibrium // Model Assisted Statistics and Applica-tions. — 2014, V. 9. — №3. — C. 223–239.

13. ZHUKOVSKIY, V. I. and SACHKOV, S. N. Bilanciamen to Conflitti Friendly // Italian Science Review. — 2014, V. 18. — №9. — C. 169–179.

14. Жуковский, В. И. Об одном необычном, но доброжелательном способе уравновешивания конфликтов / В. И. Жуковский, С. Н. Сачков // Международный независимый институт Математики и Систем. "М и С". Ежемесячный научный журнал.. — 2014. — № 10. — С. 61–64.

    ZHUKOVSKIY, V. I. and SACHKOV, S. N. About the unusual, but friendly way eravno-vyshivaniya conflicts // International independent Institute of Mathematics and Systems. "M and S". Monthly scientific journal. — 2014, № 10. — C. 61–64.

15. ZHUKOVSKIY, V. I., SACHKOV, S. N. and GORBATOV, A. S. Mathemarical model of the "Golden rule" // Science, Technology and Life. Proc. Of the Internat. Scientific. Conf. Czech Republic, Karlovy Vary,. — 2014, 27–28 December. — C. 16–23.

УДК: 517.95, 517.98

MSC2010: 35D30, 35D35, 35F15

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

© Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского
Таврическая академия
факультет математики и информатики
просп. Академика Вернадского, 4, Симферополь, 295000, Российская Федерация
e-mail: *kopachevsky@list.ru, radomirskaya@mail.ru*

Mixed Boundary Value Transmission Problems.

Kopachevsky N. D., Radomirskaya K. A.

Abstract.

A common approach to the abstract boundary value problems is considered on the basis of an Abstract Green's Identity. Some examples of areas docked configurations for interfacing problems are considered on the basis of the generalized Green's Identity for the Laplace operator (in particular the configuration of "three sliced watermelon" is considered). The initial non-homogeneous problem interface is divided into four auxiliary problems. Heterogeneity exists only in one place in these tasks, i.e., at the equation or in the boundary condition. We find a weak solution of every problem with the help of the corresponding Green's Identity. Theorems on existence and uniqueness of each solution are proved. At the end of the article we get the conclusion that the solution of the original problem is the sum of the solutions of four auxiliary problems.

We consider the solution of the transmission problem

$$\begin{aligned} u_1 - \triangle u_1 &= f_1 \quad (\text{in } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\text{on } \Gamma_{11}), \\ u_2 - \triangle u_2 &= f_2 \quad (\text{in } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\text{on } \Gamma_{22}), \\ u_3 - \triangle u_3 &= f_3 \quad (\text{in } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\text{on } \Gamma_{33}). \end{aligned}$$

Jumps of functions and derivatives of the external boundaries of the normals are defined on the joint boundary

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 &= \varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} \ (\text{on } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 &= \varphi_{23}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} \ (\text{on } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{13}u_3 - \gamma_{31}u_1 &= \varphi_{31}, \quad \partial_{13}u_3 + \partial_{31}u_1 = \psi_{31} \ (\text{on } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

The solution to this problem is found in the form of a sum of solutions of auxiliary problems. We consider auxiliary problems of Zaremba, Steklov, the first and second Krein problems. We find a weak solution of each problem with corresponding Green's formula.

Keywords: *Green's Identity, weak solutions, boundary value problems, transmission problem, auxiliary problem, Lipschitz domain, derivative with respect to the outer normal.*

Введение

Работа является изложением доклада авторов в [12] и лекции, прочитанной в [13]. Исходным толчком для авторов заняться исследованием краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения стали работы М. С. Аграновича (см. [10]–[3]) и его лекции в ежегодной «Крымской осенней математической школе — КРОМШ» (Ласпи–Батилиман). С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания жидкости в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался первый из авторов статьи (см. [4]–[2]), требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, в частности, в липшицевых областях.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Данная статья посвящена применению общего подхода к изучению абстрактных смешанных краевых и спектральных задач сопряжения к различным конфигурациям пристыкованных областей в задачах сопряжения с использованием обобщенной формулы Грина, в основном для оператора Лапласа. Другие аналогичные задачи математической физики, гидродинамики, теории упругости и т. д. исследуются по этой предлагаемой общей схеме. Приводятся формулировки обобщенной формулы Грина на основе оператора Лапласа. Общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения приводится на примере конфигурации пристыкованных областей, которую авторы для простоты называют "трижды разрезанный арбуз" (Рис. 1).

Авторы благодарят М. С. Аграновича за многочисленные обсуждения данного круга проблем и полезные советы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

1. Основные формулы Грина

Будем считать, что липшицева граница Γ области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ односвязна. Разобьем её на односвязные открытые части $\Gamma_k,\ k=\overline{1,l}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Такое разбиение называют разбиением на липшицевы куски.

Как известно, функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ не всегда продолжимы нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [1], с. 78). Введем важные понятия, связанные с этим обстоятельством. Пусть $r(x)$, $x \in \Gamma_k$, — гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки $x \in \Gamma_k$ до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, множество (линеал) в $H^s(\Gamma)$, состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [8], с. 76, $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ — это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, для которых имеется продолжение нулём вне Γ_k в классе $H^s(\Gamma)$.

Лемма 1. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}\varphi \in L_2(\Gamma_k)\}.$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (которая наследуется из $H^{1/2}(\Gamma)$) на классе $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_k)}.$$

□

Лемма 2. *При любом $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leqslant 1$, пространства $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ и $H^{-s}(\Gamma_k)$ дуальны относительно спаривания в $L_2(\Gamma_k)$. В частности,*

$$(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1}$$

□

Как хорошо известно, пространство $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой имеет ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega), \tag{2}$$

$$H^1_0(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\},\ H^1_h(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v - \Delta v = 0\}. \tag{3}$$

Для простоты $H^1_h(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических элементов из $H^1(\Omega)$.

При исследовании линейных смешанных краевых задач, содержащих заданные функции как в уравнениях, так и в краевых условиях на разных частях границы, естественно решения таких задач разыскивать в виде суперпозиции решений вспомогательных краевых задач, в которых заданные функции (неоднородности) содержатся лишь в одном месте, т. е. в уравнении либо в одном из краевых условий. В связи с этим при использовании обобщенных формул Грина следует выделять такие множества (подпространства) из $H^1(\Omega)$, для которых указанное свойство суперпозиции имеет место.

Переходя к рассмотрению этого подхода, введем следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{4}$$

$$\widehat{H}^1(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})^l_{k=1} H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{5}$$

$$H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1_h(\Omega) : \gamma u = 0 \text{ на } \Gamma\backslash\Gamma_k\} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma),\ k = \overline{1,l}. \tag{6}$$

Определение 1. Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом первого типа по отношению к разбиению* $\Gamma = \partial\Omega$ *на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *если для любого* k *элемент* $\gamma_k u = \rho_k\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, *т. е. он продолжи́м нулем на всю* Γ *в классе* $H^{1/2}(\Gamma)$. □

Нетрудно видеть, учитывая свойства (1), что регулярным следом первого типа обладают слабые решения $w \in H^1_h(\Omega)$ смешанной краевой задачи

$$w - \Delta w = 0 \text{ (в } \Omega),\ w = 0 \text{ (на } \Gamma\backslash\Gamma_k),\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что, согласно определениям (4)–(6), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ получаем представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H^1_0(\Omega),\ u_k \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \gamma_k u_k =: \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \gamma_k u_j = 0 \quad (k \neq j),\ j,k = \overline{1,l}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулём на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$\langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\quad \forall\ \eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{7}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{8}$$

□

Рассмотрим другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы можно было использовать и краевые условия Неймана либо Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, будем считать, что выполнены следующие свойства:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k,\ (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}; \tag{9}$$

и для операторов $p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k$ имеем соотношения

$$p_k = \omega_k \rho_k,\ k = \overline{1,l},\ \rho_k \omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,l},\ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{10}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем*. Предполагается также, что $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ и $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*,\ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*,\ \omega_k^* : \widehat{(G_+)}_k^* \to (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}, \tag{11}$$

где ω_k^* — ограниченный оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^*$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — ограниченный оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 2. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия существования абстрактной формулы Грина, условие (9), а также условие (10) либо условие (11). Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k},\quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k,\quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*,$$

где ρ_k и ω_k^* — операторы со свойствами (10),(11). □

Вернёмся снова к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Введем одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [6] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [11], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3. *(см. В. С. Рычков [6], а также М. С. Агранович [11]). Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Тогда существует линейный оператор ω_k (оператор В. С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\omega_k\varphi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c_k\|\varphi_k\|_{H^s(\Gamma_k)}, \ \forall\varphi_k \in H^s(\Gamma_k), \ |s| \leqslant 1,$$

причем c_k не зависит от s. □

Введем теперь операторы сужения и продолжения такие, что для них выполнены общие требования из теоремы 2. Пусть $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор сужения ($\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1$), а $\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженный ему ограниченный *оператор продолжения нулем:*

$$\rho_k^*\psi_k = \begin{cases} \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k), \quad \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,l}. \\ 0 \ (\text{на } \Gamma\backslash\Gamma_k). \end{cases}$$

Введем также ограниченный оператор продолжения (оператор Рычкова, см. [6]) $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \text{ —}$$

ограниченный *оператор сужения.*

Введем ещё пространство

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{l}\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{12}$$

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\rho_k^*\psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^*\rho_k^*\psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,l},$$

а потому в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2, \ p_k^*p_j^* = 0 \ (k \neq j), \ \sum_{k=1}^{l} p_k^* = (\check{I}_-),$$

где $(\check{I}_-)$ — единичный оператор в $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (9)–(11), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k),\ G_k = L_2(\Gamma_k),\ (G_+)^*_k = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}.$$

Введем теперь по аналогии с (4)–(6) классы функций, связанных не с задачей Дирихле, а с задачей Неймана. Именно введем пространство (12), а также пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})^l_{k=1}\check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{13}$$

$$\check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H^1_h(\Omega) \cap H^1_{\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega), \tag{14}$$

$$H^1_{\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = 0\}. \tag{15}$$

Определение 2. Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом второго типа*, если для любого $k \in \overline{1,l}$ элемент

$$\partial_k u = \omega^*_k \partial u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$. □

Согласно определениям (13)–(15) элементы из $\check{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \check{H}^1(\Omega)$ имеет место представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H^1_0(\Omega),\ u_k \in \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u_j = 0\ (k \neq j),\ k,j \in \overline{1,l}.$$

В качестве следствия из теоремы 2 и проведенных выше построений приходим к такому выводу.

Теорема 3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $\check{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l}\langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\quad \forall\ \eta,\ u \in \check{H}^1(\Omega), \tag{16}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\ |_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{17}$$

□

Рассмотрение этого параграфа показывает, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач при исследовании классических проблем следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

2. Общая схема рассмотрения задач сопряжения

2.1. **К постановке задачи.** В этой работе будет рассмотрен простой пример задачи сопряжения для проблемы математической физики, порожденной оператором Лапласа, точнее дифференциальным выражением $u - \Delta u$. Будем считать, что конфигурация областей, в которых рассматривается эта задача, представляет «трижды разрезанный арбуз» (Рис. 1).

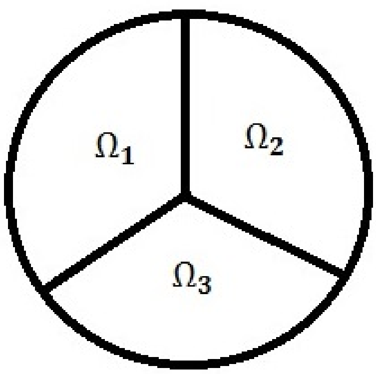

Рис.1

Обозначим через $\Gamma_{jj},\ j=\overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} ($k \neq j$) — ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Будем обозначать через $\gamma_{kj}u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ — соответствующую производную по внешней нормали.

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей $\Omega_j,\ j=\overline{1,3}$.

Требуется найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j),\ j=\overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$\begin{aligned}
&u_1 - \triangle u_1 = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_2 - \triangle u_2 = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&u_3 - \triangle u_3 = f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}).
\end{aligned} \tag{18}$$

На границах стыка заданы скачки функций и нормальных производных:

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\ &\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{23}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\ &\gamma_{13}u_3 - \gamma_{31}u_1 = \varphi_{31}, \quad \partial_{13}u_3 + \partial_{31}u_1 = \psi_{31} \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь f_j — заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,3}, \varphi_j$ — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, функции φ_{21}, φ_{32} и φ_{13} задают разрывы следов, а ψ_{21}, ψ_{32} и ψ_{13} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Будем искать слабое решение задачи (18)–(19) в виде

$$u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k).$$

В силу линейности задачи будем искать это решение в виде суммы решений четырех вспомогательных задач, содержащих неоднородности лишь в одном месте, т. е. либо в уравнении, либо в краевом условии.

2.2. **Первая вспомогательная задача (задача Зарембы).** Пусть $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ — решение следующей задачи

$$\begin{aligned} &u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{21}u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31}u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}),\\ &\partial_{12}u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{32}u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}),\\ &\partial_{13}u_{13} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{13} = \Gamma_{31}), \quad \partial_{23}u_{13} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{aligned}$$

В этой задаче уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия на внешних границах неоднородные.

Мы имеем три распадающиеся задачи Зарембы. Решим первую задачу для u_{11}.

$$\begin{aligned} &u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), \qquad\quad \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{21}u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31}u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{21}$$

Будем считать, что $u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1)$, тогда $\gamma_{11}u_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$, $\partial_{11}u_{11} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11})$.

Введем подпространство

$$\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1) = \{u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1) : \partial_{21}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \ \ \partial_{31}u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31})\}. \tag{22}$$

Для задачи (21) естественно воспользоваться формулой Грина в следующем виде

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{11} - \triangle u_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_1\eta_1, \partial_{11}u_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{11})} +$$

$$+\langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}, \quad \forall \eta_1, u_{11} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1).$$

Будем искать решение u_{11} в виде суммы $u_{11} = v_1 + w_1$. Запишем задачу Дирихле для v_1:

$$v_1 - \triangle v_1 = 0 \ (\Omega_1), \ \ v_1|_{\partial\Omega_1} = \widehat{\varphi}_1 = \mathscr{E}\varphi_1 \ (\partial\Omega_1),$$

где $\mathscr{E}$ — универсальный оператор продолжения В. С. Рычкова (см. [6]),
$\mathscr{E} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^{1/2}(\Gamma), \ \mathscr{E}\varphi_1 \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, причем

$$\|\widehat{\varphi}_1\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} \leqslant c_1\|\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{11})}.$$

Так как в теории абстрактной формулы Грина существует взаимно-однозначное соответствие $G_+ \xrightarrow[\gamma_m^{-1}]{\gamma_m} M$, то существует решение

$$v_1 = \gamma_1^{-1}\widehat{\varphi}_1 = \gamma_1^{-1}\mathscr{E}\varphi_1, \ v_1 \in H^1_h(\Omega_1)$$

и $\|v_1\|_{H^1_h(\Omega_1)} \leqslant c_2\|\mathscr{E}\varphi_1\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)}$.

Рассмотрим задачу Неймана для w_1, которая получается из (20) с учетом уравнения и граничных условий для v_1:

$$\begin{gathered} w_1 - \triangle w_1 = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), \qquad\qquad \gamma_{11}w_1 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{21}w_1 = -\partial_{21}v_1 = \widetilde{\psi}_{21} \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \ \ \partial_{31}w_1 = -\partial_{31}v_1 = \widetilde{\psi}_{31} \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}), \end{gathered}$$

где $\widetilde{\psi}_{21} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}), \ \widetilde{\psi}_{31} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31})$ — известные функции. Запишем формулу Грина для $\eta_1, \ w_1 \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$:

$$(\eta_1, w_1)_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{31}\eta_1, \widetilde{\psi}_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}. \tag{23}$$

Оценим по модулю функционал $\langle \gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}$; имеем

$$\begin{aligned} |\langle \gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}| &\leqslant \|\gamma_{21}\eta_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{12})} \cdot \|\widetilde{\psi}_{21}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12})} \leqslant \\ &\leqslant c_1\|\eta_1\|_{H^1(\Omega_1)} \cdot \|\widetilde{\psi}_{21}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12})}. \end{aligned} \tag{24}$$

Он линейный и ограниченный. Для $\langle \gamma_{31}\eta_1, \widetilde{\psi}_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}$ можно проделать аналогичные выкладки.

Таким образом, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала правая часть в формуле Грина (23) — линейный ограниченный функционал относительно η_1 в $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Значит, существует единственное решение $w_1 \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$.

Рассмотрим наряду с (21) следующую вспомогательную задачу Неймана:

$$\begin{gathered} u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \ \partial_{11}u_{11} = \psi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \ \partial_{21}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \partial_{31}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{gathered} \tag{25}$$

Её слабое решение определяем из тождества, следующего из (23):

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11}\eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \ \forall \eta_1 \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{26}$$

Так как для элементов η_1 из $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ выполнено свойство $\gamma_{11}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$, то правая часть в (26) будет линейным ограниченным функционалом в $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\psi_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}).$$

В этом случае задача (25) имеет единственное слабое решение

$$u_{11} =: T_{11}\psi_1, T_{11} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}); \check{H}^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1)), \tag{27}$$
$$\check{H}^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1) = \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1).$$

Введем теперь оператор

$$C_{11} := \gamma_{11}T_{11} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}); H^{1/2}(\Gamma_{11})), \tag{28}$$

который называют оператором Стеклова.

Лемма 4. *Операторы*

$$\gamma_{11} : H^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma_{11}), \ \ T_{11} : \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}) \to \check{H}^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1) \tag{29}$$

взаимно сопряжены, а оператор из 28 обладает свойством положительности:

$$\langle C_{11}\psi_1, \psi_1 \rangle_{L_1(\Gamma_{11})} = \|u_{11}\|^2_{H^1(\Omega_1)}, \ \ u_{11} = T_{11}\psi_1. \tag{30}$$

При этом оператор

$$C_{11}^{-1} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}) \tag{31}$$

является оператором гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_{11}); L_2(\Gamma_{11}))$.

Доказательство. Свойство взаимной сопряженности (29) следует непосредственно из (26):

$$(\eta_1, T_{11}\psi_1)_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11}\eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \ \forall \eta_1 \in H^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1), \ \forall \psi_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}). \tag{32}$$

Отсюда получаем свойство положительности C_{11}:

$$\langle C_{11}\psi_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} = (T_{11}\psi_1, T_{11}\psi_1)_{H^1(\Omega_1)} = \|u_{11}\|^2_{H^1(\Omega_1)}.$$

□

Значит, оператор C_{11} имеет обратный оператор C_{11}^{-1}, заданный на области значений $\mathscr{R}(C_{11}) = H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Тогда $\psi_1 = C_{11}^{-1}\varphi_1$, и решение имеет вид:

$$u_{11} = T_{11}\psi_1 = T_{11}C_{11}^{-1}\varphi_1 = T_{11}(\gamma_{11}^{-1}T_{11})^{-1}\varphi_1 = T_{11}T_{11}^{-1}\gamma_{11}^{-1}\varphi_1 = \gamma_{11}^{-1}\varphi_1. \tag{33}$$

Учитывая предыдущие выкладки, получаем, что слабое решение задачи (20) представляется в виде

$$u_{11} = \gamma_{11}^{-1}\varphi_1, \;\; \gamma_{11}^{-1} \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11});\; \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)).$$

Так как правая часть (23) — сумма линейных ограниченных функционалов, а следовательно линейный ограниченный функционал, то существует единственное решение $u_{11} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ для $\forall\ \varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Аналогичные выкладки можно проделать для решений $u_{12},\ u_{13}$ и получить финальную формулу

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ k = \overline{1,3}.$$

Получаем следующий результат.

Теорема 4. *Каждая из задач Зарембы имеет единственное слабое решение из подпространства $\check{H}^1_{\Gamma_{kk}}(\Omega_k),\ k = \overline{1,3}$, тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}.$$

При этом решение имеет вид

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,$$

где $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathscr{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), \check{H}^1_{\Gamma_{kk}}(\Omega_k)),\ k = \overline{1,3}.$ □

2.3. **Вторая вспомогательная задача (задача Стеклова).** Сформулируем вспомогательную задачу типа Стеклова для набора функций $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
&u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}),
\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{gathered}
\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{12} := \varphi_{12} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12},\\
\partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
\gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{23} := \varphi_{23} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13},\\
\partial_{32}u_{22} + \partial_{23}u_{23} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\
\gamma_{13}u_{23} - \gamma_{31}u_{21} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{13}u_{13} + \gamma_{31}u_{11},\\
\partial_{13}u_{23} + \partial_{31}u_{21} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).
\end{gathered}$$

Здесь все уравнения однородные, внешние условия Дирихле однородные, производные по нормали на границе стыка противоположно направлены. Имеется разрыв лишь в условиях Дирихле на внутренних границах стыка, который задается функциями $\widetilde{\varphi}_{ij}$ с учетом построения решения на первом этапе.

Введем вспомогательные условия Неймана:

$$\partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} =: \chi_{12} \ \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),$$
$$\partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} =: \chi_{23} \ \text{ (на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),$$
$$\partial_{13}u_{23} = -\partial_{31}u_{21} =: \chi_{31} \ \text{(на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).$$

Если функции $\chi_{jk} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{jk})$ известны, то для нахождения $u_{2k}, k = \overline{1,3}$ возникают три задачи:

1. $u_{21} - \triangle u_{21} = 0$ (в Ω_1), $\gamma_{11}u_{21} = 0$ (на Γ_{11}), $\partial_{21}u_{21} = \chi_{12}$ (на $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$), $\partial_{31}u_{21} = -\chi_{31}$ (на $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}$), $u_{21} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$;
2. $u_{22} - \triangle u_{22} = 0$ (в Ω_2), $\gamma_{22}u_{22} = 0$ (на Γ_{22}), $\partial_{12}u_{22} = -\chi_{12}$ (на $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$), $\partial_{32}u_{22} = \chi_{23}$ (на $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$), $u_{22} \in \check{H}^1_{\Gamma_{22}}(\Omega_2)$;
3. $u_{23} - \triangle u_{23} = 0$ (в Ω_3), $\gamma_{33}u_{23} = 0$ (на Γ_{33}), $\partial_{13}u_{23} = \chi_{31}$ (на $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}$), $\partial_{23}u_{23} = -\chi_{23}$ (на $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$), $u_{23} \in \check{H}^1_{\Gamma_{33}}(\Omega_3)$.

Далее разобьем каждое из u_{2k}, $k = \overline{1,3}$, на два слагаемых (см. доказательство теоремы 2.1), определим их слабые решения и получим, что

$$\begin{aligned} u_{21} &= T_{21}(\chi_{12}) + T_{31}(-\chi_{31}), \\ u_{22} &= T_{12}(-\chi_{12}) + T_{32}(\chi_{23}), \\ u_{23} &= T_{13}(\chi_{31}) + T_{23}(-\chi_{23}), \end{aligned} \tag{35}$$

где T_{ij} — соответствующие операторы, $T_{ij} \in \mathscr{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij});\ \check{H}^1(\Omega_k))$. Теперь χ_{ij}, $i,j = \overline{1,3}$, находим из системы уравнений, которая является условиями сопряжения Дирихле в задаче (34):

$$\gamma_{21}(T_{21}\chi_{12} - T_{31}\chi_{31}) - \gamma_{12}(-T_{12}\chi_{12} + T_{32}\chi_{23}) = \widetilde{\varphi}_{12},$$
$$\gamma_{32}(-T_{12}\chi_{12}) + T_{32}\chi_{23}) - \gamma_{23}(T_{13}\chi_{31} - T_{23}\chi_{23}) = \widetilde{\varphi}_{23},$$
$$-\gamma_{31}(T_{21}\chi_{12} - T_{31}\chi_{31}) + \gamma_{13}(T_{13}\chi_{31} - T_{23}\chi_{23}) = \widetilde{\varphi}_{31}.$$

Пусть $\chi = (\chi_{12}; \chi_{23}; \chi_{31})^\tau$, $\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_{12}; \widetilde{\varphi}_{23}; \widetilde{\varphi}_{31})^\tau$. Получаем систему уравнений для операторной матрицы типа Стеклова: $C\chi = \widetilde{\varphi}$,
$C : H_- \to H_+$,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

где $C_{11} := \gamma_{21}T_{21} + \gamma_{12}T_{12}$, $C_{12} := -\gamma_{12}T_{32}$, $C_{13} := -\gamma_{21}T_{31}$, $C_{21} := -\gamma_{32}T_{12}$, $C_{22} := \gamma_{32}T_{32} + \gamma_{23}T_{23}$, $C_{23} := -\gamma_{23}T_{13}$, $C_{31} := -\gamma_{31}T_{21}$, $C_{32} := -\gamma_{13}T_{23}$, $C_{33} := \gamma_{31}T_{31} + \gamma_{13}T_{13}$. Изучим свойства оператора C.

1°. Операторы γ_{jk} и T_{jk} взаимно сопряжены.

Доказательство. Доказательство этого факта следует из определения слабого решения. Например, для u_{21} получаем слабое решение из пространства $\check{H}^1(\Omega_k)$ на основе формулы Грина:

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \triangle u_{21}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} +$$

$$+\langle \gamma_{31}\eta_1, -\chi_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})},\ \chi_{12} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}),\ \chi_{31} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31}).$$

В частности, для слабого решения u_{21} при $\chi_{31} = 0$ имеем:

$$(\eta_1, u_{21})_{\check{H}^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})},\ \forall \eta_1,\ u_{21} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1).$$

Следовательно, существует единственное $u_{21} = T_{21}\chi_{12}$:

$$(\eta_1, T_{21}\chi_{12})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})}.$$

Таким образом, $(T_{21})^* = \gamma_{21}$. Аналогично для других сочетаний. Вообще имеем, как и в общей схеме, связанной с выводом абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств, $(\gamma_{jk})^* = T_{jk} = (\partial_{jk})^{-1}$. □

2°. Если считать, что C действует в $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{31})$, то $C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Gamma))$. Приведенное выше C есть его расширение по непрерывности на $H_- := \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{23}) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31})$, а $\mathscr{R}(C) = H_+ := H^{1/2}(\Gamma_{12}) \times H^{1/2}(\Gamma_{23}) \times H^{1/2}(\Gamma_{31})$.

3°. Оператор C обладает свойством положительности

$$\langle C\chi, \chi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)} \geqslant 0, \forall \chi \in H_-.$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\begin{pmatrix} \gamma_{21}T_{21} + \gamma_{12}T_{12} & -\gamma_{12}T_{32} & -\gamma_{21}T_{31} \\ -\gamma_{32}T_{12} & \gamma_{32}T_{32} + \gamma_{23}T_{23} & -\gamma_{23}T_{13} \\ -\gamma_{31}T_{21} & -\gamma_{13}T_{23} & \gamma_{31}T_{31} + \gamma_{13}T_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{12} \\ \chi_{23} \\ \chi_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi_{12} \\ \chi_{23} \\ \chi_{31} \end{pmatrix} =$$

$= \langle (\gamma_{21}T_{21} + \gamma_{12}T_{12})\chi_{12} - \gamma_{12}T_{32}\chi_{23} - \gamma_{21}T_{31}\chi_{31}, \chi_{12}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle -\gamma_{32}T_{12}\chi_{12} + (\gamma_{32}T_{32} + \gamma_{23}T_{23})\chi_{23} - \gamma_{23}T_{13}\chi_{31}, \chi_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{23})} + \langle -\gamma_{31}T_{21}\chi_{12} - \gamma_{13}T_{23}\chi_{23} + (\gamma_{31}T_{31} + \gamma_{13}T_{13})\chi_{31}, \chi_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})} = \langle \gamma_{21}u_{21}, \partial_{21}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} - \langle \gamma_{12}u_{22}, -\partial_{12}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{32}u_{22}, \partial_{32}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{23})} - \langle \gamma_{23}u_{23}, -\partial_{23}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{23})} - \langle -\gamma_{31}u_{21}, \partial_{31}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})} + {}+\langle \gamma_{13}u_{23}, \partial_{13}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}$.

Рассмотрим формулу Грина для решения u_{21}:

$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \triangle u_{21}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{11}\eta_1, \partial_{11}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{11})} +$
$+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}, \forall \eta_1 \in \check{H}^1(\Omega_1)$.

Очевидно, что первое и второе слагаемые в правой части формулы Грина обращаются в ноль. Сделаем замену в оставшихся слагаемых $\eta_1 = u_{21}$. Получаем $(u_{21}, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \|u_{21}\|^2_{H^1(\Omega_1)} = \langle\gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle\gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})}$.
А значит, с учетом аналогичных формул для u_{22}, u_{23},

$$\langle C\chi, \chi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)} \geqslant 0, \forall\chi \in H_-.$$

Отсюда следует, что оператор C ограниченно действует из H_- на H_+, и потому (по теореме Банаха) существует ограниченный оператор $C^{-1} \in \mathscr{L}(H_+;\ H_-)$. □

В итоге для исходной задачи Стеклова (34) получаем следующий результат.

Теорема 5. *Сформулированная вспомогательная задача Стеклова в условиях теоремы 4 имеет единственное слабое решение $u_{(2)} \in \check{H}^1(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}),\ \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}),\ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}).$$

Решения этой задачи имеют вид (35) , где χ_{ij} находятся по формуле

$$\chi = C^{-1}\widetilde{\varphi}.$$

□

Доказательство этого утверждения проведено в рассуждениях выше.

2.4. **Аналог первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна.** Сформулируем аналог первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна для набора функций $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau$:

$$\begin{aligned} &u_{31} - \triangle u_{31} = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{31} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{32} - \triangle u_{32} = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{33} - \triangle u_{33} = f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{33} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0, \quad \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0\ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\ &\gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0, \quad \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0\ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\ &\gamma_{13}u_{33} - \gamma_{31}u_{31} = 0, \quad \partial_{13}u_{33} + \partial_{31}u_{31} = 0\ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

В этой задаче все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Введем в рассмотрение подпространство

$$\begin{aligned} H^1_\Gamma(\Omega) := \{u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega):\ &\gamma_{jj}u_j = 0\ (\text{на } \Gamma_{jj}),\ j = \overline{1,3};\\ &\gamma_{jk}u_k - \gamma_{kj}u_j = 0\ (\text{на } \Gamma_{jk}),\ \ j,k = \overline{1,3}\} \subset H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Запишем формулу Грина для задачи (36):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{3k} - \triangle u_{3k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \tag{37}$$

$$+\langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} +$$

$$+\langle \gamma_{13}\eta_3, \partial_{13}u_{33} + \partial_{31}u_{31} \rangle_{L_2(\Gamma_{13})}, \quad \forall \eta_k, u_{3k} \in H^1_\Gamma(\Omega_k).$$

Слабое решение определяем согласно тождеству

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_3 k)_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)}, \forall\ \eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega_k). \tag{38}$$

На его основе для задачи (36) докажем следующее утверждение.

Теорема 6. *Первая вспомогательная задача С. Г. Крейна имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_\Gamma(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3) \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*.$$

В этом случае решение дается формулой

$$u_3 = A^{-1} f,$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega),\ L_2(\Omega))$, $H^1_\Gamma(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H^1_\Gamma(\Omega))^*$. В частности, если

$$f = (f_1; f_2; f_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (H^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение.

Доказательство. При любых $\eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega)$ правая часть тождества (38) — линейный ограниченный функционал в пространстве $H^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $f \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*$. В этом случае по лемме Ф. Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве для любого $f \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*$ найдется единственный элемент $u_{(3)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ такой, при котором будет выполнено равенство (38). В курсе лекций [7] (применительно к этой задаче) были доказаны формулы

$$(\eta, u_{(3)})_{H^1_\Gamma(\Omega)} = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u_{(3)})_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, Au_{(3)} \rangle_{L_2(\Omega)},$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega),\ L_2(\Omega))$. Поэтому из (37) получаем

$$\sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{(3)})_{H^1_\Gamma(\Omega_k)} = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u_{(3)})_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \langle \eta, Au_{(3)} \rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\, \eta = (\eta_1;\ \eta_2;\ \eta_3) \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

Следовательно, $\langle \eta, f - Au_{(3)} \rangle_{L_2(\Omega)} = 0,\ \forall\ \eta \in H^1_\Gamma(\Omega)$. Так как η пробегает все $H^1_\Gamma(\Omega)$, то $(f - Au_{(3)})$ — нулевой функционал из $(H^1_\Gamma(\Omega))^*$ и $Au_{(3)} = f$.

Если

$$f \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

то формула (38) принимает вид

$$(\eta, f)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u_{(3)})_{H^1_\Gamma(\Omega)},$$

и в этом случае существует единственное обобщенное решение
$u_{(3)} = A^{-1} f$. □

2.5. **Аналог второй вспомогательной задачи С. Г. Крейна.** Рассмотрим аналог второй вспомогательной задачи Крейна для набора функций
$u_{(4)} := (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau$:

$$\begin{array}{lll} u_{41} - \triangle u_{41} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11} u_{41} = 0 & (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{42} - \triangle u_{42} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), & \gamma_{22} u_{42} = 0 & (\text{на } \Gamma_{22}), \\ u_{43} - \triangle u_{43} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), & \gamma_{33} u_{43} = 0 & (\text{на } \Gamma_{33}), \end{array} \tag{39}$$

$$\begin{array}{lll} \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{12} & (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, & \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{23} & (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{13} u_{43} - \gamma_{31} u_{41} = 0, & \partial_{13} u_{43} + \partial_{31} u_{41} = \psi_{31} & (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Здесь уравнения однородные, на внешних границах условия Дирихле однородные, на внутренних границах следы функций совпадают, а производные по нормали терпят заданный разрыв.

Запишем формулу Грина для задачи (39):

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{4k} - \triangle u_{4k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^{3} \langle \gamma_{kk} \eta_k, \partial_{kk} u_{4k} \rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} +$$
$$+ \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_{41} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{12} \eta_2, \partial_{12} u_{42} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31} \eta_1, \partial_{31} u_{41} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})} +$$
$$+ \langle \gamma_{13} \eta_3, \partial_{13} u_{43} \rangle_{L_2(\Gamma_{13})} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \partial_{32} u_{42} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \langle \gamma_{23} \eta_3, \partial_{23} u_{43} \rangle_{L_2(\Gamma_{23})},$$

$\forall \eta_k, u_{3k} \in H^1_\Gamma(\Omega),\ \ \varphi_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_{ij}),\ \ \psi_{ij} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}),\ i, j = \overline{1,3}.$

С помощью формулы Грина определим слабое решение задачи (39):

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \psi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \psi_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \tag{40}$$
$$+ \langle \gamma_{13} \eta_3, (-\psi_{13}) \rangle_{L_2(\Gamma_{13})}, \forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3) \ \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

В итоге рассмотрения этой задачи получаем следующий результат.

Теорема 7. *Вторая вспомогательная задача С. Г. Крейна имеет единственное слабое решение $u_{(4)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{21} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \psi_{32} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{32}),\ \psi_{13} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{13}).$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = W_{21}\psi_{21} + W_{32}\psi_{32} + W_{13}\psi_{13}, \tag{41}$$

где $W_{ij} :\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \to H^1_h(\Omega_i),\ i,j = \overline{1,3}.$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (см. [7])

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \min_{\gamma u=\varphi} \|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega)} \leqslant \|u\|_{H^1_\Gamma(\Omega)}.$$

Отсюда получаем, что при $\forall\ \eta \in H^1_\Gamma(\Omega)$ правая часть в (40) является линейным ограниченным функционалом $l_\psi(\eta)$ в $H^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия $\psi_{ij} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}),\ i,j = \overline{1,3}$. В самом деле,

$$|\langle\gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}| \leqslant \|\gamma_{21}\eta_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{21})} \cdot \|\psi_{12}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})} \leqslant \|\psi_{21}\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21})} \cdot \|\eta\|_{H^1_\Gamma(\Omega)}.$$

Аналогично для двух других случаев. И потому $l_\psi(\eta)$, т. е. правая часть тождества (40), — линейный ограниченный функционал в $H^1_\Gamma(\Omega)$.

Обратно, если $l_\psi(\eta)$ — линейный ограниченный функционал относительно $\eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega)$, то совокупность элементов $\{\gamma_{ij}\eta_i\}^3_{i,j=1}$ пробегает все $H^{1/2}(\Gamma_{ij})$, когда η_i пробегают все $H^1_\Gamma(\Omega)$. Поэтому элемент $\psi = (\psi_{21}; \psi_{32}; \psi_{13})$ должен принадлежать пространству $(H^{1/2}(\Gamma_{ij}))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}),\ i,j = \overline{1,3}$. Поскольку $l_\psi(\eta)$ — линейный ограниченный функционал в $H^1_\Gamma(\Omega)$, то по лемме Ф. Рисса существует единственное решение $u_{(4)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ такое, что справедливо тождество (32).

Докажем теперь, что решение имеет вид (41). Для этого разобьем исходную задачу на три вспомогательные (оставим неоднородность в условиях Неймана лишь в одном месте). Рассмотрим решение первой вспомогательной задачи $u_{411} \in H^1_\Gamma(\Omega) \subset H^1(\Omega)$. Из формулы Грина получаем тождество для слабого решения

$$(\eta_1, u_{411})_{H^1(\Omega_1)} = \langle\gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})},\ \forall\eta \in H^1_\Gamma(\Omega).$$

Отсюда, как и выше, получаем, что существует единственное слабое решение

$$u_{411} = W_{21}\psi_{21},\ W_{21} : \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}) \to H^1_h(\Omega).$$

Аналогично для двух других решений вспомогательных задач. Так как решение $u_{(4)}$ единственно, то оно имеет вид

$$u_{(4)} = u_{411} + u_{421} + u_{431} = W_{21}\psi_{21} + T_{32}\psi_{32} - T_{13}\psi_{13}.$$

$\square$

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи (18)–(19) сопряжения является следующее утверждение.

Теорема 8. *Исходная задача (18)–(19) имеет единственное слабое решение из пространства*

$$H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k)$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия теорем 2.1–2.4. Решение задачи (18)–(19) является суммой решений вспомогательных задач, рассмотренных в пп. 2.1–2.4. $\square$

С помощью данного подхода можно рассматривать задачи сопряжения для различных конфигураций областей. Общие выводы остаются неизменными.

Список литературы

1. Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

   LIONS, J-L. and MEJENES, A. (1971) *Inhomogeneous boundary value problems and their applications.* Moscow: Mir.

2. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

   KOPACHEVSKY, N. D., KREIN, S. G. and NGO ZUI KAN (1989) *Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and spectral problems.* Moscow: Nauka.

3. AGRANOVICH, M. S., VOITOVICH, N. N. and KATSENELENBANM, B. Z., Sivov, A. N. Generalized method of eigenoscillations in difraction theory / M. S. Agranovich, N. N.Voitovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov. — Berlin: Wiley–VCN, 1999. — 128 c.

4. KOPACHEVSKY, N. D. and KREIN, S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid-Birkhauser Verlag / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel–Boston–Berlin, 2001. — 384 c.

5. KOPACHEVSKY, N. D. and KREIN, S. G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid-Birkhauser Verlag / N. D. Kopachevsky, S. G. Krein. — Basel–Boston–Berlin, 2003. — 444 c.

6. RYCHKOV, V. S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains // J. London Math. Soc. — 1999, 60. — № 1. — С. 237–257.

7. Копачевский, Н. Д. Абстрактная формула Грина: специальный курс лекций / Н. Д. Копачевский. — Симферополь: ФЛП "Бондаренко О. Ф.", 2011. — 136 с.

   KOPACHEVSKY, N. D. (2011) *Abstract Green's formula: a special course of lectures.* Simferopol "Bondarenko".

8. Агранович, М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей / М. С. Агранович. — Москва: МЦНМО, 2013. — 379 с.

   AGRANOVICH, M. S. (2013) *Sobolev spaces , their generalizations and elliptic problems in domains with smooth and Lipschitz boundary.* Moscow: MTsNMO. 379.

9. AGRANOVICH, M. S. Sobolev spaces, their generalizations, and elliptic problems in smooth and lipschitz domains / M. S. Agranovich. — Springer International Publishing Switzerland, 2015. — 379 c.

10. Агранович, М. С. Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии / М. С. Агранович, Г. А. Амосов, М. Левитин // Российский журнал матем. физ. — 1999. — Т. 6. — № 3. — С. 247–281.

    AGRANOVICH, M. S., AMOSOV, G. A. and LEVITIN, M. (1999) Spectral problems for the Lame system in smooth and non-smooth domains with a spectral parameter in the boundary condition. *Russian Journal of Mathematical Physics.* 6 (3). p. 247–281.

11. AGRANOVICH, M. S. Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary // Russ. J. Math. Phys. — 2008, № 2. — С. 146–155.

12. Копачевский, Н. Д. Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V". — Ростов-на-Дону, 2015. — С. 211.

    KOPACHEVSKY, N. D. and Radomirskaya, K. A. (2015) Abstract mixed boundary conjugation problem. *International scientific conference "Modern methods and problems of operator theory and harmonic analysis and their applications".* Rostov-on-Don. p. 211.

13. Копачевский, Н. Д. Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. — Батилиман (Ласпи), 2015. — С. 52.

    KOPACHEVSKY, N. D. and RADOMIRSKAYA, K. A. (2015) Abstract boundary and spectral conjugation problem. *XXVI Crimean autumn mathematical school–symposium on spectral and evolutionary problems.* Batiliman (Balaclava). p. 52.

Zhukovskiy V. I., Kirichenko M. M. and Boldyrev M. V. 2016. Garanteed Outcomes and Risks in Multicriteria Problem. ***Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*****, 1, pp. 7 – 18.**

MSC2010: 91A06

В данной статье предлагается способ построения стратегии в многокритериальной задаче при неопределенности, обеспечивающей одновременно Парето-максимальность гарантированного исхода с минимальным риском. В качестве приложения рассмотрены два варианта задачи о диверсификации вклада по двум депозитам (рублевому и валютному). Заметим, что подобной задаче посвящена статья Жуковского В. И., Молоствова В. С. и Топчишвили А. Л. “Problem of multicurrency deposit diversification — three possible approaches to risk accounting”, опубликованная в 2014 г. в журнале “International Journal of Operations and Quantitative Management”, т. 20 (1), с. 1–15, где получены результаты, отличные от приведенных в настоящей работе. Дело в том, что паретовские решения образуют множество, элементы которого, вообще говоря, различны. И как в указанной работе, так и в настоящей статье фигурируют разные элементы одного и того же паретовского множества.

Ключевые слова: *максимум по Парето, стратегия, неопределенность, векторная гарантия, риск по Сэвиджу, принцип минимаксного сожаления.*

Zhukovskiy V. I. and Smirnova L. V. 2016. Berge-Vaisman equilibrium for one linear-quadratic differential game. ***Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*****, 1, pp. 19 – 29.**

MSC2010: 91A06

До настоящего времени исследования равновесия по Бержу в основном были ограничены лишь конечными бескоалиционными играми. В работе предпринята первоначальная попытка применения равновесия по Бержу к динамическому варианту бескоалиционной игры, а именно для позиционной бескоалиционной линейно-квадратичной игры двух лиц с малым параметром. Используя результаты теории метода малого параметра, в частности, теорему о непрерывной зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра, а также теорему Пуанкаре об аналитичности решения по параметру, выявлены коэффициентные критерии существования ситуации равновесия по Бержу–Вайсману, а также установлены условия существования равновесия по Бержу–Вайсману в указанной дифференциальной игре. Фактически статья является первоначальной по двум направлениям в теории линейно-квадратичных дифференциальных позиционных игр. Во-первых, выявления коэффициентных условий существования равновесия по Бержу–Вайсману; во-вторых, по практическому построению таких равновесий в виде равномерно сходящихся рядов по степеням малого параметра.

Ключевые слова: *бескоалиционная позиционная линейно-квадратичная игра, динамическое программирование, равновесие по Бержу–Вайсману, равновесие по Нэшу, непрерывная зависимость и аналитичность решений по параметру.*

Балашова Г. С. О принципах сплайн-экстраполяции / Г. С. Балашова // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 1 (30). — С. 29 – 37.

УДК: 517.518.23

В работе исследуется разрешимость задачи Дирихле для нелинейного дифференциального уравнения бесконечного порядка. Ранее для этого рассматривалась последовательность усеченных задач порядка $2m$ и с помощью предельного перехода при стремлении $m \to \infty$ устанавливалось существование обобщенного решения исходной задачи. В представленной статье предложен новый подход, а именно для разрешимости задачи Дирихле для нелинейного дифференциального уравнения бесконечного порядка предлагается дифференциальный оператор бесконечного порядка уравнения представить в виде сумме двух операторов бесконечного порядка, один из которых главный, а другой ему подчиненный. В основу их сравнения положены соотношения соответствующих им энергетических пространств Соболева бесконечного порядка. Тогда при выполнении ряда условий для главного и подчиненного операторов удается установить существование обобщенного решения для исходного уравнения при любой правой части из сопряженного пространства для главного оператора.

Ключевые слова: *разрешимость, теоремы вложения, пространства, бесконечный порядок, подчиненный оператор.*

Брук В. М. О граничных задачах для интегральных уравнений с операторными мерами / В. М. Брук // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 1 (30). — С. 38 – 48.

УДК: 517.983

Получены достаточные условия равномерной сходимости решений граничных задач для интегральных уравнений с операторными мерами, значениями которых являются линейные ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: *интегральное уравнение, операторная мера, граничная задача, гильбертово пространство, линейный оператор.*

Емеличев В. А. О радиусе T_1-устойчивости многокритериальной линейной булевой задачи с нормами Гельдера в пространствах параметров / В. А. Емеличев, К. Г. Кузьмин // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 1 (30). — С. 49 – 64.

УДК: 519.8

Рассматривается многокритериальная линейная булева задача, состоящая в поиске множества Парето. Получены нижняя и верхняя оценки радиуса T_1-устойчивости задачи в предположении, что в пространствах решений и критериев заданы произвольные нормы Гельдера. Как следствие, приведены известные оценки радиуса T_1-устойчивости задачи в пространствах с чебышевской метрикой, а также утверждения, свидетельствующие о достижимости указанных оценок.

Ключевые слова: *многокритериальная булева задача, множество Парето, радиус устойчивости, T_1-устойчивость, норма Гельдера*

Жуковский В. И. Исход и риск в многошаговой позиционной задаче при неопредленности / В. М. Жуковский, М. И. Высокос, А. С. Горбатов // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 1 (30). — С. 65 – 77.

УДК: 517.977.54

Рассмотрены вопросы принятия решения в однокритериальной задаче при стратегической неопределенности (ОЗН) с позиции ЛПР, стремящегося одновременно увеличить гарантированный исход с возможно меньшим гарантированным риском. При этом основываемся на принципе минимаксного сожаления (по Сэвиджу–Нихансу) с привлечением математического аппарата метода динамического программирования для дискретных задач. Здесь, во-первых, рассматривается ОЗН двух видов, отличающихся парами: контрстратегия — чистая неопределенность и чистая стратегия — стратегическая неопределенность. В первом случае строится функция сожаления, во втором — гарантии исхода и риска. Во-вторых, исходной ОЗН ставится в соответствие двухкритериальная дискретная позиционная задача, где первый критерий — гарантированный исход, а второй — "минус" гарантированный риск. Для этой двухкритериальной задачи строится максимальная по Парето чистая стратегия, которая и определяет величину гарантированного исхода, и гарантированный риск, сопровождающий реализацию гарантированного исхода. В качестве примера получен явный вид предлагаемого решения для линейно-квадратичного одношагового варианта ОЗН.

Ключевые слова: *многошаговая задача, задача управления, стратегия, многокритериальная задача, гарантии, максимум по Парето.*

Жуковский В. И. Уравнение равновновесий по Нэшу и Бержу в модели дуополии Бертрана / В. И. Жуковский, Т. В. Макаркина // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 1 (30). — С. 78 – 88.

УДК: 519.833.2

Для математической теории игр в последнее время характерно активное изучение концепции равновесия по Бержу, как антипода широко применяемого равновесия по Нэшу. Различие в том, что концепция равновесия по Нэшу имеет "эгоистический характер" — каждый участник игры стремится увеличить лишь свой выигрыш. В противоположность равновесию по Нэшу, для равновесия по Бержу характерен альтруизм — "забота" о выигрышах всех остальных игроков. Основа здесь — золотое правило нравственности: «Относись к другим так, как бы ты хотел, чтобы они относились к тебе». Такой подход заведомо исключает "жесткие меры" уравновешивания конфликтов — исключает войны, вооруженные столкновения, кровопролития. В предлагаемой читателю статье показано, что равновесие по Бержу можно применять в экономике. В частности, найдены коэффициенты в математической модели дуополии Бертрана, при которых равновесие по Бержу доставляет игрокам большие выигрыши, чем равновесие по Нэшу.

Ключевые слова: *бескоалиционная игра, равновесие по Нэшу, равновесие по Бержу, дуополия Бертрана.*

Копачевский Н. Д. Смешанные краевые задачи сопряжения / Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская // Таврический вестник информатики и математики. — 2016. — № 1 (30). — С. 89 – 108.

УДК: 517.95, 517.98

На базе абстрактной формулы Грина рассмотрен общий подход к абстрактным краевым задачам сопряжения. Разобран пример конфигурации пристыкованных областей для задач сопряжения на основе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа (конфигурация “трижды разрезанный арбуз”). Исходная неоднородная задача сопряжения разбивается на четыре вспомогательные, содержащие неоднородность лишь в одном месте — либо в уравнении, либо в краевом условии. С помощью определенных формул Грина находятся решения каждой из вспомогательных задач, доказываются соответствующие теоремы о существовании и единственности такого решения. В конце статьи получаем вывод, что решение исходной задачи — это сумма решений четырех вспомогательных задач.

Ключевые слова: *формула Грина, задачи сопряжения, липшицева граница, слабое решение, теорема Рисса, след функции, производная по внешней нормали.*

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Балашова Галина Сергеевна — д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», г. Москва, Российская Федерация
e-mail: BalashovaGS@mpei.ru

Болдырев Михаил Владиславович — студент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: m_boldyrev@list.ru

Брук Владислав Моисеевич — д. ф.-м. н., профессор кафедры математики и моделирования Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю. А., г. Саратов, Российская Федерация
e-mail: vladislavbruk@mail.ru

Высокос Мария Ивановна — к. ф.-м. н., доцент кафедры математики и физики физико-математического факультета Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: mvysokos@mail.ru

Горбатов Антон Сергеевич — аспирант кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: gorbatovanton@gmail.com

Емеличев Владимир Алексеевич — д. ф.-м. н., профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь
e-mail: vemelichev@gmail.com

Жуковский Владислав Иосифович

д. ф.-м. н., профессор кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: zhkvlad@yandex.ru

Кириченко Михаил Михайлович

студент кафедры оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва, Российская Федерация
e-mail: moyomylo11@gmail.com

Копачевский Николай Дмитриевич

д. ф.-м. н., заведующий кафедрой математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: kopachevsky@list.ru

Кузьмин Кирилл Геннадьевич

к. ф.-м. н., доцент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Республика Беларусь
e-mail: kuzminkg@mail.ru

Макаркина Татьяна Владимировна

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета информатики Государственного гуманитарно-технологического университета, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: tatmak147@yandex.ru

Радомирская Карина Александровна

аспирант кафедры математического анализа факультета математики и информатики Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского, г. Симферополь, Российская Федерация
e-mail: radomirskaya@mail.ru

Смирнова Лидия Викторовна

к. ф.-м. н., доцент кафедры естественнонаучных дисциплин филиала Московского государственного университета технологий и управления им. К. Г. Разумовского в г. Орехово-Зуево, г. Орехово-Зуево, Российская Федерация
e-mail: smirnovalidiya@rambler.ru

Подписано к печати 21.06.2016. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п. л. Тираж 50 экз.
Заказ № НП/11. Свободная цена.
Отпечатано в отделе редакционно-издательской деятельности КФУ имени В. И. Вернадского
295007, г. Симферополь, пр. Академика Вернадского, 4