

**Т** А В Р И Ч Е С К И Й  
**В** Е С Т Н И К  
**И** Н Ф О Р М А Т И К И И  
**М** А Т Е М А Т И К И

**№ 2 (25) ' 2014**

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

**ОСНОВАН В 2002 ГОДУ**

T AURIDA  
J OURNAL OF  
C OMPUTER SCIENCE THEORY AND  
M ATHEMATICS

2014, No. 2

INTERNATIONAL THEORETICAL RESEARCH EDITION, PEER-REVIEWED JOURNAL  
TAURIDA NATIONAL V. I. VERNADSKY UNIVERSITY

**FOUNDED IN 2002**

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА**

<b>В. И. ДОНСКОЙ</b>	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
<b>Е. П. БЕЛАН</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>Ю. И. ЖУРАВЛЁВ</b>	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В. В. КРАСНОПРОШИН</b>	профессор, доктор технических наук
<b>М. А. МУРАТОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>И. В. ОРЛОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>С. К. ПОЛУМИЕНКО</b>	доктор физико-математических наук
<b>К. В. РУДАКОВ</b>	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
<b>Ю. С. САМОЙЛЕНКО</b>	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
<b>А. А. САПОЖЕНКО</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>И. Б. СИРОДЖА</b>	профессор, доктор технических наук
<b>В. Н. ЧЕХОВ</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А. А. ЧИКРИЙ</b>	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук

**СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:**

к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ученый секретарь,  
к. ф.-м. н. **В. Ф. БЛЫЩИК**, к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА**

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского  
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

Факультет математики и информатики ТНУ  
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007  
Тел. гл. редактора: (0652) 63-75-42  
Тел. редакции: (0652) 602-466  
e-mail (гл. редактор): donskey@tnu.crimea.ua  
e-mail (для переписки): article@tvim.info  
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи  
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

**EDITORIAL BOARD**

<b>V. I. DONSKOY</b>	Editor-in-chief, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>E. P. BELAN</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Yu. I. ZHURAVLEV</b>	Member of Ukrainian National Academy and Russian Academy of Sciences, Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>N. D. KOPACHEVSKY</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>V. V. KRASNOPROSHIN</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>M. A. MURATOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>I. V. ORLOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>O. G. NAKONECHNYI</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>S. K. POLUMIENKO</b>	Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>K. V. RUDAKOV</b>	Corresponding member of Russian Academy of Sciences, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>Yu. S. SAMOYLENKO</b>	Corresponding member of National Academy of Sciences of Ukraine, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>A. A. SAPOZHENKO</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>I. B. SIRODJA</b>	Professor, Doctor of Engineering Sciences
<b>V. N. CHEHOV</b>	Professor, Doctor of Physico-Mathematical Sciences
<b>A. A. CHIKRIY</b>	Corresponding member of National Academy of Sciences of Ukraine Doctor of Physico-Mathematical Sciences

**EDITORIAL BOARD**

<b>A. S. ANAFIYEV</b>	Scientific secretary, Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>V. F. BLYSCHIK</b>	Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences
<b>M. G. KOZLOVA</b>	Associate professor, Candidate of Physico-Mathematical Sciences

**OFFICE ADDRESS:**

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics,  
Taurida National V. I. Vernadsky University  
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation

**JOURNAL SITE: [www.tvim.info](http://www.tvim.info)**

**FOR CORRESPONDENCE:**

Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, Crimea, 295007, Russian Federation  
**Tel.** +38 0652 637 542 — editor-in-chief  
+38 0652 602 466 — office  
**Email:** [donskoy@tnu.crimea.edu](mailto:donskoy@tnu.crimea.edu) — editor-in-chief  
[article@tvim.info](mailto:article@tvim.info) — for correspondence

Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics is a peer-reviewed journal, published by Taurida National V. I. Vernadsky University. The journal publishes research papers in the fields of computer science and mathematics.

**THEMATIC SECTIONS:**

Algorithm Theory, Mathematical Logic, Discrete Optimization, Complexity Theory, Calculus Mathematics, Machine Learning, Pattern Recognition, Data Mining, Deductive Systems and Knowledge Bases, Decision Making Models;

Functional Analysis and Applications, Integral, Differential Equations, Dynamic Systems, Spectral and Evolutional Tasks, The mathematical problems of hydrodynamics.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Бухтояров С. Е., Емеличев В. А.</b> Об устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями крайнего оптимизма .....	7
<b>Донской В. И.</b> Интеллектуальное управление: обзор .....	14
<b>Емец А. О.</b> Нечеткие линейные системы уравнений: допусковые решения с разным типом принадлежности .....	36
<b>Михайлов Д. В., Емельянов Г. М.</b> Смысловые эталоны и передача знаний в задаче их оценки на основе тестов открытого типа .....	47
<b>Руденко Л. И.</b> Алгоритм синтеза линейной функции и его приложения ....	63
<b>Третьяков Д. В., Халилова З. И.</b> Об одном классе $t$ -дискриминантов и $t$ -уравнениях Пелля .....	74
<b>Спринджук М. В., Демидчик Ю. Е., Шелкович С. Е., Кончиц А. П.</b> Методология, модели и алгоритмы обработки изображений лимфангиогенеза для сравнения и прогноза развития злокачественных опухолей .....	88
Рефераты .....	100
Список авторов номера .....	103

## TABLE OF CONTENTS

<b>Bukhtoyarov, S. E. and Emelichev, V. A.</b> On stability of vector investment problem with extreme optimism criteria.....	7
<b>Donskoy, V. I.</b> Intelligent control: review .....	14
<b>Yemets, A. O.</b> Fuzzy linear equations systems.....	36
<b>Mikhaylov, D. V. and Yemelyanov, G. M.</b> Semantic etalons and knowledge transfer in the problem of their estimation based on the open type tests.....	47
<b>Rudenko, L. I.</b> Linear function synthesis algorithm and it's applications.....	63
<b>Tretyakov, D. V. and Khalylova, Z. I.</b> On some class of $t$ -discriminants and $t$ -Pell equations .....	74
<b>Sprindjuk, M. V, Demidchik, Yu. E., Shelkovich, S. E and Konchiz, A. P.</b> Methodology, models and algorithms of image processing of the lymphangiogenesis pathology for the goals of malignancy expansion comparison and prognosis.....	88
Abstracts .....	100
Authors .....	103

УДК 519.7

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕКТОРНОЙ ИНВЕСТИЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С КРИТЕРИЯМИ КРАЙНЕГО ОПТИМИЗМА<sup>1</sup>

© С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
ПР-Т НЕЗАВИСИМОСТИ, 4, Г. МИНСК, 220050, БЕЛАРУСЬ  
E-MAIL: *emelichev@tut.by*

ON STABILITY OF VECTOR INVESTMENT PROBLEM WITH EXTREME OPTIMISM  
CRITERIA.

Bukhtoyarov, S. E. and Emelichev, V. A.

**Abstract.** The multicriteria investment boolean problem with profit extreme optimism criteria (MAXMAX) and Pareto optimality principle is considered. Upper and lower bounds of stability radius of this problem are given in the case of an arbitrary Hölder metric  $l_p, 1 \leq p \leq \infty$ , in space of financial market states and Chebyshev metric  $l_\infty$  in portfolio space and in space of project economical efficiency.

### ВВЕДЕНИЕ

Векторные (многокритериальные) дискретные модели принятия решений находят широкое применение в экономике, управлении, проектировании и многих других областях прикладных исследований. В последние годы резко вырос интерес к процессам принятия многоцелевых решений в условиях неопределённости и риска (задачи теории игр, математической экономики, инвестиционного анализа, банковской сферы, страхового бизнеса и т.п.). В этих условиях качество принятых решений и их последствий существенно зависит от полноты учета всех неопределённых и случайных факторов: неточности входной информации, неадекватности математических моделей реальным процессам, ошибок округления, погрешностей вычислений и др. Порой сколь угодно малые погрешности в исходной информации влекут значительные искажения искомых решений. Такие задачи обычно называются некорректно поставленными, т.е. являются неустойчивыми к малым изменениям исходных данных, их решение может быть лишено смысла [1]. При этом естественно возникает вопрос: в каких пределах можно варьировать (возмущать) начальные данные задачи, чтобы множество ее оптимальных решений обладало некоторым заданным свойством инвариантности? Этой проблематике и посвящена настоящая статья, где для

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф13К-078)

векторной инвестиционной задачи формирования оптимального портфеля с критериями крайнего оптимизма по доходности получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости задачи в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка задана произвольная метрика Гёльдера  $l_p, 1 \leq p \leq \infty$ , а в пространстве инвестиционных проектов и критериальном пространстве экономической эффективности проектов — метрика Чебышева  $l_\infty$ . Отметим, что ранее в [2–4] подобные оценки радиуса устойчивости были известны лишь в частных случаях, когда во всех трех пространствах параметров векторной инвестиционной задачи задавались метрики  $l_1$  и  $l_\infty$  в определенных комбинациях. В [5] приведен обзор результатов, связанных с оценками радиуса устойчивости любого фиксированного Парето-оптимального портфеля векторных инвестиционных задач с критериями Сэвиджа и Вальда.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим векторный ( $s$ -критериальный) вариант булевой задачи управления инвестициями, основанный на теории Марковица принятия решений в области капиталовложений [6].

Пусть  $n$  — количество альтернативных инвестиционных проектов (активов);  $m$  — количество возможных (прогнозных) состояний финансового рынка, т.е. число вариантов сценариев развития;  $s$  — количество видов (показателей) эффективности (доходности) инвестиционного проекта (таких, как NPV, NFV, PI и др. [7,8]);  $e_{ijk}$  — ожидаемая оценка экономической эффективности вида  $k \in N_s = \{1, 2, \dots, s\}$  инвестиционного проекта с номером  $j \in N_n$  в случае, когда рынок находится в состоянии  $i \in N_m$ ;  $E = [e_{ijk}]$  — трёхмерная матрица размера  $m \times n \times s$  с элементами из  $\mathbb{R}$ . Пусть  $x_j = 1$ , если проект  $j \in N_n$  реализуется, и  $x_j = 0$  в противном случае. Инвестиционным портфелем назовём булевый вектор  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ . Через  $X \subset \mathbb{E}^n$ ,  $\mathbb{E} = \{0, 1\}$ ,  $n \geq 2$ , будем обозначать множество всех допустимых инвестиционных портфелей, т.е. тех, реализация которых не превосходит начальный капитал инвестора и допустимого уровня риска.

На множестве портфелей  $X$  зададим векторную целевую функцию  $f(x, E) = (f_1(x, E_1), f_2(x, E_2), \dots, f_s(x, E_s))$ , компонентами которой являются широко известные в теории принятия решений критерии крайнего оптимизма (MAXMAX)

$$f_k(x, E_k) = \max_{i \in N_m} e_{ik}x = \max_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk}x_j \rightarrow \max_{x \in X} k \in N_s,$$

где  $E_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  —  $k$ -е сечение матрицы  $E \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$ ,  $e_{ik} = (e_{i1k}, e_{i2k}, \dots, e_{ink})$  —  $i$ -я строка этого сечения. С помощью такого критерия азартный инвестор оптимизирует



эффективность портфеля в предположении, что рынок находится в самом выгодном для него состоянии, а именно, когда доходность портфеля максимальна. Очевидно, что подобный подход основан на стереотипе поведения безоглядного оптимиста ("или пан или пропал", "кто не рискует, тот не выигрывает" и т. п.).

Под векторной ( $s$ -критериальной) инвестиционной булевой задачей  $Z^s(E)$ ,  $s \in \mathbb{N}$  будем понимать задачу поиска множества Парето (множество Парето-оптимальных портфелей)

$$P^s(E) = \{x \in X : X(x, E) = \emptyset\},$$

$$X(x, E) = \{x' \in X : f(x, E) \leq f(x', E) \ \& \ f(x, E) \neq f(x', E)\}.$$

Для всякого натурального числа  $d$  в действительном пространстве  $\mathbb{R}^d$  определим метрику Гёльдера  $l_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , т.е. нормой вектора  $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$  считаем число

$$\|a\|_p = \left( \sum_{j \in N_d} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Будем также использовать метрику Чебышева  $l_\infty$

$$\|a\|_\infty = \max\{|a_j| : j \in N_d\}.$$

Легко убедиться, что при любом числе  $p \in [1, \infty]$  справедливо равенство

$$\|a\|_p = m^{\frac{1}{p}} \alpha, \quad (1)$$

если каждой компонентой вектора  $a \in \mathbb{R}^m$  является число  $\alpha > 0$  и  $\frac{1}{p} = 0$  при  $p = \infty$ .

Далее, в пространстве состояний рынка  $\mathbb{R}^m$  зададим метрику  $l_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , а в пространстве инвестиционных проектов  $\mathbb{R}^n$  и критериальном пространстве эффективности  $\mathbb{R}^s$  — чебышевскую метрику  $l_\infty$ . Тем самым полагаем

$$\|E_k\|_{\infty p} = \|(\|e_{1k}\|_\infty, \|e_{2k}\|_\infty, \dots, \|e_{mk}\|_\infty)\|_p, \quad k \in N_s,$$

$$\|E\|_{\infty p \infty} = \|(\|E_1\|_{\infty p}, \|E_2\|_{\infty p}, \dots, \|E_s\|_{\infty p})\|_\infty.$$

Очевидно, что справедливы неравенства

$$\|e_{ik}\|_\infty \leq \|E_k\|_{\infty p} \leq \|E\|_{\infty p \infty}, \quad i \in N_m, \quad k \in N_s. \quad (2)$$

Отсюда получаем, что для любых портфелей  $x$  и  $x'$  верны неравенства

$$e_{ik}x - e_{i'k}x' \geq -(\|e_{ik}\|_\infty \|x\|_1 + \|e_{i'k}\|_\infty \|x'\|_1) \geq -\|E_k\|_{\infty p} \|x + x'\|_1, \quad i, i' \in N_m, \quad k \in N_s. \quad (3)$$

По аналогии с [2–4] радиусом устойчивости задачи  $Z^s(E)$ ,  $s \in \mathbb{N}$ , назовём число

$$\rho = \rho^s(m, p) = \begin{cases} \sup \Xi, & \text{если } \Xi \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \Xi = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) \ (P^s(E + E') \subseteq (P^s(E)))\},$$

$\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbb{R}^{m \times n \times s} : \|E'\|_{\infty p \infty} < \varepsilon\}$  — множество возмущающих матриц,  $P^s(E + E')$  — множество Парето возмущенной задачи  $Z^s(E + E')$ . Таким образом, радиус устойчивости задачи  $Z^s(E)$  — это предельный уровень возмущений элементов матрицы  $E$  в нормированном пространстве  $\mathbb{R}^{m \times n \times s}$ , которые не приводят к появлению новых Парето-оптимальных портфелей.

В дальнейшем будем считать, что  $X \neq P^s(E)$ , ибо в противном случае радиус устойчивости следует полагать равным бесконечности.

## 2. ОЦЕНКИ РАДИУСА УСТОЙЧИВОСТИ

При выполнении неравенства  $P^s(E) \neq \emptyset$  положим

$$\varphi = \varphi^s(m) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in X(x, E)} \min_{k \in N_s} \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} \frac{e_{i'k}x' - e_{ik}x}{\|x' + x\|_1},$$

$$\psi = \psi^s(m) = \min_{x \notin P^s(E)} \max_{x' \in X(x, E)} \min_{k \in N_s} \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} \frac{e_{i'k}x' - e_{ik}x}{\|x' - x\|_1}.$$

Очевидно, что  $\varphi$  и  $\psi$  — неотрицательные числа.

**Теорема.** При любых  $m \in \mathbb{N}$  и  $p \in [1, \infty]$  для радиуса устойчивости  $\rho^s(m, p)$  справедливы следующие оценки

$$\varphi^s(m) \leq \rho^s(m, p) \leq m^{\frac{1}{p}} \psi^s(m).$$

*Доказательство.* Сначала докажем справедливость неравенства  $\rho \geq \varphi$ , которое очевидно, если  $\varphi = 0$ . Пусть  $\varphi > 0$  и пусть возмущающая матрица  $E' = [e'_{ijk}] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$  с сечениями  $E'_k$ ,  $k \in N_s$ , принадлежит множеству  $\Omega_p(\varphi)$ . Согласно определению числа  $\varphi$  для любого портфеля  $x \notin P^s(E)$  найдётся такой портфель  $x^0 \in X(x, E)$ , что ввиду (2) имеем

$$\frac{f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k)}{\|x^0 - x\|_1} \geq \varphi > \|E'\|_{\infty p \infty} \geq \|E'_k\|_{\infty p}, \quad k \in N_s.$$

Поэтому, применяя (3), для всякого индекса  $k \in N_s$  выводим

$$\begin{aligned} f_k(x^0, E_k + E'_k) - f_k(x, E_k + E'_k) &= \max_{i \in N_m} (e_{ik} + e'_{ik})x^0 - \max_{i \in N_m} (e_{ik} + e'_{ik})x = \\ &= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} (e_{i'k}x^0 + e'_{i'k}x^0 - e_{ik}x - e'_{ik}x) \geq \end{aligned}$$

$$\geq f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k) - \|E'_k\|_{\infty p} \|x^0 - x\|_1 > 0,$$

т.е.  $x$  не является Парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи  $Z^s(E + E')$ . Резюмируя и учитывая  $x \notin P^s(E)$ , заключаем, что

$$\forall E' \in \Omega_p(\varphi) \quad (P^s(E + E') \subseteq P^s(E)).$$

Следовательно, справедливо неравенство  $\rho \geq \varphi$ .

Далее докажем неравенство  $\rho \leq m^{\frac{1}{p}}\psi$ . В соответствии с определением числа  $\psi$  найдётся такой портфель  $x^* \notin P^s(E)$ , что для каждого портфеля  $x \in X(x^*, E)$  существует индекс  $l = l(x) \in N_s$ , для которого справедливо неравенство

$$\psi \|x - x^*\|_1 \geq f_l(x, E_l) - f_l(x^*, E_l). \quad (4)$$

Полагая  $\varepsilon > m^{\frac{1}{p}}\psi$ , рассмотрим возмущающую матрицу  $E^0 = [e_{ijk}^0] \in \mathbb{R}^{m \times n \times s}$  с элементами

$$e_{ijk}^0 = \begin{cases} \delta, & \text{если } i \in N_m, x_j^0 = 1, k \in N_s, \\ -\delta & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где  $\varepsilon/m^{\frac{1}{p}} > \delta > \psi$ . Тогда, принимая во внимание (1), имеем

$$\|e_{ik}^0\|_{\infty} = \delta, \quad \|E_k^0\|_{\infty p} = \|E^0\|_{\infty p \infty} = m^{\frac{1}{p}}\delta, \quad i \in N_m, k \in N_s.$$

Поэтому  $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$ . Кроме того, все строки  $e_{ik}^0, i \in N_m$ , любого сечения  $E_k^0, k \in N_s$ , одинаковы и состоят из компонент  $\delta$  и  $-\delta$ . Обозначив такую строку через  $A$ , получаем

$$A(x - x^*) = -\delta \|x - x^*\|_1 \leq -\delta < 0. \quad (5)$$

Отсюда, учитывая (4) и строение возмущающей матрицы  $E^0$ , выводим, что для любого портфеля  $x \in X(x^*, E)$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} f_l(x, E_l + E_l^0) - f_l(x^*, E_l + E_l^0) &= \max_{i \in N_m} (e_{il} + A)x - \max_{i \in N_m} (e_{il} + A)x^* = \\ &= \min_{i \in N_m} \max_{i' \in N_m} (e_{i'l}x - e_{i'l}x^*) + A(x - x^*) = f_l(x, E_l) - f_l(x^*, E_l) + \\ &\quad + A(x - x^*) \leq (\psi - \delta) \|x - x^*\|_1 < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива формула

$$x \in X(x^*, E) \Rightarrow x \notin X(x^*, E + E^0). \quad (6)$$

Допустим теперь, что  $x \notin X(x^*, E)$ . Тогда возможны лишь следующие два случая.

Случай 1:  $f(x, E) = f(x^*, E)$ . Тогда для любого индекса  $k \in N_s$  соотношения (5) влекут

$$\begin{aligned} f_k(x, E + E^0) - f_k(x^*, E + E^0) &= \max_{i \in N_m} (e_{ik} + A)x + \max_{i \in N_m} (e_{ik} + A)x^* = \\ &= f_k(x, E) - f_k(x^*, E) + A(x - x^*) < 0. \end{aligned}$$

Случай 2: Существует такой индекс  $q$ , что  $f_q(x, E) < f_q(x^*, E)$ . Тогда вновь используя (5), имеем  $f_q(x, E_q + E_q^0) < f_q(x^*, E_q + E_q^0)$ .

Итак,  $x \notin X(x^*, E + E^0)$ , если  $x \notin X(x^*, E)$ . Этот факт вместе с (6) даёт  $X(x^*, E + E^0) = \emptyset$ , т. е.  $x^*$  является Парето-оптимальным портфелем возмущенной задачи  $Z^s(E + E^0)$ . Отсюда, так как  $x^* \notin P^s(E)$ , заключаем, что при любом числе  $\varepsilon > m^{\frac{1}{p}}\psi$  гарантируется существование такой возмущенной матрицы  $E^0 \in \Omega_p(\varepsilon)$ , что  $P^s(E + E^0) \not\subseteq P^s(E)$ . Следовательно,  $\rho < \varepsilon$  для всякого  $\varepsilon > m^{\frac{1}{p}}\psi$ , тем самым  $\rho \leq m^{\frac{1}{p}}\psi$ . □

Из теоремы вытекает следующий известный результат.

**Следствие [3].**  $\varphi^s(m) \leq \rho^s(m, \infty) \leq \psi^s(m)$ .

О достижимости этих оценок свидетельствует следующее очевидное утверждение: если для любой пары портфелей  $x \notin P^s(E)$  и  $x' \in X(x, E)$  множество  $\{k \in N_n : x_j = x'_j = 1\}$  пусто, то справедлива формула

$$\rho^s(m, \infty) = \varphi^s(m) = \psi^s(m), \quad m, s \in \mathbb{N}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на базе портфельной теории Марковица сформулирована векторная инвестиционная булева задача с паретовским принципом оптимальности, в которой доходность выбираемого инвестором портфеля оценивается векторной целевой функцией, состоящей из критериев крайнего оптимизма, присущего безоглядному игроку. Фактор неопределенности и неточности входной информации предлагается учитывать путем указания пределов надежности принимаемых инвестором решений, т.е. с помощью оценок радиуса устойчивости множества Парето. В результате проведенного параметрического анализа получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка задана произвольная метрика Гёльдера  $l_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , в пространстве инвестиционных проектов и критериальном пространстве экономической эффективности проектов — метрика

Чебышева  $l_\infty$ . Оказалось, что нижняя оценка не зависит от величины  $p$ , а верхняя уменьшается в  $m$  раз при возрастании числа  $p$  от 1 до  $\infty$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1986. — 286 с.  
Tihonov A. N. Solution methods of incorrect problems / A. N. Tihonov, V. Ya. Arsenin. — М.: Наука, 1986. — 286 p.
2. Emelichev V. On stability radius of the multicriteria variant of Markowitz's investment portfolio problem / V. Emelichev, V. Korotkov // Bulletin of the Academy of Science of Moldova. Mathematics. — 2011. — № 1. — С. 83–94.
3. Emelichev V. A. Stability radius of a vector investment problem with Savage's minimax risk criteria / V. A. Emelichev, V. V. Korotkov // Cybernetics and Systems Analysis. — 2012. — V. 48, No. 3. — P. 378–386.
4. Emelichev V. A. On stability of a vector Boolean investment problem with Wald's criteria / V. A. Emelichev, V. V. Korotkov // Discrete Math. Appl. — 2012. — V. 22, No. 4. — P. 367–381.
5. Emelichev V. A. Stability and effective algorithms for solving multiobjective discrete optimization problems with incomplete information / V. A. Emelichev, V. M. Kotov, K. G. Kuzmin, T. T. Lebedeva, N. V. Semenova, T. I. Sergienko // Journal Automation and Information Sciences. — 2014. — V. 26, No. 2. — P. 27–41.
6. Markowitz H. M. Portfolio selection: efficient diversification of investments / H. M. Markowitz. — New York: Wiley, 1991. — 400 с.
7. Виленский П. Л. Оценки эффективности инвестиционных проектов: теория и практика / П. Л. Виленский, В. Н. Лившиц, С. А. Смоляк. — М.: Дело, 2008. — 1104 с.  
Vilenskii P. L. Investment projects efficiency estimation: theory and practice / P. L. Vilenskii, V. N. Livshits, S. A. Smolyak. — М.: Delo, 2008. — 1104 p.
8. Царев В. В. Оценка экономической эффективности инвестиций / В. В. Царев. — СПб.: Питер, 2004. — 464 с.  
Tsarev V. V. Economic efficiency estimation of investments / V. V. Tsarev. — SPb.: Piter, 2004. — 464 p.

*Статья поступила в редакцию 23.07.2014*

УДК 004.8+519.711

## ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ: ОБЗОР

© В. И. Донской

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, РЕСПУБЛИКА КРЫМ, РОССИЯ  
E-MAIL: [donskoy@tnu.crimea.ua](mailto:donskoy@tnu.crimea.ua)

### INTELLIGENT CONTROL: REVIEW.

Donskoy V. I.

**Abstract.** The paper presents a review of the intellectual control systems: foundation, applications, program agents. The intellectual control is the most interesting application domain of theoretical cybernetics in the modern information systems. Here all developed receptions, methods, various parts of theory are going together: recognition of the image-states, concept formation, identification, optimization based on incomplete information, self-organizing automata theory. Practically all methods of operations research are joined here.

Area of practical application of methods of intellectual control is extraordinarily wide and includes: programs-agents for the difficult (especially functioning in the network environment) information systems; agents for the production workshop management; intellectual programs for decision-making in the regional systems; control programs in robotics; programs-researchers for automatic spaces vehicles and great deal other.

The dynamic intellectual systems, which able to rebuild itself as far as they are functioning in an environment being surrounding of controlled object, are most difficult. To realize such systems the design of mechanism of information "forgetting" is required for information which becomes in a time irrelevant.

Prime directions of development of intellectual control theory appear: development of specific models of memory for agents, algorithmic knowledge bases for agents, models of dynamic automatic state classification of the controlled objects and environment, automatic change of structures of mathematical models and even automatic changing of model in-use by an agent.

### ВВЕДЕНИЕ

В теории управления выделяют как основные элементы — *объект управления, внешнюю среду*, в которой функционирует этот объект, *систему управления*, которая на основе информации о состояниях внешней среды и объекта управления оказывает на него *управляющее воздействие*, а также *критерии качества управления и ограничения*, носящие ресурсный или технический характер.

Математическая теория управления абстрагируется от физических свойств перчисленных элементов и "работает" с математическими моделями управляемых

объектов, среды, систем управления и управляющих воздействий. Последние описываются информацией, представленной в той или иной форме — текстов, чисел, функций и пр.

*Традиционное, классическое управление* предполагает разработку моделей объектов и управляющих систем специалистом-математиком на основе заданных свойств перечисленных выше основных элементов.

*Гибкое производственное управление* предполагает ситуативную перестройку критериев и управляющих воздействий. В качестве примера реализации такого управления можно рассмотреть систему, основанную на динамическом отборе подходящих оперативных критериев и стратегий производственного расписания, которая представлена в работе [24]. Методология управления данной системы основана на двухуровневом механизме принятия решений. Первый уровень предназначен для выбора доминирующего критерия управления и релевантного управления расписанием производственного процесса при помощи алгоритма, основанного на правилах. На втором уровне в результате упреждающего многопроходного имитационного моделирования определяется расписание производственного процесса, которое позволяет как можно более улучшить значение критерия качества, выбранного на первом уровне.

Можно отметить тенденцию включения методов индуктивного обучения в инструментарий проектирования систем гибкого производственного управления [3, 14, 16, 25].

*Обучаемое управление* предполагает, что система управления обладает вычислительными возможностями, позволяющими извлекать и обобщать знания с целью порождения математической модели управляемой системы и модифицировать свое собственное управляющее воздействие на основе этих знаний [8].

*Интеллектуальное управление* характеризуется эмуляцией методов управления, свойственных человеку: предполагается использование адаптации, обучения, планирования в условиях неопределенности и обработки больших объемов разнотипных данных [1, 29].

Обучение является важным и определяющим свойством интеллектуального управления. Именно способность к обучению обеспечивает автономность поведения управляющей системы, обеспечивает её адаптивную самоорганизацию при изменении свойств объекта управления и/или внешней среды. Обучение может рассматриваться как процесс, посредством которого система управления может модифицировать свои функции для повышения качества функционирования управляемого объекта на основе извлечения релевантной информации (знаний).

В работе [2] Панос Антсаклис объединяет два приведенных выше термина в один, вводя “*Интеллектуальное управление с обучением*” (*Intelligent Learning Control*), что фактически не привносит ничего нового в рассматриваемую парадигму, но может быть оправдано центральной ролью обучения в выработке модификаций моделей объекта управления и функций управляющей системы. П.Антсаклис приводит следующую краткую классификацию направлений применения машинного обучения в интеллектуальном управлении:

- обучение, обобщающее знания об управляемом объекте (I);
- обучение, обобщающее знания об окружающей среде (II);
- обучение, обобщающее знания о самой управляющей системе (контроллере) с целью его модификации (III);
- обучение, в результате которого синтезируется новая целевая функция и ограничения, определяющие возможности и качество функционирования объекта управления (IV).

Несложно понять, что пункт (IV), вообще говоря, включает как необходимые элементы все остальные перечисленные выше пункты и является центральным в математической постановке задачи автоматического интеллектуального управления на основе синтеза функций цели и текущих ограничений методами машинного обучения.

Уместно упомянуть *адаптивное автоматическое управление*, под которым традиционно понимается параметрическая адаптация систем, как правило, с обратной связью и чаще всего — с целью повышения устойчивости (помехоустойчивости). Важнейшей особенностью интеллектуального управления, отличающей его от адаптивного управления, является возможность изменения структуры управления, применяемых моделей и даже принципов управления, а не только параметров. Хотя можно заметить, что адаптивное управление используется, в частности, при обучении нейронных сетей зафиксированной структуры путем модификации их параметров на основе наблюдаемой информации.

Если рассмотреть следующую упрощенную формулу: “интеллектуальное управление = теория управления + искусственный интеллект”, то возникнет ощущение, что в ней чего-то не хватает. И любой опытный разработчик систем интеллектуального управления заметит: нужно обязательно добавить в приведенную формулу исследование операций, поскольку теория поиска на графах, теория очередей, теория игр и в целом теория оптимального выбора являются важнейшим инструментарием при разработке систем интеллектуального управления [12].



Сам процесс такой разработки обязательно будет являться многоуровневым и итерационным, что удачно проиллюстрировано схемой в работе [12] (Рис. 1).

Важную роль играет специфика процесса разработки, связанная со следующими основными свойствами выбираемых математических моделей:

- используются логические, многозначно-дискретные или непрерывные переменные;
- используется обучение по прецедентам (CBL — *Case Based Learning*), путем извлечения знаний (KBL — *Knowledge Base Learning*), гибридное обучение — *Hybrid Learning*);
- используется только параметрическая или также и структурная оптимизация обучаемых моделей управления;



Рис. 1. Схематическое представление процесса разработки систем интеллектуального управления [12]

- реализуется ли возможность применения пополняемой и модифицируемой базы алгоритмов управления;
- создается ли специальная программная среда для моделирования и верификации создаваемой системы интеллектуального управления.

Приведенные особенности не исчерпывают всего многообразия факторов и свойств, которые сопутствуют процессам проектирования систем интеллектуального управления.

## 1. ОПЫТ СОЗДАНИЯ СИСТЕМ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В работе [26] представлен *интерактивный метод построения контроллера динамической системы на основе комбинирования извлечения знаний оператора, работавшего с этой системой, и машинного обучения*. Метод применялся для **имитации управления самолетом в тренажере полета**. Программа извлечения знаний генерировала правила, фиксируя действия пилота во время "полета". Схема управления приведена на рис. 2.

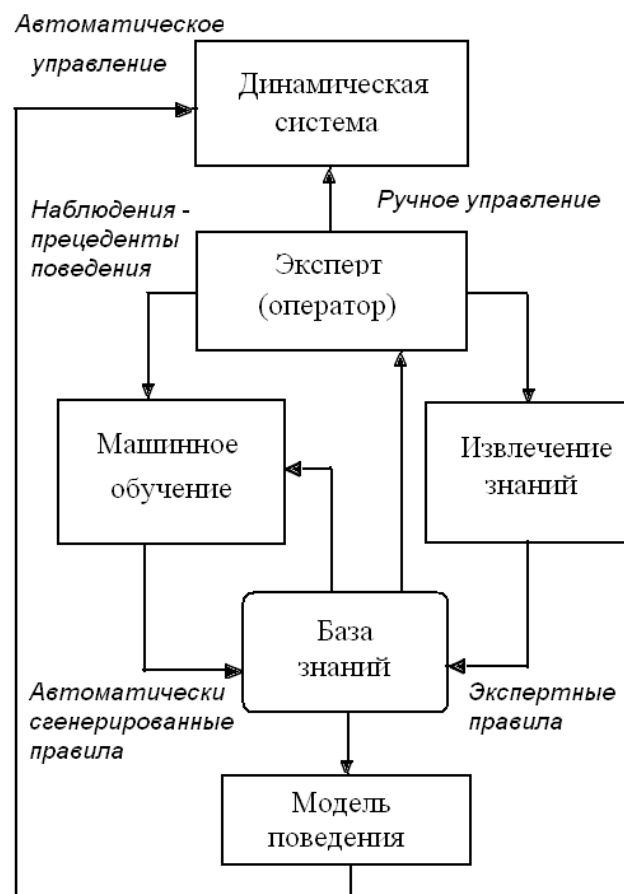


Рис. 2. Гибридная система интеллектуального управления, использующая прецеденты и экспертные знания – продукции [26].

В работе [7] предложен **подход к построению гибкого интеллектуального управления производственным цехом с множественной параллельной обработкой изделий**, основанный на применении решающих деревьев. Авторы этой работы использовали оригинальный четырехстадийный алгоритм синтеза решающего дерева, указав его преимущества перед алгоритмом *S5.0* — улучшенной версией *S4.5* [18]. Основные решения управляющей системы обеспечивают выбор пар «операция-станок» и последовательности работ, назначенных каждому станку. Решающее дерево используется для выбора приоритетных правил, подходящих для определенных состояний системы, и затем — для выдачи требований в имитационную модель. Многократные имитации дают возможность уточнения управляющих решений.

Метод тестировался на учебном примере для цеха с реконфигурируемым оборудованием и продемонстрировал способность минимизировать общее время работ.

В статье [23] описана **система интеллектуального управления процессом сжигания антрацита**. Система получает информацию от датчиков, цифровое изображение пламени и автоматически определяет управляющую стратегию для процесса горения. Испытания на реальном энергетическом предприятии продемонстрировали способность системы обеспечивать увеличение эффективности и уменьшение эмиссии газов.

В работе [28] описана **интеллектуальная система управления расписанием производственной обработки заданий**, способная вырабатывать в реальном времени решения, согласованные с жесткими производственными требованиями. Система автоматически извлекает близкое к оптимальным подмножество атрибутов-признаков. В частности, *использовались следующие атрибуты-признаки*:

$N_j$  — число работ в системе;

$MeUM$  — среднее число используемых машин (станков);

$SdUM$  — среднеквадратичное отклонение числа используемых машин;

$MeUL$  — среднее число загрузок/разгрузок;

$MeUB$  — среднее число используемых буферных устройств;

$MeUA$  — среднее число используемых автоматически управляемых тележек;

$MiOT$  — минимальное время ожидания выполнения работы;

$MAOT$  — максимальное время ожидания выполнения работы;

$MeOT$  — среднее время ожидания выполнения работы;

$SdOT$  — стандартное отклонение времени ожидания выполнения работы;

$MiPT$  — минимальное общее время обработки в системе;

$MAPT$  — минимальное общее время обработки в системе;

MePT — среднее общее время обработки в системе;  
SdPT — стандартное отклонение общего времени обработки в системе;  
MiRT — минимальный простой;  
MaRT — максимальный простой;  
MeRT — средний простой;  
SdRT — среднее квадратичное отклонение простоев;  
MiST — минимальное время ожидания;  
MeST — среднее время ожидания;  
SdST — среднее квадратичное отклонение времени ожидания;  
MaTA — максимальное отставание;  
Meta — среднее отставание;  
SdTA — среднее квадратичное отклонение отставания;  
MAWL — максимальная загрузка;  
ToWL — общая загрузка;  
MeSO — среднее время пребывания (заявки) в системе;  
SdSO — среднее квадратичное отклонение времени пребывания в системе;  
MeTD — среднее время отставания;  
SdTD — среднее квадратичное отклонение времени отставания.

Атрибуты-признаки использовались для описания знаний, наполняющих соответствующую базу знаний. Предлагаемый подход интегрирует генетические алгоритмы и решающие деревья. Генетический алгоритм отыскивает подмножества признаков. Решающие деревья (был использован алгоритм C4.5 [18]) обучаются отбору правил управления производственным процессом.

*Примеры управляющих правил:*

FIFO — запускать работу в соответствии с правилом FIFO  
(*First In First Out*);

SPT — запускать работу с кратчайшим требуемым временем обработки;

SIO — запускать работу с кратчайшим временем, оставшимся до нормативного срока исполнения;

SRPT — запускать работу с кратчайшим остатком времени исполнения;

CR — запускать работу с минимальным отношением остатка времени до нормативного срока исполнения к оставшемуся требуемому времени исполнения работы.

Применение системы показало ее способность улучшать следующие *критерии производительности управляемого объекта*:

TP — пропускную способность;

MF — среднее время выполнения задания;

NT — число запаздываний.

Работа [15] посвящена проектированию **дискретного предсказывающего контроллера с бинарными управляющими действиями, использующего метод ближайшего соседа**. Применяемый kNN метод модифицирован: иногда выбирается не ближайший элемент данных, а другой, достаточно близкий, — с некоторой вероятностью. Такой метод называют локально чувствительным хешированием *locality sensitive hashing (LSH) method*. kNN, используемый совместно с LSH в работе [15] называется аппроксимирующим методом — *approximate nearest neighbor ANN*. Контроллер использовался для управления высоковольтным электромотором.

Достаточно интересным и эксклюзивным является **использование интеллектуального управления музыкальным синтезатором в реальном времени** при “живом” исполнении произведений [27]. Музыканты часто изменяют параметры синтезаторов в процессе исполнения, чтобы достичь большей выразительности звучания. Машинное обучение позволяет обеспечить автоматическое регулирование параметров на основе анализа примеров исполнения и обеспечить выразительный звук с желательным эстетическим эффектом. В статье [27] представлены результаты продолжающегося исследования возможностей *нейронных сетей долговременной памяти для коротких термов* — LSTM (*Long Short-Term Memory NNs*).

Сети LSTM содержат ячейки памяти, которые сохраняют значения данных, проходящих через сеть, а также три типа специализированных узлов активации, называемых вычислительными элементами — гейтами (*gates*). Группы ячеек памяти и связанные с ними вычислительные элементы объединяются в *блоки*.

*Входные* вычислительные элементы управляют доступом к ячейкам памяти, осуществляя нужное масштабирование; *выходные* вычислительные элементы управляют доступом к чтению из ячеек памяти; вычислительные элементы *забывания* дают возможность сброса содержимого ячеек памяти на основе оценивания текущих значений.

Вычислительные элементы — гейты имеют взвешенные связи на входах и рекуррентные связи с другими вычислительными элементами и элементами памяти.

В процессе обучения вычислительные элементы получают “навык” открываться и закрываться таким образом, чтобы ячейки памяти могли запоминать и накапливать значения, удерживать их в течение произвольных периодов времени, и использовать значения ячеек, чтобы воздействовать на работу сети нужным образом.

На рис. 3 приведена структура LSTM блока с одной ячейкой памяти.

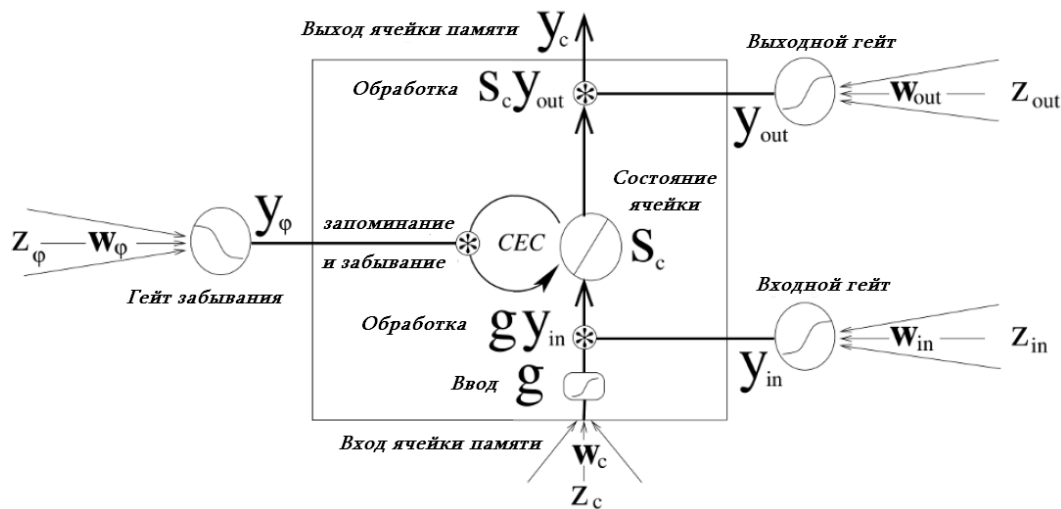


Рис. 3. Блок LSTM с единственной ячейкой памяти из работы [11]. Активации гейтов и ячейки памяти вычисляются как взвешенные суммы входных связей при помощи функций активации подобно тому, как это происходит в обычных искусственных нейронных сетях. Вход в ячейку памяти управляется активацией входного гейта, выход — активацией выходного гейта, а состояние ячейки управляется активацией гейта забывания [27].

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ ДЛЯ СОЗДАНИЯ СИСТЕМ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Применяемые в задачах интеллектуального управления математические методы определяются, в основном, природой объекта управления и среды — их особенностями и сложностью. Сложность управляемых объектов может быть столь высокой, что прямое применение некоторых математических методов становится практически невозможным. Если к тому же имеет место неопределенность исходной информации, доступной для выработки управляющих воздействий, то потребуются математические методы, допускающие такую неопределенность, и это, прежде всего (но не только), — методы искусственного интеллекта: обучение, извлечение знаний, распознавание, предсказание. При этом во всех случаях в той или иной форме понадобится применение (возможно, специфических) методов оптимизации.

При условии линейности объекта управления применяются *методы обучения на основе  $H_\infty$  управления* — метода теории управления для синтеза оптимальных регуляторов.

(Обозначение  $H_\infty$  в комплексном анализе связано с нормой в пространстве Харди;  $p$  — норма Харди функции  $f$  имеет вид

$$\sup_{0 < r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Как и в случае пространств  $L^p$ , эта норма обобщается на случай  $p = \infty$  и принимает вид  $\sup_{|z| < 1} |f(z)|$ .

В работе [31] описан синтез обучаемого контроллера с обратной связью для линейных объектов управления с ограниченной по норме параметрической неопределенностью. Предложен итерационный обучающий алгоритм для систем с обратной связью. Проблема синтеза итерационного обучаемого управления переформулирована как  $\gamma$ -субоптимальная  $H_\infty$  проблема управления на основе дробно-линейного преобразования. Достаточное условие сходимости итерационного процесса обучения системы управления представлено в терминах линейных матричных неравенств.

Итерационная обучаемая система управления с обратной связью, действующей в реальном времени, показана на рис. 2.

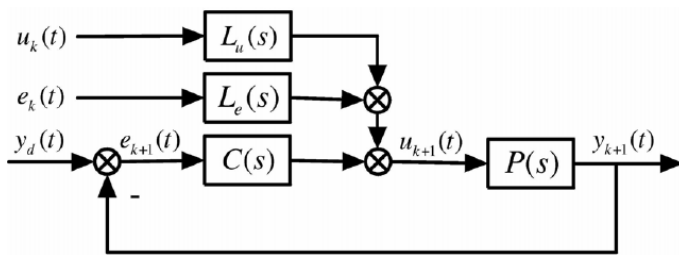


Рис. 4. Управление с обучением из работы [31]

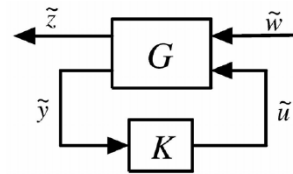


Рис. 5. Обычное управление с обратной связью

Использованы следующие обозначения:

$y_d(t)$  — желаемая траектория выхода на конечном интервале  $t \in [0, T]$ ;

$t$  — переменная временной области;  $s$  — переменная частотной области;

$y_k(t)$  — выход системы;

$u_k(t)$  — вход управления;

$e_k(t)$  — ошибка на  $k$ -той итерации;

$P(s)$  — управляемый объект;

$L_u(s)$  — обучаемый контроллер;

$L_e(s)$  — обучаемый контроллер;

$C(s)$  — контроллер обратной связи.

Алгоритм обучения с обратной связью представляется выражением

$$U_{k+1}(s) = L_u(s)U_k(s) + L_e(s)E_k(s) + C(s)E_{k+1}(s).$$

Для заданного обучаемого контроллера  $L_u(s)$  задача построения обучаемого управления сводится к нахождению  $C(s)$  и  $L_e(s)$  путем решения субоптимальной  $H_\infty$  проблемы синтеза:

$$\|(I + P(s)C(s))^{-1}(L_u(s) - P(s)L_e(s))\|_\infty = \gamma < 1.$$

Далее, путем матричных преобразований, субоптимальная проблема синтеза сводится к решению традиционной задачи синтеза управления с обратной связью (рис. 3).

В работе [21] описан подход к **управлению для марковского процесса принятия решений** (МППР), результирующие траектории которого описываются средствами линейной темпоральной логики (ЛТЛ). Реализация МППР осуществляется с использованием детерминированного автомата Рабина, сгенерированного с учетом требуемых свойств ЛТЛ. Функция поощрения определяется степенью соответствия выходной траектории управления условиям, определяемым автоматом Рабина. Такая конструкция позволяет применить метод машинного обучения для синтеза спецификации ЛТЛ даже в том случае, когда переходные вероятности марковского процесса априорно неизвестны.

ЛТЛ позволяет выражать такие свойства систем, как устойчивость, наблюдаемость, живучесть, безопасность.

ЛТЛ формулы строятся из атомарных предложений  $\omega \in \Pi$ , которые являются описаниями состояний системы и оцениваются значениями “истина” или “ложь”. Пропозициональная формула  $\phi$  строится из атомарных предложений, булевых операций и темпоральных операторов, в частности, таких [21]:

- $G_\phi$  —  $\phi$  истинна во всех будущих моментах времени;
- $F_\phi$  —  $\phi$  истинна в некоторых будущих моментах времени;
- $X_\phi$  —  $\phi$  истинна в следующем моменте времени;
- $\phi_1 U \phi_2$  —  $\phi_1$  истинна, пока истинна  $\phi_2$ .

Использование ЛТЛ позволяет описывать, например, такие свойства как наблюдаемость —  $GF_\phi$  и живучесть —  $FG_\phi$ .

*Детерминированным автоматом Рабина (ДРА)* называется [21] пятерка  $\mathcal{R} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ , где  $Q$  — множество состояний,  $\Sigma$  — входной алфавит,  $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$  — функция переходов;  $q_0$  — начальное состояние;  $F = \{(G_1, B_1), \dots, (G_{n_F}, B_{n_F})\}$ ,  $G_i, B_i \in Q$ ,  $i = 1, \dots, n_F$ , — множество допускаящих условий.



Выходом автомата Рабина является бесконечная последовательность состояний, начинающаяся с  $q_0$  и определяемая функцией переходов  $\delta$ . Для произвольной выходной последовательности  $r$  ДРА  $\text{inf}(r)$  обозначает множество состояний, встречаемых бесконечно много раз в последовательности  $r$ . Последовательность  $q_0, q_1, \dots$  принимается, если найдется такое  $i \in \{1, \dots, n_F\}$ , что  $\text{inf}(r) \cap G_i \neq \emptyset$  и  $\text{inf}(r) \cap B_i = \emptyset$ .

Для любой ЛТЛ формулы  $\phi$  над  $\Pi$  может быть сконструирован детерминированный автомат Рабина со входным алфавитом  $\Sigma = 2^\Pi$  такой, что он будет принимать те и только те слова над  $\Pi$ , которые удовлетворяют формуле  $\phi$ . Такой “принимающий”  $\phi$  автомат обозначается  $\mathcal{R}_\phi$ .

Помеченным марковским процессом принятия решений называется шестерка  $\mathcal{M} = \langle S, \mathcal{A}, P, s_0, \Pi, L \rangle$ , где  $S$  — конечное число состояний процесса;  $A$  — конечное число управляющих воздействий;  $\mathcal{A} : S \rightarrow 2^A$  — отображение состояний во множество действий;  $P$  — функция определения переходных вероятностей,  $P : S \times A \times S \rightarrow [0, 1]$ ;  $s_0 \in S$  — начальное состояние;  $\Pi$  — множество атомарных предложений;  $L : S \rightarrow 2^\Pi$  — функция пометок, размечающая состояния атомарными предложениями.

Стратегией для МППР  $\mathcal{M}$  называется функция  $\pi : S^+ \rightarrow A$ , где  $S^+$  — множество всех конечных последовательностей состояний, такая что  $\pi(s_0 s_1 \dots s_n) \in \mathcal{A}(s_n)$ . Стратегия  $\pi$  для МППР  $\mathcal{M}$  индуцирует марковскую цепь  $\mathcal{M}_\pi$ , которая описывается последовательностями  $s_0 s_1 \dots s_i$  смены состояний согласно вероятностям  $P(s_i, a, s_{i+1})$ ,  $a \in A$ .

Подход, предлагаемый в рассматриваемой работе основан на нахождении такой стратегии, которая максимизирует ожидаемую полезность дополнительного МППР, построенного по исходному МППР и желаемой ЛТЛ спецификации. ЛТЛ спецификация преобразуется в детерминированный автомат Рабина ДРА, затем конструируется производный МППР такой, что его состояния дополняют состояния этого автомата. Предполагается 1) нахождение переходных вероятностей (вероятностей смены состояний и выдачи управляющего воздействия) путем обучения с поощрением и 2) оптимизация ожидаемой полезности. В работе приведен соответствующий алгоритм обучения.

Доказана теорема о реализуемости требований ЛТЛ спецификаций.

Для иллюстрации излагаемого подхода авторы работы [21] приводят пример интеллектуального агента, управляющего клеточной игрой  $5 \times 5$ , в которой требуется посещать области, помеченные  $\alpha$  и  $\beta$ , избегая посещения области, помеченной  $\gamma$ . ЛТЛ спецификация представляется формулой

$$GF\alpha \wedge GF\beta \wedge G\neg\gamma.$$

Второй пример, демонстрирующий полезность подхода, — реализация интеллектуального управления трафиком в транспортной сети с пересечениями.

В работе [10] предложено использовать **моделирование по методу Монте-Карло**, причем управляющие решения вырабатываются в реальном времени путем выбора действия, которое производит наилучший статистический результат моделирования. Отмечается, что такой подход существенно лучше подхода на основе нейронных сетей.

Обзор ряда применений машинного обучения в задачах производственного управления представлен в работе [22]. Рассматривается **построение систем управления, основанных на правилах, отражающих опыт и поведение эксперта**, что связано с аппаратом символьного машинного обучения. Используется T-R (*Teleo-Reactive*) формализм Нильссона:

*T-R последовательность есть агентная управляющая программа, направляющая агента к цели (Teleo) и учитывающая изменения окружающей среды (Reactive). В своей простейшей форме она состоит из упорядоченного множества продукционных правил.*

Две T-R процедуры для управления мобильным роботом приведены на рис. 6.

```

goto(Loc)
  position = Loc           → nil
  heading = course(position, Loc) → move
  otherwise                → rotate

amble(Loc)
  position = Loc           → nil
  clear_path(position, Loc) → goto(Loc)
  otherwise                → amble(new_point(position, Loc))

```

Рис. 6. Процедуры для управления мобильным роботом [22]

Левая часть продукционного правила описывает проверку сенсорных данных, а правая — вызывает действующие процедуры. Первое правило процедуры `goto` постулирует, что при нахождении робота в нужном расположении ничего делать не нужно. Если курс робота такой, какой требуется, то двигаться вперед, иначе — повернуться. При повороте робота его курс всегда сравнивается с требуемым курсом.

Процедура `amble` описывает простой план для того, как избежать столкновения с препятствиями. Если путь чист (вторая продукция), то ничего не предпринимать; иначе определить новую точку размещения робота в стороне от препятствия и рекурсивно вызвать процедуру `amble`.

Обучение — извлечение правил из эмпирического опыта оператора — предполагает использования алгоритмов, основанных на построении деревьев решений, в частности C4.5 [18].

Известны многие другие работы, в которых описывается интеллектуальное управление расписанием производственного процесса [17]. В для этой цели используется индуктивное моделирование (ID3 [19]), нейронные сети, обучаемые методом обратного распространения ошибки, нечеткая логика. В работе [20] использовалось 358 примеров для машинного обучения и 198 тестовых примеров. Ошибка обученных алгоритмов для рассматриваемых задач не превышала 10%.

**Использование Q-обучения** (*Q-learning*) оказалось полезным для интеллектуального адаптивного стохастического управления ресурсами [6]. *Q-learning* алгоритм Ваткинса оценивает функцию состояния-действия (*state-action*)  $Q$  следующим образом [9]:

$$Q_{t+1}(s, a) = (1 - \alpha_t(s, a))Q_t(s, a) + \alpha_t(s, a)(R_M(s, a) + \gamma \max_{b \in U(s')} Q_t(s', b)),$$

где  $s'$  — состояние управляемого объекта, которое достигается из состояния  $s$  при выполнении управляющего действия  $a$ , произведенного в момент времени  $t$ ;  $U(s')$  — множество управляющих действий, которые можно произвести в состоянии  $s'$ ;  $R_M(s, a)$  — значение поощрения, получаемого за действие  $a$  в состоянии  $s$ ;  $\gamma \in (0, 1)$  — параметр;  $\alpha_t(s, a)$  — такая функция, что для любой допустимой пары  $(s, a)$  выполняются условия:  $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t(s, a) = \infty$  и  $\sum_{t=1}^{\infty} \alpha_t^2(s, a) < \infty$ .

Полученная в результате обучения функция  $Q(s, a)$  позволяет определять оптимальную стратегию управления для каждого состояния  $s$  как

$$\arg \max_a Q(s, a).$$

Q-обучение можно рассматривать как пример обучения, не использующего модель (*model-free learning*). В отличие от этой парадигмы, в интеллектуальном управлении также используется **обучение, основанное на модели** (*model-based learning*) [5]. В этом случае агент использует внутреннюю модель, состоящую из двух частей. Первая — эволюционная модель — представляет собой причинно-следственную структуру “поведения” окружающей среды и обеспечивает прогнозирование последствий управляющих действий. Вторая часть — модель поощрения — обеспечивает оценивание текущего поощрения, связанного с конкретными ситуациями и действиями [5].

### 3. ЛОГИЧЕСКОЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Обозначим управляемую систему  $S$ , а управляющую систему —  $U$ . Исходную информацию  $I(S)$  об управляемой системе, необходимую для машинного обучения, будем считать заданной в виде таблицы  $T_{m_0r}$ , состоящей из  $m_0$  строк — векторов  $(x_1, \dots, x_r) = \tilde{x} \in X^r$ , описывающих  $m_0$  наблюдений за состояниями системы  $S$ . Будем называть  $X^r$  —  $r$ -мерным пространством описаний (состояний) системы  $S$ . Будем также полагать, что таблица  $T_{m_0r}$  состоит из  $l$  подтаблиц

$$T_{m_1r}^1, T_{m_2r}^2, \dots, T_{m_lr}^l : T_{m_0r} = \bigcup_{1 \leq j \leq l} T_{m_jr}^j,$$

каждая из которых соответствует такому набору строк-наблюдений, когда система  $S$  находилась в одном и том же классе эквивалентных состояний  $X_j$ . Полагается, что заданы  $l$  классов эквивалентности разбиения множества  $X^r$ :  $X_1, X_2, \dots, X_l : \bigcup_{1 \leq j \leq l} X_j = X^r$ , и в таблице  $T_{m_0r}$  зафиксировано ровно  $m_j$  наблюдений из каждого класса  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ .

Полагается также, что существует функция — показатель качества

$$\varphi : X^r \rightarrow V,$$

которая *a priori* неизвестна. Показатель качества принимает значения из множества  $V$ . Известными (заданными) являются значения показателя качества  $v_1, \dots, v_j, \dots, v_l$  для состояний системы из классов  $X_1, X_2, \dots, X_l$ , так что если  $\tilde{x} \in X_j$ , то  $\varphi(\tilde{x}) = v_j$ .

Исходная информация  $I(S)$  называется *правильной*, если для всех  $\tilde{x} \in T_{m_0r}$  достоверно выполняется условие:

$$\tilde{x} \in T_{m_jr}^j \Leftrightarrow \varphi(\tilde{x}) = v_j.$$

При заданном разбиении  $X_1, \dots, X_l$  “ссылочной” оценкой показателя качества  $\varphi = \varphi(\tilde{x})$  можно считать значения функции  $\psi : X^r \rightarrow \{1, 2, \dots, l\}$ , которая частично задана таблицей  $T_{m_0r}$  с указанием в ней  $l$  подтаблиц, состоящих из наборов эквивалентных состояний вместе с информацией  $v_1, \dots, v_j, \dots, v_l$  о значении показателя качества, взаимнооднозначно соответствующих натуральным числам (номерам)  $1, 2, \dots, l$ . Можно сказать, что функция  $\psi$  вычисляет номера значений показателя качества из множества  $v_1, \dots, v_j, \dots, v_l$ .

Пусть функции  $P : X^r \rightarrow \{0, 1\}^n$  и  $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1, \dots, l\}$  таковы, что

$$\psi = P \circ f. \tag{1}$$

Для существования композиции (1) необходимо и достаточно выполнения условия  $n \geq \lceil \log_2 l \rceil$  [32]. Будем далее полагать, что это условие выполнено.

Обозначим  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_n)$  произвольный булевый вектор из множества  $\{0, 1\}^n = Y$ . Тогда  $P : X^r \rightarrow \{0, 1\}^n$  является вектор функцией:

$$P(\tilde{x}) = (y_1(\tilde{x}), \dots, y_n(\tilde{x})) = \tilde{y}(\tilde{x}).$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие биективности разбиений множеств  $X^r$  и  $Y = \{0, 1\}^n$ :

$$\begin{aligned} \forall j, k \in \{1, 2, \dots, l\} \quad Y_j \cap Y_k &= \emptyset; \quad \bigcup_{1 \leq j \leq l} Y_j = Y; \\ \tilde{y}(\tilde{x}) \in Y_j &\Leftrightarrow \tilde{x} \in X_j \Leftrightarrow \varphi(\tilde{x}) = v_j, \\ Y_j^{-1} &= X_j. \end{aligned}$$

**Определение** [32].

I° Скалярные функции — предикаты  $y_i : X^r \rightarrow \{0, 1\}$  называются *признаковыми предикатами*.

II° Множество признаковых предикатов  $\{y_1, \dots, y_n\}$  называется *допустимым*, если существует композиция (1).

III° Логическим описанием класса  $j$  (ЛОК) называется формула  $D_j$ , построенная из предикатов  $y_1, \dots, y_n$  и связок  $\wedge, \vee, \neg$  такая, что определяемая ею функция есть

$$F_{D_j}(\tilde{y}(\tilde{x})) = \begin{cases} 1, & \tilde{x} \in Y_j; \\ 0, & \tilde{x} \notin Y_j. \end{cases}$$

□

Таким образом вводятся функции  $F_{D_j}$ ,  $j = 1, \dots, l$  — характеристические функции классов состояний, оцениваемых значениями показателя качества  $v_1, \dots, v_l$ .

Если вычислить  $P(\tilde{x})$  для всех  $\tilde{x} \in T_{m_0r}$ , то таблица  $T_{m_0r}$  отобразится в булеву таблицу, состоящую из  $l$  подтаблиц:

$$B_{m_0n} = \bigcup_{1 \leq j \leq l} B_{m_jn}^j,$$

где  $B_{m_jn}^j \subset Y_j$ .

Выбор признаковых предикатов является трудноформализуемой задачей и зависит от проблемной области. *Множество признаковых предикатов является допустимым, если в любой паре строк из разных подтаблиц эти строки различны* [32].

Когда признаковые предикаты выбраны, ЛОК  $D_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, l$ , могут быть получены при помощи алгоритмов машинного обучения — решающих деревьев или

дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), синтезированных по частично заданной начальной информации — обучающей таблице  $B_{m_0n}$ .

Пусть ЛОК представлены в виде ДНФ. Рассмотрим подход к логическому интеллектуальному управлению объектом  $S$ , суть которого состоит в изменении управляющим алгоритмом  $U$  вектора  $\tilde{y} = \tilde{y}(\tilde{x}) = (y_1(\tilde{x}), \dots, y_n(\tilde{x}))$  с целью “перевода” системы  $S$  из текущего состояния в состояние с бóльшим значением показателя качества. Опуская для упрощения записи аргументы  $\tilde{x}$ , введем параметр  $t$  — шаг управления, и тогда  $\tilde{y}(t)$  будет логическим описанием управляемой системы  $S$  на шаге  $t$ .

Пусть  $\tilde{y}(\tilde{x})(t) = \tilde{y}_t \in Y_t$ , и соответствующее состояние  $\tilde{x}$  системы  $S$  имеет оценку показателя качества  $v_t$ .

Любое изменение хотя бы одной координаты булевого вектора  $\tilde{y}_t$  будем называть *преобразованием* и обозначать

$$\tilde{y}_t \mapsto \tilde{y}_{t+1}.$$

Преобразование  $\tilde{y}_t \mapsto \tilde{y}_{t+1}$  называется *целесообразным*, если  $v_{t+1} > v_t$ , и *оптимальным*, если обеспечивается максимальное увеличение показателя качества  $v_{t+1} - v_t$  по всем возможным преобразованиям.

Управление осуществляется путем перевода системы из текущего состояния, которое принадлежит классу с некоторой достигнутой оценкой качества, в другой класс с более высокой или максимально возможно высокой оценкой качества. Основная идея логического управления — свести реализацию оптимального преобразования к сравнительному анализу конъюнкций, входящих в логические описания классов (ЛОК).

Пусть в результате машинного обучения по примерам таблицы  $B_{m_0n}$  получены ЛОК в ДНФ:

$$D_j(\tilde{y}) = \bigvee_{1 \leq q \leq s_j} K_q^j(\tilde{y}),$$

$$K_q^j(\tilde{y}) = y_{1,q}^{\sigma_{1,q}} \wedge y_{2,q}^{\sigma_{2,q}} \wedge \dots \wedge y_{\tau_q,q}^{\sigma_{\tau_q,q}},$$

где

$s_j$  — число конъюнкций в ДНФ  $D_j(\tilde{y})$ ;

$q$  — порядковый номер конъюнкции в ДНФ  $D_j(\tilde{y})$ ;

$\tau_q$  — число логических сомножителей в конъюнкции  $K_q(\tilde{y})$ ;

$z^\sigma = z$ , если  $\sigma = 1$ , и  $z^\sigma = \bar{z}$ , если  $\sigma = 0$ .

Если  $K_q^j(\tilde{y}_t(\tilde{x}_t)) = 1$ , то показатель качества системы  $S$  в состоянии  $\tilde{x}$  равен  $v_j$ , и все конъюнкции можно упорядочить по неубыванию значений показателя качества. Требуется преобразовать булевый набор (вектор)  $\tilde{y}_t$ , получая набор  $\tilde{y}_{t+1}$  так, чтобы достигнуть наибольшего значения показателя качества. В результате такого

преобразования окажется, что  $K_q^j(\tilde{y}_{t+1}(\tilde{x}_{t+1})) = 0$ ,  $K_d^\mu(\tilde{y}_{t+1}(\tilde{x}_{t+1})) = 1$ , и показатель качества примет значение  $v_\mu > v_j$ . Пусть затраты на такое преобразование набора  $\tilde{y}_t \mapsto \tilde{y}_{t+1}$  равны  $c_{qd}^{j\mu}(\tilde{y}_t)$ .

Для текущего состояния  $\tilde{y}_t$  требуется решить оптимизационную задачу

$$\max_{j,\mu} (v_\mu > v_j) : c_{qd}^{j\mu}(\tilde{y}_t) < C_t,$$

где  $C_t$  — текущее ограничение по затратам на шаге управления  $t$ .

Подходящие для этой цели оптимизационные модели представлены в работе [32].

#### 4. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ АГЕНТЫ И УПРАВЛЕНИЕ

Под интеллектуальными агентами обычно понимают программы, которым человек делегирует свои функции с целью автоматического или полуавтоматического принятия решений. Агенты запоминают нужную для правильного функционирования информацию, обобщают ее, обучаются и могут самостоятельно генерировать управляющие воздействия или выдавать полезные рекомендации пользователям [30].

Интеллектуализация поиска информации в Интернете (*Web Browser Intelligent*), оптимизация обслуживания покупателей на основе сетевой информации, оптимизация функционирования больших высокопроизводительных многопользовательских вычислительных систем — вот некоторые примеры программ — интеллектуальных агентов.

Под автономностью интеллектуальных агентов понимают их способность контролировать самих себя, реализовывать самоуправление, реализуя целевое поведение: агенты имеют цель и действуют в соответствии с этой целью.

Агент — это объект, находящийся в некоторой среде, от которой он получает информацию, отражающую события, которые происходят в этой среде; агент интерпретирует события и исполняет команды, которые воздействуют на среду. Агент может содержать программные и аппаратные компоненты [33].

Под интеллектуальным агентом понимается программно или аппаратно реализованная система, которая обладает такими свойствами [33]:

- автономность — способность функционировать без вмешательства человека и осуществлять самоконтроль над своими действиями и внутренним состоянием;
- способность функционировать в сообществе с другими агентами, обмениваясь с ними сообщениями с помощью некоторого специального языка коммуникаций;
- реактивность — способность воспринимать состояние среды и своевременно реагировать на её изменения;
- способность генерировать цели и действовать, стремясь достигнуть их;



Рис. 7. Архитектура производственного агента из работы Б. Кадара [13]

— обладать знаниями о себе, среде и, возможно, других агентах; пополнять и модифицировать их.

Из приведенного определения интеллектуальных агентов видно, что управляющие функции для них являются основными, и причин рассматривать интеллектуальные агенты вне парадигмы интеллектуального управления нет.

Рассмотрим, например, архитектуру производственного агента из работы Б. Кадара [13], представленную на рис.7.

Эта архитектура на общем, концептуальном уровне соответствует представлению об интеллектуальном управлении независимо от сферы приложений управляющих систем рассматриваемого класса. Но нужно заметить, что в каждом конкретном случае понадобятся многочисленные уточнения, главное из которых будет определяться требуемой степенью автономности интеллектуальной управляющей системы.

Горизонтально-распространяемые **интернетовские сервисы** (*Horizontally-scalable Internet services*) на компьютерных кластерах **представляют подходящую**



предметную область для применения интеллектуального управления. В частности, для целенаправленного управления, мониторинга, управления числом задействованных серверов. Для решения таких задач управления в работе [4] предлагается применять методы статистического управления, машинного обучения, имитационного моделирования.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате обзора исследований в области интеллектуального управления можно сделать следующие выводы.

Интеллектуальное управление является самой интересной областью применения теоретической кибернетики в современных информационных системах. Здесь собираются воедино все наработанные приемы, методы и разделы теории: распознавание образов-состояний, формирование понятий, идентификация, оптимизация при неполной информации, теория самоорганизующихся автоматов. Сюда примыкают практически все методы исследования операций.

Круг практического применения методов интеллектуального управления чрезвычайно широк и включает: программы-агенты для сложных (особенно функционирующих в сетевой среде) информационных систем; агенты для производственного цехового управления; программы автоматизация принятия решений в региональных системах; программы управления в робототехнике; программы-исследователи для автоматических космических аппаратов и многое другое.

Наиболее сложными являются динамические интеллектуальные системы, способные перестраиваться по мере функционирования в среде, являющейся окружением объекта управления. Для реализуемости таких систем требуется моделирование механизма “забывания” информации, которая становится с течением времени неактуальной.

Важнейшими направлениями развития теории интеллектуального управления представляются: разработка специфических моделей памяти для агентов, алгоритмических баз знаний агентов, моделей динамической автоматической классификации состояний управляемых объектов и среды, автоматического изменения структур математических моделей и даже автоматической смены используемой агентом модели.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Antsaklis P. J. Intelligent Control*. Written for the Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering. John Wiley and Sons, Inc. 1997.  
<http://www3.nd.edu/~pantakl/control.html>
2. *Antsaklis P. J. Intelligent Learning Control*// IEEE Control Systems, 1995, Vol.15, No.3, pp. 5–7.

3. *Aydin M. E., Oztemel E. Dynamic job-shop scheduling using reinforcement learning agents* // Robot Auton Syst., 2000, Vol.33, No.2 – 3, pp. 169 –178.
4. *Bodik P., Griffith R. et al. Statistical Machine Learning Makes Automatic Control Practical for Internet Datacenters*. In Workshop on Hot Topics in Cloud Computing, 2009, 5 p.  
<http://www.cs.berkeley.edu/~jordan/papers/bodik-et-al-hotcloud09.pdf>
5. *Botvinick M., Weinstein A. Model-based hierarchical reinforcement learning and human action control* // Model-based hierarchical reinforcement learning and human action control: Philosophical transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological sciences, 2014, No.11, 9p.  
<http://rstb.royalsocietypublishing.org/content/369/1655/20130480>
6. *Csaji B. C., Monostori L. Adaptive Stochastic Resource Control: A Machine Learning Approach* // J. of Artificial Intelligence Research, 2008, Vol.32, No.2 – 3, pp. 453 –486.
7. *Doh H.-H., Yu J.-M. Kwon Y.-J. et al. Decision Tree Based Scheduling for Flexible Job Shops with Multiple Process Plans* // Int. J. of Mech., Aerospace, Industrial and Mechatronics Eng., 2014, Vol.8, No.3, pp. 615–621.
8. *Encyclopedia Britannica. Learning Control*.  
<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/334026/learning-control>
9. *Even-Dar E., Mansour Y. Learning rates for Q-learning* // J. of Machine Learning Research, 2003, No.5, pp. 1–25.
10. *Galperin Gregory, Viola Paul. Machine Learning for Prediction and Control*. Rollout Project, Learning and Vision Group Artificial Intelligence. Laboratory M.I.T., 1998, 4pp.
11. *Gers F. A., Schmidhuber J., Cummins F. Learning to Forget: Continual Prediction with LSTM* // Neural Computation, 2000, Vol. 12, No.10, pp. 2451–2471.
12. *Hamdi-Cherif A. Knowledge Base Learning Control System - Part 1: generic architecture, Part 2: Intelligent Controller*. AIKED'12 Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Artificial Intelligence, Knowledge Engineering and Data Bases, 2012, pp. 67–76.
13. *Kadar Botond. Intelligent approach to manage changes and disturbances in manufacturing systems*. Ph.D. Thesis. Computer and Automation Research Institute, Hungarian Academy of Sciences. Budapest, 2001, 13p.
14. *Kim C.-O., Min H.-S., Yih Y. Integration of inductive learning and neural networks for multi-objective FMS scheduling* // Int. J. Prod. Res., 1998, Vol. 36, No. 9, pp. 2609 – 2626.
15. *Konaka E. Design of Discrete Predictive Controller Using Approximate Nearest Neighbor Method*. Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011, 6 p.
16. *Piramuthu S., Raman N., Shaw M.J. Learning-based scheduling in a flexible manufacturing flow line* // IEEE Trans. Eng. Manag., 1994, Vol.41, No. 2, pp. 171 – 182.
17. *Priope P., De La Fuente D., Gomes A., Puente J. A review of machine learning in dynamic scheduling of flexible manufacturing systems* // Artificial Intelligence for Engineering Design, Analysis and Manufacturing, 2001, Vol.12, Issue 3, pp. 251-263.
18. *Quinlan J. R. Improved use of continuous attributes in c4.5* // J. of Artificial Intelligence Research, 1996, No.4, pp.77–90.
19. *Quinlan J. R. Induction of Decision Trees* // Machine Learning, 1986, No.1, pp.81–106.

20. Quiroda L. A., Rabelo L. C. *Learning from examples: a review of machine learning, neural networks and fuzzy logic paradigms* // Computers & Industrial Engineering, 1995, Vol.29, Issues 1–4, pp.561–565.
21. Sadigh Dorsa, Kim Eric S., Coogan Samuel, Sastry S. Shankar, Seshia Sanjit A. *A Learning Based Approach to Control Synthesis of Markov Decision Processes for Linear Temporal Logic Specifications*// arXiv:1409.5486, 2014, 6 p.  
<http://arxiv.org/pdf/1409.5486v1.pdf>
22. Sammut Claude. *Automatic construction of reactive control systems using symbolic machine learning*// Knowledge Engineering Review, 1996, Vol.11, pp. 27 – 42.
23. Schaffernicht E., Stephan V. et al. *Machine Learning Techniques for Selforganizing Combustion Control*. In: Proc. 32nd Ann. Conf. on Artificial Intelligence (KI 2009), Paderborn, 2009, pp. 395–402.
24. Shnits Boris, Sinreich David *Controlling flexible manufacturing systems based on a dynamic selection of the appropriate operational criteria and scheduling policy*// Int. J. Prod. Res., 2004, Vol.42, Issue 17, pp. 3457 – 3472.
25. Shaw M.J., Park S., Raman N. *Intelligent scheduling with machine learning capabilities: the induction of scheduling knowledge*// IIE Transactions, 1992, Vol.24, Issue 2, pp. 156 – 168.
26. Shiraz G. M., Sammut C. *Combining Knowledge Acquisition and Machine Learning to Control Dynamic Systems*. 15th Int. Joint Conf. on AI, Nagoya Japan, Morgan Kaufmann, 1997, pp. 908–913.
27. Sommer N., Ralescu A. *Towards a Machine Learning Based Control of Musical Synthesizers in Real-Time Live Performance*. Proc. of the 25th Modern Artificial Intelligence and Cognitive Science Conf., Spokane, Washington, USA, April 26, 2014, pp. 61–67.
28. Su C.-T., Shiue Y.-R. *Intelligent scheduling controller for shop floor control systems: a hybrid genetic algorithm/decision tree learning approach*// Int. J. Prod. Res., 2003, Vol. 41, No. 12, pp. 2619–2614.
29. Sutton R. *Artificial intelligence as a control problem: Comments on the relationship between machine learning and intelligent control*. IEEE International Symposium on Intelligent Control, 1988, pp. 500–507.
30. Tran Hanh, Tran Thavoy *Intelligent Agent*.  
[http://groups.engin.umd.umich.edu/CIS/course.des/cis479/projects/agent/Intelligent agent.html](http://groups.engin.umd.umich.edu/CIS/course.des/cis479/projects/agent/Intelligent%20agent.html)
31. Xu Jianming, Mingxuan Sun, Li Yu *LMI-Based Synthesis of Robust Iterative Learning Controller with Current Feedback for Linear Uncertain Systems*// International Journal of Control, Automation, and Systems, 2008, Vol. 6, No. 2, pp. 171–179.
32. Донской В. И. *Логическое управление плохо формализованными системами*// Динамические системы, 1985, вып.4, с. 90 – 96.  
*Donskoi V. I. Logical control of poorly formalized systems* // J. of Soviet Mathematics, 1992, Vol. 60, No. 2, p. 1402 – 1406.
33. *Слабое и сильное определение интеллектуального агента*. Портал искусственного интеллекта — [www.AIportal.ru](http://www.AIportal.ru).  
*Strong and weak definition of intelligent agent* . AI portal – [www. AIportal.ru](http://www.AIportal.ru).  
<http://www.aiportal.ru/articles/multiagent-systems/weak-and-strong-intelligent-agent.html>

Статья поступила в редакцию 02.12.2014

## НЕЧЕТКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ: ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ С РАЗНЫМ ТИПОМ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ

© А. О. Емец

ПОЛТАВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ТОРГОВЛИ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И СОЦИАЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ  
ул. Ковалю, 3, г. Полтава, 36014, УКРАИНА  
E-MAIL: yemets2008@ukr.net

### FUZZY LINEAR EQUATIONS SYSTEMS.

Yemets, A. O.

**Abstract.** Necessary familiar concepts from fuzzy numbers theory and interval systems are presented in the article, namely, concepts of: a fuzzy number; the carrier and the membership function of fuzzy number; a discrete and continual fuzzy number; an interval matrix; low and upper bounds of an interval matrix; a middle matrix; a matrix of radiuses; an interval vector; low and upper bounds of an interval vector; a middle vector; the vector of radiuses.

New concepts such as concepts of a one-peak fuzzy number (discrete and continual); an acute and not acute peak; a normal fuzzy number; a standard fuzzy number; a standardized fuzzy number are introduced in the work.

The concepts of a fuzzy matrix, which connects interval apparatus and fuzzy numbers apparatus; interval linear systems of equations; the fuzzy linear system of equations are introduced in the work.

The concept of admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution of an uncertain linear system of equations is introduced in the work. Characterization of a solution is given.

It is proved the lemma that if  $I_A^t$  is an interval matrix, presented through its low  $\underline{A}^t$  and upper  $\bar{A}^t$  bounds  $[\underline{A}^t, \bar{A}^t]$ , where  $\underline{A}^t, \bar{A}^t \in R^{m \times n}$ , and  $x$  is admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution,  $x \in R^n$ , then the family with the number  $t$  of right parts of systems of linear equations  $A^t x$  can be presented through the matrix of radiuses  $\Delta^t$ :  $\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]$ .

It is proved for the family with the number  $t$   $A^t x$  of right parts of systems of linear equations, that next statements are equivalent: 1)  $x$  is admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution of uncertain linear system of equations of the form  $F_A x = F_b$ ; 2)  $x$  satisfies the inequality  $|A_c^t x - b_c^\tau| \leq -\Delta^t |x| + \delta^\tau$ , where  $A_c^t$  is the middle matrix of the interval matrix,  $b_c^\tau$  is the middle vector of the interval vector,  $\Delta^t$  is the matrix of radiuses of the interval matrix,  $\delta^\tau$  is the vector of radiuses of the interval vector.

3)  $x = x_1 - x_2$ , where  $x_1, x_2$  satisfy conditions:  $\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \bar{b}^\tau$ ;  $\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq \underline{b}^\tau$ ;  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ , where  $\underline{A}^t, \bar{A}^t$  are low and upper bounds of the interval matrix;  $\underline{b}^\tau, \bar{b}^\tau$  are low and upper bounds of the interval vector.

It is substantiated that the check that  $x$  is admissible with the type of membership  $\langle t, \tau \rangle$  solution of the uncertain system can be executed for the polynomial time.

## ВВЕДЕНИЕ

*Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами.* Исследование систем уравнений, содержащих нечеткие данные [1, 2], весьма актуальная проблема, в частности в задачах оптимизации и принятия решений [3-11].

*Анализ последних исследований и публикаций, в которых предложено решения данной проблемы и на которые опирается автор.* В работе [12] начат анализ таких систем с использованием аппарата интервальных систем [13].

*Нерешенные прежде задачи общей проблемы, которым посвящается указанная статья. Формулирование целей статьи (постановка задачи).* В данной работе вводится понятие допусковых решений таких систем разных типов и дается их характеристика.

### 1. НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ ИЗ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ И ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Нечетким число называют множество пар  $A = \{ a | \mu(a) \mid a \in [a_L, a_R] \subset R^1, \mu \in [0, 1] \}$ .

Носителем нечеткого числа  $A$  называют множество  $\{a\}$  чисел  $a \in R^1$  в множестве пар, образующих нечеткое число  $A$ . Функцией принадлежности называют функцию, ставящую в соответствие  $\forall a$  число  $\mu(a)$ .

Нечеткое число называют дискретным, если мощность носителя  $\{a\}$  конечна (синоним - нечеткое число с дискретным носителем). Нечеткое число называют континуальным, если носитель  $\{a\}$  имеет мощность континуума (синоним нечеткое число с континуальным носителем). Точки  $a$  носителя нечеткого числа  $A$  называют пиковыми, если  $\mu(a) = 1$ .

Пусть элементы носителя дискретного нечеткого числа  $A$  пронумерованы так, что  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

Дискретное число называют однопиковым, если набор подряд идущих чисел носителя  $\alpha_L = a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+p} = \alpha_R$ , для которых функция принадлежности равна единице, единственен. Точки  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+p}$  называют пиком числа  $A$ . Если  $p = 1$ , то такой пик называют острым, иначе - не острым.

Континуальное нечеткое число  $A$  называют однопиковым, если отрезок  $[\alpha_L, \alpha_R] \subset (a_L, a_R)$ , для всех чисел  $a$  которого  $\mu(a) = 1$ , единственный. Отрезок

$[\alpha_L, \alpha_R]$  называют пиком числа  $A$ . Если  $\alpha_L = \alpha_R$ , то пик называют острым, иначе - не острым.

Нечеткое число называют нормальным, если функция принадлежности слева от первого (левого) пика не убывающая, а справа от последнего (правого) пика не возрастающая.

Нормальное однопиковое число называют стандартным. Оно может быть как дискретным, так и континуальным.

Стандартизированным нечетким числом называют дискретное нечеткое число вида  $A = \{\underline{a}_0|0; \underline{a}_1|0, 25; \underline{a}_2|0, 5; \underline{a}_3|0, 75; \underline{a}_4|1; \bar{a}_4|1; \bar{a}_3|0, 75; \bar{a}_2|0, 5; \bar{a}_1|0, 25; \bar{a}_0|0\}$ , где  $\underline{a}_0 < \underline{a}_1 < \underline{a}_2 < \underline{a}_3 < \underline{a}_4 \leq \bar{a}_4 < \bar{a}_3 < \bar{a}_2 < \bar{a}_1 < \bar{a}_0$ . Число  $A$  удобно задавать упорядоченной десяткой  $A = (\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \bar{a}_4, \bar{a}_3, \bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_0)$ . Если пик острый, то  $\underline{a}_4 = \bar{a}_4$ .

Из стандартного нечеткого континуального числа стандартизированное можно получить дискретизацией носителя по значениям  $0, 25i$  функции принадлежности,  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\} = J_4^0 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . При этом концы  $\underline{a}_i, \bar{a}_i$  интервалов  $[\underline{a}_i, \bar{a}_i]$  определяются условиями:  $\forall a \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i] \mu(a) \in [0, 25i, 1], \forall \varepsilon > 0 \mu(\underline{a}_i - \varepsilon) < 0, 25i; \mu(\bar{a}_i + \varepsilon) < 0, 25i, \underline{a}_0 = \alpha_L; \bar{a}_0 = \alpha_R$ .

Получение стандартизированного нечеткого числа из стандартного дискретного осуществимо по алгоритмам из [14, 15].

Далее будем рассматривать только стандартизированные нечеткие числа, поэтому слово "стандартизированное" будем опускать.

Введем в соответствии с [13] необходимую терминологию интервальных матриц.

Пусть  $\underline{A}, \bar{A}$  - две  $m \times n$  матрицы с действительными элементами, т. е.  $\underline{A}, \bar{A} \in R^{m \times n}$ . При  $n = 1$  такая матрица - это вектор-столбец. Пусть  $\underline{A}$  поэлементно не больше  $\bar{A}$ , обозначим это  $\underline{A} \leq \bar{A}$ .

Множество матриц  $A$ , удовлетворяющих условию  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ , называют интервальной матрицей. Обозначим ее  $I_A$ , т. е.  $I_A = \{A \mid \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}$ . Матрицу  $\underline{A}$  называют нижней, а матрицу  $\bar{A}$  - верхней границами интервальной матрицы  $I_A$ , которую также обозначают так:  $I_A = [\underline{A}, \bar{A}]$ . Матрицу  $A_c = \frac{1}{2}(\underline{A} + \bar{A})$  называют средней матрицей для  $I_A$ , а матрицу  $\Delta = \frac{1}{2}(\bar{A} - \underline{A})$  называют матрицей радиусов для  $I_A$ . Очевидно, что элементы  $\Delta_{ij}$  - матрицы радиусов неотрицательны:  $\Delta_{ij} \geq 0 \forall i = \overline{1, m}, \forall j = \overline{1, n}$ .

Согласно определений  $A_c$  и  $\Delta$  имеем:  $\underline{A} = A_c - \Delta; \bar{A} = A_c + \Delta$ . Поэтому,  $I_A$  можно представить и так:  $I_A = [A_c - \Delta, A_c + \Delta]$  или  $I_A = \{A \mid |A - A_c| \leq \Delta\}$ , где модуль (абсолютная величина)  $|B|$  матрицы  $B = (b_{ij}) \in R^{m \times n}$  определяется как матрица  $|B| = (|b_{ij}|) \in R^{m \times n}$ .

Интервальным вектором-столбцом  $I_b$  называют интервальную матрицу с одним столбцом. Будем  $I_b$  с использованием  $\bar{b}$  - верхней и  $\underline{b}$  - нижней границ для  $I_b$  обозначать так:  $I_b = \{ b \mid \underline{b} \leq b \leq \bar{b} \}$ , где  $\underline{b}, \bar{b} \in R^m$ . Вектор  $b_c = \frac{1}{2}(\underline{b} + \bar{b})$  называют средним вектором интервального вектора  $I_b$ , а вектор  $\delta = \frac{1}{2}(\bar{b} - \underline{b})$  - вектором радиусов для  $I_b$ . Таким образом,  $I_b = [\underline{b}, \bar{b}] = [b_c - \delta; b_c + \delta]$ .

Используя понятие интервальной матрицы, введем понятие нечеткой матрицы.

**Определение 1.** Нечеткой матрицей  $F_A$  назовем пятислойную таблицу (матрицу, массив), состоящую на каждом слое  $t, t \in J_4^0$ , из интервальных матриц  $I_A^t = [ \underline{A}^t, \bar{A}^t ]$ , где матрицы  $\underline{A}^t = (a_{ijt}) \in R^{m \times n}$ ,  $\bar{A}^t = (\bar{a}_{ijt}) \in R^{m \times n}$ , а числа  $\bar{a}_{ijt}, a_{ijt}$  - это элементы стандартизированного нечеткого числа  $a_{ij} = (\underline{a}_{ij0}, \underline{a}_{ij1}, \underline{a}_{ij2}, \underline{a}_{ij3}, \underline{a}_{ij4}, \bar{a}_{ij4}, \bar{a}_{ij3}, \bar{a}_{ij2}, \bar{a}_{ij1}, \bar{a}_{ij0})$ .

Число  $t$  будем называть номером слоя матрицы  $F_A$ , матрицу  $I_A^t$  - слоем  $t$  матрицы  $F_A$ , а нечеткую матрицу  $F_A$  обозначать  $(a_{ij})$  или  $(a_{ijt}) i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}; t \in J_4^0$ .

Если  $n = 1$ , то нечеткую матрицу назовем нечетким вектором-столбцом с  $m$  нечеткими координатами  $b_i = (\underline{b}_{i0}, \underline{b}_{i1}, \underline{b}_{i2}, \underline{b}_{i3}, \underline{b}_{i4}, \bar{b}_{i4}, \bar{b}_{i3}, \bar{b}_{i2}, \bar{b}_{i1}, \bar{b}_{i0})$  и обозначим  $F_b = (b_i)$  или  $F_b = (b_{it}) i = \overline{1, m}, t \in J_4^0$ .

Вектор  $I_b^t = [\underline{b}^t, \bar{b}^t]$ , где  $\underline{b}^t = (\underline{b}_{1t}, \underline{b}_{2t}, \dots, \underline{b}_{mt})$ ,  $\bar{b}^t = (\bar{b}_{1t}, \bar{b}_{2t}, \dots, \bar{b}_{mt})$ , назовем  $t$ -ым слоем вектора  $F_b$ , а вектор  $F_b$  - пятислойным.

Интервальной линейной системой уравнений

$$I_A x = I_b \tag{1}$$

называют семейство всех систем линейных уравнений

$$Ax = b, \tag{2}$$

где

$$A \in I_A; b \in I_b. \tag{3}$$

**Определение 2.** Нечеткой линейной системой уравнений

$$F_A x = F_b \tag{4}$$

назовем совокупность пяти интервальных линейных систем уравнений

$$\left[ \begin{array}{l} I_A^4 x = I_b^4; \\ I_A^3 x = I_b^3; \\ I_A^2 x = I_b^2; \\ I_A^1 x = I_b^1; \\ I_A^0 x = I_b^0; \end{array} \right. \tag{5}$$

где  $F_A$  и  $I_A^t$ ,  $F_b$  и  $I_b^t$ ,  $t \in J_4^0$  соотносятся между собой согласно определения 1, то есть  $I_A^t$  есть слой  $t$  матрицы  $F_A$ , а  $I_b^t$  есть слой  $t$  вектора  $F_b$

Имеет место включения (см. теорему 1 из [12]):  $I_A^t \subset I_A^{t-1}$ ,  $I_b^t \subset I_b^{t-1}$   $\forall t \in \{0, 1, 2, 3\} = J_3^0$ , где знак  $\subset$  может означать и равенство.

## 2. ДОПУСКОВЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Поставим в соответствие каждой интервальной линейной системе уравнений из (5)  $I_A^t x = I_b^t$ ,  $t \in J_4^0$ , семейство с номером  $t$  систем линейных уравнений вида (2) с данными вида (3) соответственно:

$$A^t x = b^t; \quad (6)$$

$$A^t \in I_A^t; b^t \in I_b^t. \quad (7)$$

**Определение 3.** Назовем вектор  $x \in R^n$  допусковым с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решением нечеткой линейной системы вида (4)  $F_A x = F_b$ , если для него выполняется условие:

$$A^t x = I_b^\tau \forall A^t \in I_A^t, t, \tau \in J_4^0. \quad (8)$$

Название решения объясняется тем, что вектор  $A^t x$ , определяемый данными со значениями принадлежности не меньше  $0, 25t$ , остается внутри интервала (интервала "допусков")  $I_b^\tau$ , определяемого данными со значением функций принадлежности не меньше  $0, 25\tau$ , независимо от выбора матрицы  $A^t \in I_A^t$ .

Определение 3 может быть представлено в виде: вектор  $x$ , называемый допусковым с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решением нечеткой системы (4), должен удовлетворять условию

$$\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} \subset I_b^\tau. \quad (9)$$

Заметим, что определение 3 вводит в рассмотрение 25 допусковых решений, соответствующих разным значениям  $t, \tau \in J_4^0$ . В работе [12] числовым значениям  $t$  ( $\tau$ ) приписывается определенный смысл, который мы будем иметь в виду и в этой работе. Тип  $t = 0$  ( $\tau = 0$ ) будем называть нечетким,  $t = 1$  ( $\tau = 1$ ) будем называть квазинечетким,  $t = 2$  ( $\tau = 2$ ) - полунечетким (синоним - получетким),  $t = 3$  ( $\tau = 3$ ) тип назовем квазичетким, а при  $t = 4$  ( $\tau = 4$ ) - четким. Такие названия определяются соответствующим значением функций принадлежности - не меньше  $0, 25t$  ( $0, 25\tau$  соответственно) - согласно определению стандартизированного нечеткого числа (см. табл. 1-2).



Таблица 1. Типы принадлежности допусковых решений ( $\tau = 0, \tau = 1$ )

	$\tau = 0$	$\tau = 1$
$t = 0$	нечетко-нечеткий	нечетко-квазинечеткий
$t = 1$	квазинечетко-нечеткий	квазинечетко-квазинечеткий
$t = 2$	полунечетко-нечеткий	полунечетко-квазинечеткий
$t = 3$	квазинечетко-нечеткий	квазинечетко-квазинечеткий
$t = 4$	четко-нечеткий	четко-квазинечеткий

Таблица 2. Типы принадлежности допусковых решений ( $\tau = 2, \tau = 3, \tau = 4$ )

	$\tau = 2$	$\tau = 3$	$\tau = 4$
$t = 0$	нечетко-полунечеткий	нечетко-квазичеткий	нечетко-четкий
$t = 1$	квазинечетко-полунечеткий	квазинечетко-квазичеткий	квазинечетко-четкий
$t = 2$	полунечетко-полунечеткий	полунечетко-квазичеткий	полунечетко-четкий
$t = 3$	квазинечетко-полунечеткий	квазинечетко-квазичеткий	квазинечетко-четкий
$t = 4$	четко-полунечеткий	четко-квазичеткий	четко-четкий

Напомним определение слабого решения [13] интервальной линейной системы уравнений

$$I_A^t x = I_b^t, \tag{10}$$

где

$$I_A^t = \{ \underline{A}^t \leq A^t \leq \bar{A}^t \}, I_b^t = \{ \underline{b}^t \leq b^t \leq \bar{b}^t \}.$$

Вектор  $x \in R^n$  называется слабым решением системы (10), если он удовлетворяет для некоторых  $A^t \in I_A^t; b^t \in I_b^t$  системе  $A^t x = b^t$ .

Для множества, стоящего в левой части соотношения (9), справедливо следующее утверждение.

**Лемма 1.** Если  $I_A^t$  - интервальная матрица  $[\underline{A}^t, \bar{A}^t]$ , где  $\underline{A}^t, \bar{A}^t \in R^{m \times n}$ , а  $x \in R^n$ , тогда

$$\{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]. \tag{11}$$

*Доказательство.* Пусть  $b^t \in \{ A^t x \mid A^t \in I_A^t \}$ . Тогда существует  $A^t \in I_A^t$ , что  $A^t x = b^t$ , т. е. вектор  $x$  является слабым решением интервальной линейной системы уравнений

$$A^t x = [b^t, b^t]. \tag{12}$$

Воспользуемся теоремой Оеттли-Прагера [13, с. 79]. Согласно этой теореме, вектор  $x$  является слабым решением интервальной линейной системы уравнений  $I_A^t x = I_b^t$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет неравенству

$$| A_c^t x - b_c^t | \leq \Delta^t |x| + \delta^t, \tag{13}$$

что для системы (12), поскольку  $I_b^t = [b^t, b^t]$ , а следовательно,  $\delta^t = 0$ , и  $b_c^t = b^t$ , дает:

$$|A_c^t x - b^t| \leq \Delta^t |x|. \quad (14)$$

Перепишем неравенство (14) в виде:

$$-\Delta^t |x| \leq A_c^t x - b^t \leq \Delta^t |x|,$$

которое разрешим относительно  $b^t$ :

$$A_c^t x - \Delta^t |x| \leq b^t \leq A_c^t x + \Delta^t |x|. \quad (15)$$

В силу произвольности выбора  $b^t \in \{A^t x \mid A^t \in I_A^t\}$ , неравенство (15) означает, что  $\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} \subset [A_c^t x - \Delta^t |x|; A_c^t x + \Delta^t |x|]$ , где знак  $\subset$  принадлежности подмножества означает и равенство тоже. Для справедливости (11) покажем и обратное включение.

Пусть  $b^t \in [A_c^t x - \Delta^t |x|; A_c^t x + \Delta^t |x|]$ , тогда для него выполняется (15), (14) и (13), т. е.  $x$  является слабым решением интервальной линейной системы уравнений (12). Но это означает, что  $b^t \in \{A^t x \mid A^t \in I_A^t\}$ , т. е. справедливо обратное включение. Это означает, что доказательство леммы закончено.

Эту лемму используем для доказательства эквивалентности разных описаний допусковых решений нечеткой линейной системы уравнений.

**Теорема 2.** Следующие утверждения эквивалентны:

1)  $x$  - допусковое с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  нечеткой линейной системы вида (4)  $F_{Ax} = F_b$ ;

2)  $x$  - удовлетворяет неравенству  $|A_c^t x - b_c^\tau| \leq -\Delta^t |x| + \delta^\tau$ ;

3)

$$x = x_1 - x_2, \quad (16)$$

где  $x_1, x_2$  удовлетворяют условиям:

$$\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \bar{b}^\tau; \quad (17)$$

$$\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq \underline{b}^\tau; \quad (18)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (19)$$

*Доказательство.* Доказательство построим по схеме доказательства: из 1) вытекает 2); из 2) следует 3); из 3) получаем 1).

Докажем, что из 1) вытекает 2). В соответствии с леммой 1.

$$\{A^t x \mid A^t \in I_A^t\} = [A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x|]. \quad (20)$$

Пусть  $x$  - допусковое с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решение нечеткой системы (4), тогда по (9) и по (20):

$$[ A_c^t x - \Delta^t |x|, A_c^t x + \Delta^t |x| ] \subset [ b_c^\tau - \delta^\tau; b_c^\tau + \delta^\tau ]. \quad (21)$$

Включение (21) дает неравенство:

$$b_c^\tau - \delta^\tau \leq A_c^t x - \Delta^t |x| \leq A_c^t x + \Delta^t |x| \leq b_c^\tau + \delta^\tau. \quad (22)$$

Отнимем в (22) от всех частей  $b_c^\tau$ :

$$-\delta^\tau \leq A_c^t x - \Delta^t |x| - b_c^\tau \leq A_c^t x + \Delta^t |x| - b_c^\tau \leq \delta^\tau. \quad (23)$$

Из правого неравенства в (23), перенеся  $\Delta^t |x|$  вправо, имеем:

$$A_c^t x - b_c^\tau \leq \delta^\tau - \Delta^t |x|. \quad (24)$$

Из левого неравенства в (23), перенеся  $\Delta^t |x|$  влево, имеем:

$$\Delta^t |x| - \delta^\tau \leq A_c^t x - b_c^\tau. \quad (25)$$

Объединяя (24) и (25), получаем неравенство из условия «2)» теоремы. Т. е., доказано следование из условия «1)» утверждения «2)».

Докажем, что из утверждения «2)» вытекает условие «3)». Пусть  $x$  - удовлетворяет неравенству из условия «2)» теоремы. Обозначим  $x_1 = \max\{ x, 0 \}$ ,  $x_2 = \max\{ -x, 0 \}$ , где знаки  $\max$  обозначают взятие покомпонентного максимума. Легко видеть, что  $x = x_1 - x_2$ , а  $x_1 + x_2 = |x|$ .

Справедливое неравенство из условия «2)» теоремы приобретает в этих обозначениях вид:

$$\Delta^t (x_1 + x_2) - \delta^\tau \leq A_c^t (x_1 - x_2) - b_c^\tau \leq -\Delta^t (x_1 + x_2) + \delta^\tau. \quad (26)$$

Вспомнив, что  $\bar{A}^t = A_c^t + \Delta^t$ ;  $\underline{A}^t = A_c^t - \Delta^t$ , помножив  $\bar{A}^t$  на  $x_1$ , а  $\underline{A}^t$  на  $x_2$ :  $\bar{A}^t x_1 = A_c^t x_1 + \Delta^t x_1$ ,  $\underline{A}^t x_2 = A_c^t x_2 - \Delta^t x_2$ , и вычтя из первого равенства второе, получаем:

$$\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 = A_c^t (x_1 - x_2) + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2. \quad (27)$$

Выразим из (27)

$$A_c^t (x_1 - x_2) = \bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2$$

и подставим в правую часть (26), перенеся слагаемые с  $\Delta^t$  и  $b_c^\tau$  в правую часть получаемого неравенства:

$$\bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \delta^\tau + b_c^\tau. \quad (28)$$

Учтя, что  $b_c^\tau + \delta^\tau = \bar{b}^\tau$ , из (28) получаем (17).

Для получения (18)  $\bar{A}^t$  умножим на  $x_2$ , а  $\underline{A}^t$  - на  $x_1$ :  $\bar{A}^t x_2 = A_c^t x_2 + \Delta^t x_2$ ;  $\underline{A}^t x_1 = A_c^t x_1 - \Delta^t x_1$ , и вычтем из второго равенства первое:

$$\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 = A_c^t (x_1 - x_2) - \Delta^t x_1 - \Delta^t x_2. \quad (29)$$

Выразив из (29)  $A_c^t (x_1 - x_2) = \underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 + \Delta^t x_1 + \Delta^t x_2$  и подставив в левую часть (26), получаем:

$$\underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq b_c^\tau - \delta^\tau,$$

что с учетом равенства  $\underline{b}^\tau = b_c^\tau - \delta^\tau$  дает (18).

Справедливость (19) следует из определения  $x_1$  и  $x_2$ . Таким образом, доказано, что из «2)» следует утверждение «3)».

Завершает доказательство теоремы обоснование того факта, что из утверждения «3)» следует условие «1)».

Пусть  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  - решения неравенств (17), (18). Для произвольной матрицы  $A^t \in I_A^t$  и для вектора  $x = x_1 - x_2$  выполняется:

$$A^t x = A^t (x_1 - x_2) \leq \bar{A}^t x_1 - \underline{A}^t x_2 \leq \bar{b}^\tau;$$

$$A^t x = A^t (x_1 - x_2) \geq \underline{A}^t x_1 - \bar{A}^t x_2 \geq \underline{b}^\tau,$$

или

$$\underline{b}^\tau \leq A^t x \leq \bar{b}^\tau,$$

т. е.

$$A^t x \in I_b^\tau \quad \forall A^t \in I_A^t,$$

последнее означает, согласно определения 3, что  $x$  - допусковое решение нечеткой линейной системы (4).

Таким образом, теорема доказана.

**Замечание.** Проверка того, что  $x$  является допусковым с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решением нечеткой системы (4), может быть осуществима за полиномиальное время, поскольку это простая проверка разрешимости системы (17)-(19).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

*Результаты исследования:* в работе введено понятие допускового с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решения нечеткой линейной системы уравнений и дана его характеристика.

*Перспективы дальнейших исследований в этом направлении:* далее целесообразно провести числовые эксперименты по проверке решения нечеткой системы на допусковость.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заде Л. А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. А. Заде. - М: Мир, 1976 - 165 с.  
*Zadeh, L. A.* 1975. The Concept of a Linguistic Variable and Its Application to Approximate Reasoning, Part I: Inf. Sci., 8, pp. 199-249; Part II: Inf. Sci., 8, pp. 301-357; Part III: Inf. Sci., 9, pp. 43-80.
2. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств / А. Кофман. - М.: Радио и связь, 1982. - 432 с.  
*Kaufmann, A.* 1982. Introduction to Fuzzy Sets Theory. M.: Radio u svyaz. (in Russian).
3. *Сергиенко И. В.* Применение понятий размытой математики для формализации и решения комбинаторных оптимизационных задач / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. - 1995. - №2. - С. 158-162.  
*Sergienko, I. V. and Kaspshitskaya, M. F.* 1995. Using Concepts of Fuzzy Mathematics for Formalization and Solution of Combinatorial Optimization Problems. Cybernetics and Systems Analysis, 31 (2), pp. 293-296.
4. *Сергиенко И. В.* Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И. В. Сергиенко, И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. - 2003. - №2. - С. 3-15.  
*Sergienko, I. V., Parasyuk, I. N. and Kaspshitskaya, M. F.* 2003. A Fuzzy Problem of Multiparametric Choice of Optimal Solutions. Cybernetics and Systems Analysis, 39 (2), pp. 163-173.
5. *Ємець О. О.* Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах: монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. - Полтава: ПУЕТ, 2011. - 239 с.  
*Iemets, O. and Yemets', O.* 2011. Solving of Combinatorial Optimization Problems on Fuzzy Sets: Monograph. Poltava: PUET. (in Ukrainian).
6. *Ємець О. О.* Операції та відношення над нечіткими числами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2008 - №5. - С. 39-46.  
*Iemets, O. and Yemets', O.* 2008. Operations and rRelations on Fuzzy Numbers. Naukovi Visti of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute 5, pp. 39-46. (in Ukrainian).
7. *Ємець О. О.* Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ "КПІ". - 2008 - №6. - С. 25-33.  
*Iemets, O. and Yemets', O.* 2008. The Construction of the Mathematical mModel of the One Combinatorial Problem of Rectangles Packing with Fuzzy sizes. Naukovi Visti of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute 6, pp. 25-33. (in Ukrainian).
8. *Донец Г. А.* Постановка и решение задачи о рюкзаке с нечеткими данными / Г. А. Донец, А. О. Емец // Проблемы управления и информатики - 2009. - №5. - С. 65-76.  
*Donets, G. A. and Yemets, A. O.* 2009. The Statement and Solution of the Knapsack Problem with Fuzzy Data. Journal of Automation and Information Science, 41 (9), pp. 1-13.
9. *Емец О. А.* Операции над нечеткими числами с носителем мощности континуум для моделирования в комбинаторной оптимизации / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. - 2010. - №2. - С. 86-101.

- Iemets, O. A. and Parfonova, T. A.* 2010. Operations on Fuzzy Numbers with Bearer of the Cardinality of Continuum for Modeling in Combinatorial Optimization. *J. of Automation and Information Sciences*, 42 (4), p. 19-36.
10. *Емец О. А.* Метод ветвей и границ для задач оптимизации на нечетких множествах / О. А. Емец, А. О. Емец, Т. А. Парфенова // Проблемы управления и информатики. - 2013. - №2. - С. 55-60.
- Iemets, O. A., Yemets, A. O. and Parfonova, T. A.* 2014. Branch and Bound Method for Optimization Problems on Fuzzy Sets. *Journal of Automation and Information Sciences*, 45 (4), pp. 23-29.
11. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций: Нечеткая оптимизация: Учеб. пособие / Ю. П. Зайченко. - К.: Выща шк., 1991. - 191 с.
- Zaychenko, Y. P.* 1991. Operations Research: Fuzzy Optimization. Kyiv: Vyscha shkola. (in Russian).
12. *Емец О. А.* О слабой разрешимости и слабой допустимости нечетких линейных систем уравнений / О. А. Емец, А. О. Емец // Матеріали ІІІ Всеукраїнського наукового семінару "Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2013) (Полтава, 30-31 серпня 2013 р.): тези доп. - Полтава: ПУЕТ, 2013. - С. 27-35.
- Iemets, O. and Yemets', O.* 2013. "About Weak Feasibility and Weak Solvability of Fuzzy Linear Systems of Equations paper presented at III All-Ukrainian Scientific Seminar "Combinatorial Optimization and Fuzzy Sets2013, Poltava, 30-31 August. Poltava: PUET, pp. 27-35. (in Russian).
13. *Фидлер М.* Задачи линейной оптимизации с неточными данными / М. Фидлер, Й. Недома, Я. Рамик, И. Рон, К. Циммерманн. - М.-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Интернет компьютерных исследований, 2008. - 288 с.
- Fiedler, M., Nedoma, J., Ramik, J., Rohn, J. and Zimmermann, K.* 2006. Linear Optimization Problems with Inexact Data. Springer Science+usiness Media, Inc.
14. *Емец О. А.* Редукция нечетких чисел с дискретным носителем / О. А. Емец, А. О. Емец // Материалы Международной научной конференции "Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта (ISDMCI '2012) (Евпатория, 27-31 мая 2012 г.): тез. докл. - Херсон: ХНТУ, 2012. - С. 361-362.
- Iemets, O. and Yemets', O.* 2012. "Reduction of Fuzzy Numbers with a Discrete Carrier paper presented at International Scientific Conference "Intellectual Systems of Decision-making and Problems of Computational Intelligence"(ISDMCI '2012), Yevpatoriya, 27-31 May. Kherson: Kherson National Technical University, pp. 361-362. (in Russian).
15. *Iemets O. O.* About the Problem of Growing of a Discrete Fuzzy Number Carrier during Algebraic Operations. / O. O. Iemets, O. O. Yemets' // XX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties, (Brno, Czech Republic, September 17-21, 2012). - Kyiv. - P. 117-124.

*Статья поступила в редакцию 14.01.2014*

УДК 004.93

## СМЫСЛОВЫЕ ЭТАЛОНЫ И ПЕРЕДАЧА ЗНАНИЙ В ЗАДАЧЕ ИХ ОЦЕНКИ НА ОСНОВЕ ТЕСТОВ ОТКРЫТОГО ТИПА

© Д. В. Михайлов, Г. М. Емельянов

НОВГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ЯРОСЛАВА МУДРОГО

E-MAIL: *Dmitry.Mikhaylov@novsu.ru*

SEMANTIC ETALONS AND KNOWLEDGE TRANSFER IN THE PROBLEM OF THEIR  
ESTIMATION BASED ON THE OPEN TYPE TESTS.

Mikhaylov, D. V. and Yemelyanov, G. M.

**Abstract.** The article is devoted to the problem of knowledge transfer between experts and learners in machine learning and knowledge control systems that store information in the form of Natural Language (NL) text units. The purpose of this study is to minimize losses of useful information when forming a knowledge-based system that works with a textual description of the subject area test facts. The solution of this problem is suggested within the framework of the theory of Formal Concept Analysis (FCA) based on the concepts of Situations of Language Use (SLU) as a unit of formal description of the semantics. In the article, in particular, coordination of knowledge generated by experts as well as search for the most efficient transfer method of information between the two groups of NL carriers (experts and trainees) are considered to be very important tasks. In accordance to the model proposed by the authors of this article, the use of SLU etalons as units of the thesaurus and concordance of the etalons allows to reduce the size of the text data. The authors describe a system that performs a search of the SE-form closest to a user response, which defines SLU of the correct answer. Next comes the analysis of the word discrepancies, searching consistencies among mismatched responses' parts being compared as a part of correct answer's etalon and evaluation according to found synonyms. For use of such assessments in evaluating the expert knowledge from different industries, it was necessary to reformulate the definition of SLU similarity using fuzzy logic. System analysis of the professional knowledge structure in a particular area is used for a description of the membership functions.

### ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На сегодняшний день интеллектуализация автоматизированного контроля знаний есть одна из приоритетных задач развития информационных технологий в образовании. Немаловажную роль при этом играют открытые тесты (тестовые задания открытой формы), которые предполагают ответ обучаемого в виде одного или нескольких предложений на естественном языке. При этом для интерпретации результатов теста открытой формы необходимо учитывать различные эквивалентные по смыслу формы описания одного и того же факта действительности разными экспертами на одном и том же ЕЯ. Ставится задача поиска наиболее рационального

плана передачи смысла между двумя группами носителей ЕЯ: эксперты и обучаемые, а также согласования знаний, формируемых экспертами. Сам же смысл в итоге должен быть отражён в максимально компактном объёме текстовых данных. Именно на основе этих данных оценивается близость ответа испытуемого правильному ответу, который формулируется экспертом. Настоящая работа посвящена решению указанной задачи на основе концепции смыслового эталона СЯУ, предложенной авторами.

### 1. СИТУАЦИЯ ЯЗЫКОВОГО УПОТРЕБЛЕНИЯ КАК ЕДИНИЦА ЗНАНИЙ

Пусть  $Ts$  есть множество равных по смыслу (Семантически Эквивалентных [3], СЭ) ЕЯ-фраз, задающих различные формы описания некоторого факта предметной области теста и определяющих СЯУ. Представим СЯУ тройкой

$$K = (G, M, I) \quad (1)$$

именуемой в теории АФП [1] формальным контекстом (ФК). Множество его объектов  $G$  составляют основы слов, синтаксически подчинённых другим словам из СЭ-фраз в составе  $Ts$ . Множество признаков  $M$  включает подмножества, обозначаемые далее посредством соответствующего нижнего индекса:

- указаний на основу синтаксически главного слова (индекс 1);
- указаний на флексию главного слова (индекс 2);
- связей «основа-флексия» для синтаксически главного слова (индекс 3);
- сочетаний флексий зависимого и главного слова (индекс 4);
- указаний на флексию зависимого слова (индекс 5),

При этом пара  $(A, B)$  есть Формальное Понятие (ФП, [1]) с объёмом  $A$  и содержанием  $B$ , если  $A \subseteq G$ ,  $B \subseteq M$  и  $\exists(A', B') : A = \{m \in M \mid \forall g \in A : g Im\}$ ,  $B = \{g \in G \mid \forall m \in B : g Im\}$ , причём  $A = B'$  и  $B = A'$ . Отношение  $I \subseteq G \times M$  формируется анализом буквенной структуры фраз  $Ts_i \in Ts$  путём отбора тех из них, которые отвечают требованию компактного выражения смысла.

В задачах классификации гипотеза компактности есть предположение о том, что схожие объекты гораздо чаще лежат в одном классе, чем в различных [2]. Если представить смысл множества фраз  $\{Ts_i : Ts_i \in Ts\}$  как набор функций, которые связывают обозначаемые словами понятия, то каждая такая функция:

- определена на множестве буквенных цепочек, образующих основы слов фраз  $Ts_i \in Ts$ ;
- имеет множество значений, однозначно определяемое некоторым  $I' \subset I$ ,



а требование компактности выражения смысла означает отбор фраз  $Ts_i \in Ts$  минимальной длины с наибольшим числом слов, наиболее употребимых в различных фразах из  $Ts$  (с учётом синонимов). Именно такие фразы должны составить основу формирования модели (1) как единицы предметных знаний, представляемых текстами заданного ЕЯ. Относительно этих единиц в конечном итоге и оценивается близость ответа испытуемого правильному ответу.

## 2. СМЫСЛОВОЙ ЭТАЛОН И ЕГО ФОРМИРОВАНИЕ

Рассмотрим  $Ts_i \in Ts$  с точки зрения составляющих её символов. У каждой  $Ts_i$  выделяется неизменная часть, общая для всех  $Ts_i \in Ts$ , и флективная часть. Обозначим далее множество индексов для неизменных частей (основ) слов фраз из  $Ts$  как  $J$ . Последовательность таких индексов для некоторой  $Ts_i \in Ts$  назовём Моделью её Линейной Структуры (МЛС),  $Ls(Ts_i)$ .

Пусть  $LS$  — множество моделей линейных структур фраз из  $Ts$  на  $J$ .

**Лемма 1.** Пара индексов  $\{j_1, j_2\} \subset J$  соответствует словам-синонимам, если  $\exists \{Ls(Ts_1), Ls(Ts_2)\} \subseteq LS : Ls(Ts_1) = J_1 \bullet \{j_1\} \bullet J_2$  и  $Ls(Ts_2) = J_1 \bullet \{j_2\} \bullet J_2$ , где  $J_1 \subset J$ ,  $J_2 \subset J$ , а “ $\bullet$ ” — операция типа конкатенации над множеством  $J$ .

Пусть  $PJ$  — множество пар, отвечающих условию Леммы 1. Заменяем индексы, вошедшие в пары из  $PJ$ , на некоторые  $j \in (N \setminus J)$  во всех моделях из  $LS$ . Обозначим далее преобразованное множество  $LS$  как  $LS'$ .

**Утверждение 1.** Пусть  $\{J_1, J_2\}$  — пара последовательностей индексов в  $Ls(Ts_i)$ , где  $J_1 = \{j_1^1, \dots, j_2^1\}$ ,  $J_2 = \{j_1^2, \dots, j_2^2\}$ , а каждой из пар  $(j_1^1, j_2^1)$  и  $(j_1^2, j_2^2)$  отвечает синтаксическая связь. Тогда смысловый эталон СЯУ определяют те  $Ts_i \in Ts$ , в моделях линейных структур которых

$$(J_1 \subset J_2) \vee (J_2 \subset J_1) \vee (|J_1 \cap J_2| = 1) \vee (J_1 \cap J_2 = \emptyset) = true, \quad (2)$$

а сумма длин всех последовательностей указанного вида для всех синтаксических связей на  $Ts_i$  должна быть минимальной.

**Утверждение 2.** Пусть  $freq(w_j)$  — частота появления слова  $w_j$  (независимо от его формы) во всех  $Ts_i \in Ts$ . При этом основу эталона будут составлять фразы с максимумом слов, вошедших в особый кластер  $Clust$ :

- слово с максимальным значением этой частоты войдёт в  $Clust$ ;
- для  $\forall \{w_j, w_k\} \subset Clust$  и  $\forall w_l \notin Clust$  верно то, что
 
$$(|freq(w_j) - freq(w_k)| < |freq(w_j) - freq(w_l)|) \wedge$$

$$\wedge (|freq(w_j) - freq(w_k)| < |freq(w_k) - freq(w_l)|) = true.$$

**Замечание.** При формировании множества  $Clust$  учитываются возможные синонимы анализируемых слов (согласно Лемме 1), поэтому для любого  $w_j$  значение  $freq(w_j)$  оценивают относительно множества  $LS'$ .

Пусть  $J_{Cl} \subset J$  — множество индексов слов, вошедших в  $Clust$ . Рассмотрим множество

$$LC = \bigcup_i LS_i : LS_i \subset LS, \quad \exists Ts_i, \quad Ts_j \in Ts :$$

$$Ls(Ts_i) \in LS_i, |Ls(Ts_i) \cap J_{Cl}| \rightarrow max,$$

$$((Ls(Ts_j) \in LS_i) \wedge (Ts_j \neq Ts_i) \rightarrow |Ls(Ts_i) \cap J_{Cl}| \subset Ls(Ts_j)).$$

Как следует из Утверждения 2, смысловый эталон определяют те фразы, модели линейных структур которых принадлежат  $LC$ .

Пусть  $freq((j, k), LS)$  есть частота появления пары  $(j, k)$  в моделях из множества  $LS$  с учётом того, что  $(j, k) \Leftrightarrow (k, j)$ . Для построения признакового множества формального контекста вида (1) эталона СЯУ требуется найти индексные пары, отвечающие условию (2), и каждой паре нужно задать направление соответствующей синтаксической связи.

**Алгоритм 1.** Формирование связей для эталона СЯУ.

**Вход:**  $LS$ ;

**Выход:**  $R_J = \{(j, k), Dir\} : Dir \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$ ;

**Начало**

1.  $R_J := \emptyset$ ;
2. сформировать  $LC$  на основе  $LS$ ;
3. для всех  $Ls(Ts_i) \in LC$
4.  $P_i := \{(j, k) : j, k \in Ls(Ts_i), j \neq k\}$ ;
5.  $P := *_i P_i$  с учётом  $(j, k) \Leftrightarrow (k, j)$ ;
6.  $P' := \{(j, k) \in P : freq((j, k), LC) > 1\}$ ;
7. для всех  $(j, k) \in P'$
8. если найдено  $Dir(j, k)$  то
9.  $R_J := R_J \cup \{(j, k), Dir\}$ ;

**Конец** {Алгоритм 1}.

Для каждой пары  $(j, k)$ , выделенной на Шаге 6 Алгоритма 1, поиск  $Dir(j, k)$  идёт в три этапа. На первом проверяется, является ли связь, соответствующая паре, ложной.

**Определение 1.** Пусть  $\{j, k, l\} \subset J$ , а  $St(j)$ ,  $St(k)$  и  $St(l)$  есть основы слов, отвечающие индексам  $j$ ,  $k$  и  $l$ . Связь, ассоциируемая с парой  $(j, k)$ , идентифицируется как ложная относительно рассматриваемой СЯУ при одновременном выполнении двух условий:

1.  $\exists Ts_i \in Ts : j, k, l \in Ls(Ts_i)$ .
2. В рассматриваемой предметной области существует СЯУ, где связь между  $St(j)$  и  $St(k)$  идентифицирована как ложная, но существует связь либо между  $St(j)$  и  $St(l)$ , либо между  $St(k)$  и  $St(l)$ .

**Замечание.** Начальные знания системы об истинных и ложных связях формируются в режиме интервью с экспертом. При этом совокупным знаниям по отдельной СЯУ соответствует булев вектор

$$(d_1, \dots, d_k, \bar{d}_{k+1}, \dots, \bar{d}_n),$$

где компоненты  $d_1, \dots, d_k$  отождествляются с истинными, а  $\bar{d}_{k+1}, \dots, \bar{d}_n$  — с ложными связями.

Пару  $(j, k)$ , доказать ассоциацию с ложной связью для которой не удалось, проверяют на возможность отождествления с ранее выделенными связями.

Пусть  $w(j) \in Ts_i : w(j) = St(j) \bullet Fl(j)$ , где символьная цепочка  $Fl(j)$  представляет флективную часть слова  $w(j)$ , а символом “ $\bullet$ ” обозначается операция конкатенации. Аналогично пусть  $w(k) \in Ts_i$  и при этом  $w(k) = St(k) \bullet Fl(k)$ . Обозначим множество ранее выделенных связей как  $Lnk$ . Каждый элемент в  $Lnk$  представляется четвёркой

$$(Id, St_1, St_2, FCm),$$

где  $Id$  — идентификационный номер СЯУ;  $St_1$  — основа главного,  $St_2$  — зависимого слова;  $FCm$  — список пар вида «флексия главного слова — флексия зависимого».

Считается, что паре  $(j, k)$  соответствует связь  $((j, k), \rightarrow)$  в рамках заданной СЯУ, если для некоторой СЯУ с идентификационным номером  $Id$  существует  $(Id, St_1, St_2, FCm) \in Lnk : St(j) = St_1, St(k) = St_2$ , а  $(Fl(j), Fl(k)) \in FCm$ .

В случае, когда  $St(j) = St_2, St(k) = St_1$ , а список  $FCm$  содержит пару  $(Fl(k), Fl(j))$ , паре  $(j, k)$  будет отвечать связь  $((j, k), \leftarrow)$ .

Как и на этапе формирования начальных знаний, пару  $(j, k)$ , для которой не нашлось ассоциации ни с одной из ранее выделенных связей (ложных или истинных), проверяют на наличие связи, опрашивая эксперта.

На основе найденного множества  $R_J$  далее идёт отбор фраз  $Ts_i \in Ts$  для построения множества признаков формального контекста (1) эталона СЯУ.

Первым шагом из состава каждого  $LS_i \subset LC$  исключаются те МЛС, которые включают индексы, не вошедшие ни в одну из связей в составе  $R_J$ . Введём обозначение  $LC^*$  для преобразованного таким образом множества  $LC$ , аналогично  $LC_i^*$  — для  $\forall LS_i \subset LC$ .

По каждому  $LS_i^* \subset LC^*$  отбирается  $Ts_i$ :

$$Ls(Ts_i) \in LS_i^*, |Ts_i| \rightarrow \min. \quad (3)$$

Совокупность фраз  $Ts_i \in Ts$  отвечающих условию (3), обозначим как  $Ts^*$ .

Заключительный шаг формирования ФК вида (1) эталона СЯУ состоит в построении признакового множества  $M$  и объектно-признаковых связей в рамках отношения  $I \subseteq G \times M$  на основе найденных  $R_J$  и  $Ts^*$ .

В целях более точного выделения объектов и признаков эталона введём процедуру согласования знаний относительно разных СЯУ заданной предметной области. Пусть модель (1) есть единица тезауруса, представляемого тройкой

$$Kth = (Gth, Mth, Ith), \quad (4)$$

где  $Gth$  состоит из символьных пометок отдельных СЯУ,  $Mth$  включает признаки ФК вида (1) каждой  $gth \in Gth$ . Кроме того, в составе  $Mth$  выделяются:

- множество указаний на объекты формальных контекстов вида (1), генерируемых для отдельных  $gth \in Gth$  (обозначим далее это множество как  $M_6$ );
- множество сочетаний основы и флексии для зависимого слова ( $M_7$ );
- множество сочетаний основ зависимого и главного слова ( $M_8$ ).

Модель (4) позволяет определить процедуру согласования единиц знаний с помощью следующего правила.

**Правило 1.** Пусть  $St_j$  есть основа,  $Fl_j$  — флексия слова  $w$ , найденные относительно СЯУ  $S_j$ . Предположим, что  $w = St_1 \bullet Fl_1$  для СЯУ  $S_1$ ,  $w = St_2 \bullet Fl_2$  для СЯУ  $S_2$ , причём  $S_1 = S_2 \bullet suf$ , где  $suf$  содержит минимум один символ. Тогда относительно  $S_1$  основа  $St_1$  может быть заменена основой  $St_2$ , а флексия  $Fl_1$  — флексией  $Fl_3 = suf \bullet Fl_2$  только в том случае, если встречаемость флексий  $Fl_3$  и  $Fl_2$  в отношениях из  $Ith \subseteq Gth \times Mth$  не уменьшается при выполнении указанных замен.

Качественно процесс формирования эталонов СЯУ характеризуется динамикой изменения показателей сжатия информации в тезаурусе, представляемом решёткой для ФК (4) — множеством всех его ФП вместе с отношением порядка. Наиболее естественными показателями такого рода здесь могут быть коэффициенты сжатия по основам и флексиям, аналогичные введённым в [4].

Коэффициент сжатия по основам относительно модели (4) определяется как

$$ksth = \frac{\sum_{i=1}^{nbsth} ksth_i}{nbsth}, \quad (5)$$

где согласно обозначениям для подмножеств множества признаков ФК (1)

$$nbsth = |Mth_1|; \quad ksth_i = \frac{\sum_{k=1}^{nmfth} \sum_{j=1}^{ndm_{ki}} nfm_{s_{ijk}}}{nbsth_i}; \quad nmfth = |Mth_2|;$$

$$nfm_{s_{ijk}} = |\{mth_i \in Mth_3 : Ith(gth_j, mth_i) = true, gth \in Gth,$$

$$\exists m_{bf} \in Mth_2 : m_{bf} = p_{bf} \bullet f_i, mth_i = b_i \bullet \text{”:”} \bullet f_i,$$

$$Ith(gth_j, m_{bf}) = true,$$

$$\exists m_{bs} \in Mth_1 : m_{bs} = p_{bs} \bullet b_i, \quad Ith(gth_j, m_{bs}) = true,$$

$$\exists mth_k \in M_6 : mth_k = p_b \bullet b_k, \quad Ith(gth_j, mth_k) = true,$$

$$\exists mth \in M_8 : mth = b_k \bullet b_i, \quad Ith(gth_j, mth) = true \};$$

$$ndm_{ki} = |\{gth_j \in Gth : Ith(gth_j, mth) = true, mth \in M_8, mth = b_k \bullet b_i \}|;$$

$$nmfth = |Mth_2|;$$

$p_{bf}$ ,  $p_{bs}$  и  $p_b$  соответствуют символьным константам «главное–флексия:», «главное–основа:» и «основа:», соответственно.

По аналогии с коэффициентом (5) коэффициент сжатия информации по флексиям относительно формального контекста (4) равен

$$ksth = \frac{\sum_{i=1}^{nbsth} ksth_i}{nbsth}, \quad (6)$$

где согласно ранее принятым обозначениям

$$nfsth = |Mth_5|; \quad kfth_i = \frac{\sum_{j=1}^{nfsth_i} \sum_{k=1}^{nmfth} nafth_{ijk}}{nfsth_i};$$

$$\begin{aligned}
 nfsth_i &= |\{gth \in Gth : Ith(gth, mth) = true, mth \in Mth_5, mth = p_{fl} \bullet f_i\}|; \\
 nafth_{ijk} &= |\{mth \in Mth_4 : Ith(gth_j, mth) = true, \\
 &\exists m_{bf} \in Mth_2 : m_{bf} = p_{bf} \bullet f_k, mth = f_i \bullet "':" f_k\}|;
 \end{aligned}$$

$p_{fl}$  есть обозначение символьной константы «флексия:».

Графики на рис. 1 иллюстрируют динамику изменения значений оценок (5) и (6) при последовательном добавлении в тезаурус СЯУ из табл. 1 (без выполнения процедуры согласования знаний согласно Правилу 1).

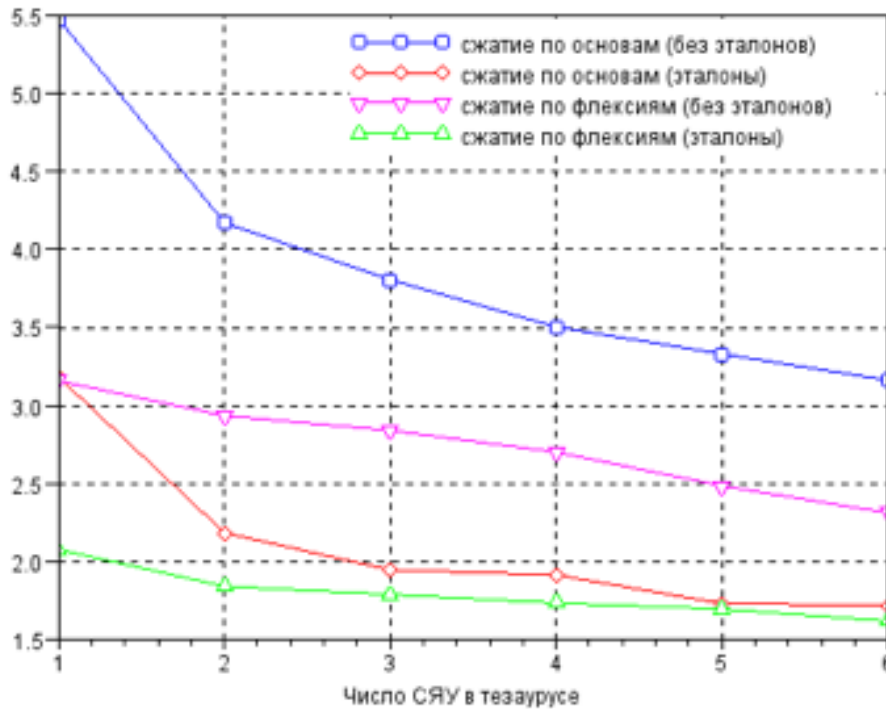


Рис. 1. Сжатие информации относительно формального контекста тезауруса.

Для сравнения в табл. 2 приводятся значения числа СЭ-фраз, задающих СЯУ ( $N_1$ ), ЕЯ-фраз, определяющих эталон ( $N_2$ ), исходного числа объектов ( $N_3$ ) и признаков СЯУ ( $N_4$ ), числа объектов ( $N_5$ ) и признаков эталона ( $N_6$ ).

Диаграмма на рис. 2 иллюстрирует дополнительный рост специфичности формальных понятий в решётке тезауруса при выполнении процедуры согласования знаний в соответствии с Правилу 1 для СЯУ из табл. 1. Индикатором роста специфичности формальных понятий является постепенное уменьшение значений коэффициентов (5) и (6) при добавлении новых СЯУ в тезаурус. При этом специфичность

i	Фраза максимальной длины из определяющих СЯУ
1	Нежелательное переобучение является причиной заниженности средней величины ошибки алгоритма на обучающей выборке.
2	Тренировочная выборка, на ней проявляется эффект заниженных значений средней ошибки, причиной же является переусложненная модель.
3	Контрольная выборка, принятие деревом решения на ней будет с большей вероятностью ошибки именно по причине перепогонки.
4	Оценка частоты ошибок на выборке, взятой в качестве контрольной, может для алгоритма оказаться заниженной по причине перепогонки.
5	Заниженность оценки ошибки распознавания зависит от выбора правила принятия решений.
6	Число закономерностей алгоритмической композиции влияет на частоту ошибок логического классификационного алгоритма на контрольной выборке.

Таблица 1. Ситуации языкового употребления.

i	1	2	3	4	5	6
$N_1$	56	28	29	30	6	10
$N_2$	8	9	7	9	1	2
$N_3$	18	17	15	13	12	14
$N_4$	177	186	173	162	94	81
$N_5$	9	12	12	11	8	12
$N_6$	82	90	80	69	35	53

Таблица 2. Эталоны для СЯУ из табл. 1.

формального понятия численно оценивается кратчайшим расстоянием от вершинного ФП в решётке до рассматриваемого ФП.

Применение эталона СЯУ в качестве единицы тезауруса, задаваемого моделью (4), позволяет сократить его размер не менее чем на 40–50%. Согласование эталонов как единиц знаний по Правилу 1 даёт дополнительное сокращение размеров такого тезауруса в среднем на 1,5%.

### ОЦЕНКА СХОЖЕСТИ СЯУ В СИСТЕМЕ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ

Предложенный метод выделения эталона на СЯУ реализован в рамках демо-версии системы контроля знаний, представленной (вместе с исходными текстами на Visual Prolog 5.2) в подразделе «Участник:Dmitry.Mikhaylov» раздела «Страницы

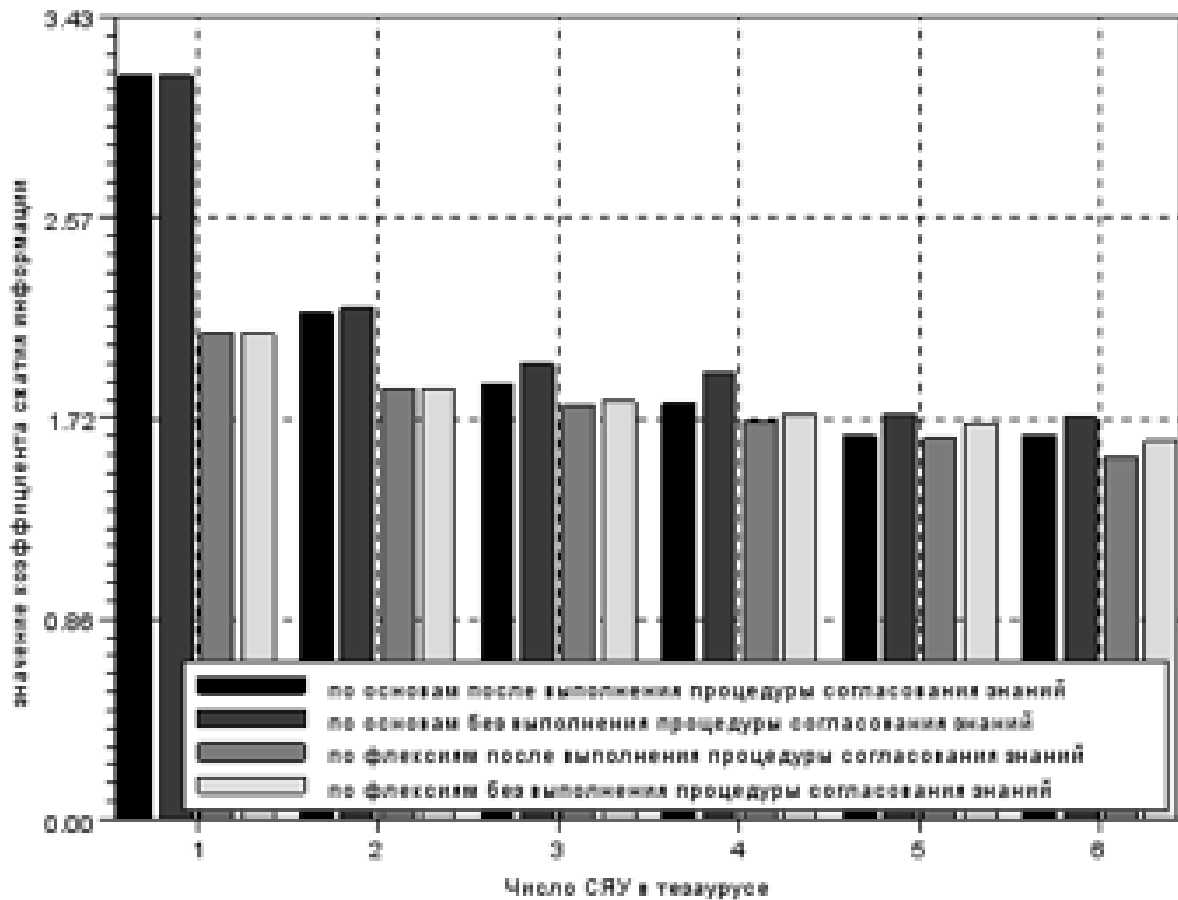


Рис. 2. Сжатие информации тезауруса (эталон выделен).

участников» ресурса [2]. При этом согласование знаний, формируемых разными экспертами по одной и той же предметной области, может быть наглядно проиллюстрировано вычислением оценок близости ответа испытуемого правильному ответу. Суть данных оценок была рассмотрена нами в [7].

Пусть СЯУ  $S_1$  соответствует правильному ответу, который формулируется экспертом, а СЯУ  $S_2$  — ответу испытуемого. Введём обозначения формальных контекстов вида (1): для  $S_1$  —  $Ke$ , а для  $S_2$  —  $Kx$ , где  $Ke = (Ge, Me, Ie)$  и  $Kx = (Gx, Mx, Ix)$ ,  $Ie \subseteq Ge \times Me$  и  $Ix \subseteq Gx \times Mx$ , соответственно. Результат объединения  $M_6, M_7, M_8, Me_4, Mx_4, Me_5$  и  $Mx_5$  обозначим как  $M_U$  (здесь используются принятые нами ранее обозначения подмножеств в составе признаков множеств формальных контекстов (1) и (4)).



**Определение 2.** Будем считать, что  $S_1$  и  $S_2$  связаны отношением близости, если каждому объекту  $gx \in Gx$  соответствует такой объект  $ge \in Ge$ , что выполняется одно из следующих условий:

1.  $gx = ge$  и любой признак  $me \in Me$  объекта  $ge$  относится и к  $gx$ .
2.  $gx = ge$ , при этом условие (1) не выполняется, но существует  $gth \in Gth$ , обладающий признаком  $mth_1 \in M_6 : mth_1 = p_b \bullet ge$  при обязательном выполнении следующих условий:

$$(\exists me_{fl} \in Me_5 : me_{fl} = p_{fl} \bullet fe) \rightarrow (\exists mth_{17} \in M_7 : mth_{17} = ge \bullet \text{":"} \bullet fe),$$

при этом  $(Ie(ge, me_{fl}) \wedge Ix(ge, me_{fl})) \rightarrow Ith(gth, mth_{17});$

$$(\exists me_{bs} \in Me_1 : me_{bs} = p_{bs} \bullet be) \rightarrow (\exists mth_{18} \in M_8 : mth_{18} = ge \bullet \text{":"} \bullet be),$$

при этом  $Ie(ge, me_{bs}) \rightarrow Ith(gth, mth_{18});$

$$(\exists mx_{bs} \in Mx_1 : mx_{bs} = p_{bs} \bullet bx) \rightarrow (\exists mth_{28} \in M_8 : mth_{28} = ge \bullet \text{" :"} \bullet bx),$$

при этом  $Ix(ge, mx_{bs}) \rightarrow Ith(gth, mth_{28});$

Кроме того, для  $\forall mth \in (Mth \setminus M_U)$  истинно:

$$Ith(gth, mth) \rightarrow (Ie(ge, mth) \wedge Ix(ge, mth)). \quad (7)$$

3.  $gx \neq ge$ , но существует объект  $gth \in Gth$ , обладающий признаками  $mth_1 \in M_6 : mth_1 = p_b \bullet ge$  и  $mth_2 \in M_6 : mth_2 = p_b \bullet gx$ , при этом для любого признака  $mth \in (Mth \setminus M_U)$  справедливо:

$$Ith(gth, mth) \rightarrow (Ie(ge, mth) \wedge Ix(ge, mth)). \quad (8)$$

4.  $gx \neq ge$ , но существует объект  $gth_1 \in Gth$ , обладающий признаком  $mth_1 \in M_6 : mth_1 = p_b \bullet ge$ , а для  $\forall me \in (Me_4 \cup Me_5)$  верно:

$$(Ith(gth_1, mth_1) \wedge Ie(ge, me)) \rightarrow Ith(gth_1, me).$$

При этом существуют признаки  $mth_2 \in M_6 : mth_2 = p_b \bullet gxg$  и  $mx \in (Mx_1 \cup Mx_2 \cup Mx_3)$ , для которых верно:

$$(Ith(gth_1, mth_2) \wedge Ix(gx, mx)) \rightarrow Ith(gth_1, mx),$$

где  $gxg \neq gx$ , а пара  $(gxg, ge)$  отвечает условию (3) при генерации ФК вида (1) для объекта  $gth_1$ . В то же время существует объект  $gth_2 \in Gth$  относительно

которого пара  $(gx, gxg)$  также будет отвечать условию (3) настоящего определения. Генерируемый при этом формальный контекст вида (1) для обозначим как  $Kxg$ ,  $Kxg = (Gxg, Mxg, Ixg)$ .

Близость ситуаций  $S_1$  и  $S_2$  численно оценивается как

$$spc(S_1, S_2) = \frac{\sum_{k=1}^n spc_k}{n}, \quad (9)$$

где  $n = |Gx|$ , а  $spc_k$  есть значение близости объектов в паре  $(gx_k, ge)$ . В зависимости от выполнимости условий Определения 2 значение  $spc_k$  либо равно 1,0, если для  $(gx_k, ge)$  выполнено условие (1), либо вычисляется по формуле:

$$-\log_2 \left( 1 - \frac{D_c}{path_C} \right) \times \frac{|BLCs|}{|B_1 \setminus BLCs| + |B_2 \setminus BLCs| + |BLCs|}, \quad (10)$$

если для пары  $(gx_k, ge)$  выполнено условие (2), (3) либо (4).

Во втором случае имеем гипотетическую решётку ФП (обозначим её как  $\mathfrak{R}xe$ ), в которой объёмы объектных ФП (формальных понятий с одним объектом в составе объёма) есть  $\{gx_k\}$  и  $\{ge\}$  (при выполнении условия (2) или (3)) либо  $\{gx_k\}$ ,  $\{ge\}$  и  $\{gxg\}$  (при выполнении условия (4)). Значение  $D_c$  равно числу сравнимых формальных понятий, составляющих цепочку с вершинным ФП решётки  $\mathfrak{R}xe$  в качестве максимального ФП и наименьшим общим суперпонятием (НОСП) для объектных формальных понятий решётки  $\mathfrak{R}xe$  — в качестве минимального ФП. Множество  $BLCs$  есть содержание (множество признаков всех объектов) этого НОСП, а число  $path_C$  равно минимальному числу ФП в цепочке, которой принадлежит вершинное ФП, наименьшее ФП решётки  $\mathfrak{R}xe$  и формальное понятие с содержанием  $BLCs$ .

В случае выполнения любого из условий (2), (3) или (4) значение  $D_c = 2$  (доказательство очевидно).

При выполнении условия (2) либо (3)  $path_C = 4$ , а в  $BLCs$  войдут признаки  $mth \in (Mth \setminus M_U)$ , для каждого из которых справедливо либо соотношение (7) (при выполнении условия (2)), либо соотношение (8) (при выполнении условия (3)). Множества  $B_1$  и  $B_2$  в этом случае определяются следующим образом:

$$B_1 = \{me : me \in (Me_1 \cup Me_2 \cup Me_3), Ie(ge, me) = true\},$$

$$B_2 = \{mx : mx \in (Mx_1 \cup Mx_2 \cup Mx_3), Ix(gx, mx) = true\}.$$

Доказательство выполнимости условия (4) обычно происходит в несколько итераций. При этом в ходе каждой последующей итерации число признаков, не являющихся общими для  $gx_k$  и  $gxg$ , всегда меньше, чем в предыдущей. Начальное значение

$path_C$ , равное 4, в ходе каждой итерации возрастает на 1, а

$$B_1 = \{mxg : mxg \in (Mxg_1 \cup Mxg_2 \cup Mxg_3), Ixg(gxg, mxg) = true\},$$

$$B_2 = \{mx : mx \in (Mxg_1 \cup Mxg_2 \cup Mxg_3), Ixg(gx_k, mx) = true\},$$

где  $(Mxg_1 \cup Mxg_2 \cup Mxg_3) \subset Mxg$  в соответствии с показанным выше разделением множества признаков ФК вида (1), а  $BLCS = B_1 \cap B_2$ .

В реализованной системе (рис. 3) для ответа испытуемого производится поиск наиболее близкой (по буквенному составу) из всех СЭ-форм, определяющих СЯУ правильного ответа. Далее идёт анализ словесных несовпадений, поиск соответствий для несовпадающих частей сравниваемых предложений уже в составе эталона правильного ответа и вычисление оценок (10) с учётом найденных синонимов. Указанные оценки вычисляются для случаев неполного ответа, орфографических ошибок, а также лишних слов, не фигурирующих в лексико-синтаксических связях из представленных в базе знаний системы.

*Случай 1.* Неполный ответ — для всех слов и словосочетаний из ответа испытуемого нашлись прообразы в наиболее близком «правильном» варианте, но для части слов правильного ответа не нашлось прообразов в ответе испытуемого. Ненулевое значение оценки (10) будет только для тех упущенных слов, которые в «правильном» варианте являются синтаксически зависимыми по отношению к некоторым другим словам из анализируемого ответа. Здесь имеет место обобщение оценки (10) на случай, когда для одного из сравниваемых объектов не определены признаки из множеств  $Mx_5$ ,  $Mx_4$ ,  $M_6$ ,  $M_7$ ,  $M_8$ . Таким объектом является основа слова, упущенного в ответе испытуемого. Значение оценки (10) для упущенного слова равно  $-\log_2 \left(1 - \frac{2}{4}\right) \times \frac{3}{(8-3) + (8-3) + 3} \approx 0.23$ .

*Случай 2.* Орфографические ошибки (из допустимых) — слово из ответа испытуемого и слово из варианта правильного ответа есть различные формы одного и того же слова, допустимыми в рамках одной лексико-синтаксической связи (не обязательно в рамках рассматриваемой СЯУ). В этом случае оценка (10) для анализируемой пары слов вычисляется аналогично общему случаю.

*Случай 3.* «Лишние» слова — ситуация, когда все слова из наиболее близкого «правильного» варианта нашли прообраз в ответе испытуемого, но в анализируемом ответе есть слова, которые не нашли прообразов в «правильном» (в том числе и на уровне словосочетаний). В этом случае ответ испытуемого не будет засчитан как неверный только тогда, когда «лишние» слова не фигурируют в базе знаний системы ни в одной лексико-синтаксической связи. При этом значение оценки (10) для каждого «лишнего» слова принимается равным нулю.

Тестирование знаний и подготовка к ЕГЭ

База знаний Тесты Перевод знакоство Window Помощь

Численные оценки близости правильному ответу

Испытуемые	Иванов Е.А.	Петров М.Н.	Сидоров Д.Л.	Зайцев Е.А.	Волков А.В.
Вопрос 1	0.857	1.000	0.4	1.000	0.857
Вопрос 2	1.000	0.733	0.868	0.75	0.545
Вопрос 3	0.75	0.63	0.000	0.703	0.42
Вопрос 4	0.861	0.861	0.717	0.662	1.000
Вопрос 5	0.725	0.657	0.000	0.5	0.471

Результат по испытуемому

Испытуемый: Петров М.Н.

Вопрос теста (вопрос №3):

Как влияет переобучение на частоту ошибок дерева принятия решений ?

Полученный ответ:

Именно с переобучением связана увеличение частоты ошибок дерева принятия решений на контрольной (= тестовой) выборке.

Наиболее близкий вариант правильного ответа:

Увеличение частоты ошибок дерева принятия решений на контрольной выборке связано с переобучением.

Численная оценка близости правильному ответу: 0.63

Оценка за ответ: удовл.

Рис. 3. Интерфейс системы и пример интерпретации ответа.

Испытуемые	Иванов Е.А.	Петров М.Н.	Сидоров Д.Л.	Зайцев Е.А.	Волков А.В.
Вопрос 1	0.857	1.000	0.4	1.000	0.857
Вопрос 2	1.000	0.733	0.868	0.75	0.545
Вопрос 3	0.75	0.652	0.000	0.703	0.42
Вопрос 4	0.913	0.913	0.717	0.595	0.89
Вопрос 5	0.725	0.657	0.000	0.5	0.471

Рис. 4. Результаты из примера на рис. 3 после согласования знаний по разным СЯУ.

Применение *Правила 1* к ситуациям языкового употребления, нашедшим отражение в тезаурусе, последовательно иллюстрируют рис. 3 и 4. Каждая из уточнённых оценок на рис. 4 обведена прямоугольником. Незначительное снижение оценок близости правильному ответу на *Вопрос 4* у испытуемых *Зайцева Е. А.* и *Волкова А. В.* обусловлено заменой выделенных ранее нулевых флексий у ряда слов, представленных в тезаурусе.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сокращая размер базы знаний для оценки семантической схожести текстов предметно-ограниченного ЕЯ минимум на 40–50%, разработанный метод формирования эталона СЯУ позволяет найти необходимый и достаточный объём текстовых данных для передачи знаний между учителем и учеником. При этом предложенная концепция СЯУ составляет основу решения задач поиска систем зависимостей совместной встречаемости осмысленных фрагментов слов в кон-тексте связного текста. Сказанное, в частности, немаловажно для сокращения перебора при построении

смыслового контекста в мультиагентном подходе [6]. В данной работе все виды связей между главным и зависимым словом предполагались одинаково значимыми для оценки схожести фраз. Для применения таких оценок в задачах оценки профессиональных знаний по отраслям [5] определение схожести СЯУ необходимо переформулировать с позиций нечёткой логики. При этом для описания функций принадлежности необходим системный анализ структуры профессиональных знаний в конкретной области. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №13-01-00055).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ganter, B. and Wille, R. (1999). Formal concept analysis. Berlin: Springer.
2. MachineLearning.ru. (2014). Available at <http://www.machinelearning.ru>
3. Mikhailov D. V. and Emelyanov G. M. (2009). Forming and clustering of syntactic relations on the bases of Natural Language's using's situations. *Interactive systems and technologies: the problems of human-computer interaction. Collection of scientific papers. Ulyanovks, ULSTU*. Vol. III, pp. 295–307.
4. Емельянов Г. М., Михайлов Д. В. Анализ формальных понятий и сжатие текстовой информации в задаче автоматизированного контроля знаний // Всерос. конф. ММРО-15. — М.: Макс Пресс, 2011. — С. 581–584.  
Yemelyanov, G. M. and Mikhaylov, D. V. (2011). Formal Concept Analysis and compression of text information on the problem of automated control of knowledge. MMRO-2015 Conference. Moscow, Max Press, pp. 581–584.
5. Краснов А. Н., Мошков И.С., Якимов В.Н. Компьютерная система анализа текста таксономического типа применительно к оценке профессиональных знаний [Текст] // Междунар. науч.-практ. конф. «Инновация-2011». — Ташкент: Ташкентский гос. техн. ун-т, 2011. — С. 287–289.  
Krasnov, A., Moshkov, I. and Yakimov, V. (2015). Taxonomic type text analysis computer system for the estimation of professional knowledge. International Conference «Innovation-2011». Tashkent, TSTU, pp. 287–289.
6. Минаков И. А. Интеграция профессиональных знаний, представленных в виде текстов на естественном языке // Вестник СамГТУ, серия «Технические науки», 2007. — № 1 (19). — С. 28–35.  
Minakov, I. (2007). Integration of professional knowledge which presented by the natural language texts. Herald of SamSTU, «Technical Sciences» Series, No. 1, pp. 28–35.
7. Михайлов Д. В., Емельянов Г. М. Семантическая схожесть текстов в задаче автоматизированного контроля знаний // Межд. конф. ИОИ-2010. — М.: Макс Пресс, 2010. — С. 516–519.  
Mikhaylov, D. and Yemelyanov, G. (2010). The semantic similarity of texts in the problem of automated control of knowledge. International Conference IOI-2010, pp. 516–519.

Статья поступила в редакцию 05.12.2014

## АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

© Л. И. Руденко

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, РЕСПУБЛИКА КРЫМ, РОССИЯ  
E-MAIL: domlir@yandex.ru

### LINEAR FUNCTION SYNTHESIS ALGORITHM AND IT'S APPLICATIONS.

Rudenko, L. I.

**Abstract.** We consider the ordinal approach to the completion of a linear function on the basis of consistent initial information, substantiate the functions synthesis algorithm and discuss the applications of this algorithm. In a number of decision-making problems, allowing the formalization in the form of linear models is certainly known that the objective function is linear, but the vector of its coefficients is not installed. Partial information  $I(D)$  of the function is defined on a subset of feasible variables  $D$  by the binary relation  $\tilde{x} \succ \tilde{y} \Leftrightarrow f(\tilde{x}) > f(\tilde{y})$ ,  $\tilde{x}, \tilde{y} \subset D$  which is established by expert evaluation. This information is consistent if and only if this relation is a strict order.

Partially specified function is called linear allowing an approach is, if there is a vector  $\tilde{c} \in \mathbb{R}^n$  such that  $f(\tilde{x}) > f(\tilde{y}) \Leftrightarrow (\tilde{c}, \tilde{x}) > (\tilde{c}, \tilde{y})$ . A necessary and sufficient condition for a linear completion of the function, partly given by the order relation is formulated. Provides a way completions linear function based on linear correction procedures and function synthesis algorithm based on the ordinal initial information is formulated. The ambiguity of reconstruction and examples of software algorithms are discuss.

Next, we consider a number of problems with the search for optimal solutions using the algorithm of synthesis of a linear function. One such problem is a weakly-defined linear programming problem, which is completely determined by the set of feasible solutions, and the objective function is defined in part by the order relation. The examples discuss ambiguity of reconstruction and additional information narrows the uncertainty.

Another area of application of the synthesis algorithm associated with the proposed approach to solving multiobjective optimization problem by convolution of criteria. If such a problem, there is a subset of feasible solutions, which can be the same order by all criteria, the vector of coefficients of the convolution can be restored by a linear correction procedures.

Next, we propose an approach to the reconstruction of continuous nonlinear functions satisfying a monotonicity and convexity and partially defined by the order relation on a finite subset of the domain of definition.

Finally, the problem of reconstruction of a linear function of collective utility in the problem of collective choice-making. If a subset of feasible solutions all individuals equally set our preferences, the coefficient vector of collective utility function can be restored by the linear correction procedures.

## 1. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ, ЧАСТИЧНО ЗАДАННОЙ ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА

В ряде задач принятия решений, допускающих формализацию в виде линейных моделей, бывает заведомо известно, что целевая функция линейна, т.е.  $f(\tilde{x}) = (\tilde{c}, \tilde{x})$ , но вектор ее коэффициентов  $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$  не установлен. Предположим, что начальная информация о функции задана на подмножестве  $D = \{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k\} \subset X$ , где для каждой пары векторов  $\tilde{x}^i, \tilde{x}^j \in D$  достоверно известно, что  $f(\tilde{x}^i) > f(\tilde{x}^j)$  (либо  $f(\tilde{x}^i) < f(\tilde{x}^j)$ ). Результат сравнения может быть определен, например, путем экспертной оценки.

Таким образом, начальная информация  $I_0(f) = I(D)$  задает на конечном множестве  $D$  бинарное отношение “ $\succ$ ”

$$\tilde{x} \succ \tilde{y} \Leftrightarrow f(\tilde{x}) > f(\tilde{y}), \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in D. \quad (1)$$

Информацию  $I(D)$  будем называть *непротиворечивой*, если заданное ею отношение “ $\succ$ ” является строгим порядком. Нетрудно показать [2], что для выполнения условия непротиворечивости необходимо и достаточно, чтобы элементы множества  $D = \{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k\}$  допускали упорядочение:

$$\tilde{x}^{i_1} \succ \tilde{x}^{i_2} \succ \dots \succ \tilde{x}^{i_k}, \quad (2)$$

что соответствует упорядоченной последовательности значений функции:

$$f(\tilde{x}^{i_1}) > f(\tilde{x}^{i_2}) > \dots > f(\tilde{x}^{i_k}). \quad (3)$$

Отметим сразу, что допустимо и обратное упорядочение по убыванию.

Далее, будем говорить, что функция  $f(\tilde{x})$ , частично заданная непротиворечивой информацией  $I(D)$ , *допускает линейное доопределение*, т.е. восстановление в классе линейных функций, если найдется вектор  $\tilde{c} \in \mathbb{R}^n$  такой, что для всех пар допустимых векторов  $\tilde{x}, \tilde{y}$ , удовлетворяющих отношению  $f(\tilde{x}) > f(\tilde{y})$ , имеет место  $(\tilde{c}, \tilde{x}) > (\tilde{c}, \tilde{y})$ .

Это возможно тогда и только тогда, когда на упорядоченном в соответствии с (2) множестве  $D$  для любого  $j = 1, \dots, k - 1$  найдется гиперплоскость  $L_j = \{\tilde{x} : (\tilde{a}, \tilde{x}) = \lambda_j\}$ , строго отделяющая элементы  $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^j$  от элементов  $\tilde{x}^{j+1}, \dots, \tilde{x}^k$ , причем  $(\tilde{a}, \tilde{x}^j) > (\tilde{a}, \tilde{x}^{j+1})$  [2].

Набор коэффициентов  $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$  линейной целевой функции, частично заданной при помощи непротиворечивой начальной информации  $I(D)$ , может быть восстановлен за конечное число шагов с помощью процедуры линейной коррекции:

$$\tilde{c}^l = \begin{cases} \tilde{c}^{l-1}, & \text{если } (\tilde{c}^{l-1}, \tilde{x}^i - \tilde{x}^j) > 0, \\ \tilde{c}^{l-1} + (\tilde{x}^i - \tilde{x}^j), & \text{если } (\tilde{c}^{l-1}, \tilde{x}^i - \tilde{x}^j) \leq 0, \end{cases} \quad (4)$$



где  $l = 1, \dots, m, m + 1, \dots$ ;  $m = k(k - 1)/2$ ;  $k = |D|$ ;  $\tilde{x}^i, \tilde{x}^j \in D$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ ; а  $\tilde{c}^0$  — произвольный начальный набор.

Процедура линейной коррекции (4) сходится за конечное число шагов тогда и только тогда, когда функция  $f(\tilde{x})$  допускает линейное доопределение [2]. Действительно, если функция допускает линейное доопределение, то существует такой вектор  $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n)$ , что система неравенств  $(\tilde{c}, \tilde{x}^i) > (\tilde{c}, \tilde{x}^j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , совместна для всех  $m$  пар векторов, а, значит, найдется такое  $l = p$ , что  $\tilde{c}^p = \tilde{c}^{p+1} = \tilde{c}^{p+2} = \dots$ , то есть корректировок не будет, и процедура (4) завершит работу. Если функция  $f(\tilde{x})$  не допускает линейного доопределения, то система  $m$  неравенств  $(\tilde{c}, \tilde{x}^i) > (\tilde{c}, \tilde{x}^j)$ ,  $1 \leq i < j \leq k$ , несовместна ни при каком  $\tilde{c}$ , и процедура (4) “зациклится”.

## 2. АЛГОРИТМ СИНТЕЗА ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

В предположениях п. 1 формулируется следующий алгоритм синтеза линейной функции:

- а: ввод начальной информации  $I(D)$  путем сравнения пар векторов  $\tilde{x}^i, \tilde{x}^j \in D$ ,  $1 \leq i < j \leq k$  для установления на множестве  $D$  отношения порядка “ $\succ$ ”;
- б: проверка непротиворечивости  $I(D)$  и получение упорядоченной последовательности допустимых векторов  $\tilde{x}^{i_1} \succ \tilde{x}^{i_2} \succ \dots \succ \tilde{x}^{i_k}$ ;
- с: выполнение процедуры линейной коррекции (4), в случае сходимости которой вектор  $\tilde{c} = \tilde{c}^p$  считается восстановленным набором коэффициентов линейной функции  $f(\tilde{x})$ .

Геометрическая интерпретация алгоритма синтеза означает многократный поворот в  $n$ -мерном пространстве гиперплоскости уровня  $\tilde{c}^l = const$  до достижения ею положения  $\tilde{c}^p = const$ , при котором выполняется последовательность соотношений

$$(\tilde{c}^p, \tilde{x}^1) > (\tilde{c}^p, \tilde{x}^2) > \dots > (\tilde{c}^p, \tilde{x}^k).$$

Отметим, что результат восстановления зависит от значения начального набора  $\tilde{c}^0$ , но полученные линейные доопределения имеют в целом общее направление роста. При этом с увеличением мощности множества  $D = \{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k\} \subset X$  различие восстановленных наборов все меньше. Простая программная реализация алгоритма синтеза позволила провести большой объем вычислений, иллюстрирующих эти выводы.

Наиболее интересным среди вычислительных экспериментов является использование “эталонной” функции в роли эксперта, устанавливающего результат сравнения

пар точек множества  $D$ , случайно генерируемых в заданных границах. Другими словами, заранее известная линейная функция — “эталон”, с помощью которой формируется начальная информация  $I(D)$ , кстати, заведомо непротиворечивая, восстанавливается алгоритмом синтеза. Сравнение результатов восстановления с “эталоном” иллюстрирует хорошее качество работы алгоритма.

Рассмотрим простой пример для  $n = 2$  с эталонной функцией  $f^e(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ , задающей порядок на множествах  $D$  различной мощности. Начальное значение  $\tilde{c}^0 = (0, 0)$ . Множество  $D$  всякий раз генерируется заново. Результаты вычислительных экспериментов приведены в таблице 1:

Таблица 1

Мощность множества $D$	Число итераций $p$	Восстановленные наборы коэффициентов	Отношение коэффициентов
5	19	(11;3)	3,67 : 1
	17	(12;4)	3 : 1
	75	(8;4)	<b>2 : 1</b>
	25	(11;6)	1,83 : 1
	15	(5;3)	1,67 : 1
10	63	(12;6)	<b>2 : 1</b>
	78	(10;5)	<b>2 : 1</b>
	1618	(47;22)	2,14 : 1
	325	(49;24)	2,04 : 1
	101	(8;5)	1,6 : 1
30	465	(12;5)	2,4 : 1
	663	(19;9)	2,11 : 1
	826	(18;9)	<b>2 : 1</b>
	1170	(25;13)	1,92 : 1
	1720	(43;18)	2,39 : 1
	549	(10;5)	<b>2 : 1</b>

Как видно из таблицы 1, восстановленные наборы коэффициентов имеют соотношение координат, близкое, а в ряде случаев и совпадающее с отношением 2:1 для эталонной функции.

В другом примере возьмем ту же эталонную функцию  $f^e(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$ . Зададим фиксированное множество  $D$  из 10 элементов, упорядоченных с помощью эталонной функции в последовательность

$$(10; 8) \succ (9; 6) \succ (8; 7) \succ (7; 8) \succ (6; 5) \succ (5; 6) \succ (4; 7) \succ (3; 5) \succ (2; 3) \succ (1; 1).$$

Выполним процедуру восстановления для различных начальных значений  $\tilde{c}^0$ , поместив результаты в таблицу 2.

Таблица 2

Мощность множества $D$	Начальные значения $\tilde{c}^0$	Число итераций $p$	Восстановленные наборы коэффициентов	Отношение коэффициентов
10	(0;0)	55	(0,223;0,134)	1,66 : 1
	(1;1)	55	(1,18;0,846)	1,39 : 1
	(2;1)	46	(2;1)	<b>2 : 1</b>
	(5;3)	46	(5;3)	1,67 : 1
	(5;5)	145	(5,06;4,25)	1,19 : 1

В этом примере отмечается различие восстановленных коэффициентов при разных начальных векторах  $\tilde{c}^0$ , но направления роста восстановленных линейных функций достаточно близки. При этом сам эталонный набор коэффициентов (2;1) сохраняется, поскольку за  $m = 10 \times 9/2 = 45$  итераций не производится ни одной коррекции.

Рассмотрим теперь области применения алгоритма синтеза линейной функции, начальная информация о которой задается отношением строгого порядка.

### 3. РЕШЕНИЕ СЛАБООПРЕДЕЛЕННЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Слабоопределенной задачей линейного программирования назовем задачу поиска оптимального допустимого решения  $\tilde{x}^*$  на основе линейной модели с частично заданными компонентами: целевой функцией и (или) ограничениями.

Рассмотрим линейную модель, в которой множество  $X$  допустимых решений известно и задано системой линейных неравенств:

$$X = \left\{ \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid A\tilde{x} \leq \tilde{b}, \quad A = \|a_{ij}\|_{m \times n}, \tilde{b} = \|b_i\|_n^T \right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

а целевая функция  $f(\tilde{x})$  частично задана на подмножестве  $D = \{\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k\} \subset X$  отношением порядка (1). Соответствующая задача линейного программирования может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \max f(\tilde{x}) \mid f : I(D), \\ \tilde{x} \in X \subset \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (5)$$

Ее оптимальное решение можно найти, предварительно восстановив по начальной информации  $I(D)$  набор ее коэффициентов  $\tilde{c} = (c_1, \dots, c_n)$ .

Поскольку начальное значение  $\tilde{c}^0$  может быть задано произвольно, конечные наборы восстановленных коэффициентов целевой функции будут отличаться друг от друга. По этому поводу сделаем следующие замечания.

- 1) Все восстановленные функции имеют общий характер поведения, а именно, удовлетворяют условию

$$(\tilde{c}, \tilde{x}^1) > (\tilde{c}, \tilde{x}^2) > \dots > (\tilde{c}, \tilde{x}^k)$$

Следовательно, если множество ограничений задано выпуклым многогранником, то функции восстановленного семейства  $\left\{ f^j(\tilde{x}) = (\tilde{c}, \tilde{x})^j \right\}_s$ , полученные от различных стартовых значений, достигнут экстремума в одной и той же или в ближайших вершинах этого многогранника. В задаче принятия оптимального решения, где не требуется полного восстановления самой модели, требуемый результат будет получен.

- 2) Коэффициенты целевых функций восстановленного семейства можно привести к одному масштабу, например, поделив их значения на сумму всех коэффициентов. Как показывают вычислительные эксперименты, наборы нормированных коэффициентов практически совпадают в большинстве случаев. Поэтому в качестве вектора коэффициентов целевой функции в модель можно включить любой нормированный набор.
- 3) Если все-таки масштаб коэффициентов существенен для восстанавливаемой модели, то следует ввести масштабирующий множитель, соответствующий смыслу задачи.
- 4) Выбор одной функции из семейства  $\left\{ f^j(\tilde{x}) = (\tilde{c}, \tilde{x})^j \right\}_s$  можно сделать на основе любой *дополнительной информации*, сужающей область неопределенности.

Рассмотрим пример поиска оптимального решения слабоопределенной задачи вида (5) на множестве допустимых решений

$$X = \left\{ \tilde{x} = (x_1, x_2) \mid \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \end{pmatrix}; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \right\}$$

с линейной целевой функцией  $f(x_1, x_2)$ , частично заданной на подмножестве  $D$  из четырех точек, удовлетворяющих отношению:

$$(1; 1) \prec (1; 2) \prec (2; 1, 5) \prec (3; 1, 5).$$

Многогранник допустимых решений имеет вершины  $O(0; 0)$ ,  $A(0; 4)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(4; 0)$ .

Применение программно реализованного алгоритма синтеза функции (п.2) показало непротиворечивость начальной информации и позволило восстановить наборы коэффициентов. Полученные наборы коэффициентов, их нормированные значения, а также угловые точки, соответствующие оптимальным решениям слабоопределенной задачи при различных начальных значениях  $\tilde{c}^0$  приведены в таблице 3:

Таблица 3

Мощность мн-ва $D$	Начальные значения $\tilde{c}^0$	Число итераций $p$	Восстановленные наборы коэффициентов	Нормированные наборы	Оптимальное решение
4	(0;0)	12	(0,405;0,693)	(0,37;0,63)	$A$
	(0;1)	10	(1,098;0,712)	(0,61;0,39)	$B$
	(2;1)	7	(2;1)	(0,67;0,33)	$(B, C)$
	(3;2)	7	(3;2)	(0,6;0,4)	$B$
	(1;10)	22	(4,177;8,848)	(0,32;0,68)	$A$
	(5;2)	7	(5;2)	(0,71;0,29)	$C$

Как видно из таблицы, окончательное решение затруднительно. Причиной этому является недостаточная начальная информация.

Если же подмножество  $D$  дополнить еще хотя бы двумя точками, которые вместе с уже заданными образуют последовательность

$$(1; 1) \prec (1, 5; 2, 25) \prec (1; 2) \prec (2; 1, 5) \prec (1, 5; 2, 5) \prec (3; 1, 5)$$

то результаты работы алгоритма синтеза будут такими (табл. 4):

Таблица 4

Мощность множества $D$	Начальные значения $\tilde{c}^0$	Число итераций $p$	Восстановленные наборы коэффициентов	Нормированные наборы	Оптимальное решение
6	(0;0)	66	(1,098;1,192)	(0,48;0,52)	$B$
	(0;1)	51	(1,098;2,057)	(0,53;0,47)	$B$
	(2;1)	21	(1,712;1,511)	(0,53;0,47)	$B$
	(3;2)	28	(2,595;2,47)	(0,51;0,49)	$B$
	(1;10)	61	(5,563;7,38)	(0,43;0,57)	$B$
	(5;2)	43	(3,902;3,451)	(0,53;0,47)	$B$

В этом случае окончательное решение очевидно:

$$\tilde{x}^* = \arg \max f(\tilde{x}) \mid \left\{ f(\tilde{x}) : I(D), \tilde{x} = (x_1, x_2) \mid \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 24 \\ 32 \end{pmatrix}; x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \right\} = \\ = (3; 2).$$

Если требуется записать восстановленную линейную модель, то в качестве набора коэффициентов целевой функции можно взять любой из восстановленных наборов либо усредняющий их набор  $(0, 5; 0, 5)$ . Выбирая подходящее смыслу задачи масштабирование, можно остановиться на наборе  $\tilde{c} = (5; 5)$  или  $\tilde{c} = (1; 1)$ . Отметим, что именно последний набор использовался как эталонная функция в роли эксперта, задающего отношение порядка на подмножестве  $D$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ СВЕРТЫВАНИЯ КРИТЕРИЕВ

Пусть задача линейного программирования с  $l$  критериями представлена в виде:

$$\max \{f_i(\tilde{x}) \mid \tilde{x} \in X \subset \mathbb{R}^n\}_l. \quad (6)$$

Метод свертывания критериев предполагает построение свертки  $F(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^l C_i f_i(\tilde{x})$   $\left(0 < C_i < 1, \sum_{i=1}^l C_i = 1\right)$ , для которой необходимо получить набор коэффициентов  $\tilde{C} = (C_1, \dots, C_l)$ .

Предположим, что существует такое подмножество допустимых решений  $D = \{\tilde{x}^p = (x_1, \dots, x_n)\}_k \subset X$ , которое можно одинаково упорядочить по всем  $l$  критериям:

$$(\forall i = 1, \dots, l) \quad f_i(\tilde{x}^1) < \dots < f_i(\tilde{x}^k). \quad (7)$$

Тогда вектор  $\tilde{C} = (C_1, \dots, C_l)$  коэффициентов свертки может быть доопределен с помощью процедуры линейной коррекции (4).

Действительно, подставив в выражение для свертки скалярные целевые функции  $f_i(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j$  с известными коэффициентами  $c_{ij}$  ( $i = 1, \dots, l; j = 1, \dots, n$ ) получим:

$$F(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^l C_i \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^l C_i c_{ij} \right) x_j.$$

Обозначив через  $C = \|c_{ij}\|_{l \times n}$  и введя вектор  $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_n)$ , в котором  $b_j = \sum_{i=1}^l C_i c_{ij}$  ( $j = 1, \dots, n$ ), получим в матричном виде:  $\tilde{C} \cdot C = \tilde{b}$  и  $F(\tilde{x}) = (\tilde{b}, \tilde{x})$ .

Очевидно, что если каждую  $i$ -ю совокупность неравенств из (7) умножить на положительный коэффициент  $C_i$ , а затем сложить, то для полученных выражений, равных по определению  $F(\tilde{x}) = (\tilde{b}, \tilde{x})$ , также будет выполняться последовательность отношений вида (7):

$$F(\tilde{x}^1) < \dots < F(\tilde{x}^k). \quad (8)$$

Вектор коэффициентов  $\tilde{b} = (b_1, \dots, b_n)$  линейной функции  $F(\tilde{x}) = (\tilde{b}, \tilde{x})$  по начальной информации (8) на подмножестве  $D$  можно восстановить процедурой (4). Далее определяется вектор  $\tilde{C} = \tilde{b} \cdot C^{-1}$  с последующим нормированием для выполнения условий  $0 < C_i < 1$ ,  $\sum_{i=1}^l C_i = 1$ .

Как известно, оптимальное решение  $\tilde{x}^* = \arg \max \{F(\tilde{x}) | \tilde{x} \in X \subset \mathbb{R}^n\}$  является паретовской точкой для многокритериальной задачи (6).

## 5. ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Алгоритм синтеза может быть применен в задаче восстановления некоторых классов нелинейных функций по частичной порядковой информации. Так, непрерывные монотонные и всюду выпуклые функции, которые после некоторого монотонного преобразования сохраняют направление роста, допускают применение алгоритма линейной коррекции для восстановления их параметров.

Например, мультипликативная функция вида  $f(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$  с неизвестным вектором коэффициентов  $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$  путем логарифмирования сводится к линейной относительно параметров:  $\ln(f(\tilde{x})) = a_1 \ln(\tilde{x}_1) + \dots + a_n \ln(\tilde{x}_n)$ .

Если найдется подмножество  $D = \{\tilde{x}^i = (x_1, \dots, x_n)\}_k \subset X$  допустимых векторов, которые можно упорядочить в последовательность  $f(\tilde{x}^{i_1}) > f(\tilde{x}^{i_2}) > \dots > f(\tilde{x}^{i_k})$ , а значит, и  $\ln(f(\tilde{x}^{i_1})) > \ln(f(\tilde{x}^{i_2})) > \dots > \ln(f(\tilde{x}^{i_k}))$ , то вектор коэффициентов  $\tilde{a} = (a_1, \dots, a_n)$  можно восстановить с помощью процедуры (4).

Отметим, что функция  $f(\tilde{x}) = \prod_{i=1}^n x_i^{a_i}$  используется как функция полезности в модели выбора оптимального потребительского набора при бюджетном ограничении и при условии  $0 < a_i < 1$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ ;  $\sum_{i=1}^n a_i = 1$  для коэффициентов относительной полезности.

Рассмотрим конкретный пример восстановления такой функции с использованием уже упомянутой программной реализации алгоритма синтеза. Размерность пространства  $n = 4$ , множество  $D$  включает пять точек, упорядоченных "экспертом" по

возрастанию полезности:

$$(1; 2; 2; 1) \prec (2; 3; 2; 4) \prec (1; 4; 2; 5) \prec (5; 5; 4; 2) \prec (2; 6; 7; 4).$$

Результаты представлены в таблице 5:

Таблица 5

Начальные значения $\tilde{c}^0$	Число итераций $p$	Восстановленные наборы коэффициентов $a_i$	Нормированные наборы
(0;0;0;0)	12	(-0,223;0,578;1,139;0,47)	(-0,11;0,29;0,58;0,24)
(1;1;1;1)	18	(0,307;1,288;1, 1,223)	(0,03;0,34;0,26;0,32)
(1;0;1;0)	11	(0,084;0,182;1,223;0,693)	(0,04;0,08;0,56;0,32)
(0;0;1;5)	18	(1,609;0,916;2,609;4,089)	(0,17;0,1;0,28;0,44)
(5;1;0;0)	38	(1,089;2,228;0,416;2,055)	(0,19;0,38;0,07;0,36)

Отметим, что первый из восстановленных наборов с отрицательной компонентой не удовлетворяет смыслу задачи. Из остальных наборов можно выбрать тот, который соответствует смысловому содержанию задачи, т.е. оценкам относительной полезности.

## 6. ЗАДАЧА КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть имеется  $l$  индивидов, обладающих функциями полезности  $u_j(\tilde{x})(j = 1, \dots, l)$ , представляющими их индивидуальные предпорядки предпочтения. Векторы  $\tilde{x} = (\tilde{x}_{11}, \dots, \tilde{x}_{n1}, \dots, x_{l1}, \dots, x_{nl})$ , представляют собой способы распределения некоторого набора  $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  из  $n$  благ между  $l$  участниками и принадлежат допустимому множеству распределений

$$X = \left\{ \tilde{x} = (\tilde{x}_{11}, \dots, \tilde{x}_{n1}, \dots, x_{l1}, \dots, x_{nl}) \mid (\forall i = 1, \dots, n) \sum_{j=1}^l \tilde{x}_{ij} = \omega_i; \tilde{x}_{ij} \in R_+ \right\}.$$

Коллективная функция полезности  $U(\tilde{x}) = \sum_{j=1}^l \alpha_j u_j(\tilde{x})$   $\left( 0 < \alpha_j < 1, \sum_{j=1}^l \alpha_j = 1 \right)$  имеет неизвестный заранее набор коэффициентов  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ .

Если найдется подмножество  $D = \{\tilde{x}^i\}_k \subset X$ , на котором все индивиды одинаково упорядочат допустимые распределения, то вектор коэффициентов  $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$  может быть восстановлен с помощью процедуры (4). Если при этом все  $\alpha_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) будут отличны от нуля, то любое распределение  $\tilde{x}^\alpha$ , максимизирующее функцию



полезности  $U(\tilde{x})$ , будет парето-оптимальным [4].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ряде задач принятия решений при неполной информации возможно доопределение компонент линейной модели. Рассмотренный порядковый подход к восстановлению линейной функции на основе частичной начальной информации и алгоритм синтеза функции сопровождаются примерами, которые позволяют сделать выводы о точности или качестве восстановления в зависимости от объема начальной информации.

Предложенный алгоритм может быть использован в ряде прикладных задач поиска оптимальных решений, и некоторые из них упомянуты в статье.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Донской В. И., Башта А. И. Дискретные модели принятия решений при неполной информации. — Симферополь: Таврия. — 1992. — 165 с.  
Donskoy, V. I and Bashta, A. I. 1992. *The Discret Models of Desision Making with Incomplete Informations*. Simferopol: Tavriya. 165 p.
2. Руденко Л. И. Аппроксимация целевой функции в частично определенной задаче оптимизации // Динамические системы. — Киев: Лыбидь. — 1992. — Вып. 10. — С. 117–123.  
Rudenko, L. I. 1992. Approximation of function in partly defined optimization problem. *Dinamical Systems*. Kyiv: Lybid. Vol. 10, pp. 117–123.
3. Руденко Л. И. О развитии подходов к принятию решений при неполной информации // Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия “Информатика и кибернетика”. — 2001. — № 1. — С. 93–95.  
Rudenko, L. I. 2001. On Development of Approaches to Decision Making with Incomplete Informations. *Scientific Notes of TNU*, 1, pp. 117–123.
4. Экланд И. Элементы математической экономики. — М.: Мир, 1983. — 248 с.  
Ecland, Ivar. 1983. *Elements of Mathematical Economy*. Moscow: Mir, 248 p.

Статья поступила в редакцию 01.12.2014

## ОБ ОДНОМ КЛАССЕ $t$ -ДИСКРИМИНАНТОВ И $t$ -УРАВНЕНИЯХ ПЕЛЛЯ

© Д. В. Третьяков, З. И. Халилова

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, СИМФЕРОПОЛЬ, РЕСПУБЛИКА КРЫМ, РОССИЯ  
E-MAIL: *dttvd@mail.ru*

ON SOME CLASS OF  $t$ -DISCRIMINANTS AND  $t$ -PELL EQUATIONS.

Tretyakov, D V. and Khalylova, Z. I

**Abstract.** A special class of quadratic irrationalities is described in article. This class consists of irrationalities, which has next decomposition in periodic continues fraction

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0}], \quad t \geq 2$$

Part of period is palindrome. This numbers we will call the negative  $t$ -discriminants.

In first time positive  $t$ -discriminants considered in 2007.

Theorem of negative  $t$ -discriminants characterization is proved. The necessary and sufficient conditions of indicated decomposition are

$$2b = (t + 2)aq_0, \quad q_0 = [\alpha].$$

For example, a number

$$\alpha = \frac{\sqrt{5689} - 91}{26} = [-1, \overline{2, 1, 1, 2, 5}]$$

is negative 5-discriminant.

Formulas for calculate of  $a$ ,  $b$ , and  $D$  proved too:

$$a = 2P_{n-1}, \quad b = (t + 2)q_0P_{n-1}, \quad D = (tq_0P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n,$$

where

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2, \dots, q_2, q_1].$$

One of negative  $t$ -discriminants application are solutions of Diophantine equations

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = \pm a^2.$$

This equations we will call  $t$ -Pell equation and minus- $t$ -Pell equation respectively.

Descriptions of solutions structure are obtain in article. The structure of solutions is closely connected with some cyclic group in every case. Cyclicity of this groups proofs with help from parametrization respective Pell equations. Be introduces the binary operation on the sets of  $t$ -Pell equations solutions too.

Minus- $t$ -Pell equation is solvable iff period length of continues fraction decomposition is odd. Examples are considered.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$  - целочисленная квадратичная форма и  $D := B^2 - 4AC > 0$ . Уравнение  $f(x, y) = G \in \mathbb{Z}$  легко приводится к виду:

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = h \quad .$$

Рассмотрим естественно возникающее здесь отображение

$$\beta((ax + by)^2 - Dy^2) := \frac{\sqrt{D} - b}{a} \quad .$$

В частности,  $\beta(x^2 - Dy^2) := \sqrt{D}$  .

В [4],[5] решения уравнений

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = \pm a^2 \tag{1}$$

были получены с помощью разложения в бесконечную цепную дробь (ЦД) специального вида так называемых  $t$ -дискриминантов (в дальнейшем положительных  $t$ -дискриминантов):

$$\frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0}] \quad , \quad t \geq 2$$

с симметричной частью периода (палиндромом).

Такой подход к решению диофантовых уравнений второго порядка является новым, поскольку не использует унимодулярных линейных преобразований уравнения (1) для его упрощения, затем - решения упрощённого уравнения (см., напр., [3]), а позволяет сразу записывать решения данного уравнения по разложению в ЦД с помощью подходящих дробей, как и в случае классического уравнения Пелля.

Возникает задача исследования отрицательных дискриминантов, то есть, квадратичных иррациональностей (КИ), допускающих следующее разложение в бесконечную ЦД:

$$\frac{\sqrt{D} - b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0}] \quad , \quad t \in \mathbb{N},$$

а, также, исследования порождаемых этими дискриминантами диофантовых уравнений вида (1). Впервые  $t$ -дискриминанты были введены в работах [4], [5], как обобщение известного разложения

$$\frac{\sqrt{D}}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, 2q_0}],$$

где  $D > a^2$ . А, именно,  $t$ -дискриминантом называется квадратичная иррациональность  $\alpha$ , которая представима следующими двумя способами:

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, tq_0], \quad t \geq 2.$$

В этих же работах рассмотрены некоторые приложения  $t$ -дискриминантов при решениях диофантовых уравнений второго порядка. В настоящей работе изучаются так называемые отрицательные  $t$ -дискриминанты, а также возникающие здесь естественным образом диофантовы уравнения второго порядка ( $t$ -уравнения Пелля). Получено описание  $t$ -дискриминантов и доказаны теоремы об описании всех решений этих уравнений.

### 1. ТЕОРЕМА ОБ ОПИСАНИИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ $t$ -ДИСКРИМИНАНТОВ

**Определение 1.** Квадратичная иррациональность  $\alpha$  называется отрицательным  $t$ -дискриминантом, если

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, tq_0], \quad t \geq 2.$$

Пусть  $D$ -натуральное число, не являющееся точным квадратом. Имеет место следующая

**Теорема 1.** *Равенство*

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, tq_0], \quad (2)$$

где  $t \geq 2$ - натуральный параметр, возможно тогда и только тогда, когда

$$2b = (t + 2)q_0a, \quad [\alpha] = -q_0 < 0. \quad (3)$$

Если это условие выполнено, то

$$b = (t + 2)q_0P_{n-1}, \quad a = 2P_{n-1}, \quad D = (tq_0P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n, \quad (4)$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2, \dots, q_2, q_1]. \quad (5)$$

*Доказательство.* Пусть  $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, tq_0]$ ,  $\alpha' = -\frac{\sqrt{D} + b}{a}$  — сопряжённая КИ. Тогда в силу 2-й теоремы Галуа

$$\alpha + (t + 1)q_0 = [\overline{tq_0, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}] = -\alpha' - q_0.$$

Отсюда,

$$\frac{\sqrt{D} - b}{a} + (t + 1)q_0 = \frac{\sqrt{D} + b}{a} - q_0.$$

После приведения подобных получаем условие (3).

Обратно, если выполнено условие (3), то  $\omega = \alpha + (t + 1)q_0 > 1$ , и

$$-\omega' = \frac{(\sqrt{D} - b) + 2b - (t + 1)q_0a}{a} = \alpha + q_0 \in (0, 1).$$

Следовательно, по 1-й теореме Галуа число  $\omega$  раскладывается в чистую периодическую дробь вида  $[\overline{tq_0, q_1 \dots, q_n}]$ . Так как по 2-й теореме Галуа

$$-(\omega')^{-1} = [\overline{q_n, q_{n-1} \dots, q_1, tq_0}] = (\alpha + q_0)^{-1} = [\overline{q_1, q_2 \dots, q_{n-1}, q_n, tq_0}],$$

то из единственности разложения в ЦД следуют равенства:  $q_n = q_1, q_{n-1} = q_2, \dots$

Поскольку

$$(\omega - tq_0)^{-1} = [\overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0}] = [q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, \omega] = \frac{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

то

$$\omega - tq_0 = \frac{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}}{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}, \quad \omega^2 P_{n-1} - \omega tq_0 P_{n-1} - (tq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = t^2 q_0^2 P_{n-1}^2 + 4P_{n-1}(tq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = (tq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n.$$

Отсюда

$$\alpha = \omega - (t + 1)q_0 = \frac{\sqrt{D} - (t + 2)q_0 P_{n-1}}{2P_{n-1}}.$$

Теорема доказана. □

Частным случаем этой теоремы является предложение о 2-отрицательных дискриминантах.

**Следствие 1.** *Равенство*

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [-q_0, \overline{q_1, q_2 \dots, q_2, q_1, 2q_0}]$$

возможно в том и только в том случае, когда

$$b = 2q_0a.$$

Если это условие выполнено, то справедливы формулы:

$$b = 4q_0 P_{n-1}, \quad a = 2P_{n-1}, \quad D = 4[(q_0 P_{n-1} + Q_{n-1})^2 + (-1)^n].$$

Иррациональность  $\alpha$ , как легко проверить, удовлетворяет уравнению:

$$P_{n-1}x^2 + (t+2)q_0P_{n-1}x - c = 0, \quad c = -(t+1)q_0^2P_{n-1} + tq_0Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

**Следствие 2.** Если  $\alpha$  — отрицательный  $t$ -дискриминант, то

$$D - b^2 = 2ac < 0, \quad D - (aq_0 + b)^2 : a.$$

*Доказательство.* Используем равенства (4):

$$\begin{aligned} D - b^2 &= -4(t+1)q_0^2P_{n-1}^2 + 4tq_0P_{n-1}Q_{n-1} + 4P_{n-1}Q_{n-2} = \\ &= 4P_{n-1}(-(t+1)q_0^2P_{n-1} + tq_0Q_{n-1} + Q_{n-2}) = 2ac = 2a(-tq_0(q_0P_{n-1} - Q_{n-1}) - q_0^2P_{n-1} + Q_{n-2}) < 0. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается второе соотношение.  $\square$

Приведём теперь несколько примеров.

**Пример 1.**

По следствию 2 КИ  $\alpha = \frac{\sqrt{2808} - 78}{39}$  является отрицательным 2-дискриминантом. Имеет место разложение  $\alpha = [-1, \overline{2}, 1, 3, 1, 2, 2]$ .

**Пример 2.** Рассмотрим отрицательный 5-дискриминант  $\gamma = [-1, \overline{2}, 1, 1, 2, 5]$  Используя формулы (4), (5), получаем

$$t = 5, \quad q_0 = 1, \quad \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [2, 1, 1, 2] = \frac{13}{5}, \quad a = 26, \quad b = 91, \quad D = 5629.$$

Таким образом,  $\gamma = \frac{\sqrt{5629} - 91}{26}$ .

## 2. $t$ -УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ

Пусть  $D$ -натуральное число, не являющееся точным квадратом. Рассмотрим диофантово уравнение

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = a^2, \quad (6)$$

где  $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$  — отрицательный  $t$ -дискриминант,  $a \neq 1$ . В дальнейшем это уравнение будем называть  $t$ -уравнением Пелля.

Отметим, что при  $a = 1$  уравнение (6) эквивалентно уравнению Пелля. При  $a \neq 1$  эти уравнения неэквивалентны.

**Лемма 1.** Если  $D$  — число, не являющееся точным квадратом,  $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$  — отрицательный  $t$ -дискриминант, то существует константа  $M > a^2 > 0$ , что

неравенство

$$|(ax + by)^2 - Dy^2| < M$$

имеет бесконечное множество взаимно простых целых решений  $\langle x, y \rangle$ , таких что  $x < 0$ ,  $y > 0$ .

*Доказательство.* Так как  $(ax + by)^2 - Dy^2 = (ax - (\sqrt{D} - b)y)(ax + (\sqrt{D} + b)y)$  и существует бесконечное множество пар взаимно простых целых чисел  $x, y$ , таких что  $x < 0$ ,  $y > 0$ , и  $|xy^{-1} - \alpha| < y^{-2}$ , то  $|ax - (\sqrt{D} - b)y| < ay^{-1}$ , и

$$|ax + (\sqrt{D} + b)y| < |ax - (\sqrt{D} - b)y| + 2\sqrt{D}y < ay^{-1} + 2\sqrt{D}y.$$

Отсюда

$$|(ax + by)^2 - Dy^2| < \frac{a}{y} \left( \frac{a}{y} + 2\sqrt{D}y \right) = \frac{a^2}{y^2} + 2\sqrt{D}a < a^2 + 2\sqrt{D}a.$$

Лемма доказана. □

Из доказанного предложения следует бесконечность множества решений уравнения (6) с  $x < 0$ ,  $y > 0$ .

На множестве всех решений указанного уравнения введём отношение частичного порядка  $\prec$ , считая, что

$$\langle x, y \rangle \prec \langle u, v \rangle \Leftrightarrow ax + (\sqrt{D} + b)y \leq au + (\sqrt{D} + b)v.$$

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$  — отрицательный  $t$ -дискриминант. Тогда:

- а) если  $\langle x_*, y_* \rangle$  — отрицательное решение уравнения (6) (с  $x_* < 0$ ,  $y_* > 0$ ), то  $\frac{x_*}{y_*}$  — одна из ПД к числу  $\alpha$ ;
- б) если  $\langle x', y' \rangle$  — отрицательное решение уравнения (6), то  $x' = P_{kn-1}$ ,  $y' = Q_{kn-1}$ , где  $k$  — период разложения  $\alpha$  в ЦД,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- в) все отрицательные решения  $t$ -уравнения Пелля исчерпываются формулами  $\langle P_{kt-1}, Q_{kt-1} \rangle$ , где  $t \in \mathbb{N}$  таково, что  $kt$  — чётное число.

*Доказательство.* (а) Пусть  $\alpha$  — отрицательный  $t$ -дискриминант, отвечающий этому уравнению. Необходимо рассмотреть разные случаи.

Пусть вначале  $t > 2$ .

Перейдём к положительному  $t$ -дискриминанту

$$\alpha + 2q_0 = \frac{\sqrt{D} - (b - 2q_0a)}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2 \dots, q_2, q_1}, tq_0] \text{ и соответствующему ему } t\text{-уравнению Пелля}$$

$$(a(u - 2q_0v) + bv)^2 - Dv^2 = a^2. \quad (7)$$

Переменные в уравнениях (6) и (7) связаны между собой равенствами:

$$\begin{cases} u - 2q_0v = x \\ v = y, \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2q_0y = u \\ y = v, \end{cases}$$

и, если  $\langle u_*, v_* \rangle$  — положительное решение уравнения (7), то  $\frac{u_*}{v_*} > \frac{\sqrt{D} - (b - 2q_0a)}{a}$ .

Пусть  $\langle x_*, y_* \rangle$  — отрицательное решение уравнения (6). Применяя результаты работы [5], получим:

$$\left| \frac{x_*}{y_*} - \frac{\sqrt{D} - b}{a} \right| = \left| \frac{u_* - 2q_0v_*}{v_*} - \frac{\sqrt{D} - b}{a} \right| = \left| \frac{u_*}{v_*} - \frac{\sqrt{D} - (b - 2q_0a)}{a} \right| < \frac{1}{2v_*^2}.$$

Таким образом,  $\frac{x_*}{y_*}$  — ПД к числу  $\alpha$ .

Если  $t = 2$ , то переходя к положительному 2-дискриминанту, используем известные факты из теории уравнения Пелля (см., напр., [2]) и аналогичные рассуждения из доказательства случая  $t > 2$ .

- (6) пусть  $k$  — период разложения  $\alpha$  в ЦД и  $\frac{P_j}{Q_j}$  — ПД к этому числу, числитель и знаменатель которой образуют решение  $\langle P_j, Q_j \rangle$  уравнения (6). Число  $\alpha$  является корнем квадратного уравнения  $a^2x^2 + 2abx - (D - b^2) = 0$ . Остаток  $r_{j+1}$  порядка  $j + 1$  разложения  $\alpha$  в ЦД является корнем квадратного уравнения  $A_{j+1}x^2 + B_{j+1}x + C_{j+1} = 0$ , где [1]

$$A_{j+1} = a^2P_j^2 + 2abP_jQ_j - (D - b^2)Q_j^2 = a^2,$$

$$B_{j+1} = 2a^2P_jP_{j-1} + 2ab(P_jQ_{j-1} + P_{j-1}Q_j) - 2(D - b^2)Q_jQ_{j-1} = -2la$$

чётное число. Отсюда  $r_{j+1} = \frac{\sqrt{D} + l}{a}$ . Однако  $r_{j+1}$  раскладывается в чисто периодическую ЦД с тем же периодом, что и  $\alpha$ . При этом

$$r_{j+1} = \frac{\sqrt{D} + l}{a} = \alpha + (t + 1)q_0 + \frac{l - b}{a} + q_0,$$

откуда следует, что  $l = b - aq_0$ ,  $r_{j+1} = \alpha + (t + 1)q_0$ . Следовательно,  $j + 1 = kn$ ,  $n \in \mathbb{N}$  и  $j = kn - 1$ .



(в) пусть  $\omega = [\overline{tq_0, q_1, \dots, q_1}] = \alpha + (t+1)q_0$  и  $m \in \mathbb{N}$ . Запишем число  $\alpha$  в виде:

$$\alpha = [-q_0, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, tq_0, \dots, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, \underbrace{\omega}_{mk}].$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\omega P_{mk-1} + P_{mk-2}}{\omega Q_{mk-1} + Q_{mk-2}} = \frac{(\alpha + (t+1)q_0)P_{mk-1} + P_{mk-2}}{(\alpha + (t+1)q_0)Q_{mk-1} + Q_{mk-2}}$$

или

$$\begin{aligned} (\sqrt{D} - b)(Q_{mk-1}a(\sqrt{D} - b + (t+1)q_0a) + a^2Q_{mk-2}) = \\ = P_{mk-1}a(\sqrt{D} - b + (t+1)q_0a) + a^2P_{mk-2}. \end{aligned}$$

Последнее уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} -q_0Q_{km-1} + Q_{km-2} = P_{km-1} \\ (D - b(b - aq_0))Q_{km-1} - abQ_{km-2} = (2b - aq_0)aP_{km-1} + a^2P_{km-2}, \end{cases}$$

Подставляя первое уравнение системы в её второе уравнение, получим:

$$\begin{aligned} (-1)^{km}a^2 &= a^2(P_{km-1}Q_{km-2} - P_{km-2}Q_{km-1}) = \\ &= a^2P_{km-1}(P_{km-1} + q_0Q_{km-1}) - ((D - b^2)Q_{km-1} + (a^2q_0 - 2ab)P_{km-1})Q_{km-1} = \\ &= a^2P_{km-1}^2 + (a^2q_0 - a^2q_0 + 2ab)P_{km-1}Q_{km-1} - (D - b^2)Q_{km-1}^2 = \\ &= (aP_{km-1} + bQ_{km-1})^2 - DQ_{km-1}^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, пара чисел  $\langle P_{km-1}, Q_{km-1} \rangle$  удовлетворяет  $t$ -уравнению Пелля (6) тогда и только тогда, когда  $km$  — чётное. Лемма доказана. □

Отметим, что любое решение  $\langle x, y \rangle$   $t$ -уравнения Пелля с  $ax + by > 0$  параметризуется следующим образом:

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} s - \frac{b \operatorname{sh} s}{\sqrt{D}} \\ y = \frac{a \operatorname{sh} s}{\sqrt{D}}, \end{cases} \tag{9}$$

где  $s \in \mathbb{R}$  таково, что пара  $\langle x, y \rangle$  определяет целочисленное решение уравнения (6) с  $ax + by > 0$ . Используя следствие 2 из теоремы 1, легко убедиться в том, что обе части уравнения (6) можно разделить на  $a$ :

$$ax^2 + 2bxy - 2cy^2 = a. \tag{10}$$

Обозначим через  $\mathfrak{P}_t$  — множество всех целочисленных решений  $t$  — уравнения Пелля с  $ax + by > 0$ . На этом множестве определим бинарную операцию  $*$  следующим образом:

$$\langle x, y \rangle * \langle u, v \rangle := \left\langle xu + \frac{(D - b^2)yv}{a^2}, xv + yu + (t + 2)q_0yv \right\rangle. \quad (11)$$

Отметим, что  $\frac{(D - b^2)yv}{a^2} = \frac{2cyv}{a} \in \mathbb{Z}$ . В самом деле, если, в силу (10),  $ax^2 + 2bxy - 2cy^2 = a$  и  $au^2 + 2buv - 2cv^2 = a$ , то  $2cy^2 : a$  и  $2cv^2 : a$ , откуда  $2cyv : a$ .

Правая часть равенства (11), как легко видеть, определяет также некоторое решение  $t$  — уравнения Пелля. Операция  $*$  коммутативна и ассоциативна.

Пусть  $\Theta_t$  ( $\Theta_t^+$ ) — множество всех вещественных (положительных) чисел  $s$ , для которых формулы (9) определяют целочисленные (положительные) решения  $t$  - уравнения Пелля. Рассмотрим биективное отображение  $f : \mathfrak{P}_t \rightarrow \Theta_t$ , где  $f(\langle x, y \rangle) := s$ . Здесь  $s$  определяет  $x$  и  $y$  по формулам (9). Из определения  $f$  и (9) вытекает, что  $\Theta_t$  - абелева группа относительно сложения, а также, что группы  $\mathfrak{P}_t$  и  $\Theta_t$  изоморфны. Так как в силу равенства  $(ax + by) + \sqrt{D}y = ae^s$  отображение  $f$  индуцирует порядок в  $\Theta_t^+$ , то в  $\Theta_t^+$  есть наименьший элемент  $s_{min}$ . Положим  $\phi := f^{-1}(s_{min})$  и будем называть минимальным решением уравнения (6) или фундаментальной единицей.

Имеет место

**Лемма 3.**  $\langle \mathfrak{P}_t; * \rangle$  — циклическая абелева группа с порождающим элементом  $\phi$ .

*Доказательство.* Пара  $\phi^0 := \varepsilon = \langle 1, 0 \rangle$ , удовлетворяя уравнению (6), является единицей в  $\mathfrak{P}_t$ . Для любого  $n \in \mathbb{N}$   $\phi^n \in \mathfrak{P}_t$ . Кроме того операция  $*$  обратима, так как

$$\langle x, y \rangle^{-1} = \langle x + (t + 2)q_0y, -y \rangle \in \mathfrak{P}_t \quad \forall \langle x, y \rangle \in \mathfrak{P}_t.$$

Следовательно,  $\forall n \in \mathbb{N}$   $\phi^{-n} \in \mathfrak{P}_t$ .

Группа  $\Theta_t$  - циклическая. В самом деле, если, существует  $\tilde{s} \in \Theta_t$ , что для любого  $n \in \mathbb{Z}$   $\tilde{s} \neq ns_\phi$ , то  $s_\phi > s_1 = \tilde{s} - \left[ \frac{\tilde{s}}{s_\phi} \right] s_\phi > 0$ . Отсюда  $s_1 \in \Theta_t$ , вопреки определению  $s_\phi$ . Лемма доказана.  $\square$

Положим  $\mathfrak{P}_t^* = \{ \langle -x, -y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathfrak{P}_t \}$  и сформулируем основной результат этого пункта.

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha$  – отрицательный  $t$  – дискриминант,  $k$  – длина периода разложения  $\alpha$  в ЦД. Соответствующее  $\alpha$   $t$  – уравнение Пелля (6) имеет бесконечное множество  $\mathfrak{P}_t \cup \mathfrak{P}_t^*$  целочисленных решений. Любое решение из  $\mathfrak{P}_t$  – это целая степень основной единицы  $\phi = \langle P_{kn_0-1}, Q_{kn_0-1} \rangle$ , где  $n_0 \in \mathbb{N}$  – наименьшее число, для которого  $kn_0$  чётное,  $\frac{P_{kn_0-1}}{Q_{kn_0-1}}$  – ПД к  $\alpha$ . Степень единицы понимается в смысле равенства (11).

**Пример 3.** Рассмотрим диофантово уравнение

$$2x^2 + 40xy + 109y^2 = 2.$$

Умножив обе части уравнения на 2, приведём его к виду (6):

$$(2x + 20y)^2 - 182y^2 = 4.$$

Здесь

$$\alpha = \frac{\sqrt{182} - 20}{2} = [-4, \overline{1, 2, 1, 12}], t = 3, k = 4.$$

Минимальным решением данного уравнения является пара

$$\omega = \langle P_3, Q_3 \rangle = \langle -13, 4 \rangle.$$

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение

$$(39x + 78y)^2 - 2808y^2 = 1521.$$

Левой части уравнения соответствует отрицательный 2-дискриминант

$$\alpha = \frac{\sqrt{2808} - 78}{39} = [-1, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 2}] k = 6.$$

Фундаментальная единица данного уравнения

$$\omega = \langle P_5, Q_5 \rangle = \langle -25, 39 \rangle.$$

**Пример 5.** Рассмотрим 5-дискриминант

$$\alpha = [-3, \overline{2, 1, 2, 15}].$$

Применение формул (4) позволяет вычислить заданную иррациональность:

$$\alpha = \frac{\sqrt{248} - 21}{2} = \frac{2\sqrt{62} - 21}{2}.$$

МИНУС- $t$  - УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ.

Рассмотрим теперь минус- $t$  - уравнение Пелля:

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = -a^2, \quad (12)$$

где  $\alpha$  - отрицательный  $t$ -дискриминант.

Имеет место следующая

**Лемма 4.** Пусть  $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$  - отрицательный  $t$  - дискриминант. Тогда:

- а) если  $\langle x_*, y_* \rangle$  - отрицательное решение уравнения (12) ( $x_* < 0, y_* > 0$ ), то  $\frac{x_*}{y_*}$  - одна из ПД к числу  $\alpha$ ;
- б) если  $\langle x', y' \rangle$  - отрицательное решение уравнения (12), то  $x' = R_{kn-1}$ ,  $y' = Q_{kn-1}$ , где  $k$  - период разложения  $\alpha$  в ЦД,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- в) все отрицательные решения минус- $t$  - уравнения Пелля исчерпываются формулами  $\langle R_{kt-1}, Q_{kt-1} \rangle$ , где  $t \in \mathbb{N}$  - таково, что  $kt$  - нечётное число;
- г) уравнение (12) разрешимо тогда и только тогда, когда период разложения  $\alpha$  в ЦД есть нечётное число.

*Доказательство.* Пусть вначале  $\alpha$  - положительный  $t$ -дискриминант и  $t \geq 3$ . Если  $\langle x_*, y_* \rangle$  - положительное решение уравнения (12), то

$$\left( \frac{x_*}{y_*} - \frac{\sqrt{D} - b}{a} \right) \left( \frac{x_*}{y_*} + \frac{\sqrt{D} + b}{a} \right) = -1.$$

Отсюда получаем, что  $\frac{x_*}{y_*} < \frac{\sqrt{D} - b}{a}$  и

$$\frac{\sqrt{D} - b}{a} - \frac{x_*}{y_*} = \frac{1}{y_*^2 \left( \frac{x_*}{y_*} + \frac{\sqrt{D} + b}{a} \right)} < \frac{1}{y_*^2 \left( \frac{\sqrt{D} - b}{a} + (t-2)q_0 \right)} < \frac{1}{2y_*^2}.$$

Таким образом,  $\frac{x_*}{y_*}$  - одна из ПД к числу  $\alpha$ .

Случай  $t = 2$  хорошо известен из классической теории уравнения Пелля (см., напр. [1], [2]).

Пусть теперь  $\alpha$  - отрицательный  $t$ -дискриминант и  $t > 1$ . Тогда мы должны перейти к положительному  $t$ -дискриминанту  $\alpha + 2q_0$  и провести те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 2.

Оставшиеся две части леммы доказываются также как и в лемме 2 с использованием равенства (8).  $\square$

На множестве  $\mathfrak{M}_t$  всех решений данного уравнения  $\langle x, y \rangle$  с  $x < 0$  и  $y > 0$  определим бинарную операцию  $*$  равенством (11). Все такие решения параметризуются равенствами:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} w - \frac{b \operatorname{ch} w}{\sqrt{D}} \\ y = \frac{a \operatorname{ch} w}{\sqrt{D}}, \end{cases} \quad (13)$$

**Лемма 5.** Для любых элементов  $\langle u_i, v_i \rangle, i = \overline{1, 3}$  из  $\mathfrak{M}_t$  справедливы включения:

- (а)  $\langle u_1, v_1 \rangle * \langle u_2, v_2 \rangle \in \mathfrak{P}_t$ ;
- (б)  $\langle u_1, v_1 \rangle * \langle u_2, v_2 \rangle * \langle u_3, v_3 \rangle \in \mathfrak{M}_t$ .

*Доказательство.* Достаточно проверить первое включение и включение вида:

$$\forall \langle g, h \rangle \in \mathfrak{P}_t, \forall \langle u, v \rangle \in \mathfrak{M}_t : \langle g, h \rangle * \langle u, v \rangle \in \mathfrak{M}_t$$

Проверим с помощью параметризации (13) первое включение. Второе в силу (9) и (13) устанавливается аналогично. По формуле (11)

$$\left\langle \operatorname{sh} \xi - \frac{b \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{D}}, \frac{a \operatorname{ch} \xi}{\sqrt{D}} \right\rangle * \left\langle \operatorname{sh} \omega - \frac{b \operatorname{ch} \omega}{\sqrt{D}}, \frac{a \operatorname{ch} \omega}{\sqrt{D}} \right\rangle = \left\langle \operatorname{ch}(\xi + \omega) - \frac{b \operatorname{sh}(\xi + \omega)}{\sqrt{D}}, \frac{a \operatorname{sh}(\xi + \omega)}{\sqrt{D}} \right\rangle.$$

$\square$

Обозначим через  $\Phi_t(\Phi_t^+)$  множество всех вещественных (положительных) чисел  $w$ , которые по формулам (13) определяют целочисленные (положительные) решения минус- $t$ -уравнения Пелля. Рассмотрим биекцию  $F : \mathfrak{M}_t \rightarrow \Phi_t$ , где  $F(x, y) = w$  ( $w$  определяет пару  $\langle x, y \rangle$  по формулам (13)). Так же как и в случае множества  $\Theta_t^+$  отображение  $F$  индуцирует на  $\Phi_t^+$  порядок, следовательно, в этом множестве существует минимальный элемент  $\xi_{min}$ . Обозначим через  $\psi := F^{-1}(\xi_{min})$  – решение уравнения (12), которое будем называть **минимальным решением** этого уравнения или **фундаментальной единицей**.

Имеет место

**Лемма 6.**  $\langle \mathfrak{M}_t; * \rangle$  – циклическая абелева группа с порождающим элементом  $\psi$ .

Из леммы 5 следует, что

$$\mathfrak{M}_t = \{\psi^{2n+1} | n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Введём следующее обозначение:

$$\mathfrak{M}_t^* := \{\langle -x, -y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathfrak{M}_t\}.$$

Аналогично доказывается

**Теорема 3.** Пусть  $\alpha$  — отрицательный  $t$ -дискриминант,  $k$ -длина периода разложения  $\alpha$  в ЦД. Тогда:

- (а) уравнение (12) разрешимо тогда и только тогда, когда длина периода  $k$  разложения числа  $\alpha$  в ЦД — число чётное;
- (б) если уравнение (12) разрешимо, то оно имеет бесконечное множество решений  $\mathfrak{M}_t \cup \mathfrak{M}_t^*$ . Произвольное решение из  $\mathfrak{M}_t$  — целая степень основной единицы  $\psi = \langle P_{kn_0-1}, Q_{kn_0-1} \rangle$ . Здесь  $n_0 \in \mathbb{N}$  — наименьшее число, для которого  $kn_0$  — нечётное.

В заключение рассмотрим несколько примеров.

**Пример 6.** Уравнению

$$(58x + 145y)^2 - 12325y^2 = -3364$$

соответствует квадратичная иррациональность вида

$$\alpha = \frac{\sqrt{12325} - 145}{58} = [-1, \overline{2, 2, 2, 2, 3}].$$

Длина периода разложения в ЦД число нечётное. Следовательно, на основании теоремы 3 данное уравнение разрешимо и имеет бесконечное число решений. Фундаментальным решением этого уравнения является, как легко проверить, пара  $\langle -17, 29 \rangle$ .

**Пример 7.** Уравнение

$$(4x + 24y)^2 - 333y^2 = -16$$

не разрешимо, так как длина периода разложения в ЦД числа  $\alpha = \frac{\sqrt{333} - 24}{4}$  чётное число:

$$\alpha = [-2, \overline{1, 1, 3, 1, 1, 8}].$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты: 1) доказана теорема об описании отрицательных  $t$ -дискриминантов; 2) исследованы на разрешимость  $t$ -уравнения и минус- $t$ -уравнения Пелля; 3) доказаны теоремы об описаниях множеств решений указанных уравнений (в случае их разрешимости) с помощью циклических групп.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бухштаб А. А. *Теория чисел*. – Москва: Просвещение, 1966. –375 с.  
Bukhshtab, A. A. (1966). *Number theory* – Moscow: Prosvestshenye.
2. Дэвенпорт Г. *Высшая арифметика*. – Москва: Наука, 1965. –175 С.  
Devenport G. *High arithmetic*. (1965). – Moscow: Nauka.
3. Matthews, K. (2002). The diophantine equation  $ax^2 + bxy + cy^2 = N$ ,  $D = b^2 - 4ac > 0$ . *J.Théor. Nombres Bordeaux*, Vol. 14, pp. 257–270.
4. Исмаилова А. С., Третьяков Д. В. *s-дискриминанты и s-уравнения Пелля* // ТВИМ. – 2007, № 2 – С. 47–60.  
Ismailova, A. S., Tretyakov, D. V. (2007). *s-discriminants and s-Pell equation*. *TJCSTM*, 2, pp. 47–60.
5. Третьяков Д.В. *Об одном обобщении уравнения Пелля*. // Spectral and Evolution Problems. International Scintific Journal, 2008. – vol. 18, P. 141–147.  
Tretyakov, D. V. (2008). *On some generalization of Pell equation*. *Spectral and Evolution Problems. Inernational Scintific Journal*, Vol. 18, pp. 141–147.

*Статья поступила в редакцию 15.11.2014*

УДК 303.732.4

## МЕТОДОЛОГИЯ, МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛИМФАНГИОГЕНЕЗА ДЛЯ СРАВНЕНИЯ И ПРОГНОЗА РАЗВИТИЯ ЗЛОКАЧЕСТВЕННЫХ ОПУХОЛЕЙ

© М. В. Спринджук, Ю. Е. Демидчик, С. Е. Шелкович, А. П. Кончиц

Объединенный Институт Проблем Информатики Национальной академии наук Беларуси

лаборатория математической кибернетики

ул. Сурганова, 6, г. Минск, 220012, Беларусь

E-MAIL: *sprindzuk@yahoo.com*

METHODOLOGY, MODELS AND ALGORITHMS OF IMAGE PROCESSING OF THE  
LYMPHANGIOGENESIS PATHOLOGY FOR THE GOALS OF MALIGNANCY EXPANSION  
COMPARISON AND PROGNOSIS.

**Sprindjuk, M. V, Demidchik, Yu. E., Shelkovich, S. E and Konchiz, A. P.**

**Abstract.** Authors report their 5-year experience in lymphangiogenesis image processing and tumor expansion research. Texture and the novel for that research field fractal image features can be an adjunctive to the conventional microvessel density computation. Practical data processing of clinical data in the sphere of lymphangiogenesis discovery has elucidated the questions of data verification, appropriate organization, computability and the adequacy of prognostic algorithm application.

### ВВЕДЕНИЕ

С появлением новых математических инструментов и развитого алгоритмического аппарата для прикладной статистики прогнозирование клинического состояния больных стало популярной темой в современных научных публикациях ведущих научных коллективов мира. Поиск прогностических биомаркеров исхода злокачественных опухолей — трудоемкое занятие, процесс, требующий получения и обработки сложных данных. Уникальность и длительный период времени получения и накопления необходимого клинического и патоморфологического материала делает эксперимент неповторимым и усложняет организацию данных и возможность сравнения результатов с аналогичными исследованиями. Задачи обработки данных, включающие работу со сложными программными продуктами и написание оригинального программного обеспечения под силу только специалистам с техническим образованием и соответствующим опытом. Целью настоящего исследования было разработать и апробировать модели и алгоритмы обработки изображений опухолевого лимфангиогенеза и для конкретного примера вычислить сравнительные веса предикторов-параметров, полученных с изображений.



## 1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Изображения были получены с биологического материала удаленных опухолей щитовидной железы и яичников. Оба класса препаратов были окрашены маркером D2-40. Статистическим материалом была информация, включающая номер-идентификатор пациента и результат развития опухолевого процесса: для карциномы щитовидной железы — метастазирование в лимфатические узлы, для рака яичников — рецидив болезни. Характеристики изображений были получены оригинальным программным обеспечением. Под разработанными алгоритмами понимались шаги действий, совершенных над изображениями для получения видимых и невидимых человеческому глазу численных характеристик, полноценно описывающих патоморфологическую картину заболевания. Моделью в данном исследовании была системно-аналитическая концепция организации и обработки данных, направленная на достижения исходной цели научного исследования (см. рисунки 1–3). Для разработки программного обеспечения применялись стандартные языки программирования: Дельфи и Питон. Их выбор был обусловлен знанием и опытом разработчиков и наличием необходимых библиотек кода. Статистическая обработка данных выполнялась и была перепроверена различным программным обеспечением: R, SPSS20, STATA11, Minitab, STATISTICA, StatsDirect, JMP SAS, MATHEMATICA.

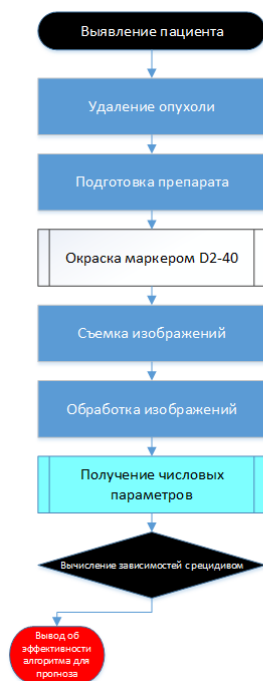


Рис. 1. Общая схема выполненного исследования.



Рис. 2. Системно-аналитическая модель принятия решения о включении пациента в группу риска по прогнозируемому событию.

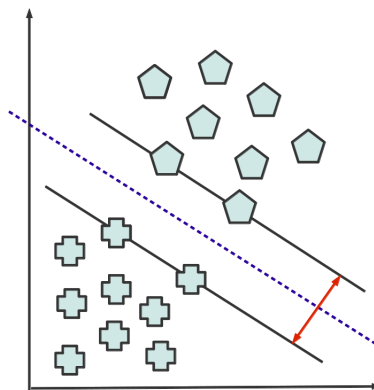


Рис. 3. Бинарная SVM-модель (support vector machines — опорные машинные вектора, сокращенно — ОВ). Синим пунктиром представлена оптимальная плоскость классификации, красной линией — оптимальная граница разделения классов. Объекты на сплошной линии — опорные вектора.

## 2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ

Наиболее распространенный маркер-дескриптор ангиогенеза — площадь покрашенных сосудов. В данной работе, помимо этой характеристики, которая была необходима для пополнения коллекции аналогичных исследований, мы впервые для данной предметной области изучили прогностические возможности применения текстурных характеристик изображений, таких, в своем роде фрактальных параметров, как однородности распределения сосудов на плоскости изображения, долей крупных и мелких объектов сосудов. На рисунках 4–10 представлены результаты применения различных прогностических алгоритмов для прогноза исхода рака на основе полученных характеристик изображений.

Метод	Общее число выборки по классам "0/1"	Число неправильно классифицированных для класса "0"	Число неправильно классифицированных для класса "1"	Процент неправильно классифицированных для класса "0"	Процент неправильно классифицированных для класса "1"
ОВ линейное ядро	7/6	5	0	71	0
ОВ сигмоидное ядро	7/6	7	0	100	0
Ближайших соседей	3/10	1	5	33,3	50
Линейный дискриминантный анализ	15/33	0	33	0	100
Бинарная логистическая регрессия	15/33	3	7	20	21

Рис. 4. Сводка результатов алгоритмов машинного обучения для классификации метастазирования по группе характеристик изображений.

Математическая основа алгоритма вычисления однородности распределения сосудов на изображении представлена в формуле (1), где  $H$  — энтропия,  $t$  — верхний предел,  $p_i$  — вероятность попадания чёрного, представляющего микрососуды, пиксела в  $i$ -й фрагмент.

$$H = - \sum_{i=0}^t p_i \ln(p_i) \quad (1)$$

Метод	Общее число выборки по классам "0,1"	Число неправильно классифицированных для класса "0"	Число неправильно классифицированных для класса "1"	Процент неправильно классифицированных для класса "0"	Процент неправильно классифицированных для класса "1"
ОБ линейное ядро	14/7	0	7	0	100
ОБ сигмоидное ядро	14/7	9	2	64,3	28,6
Ближайших соседей	14/7	4	4	28,6	57,1
Линейный дискриминантный анализ	51/30	22	11	43	36,7
Бинарная логистическая регрессия	51/30	19	7	37	23

Рис. 5. Сводка результатов алгоритмов машинного обучения для классификации рецидива по группе характеристик изображений.

Параметр	СтОшибка	ChiSquare	Вероятность > ChiSquare
Однородность	5.64597	5.09	0.0241
Площадь	0.106462	7.7	0.0055
ОДКОС	7.05029	2.32	0.1279
ОДМОС	14.8346	2.44	0.1182

Рис. 6. Данные расчета бинарной логистической регрессии для мета-стазирования в лимфатические узлы рака щитовидной железы на основе отдельных значений характеристик изображений.

Параметр	СтОшибка	ChiSquare	Вероятность > ChiSquare
Однородность	4.73458	1.01	0.0241
Площадь	0.444415	7.7	0.1263
ОДКОС	15.3748	5.18	0.0229
ОДМОС	33.5237	4.72	0.0298

Рис. 7. Данные расчета бинарной логистической регрессии для мета-стазирования в лимфатические узлы рака щитовидной железы на основе отдельных значений характеристик изображений.

Этот результат исследования уже сообщался нами в других публикациях как и описание других применявшихся алгоритмов для получения характеристик изображений [1-14], поэтому подробно в данной статье не рассматривается.

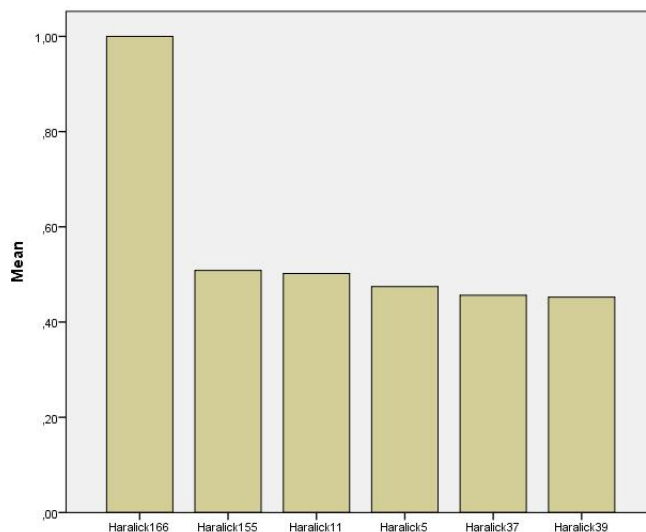


Рис. 8. Веса значений текстурных характеристики изображений карциномы щитовидной железы (идентификатор соответствует ряду значений). На первом месте — 13-ая математическая функция Харалика в 12-ом векторном пространстве.

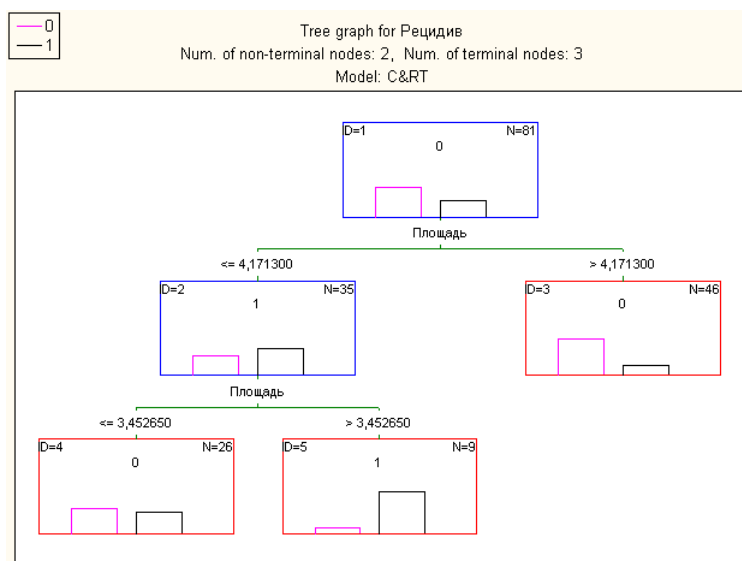


Рис. 9. Дерево, автоматически построенное на основе дискриминирующих значений площади сосудов опухоли. Показаны точные значения площади сечения лимфатических капилляров опухоли, позволяющие судить о прогнозе рецидива болезни [<http://www.statistica.ru/glossary/general/derevya-klassifikatsii/>].

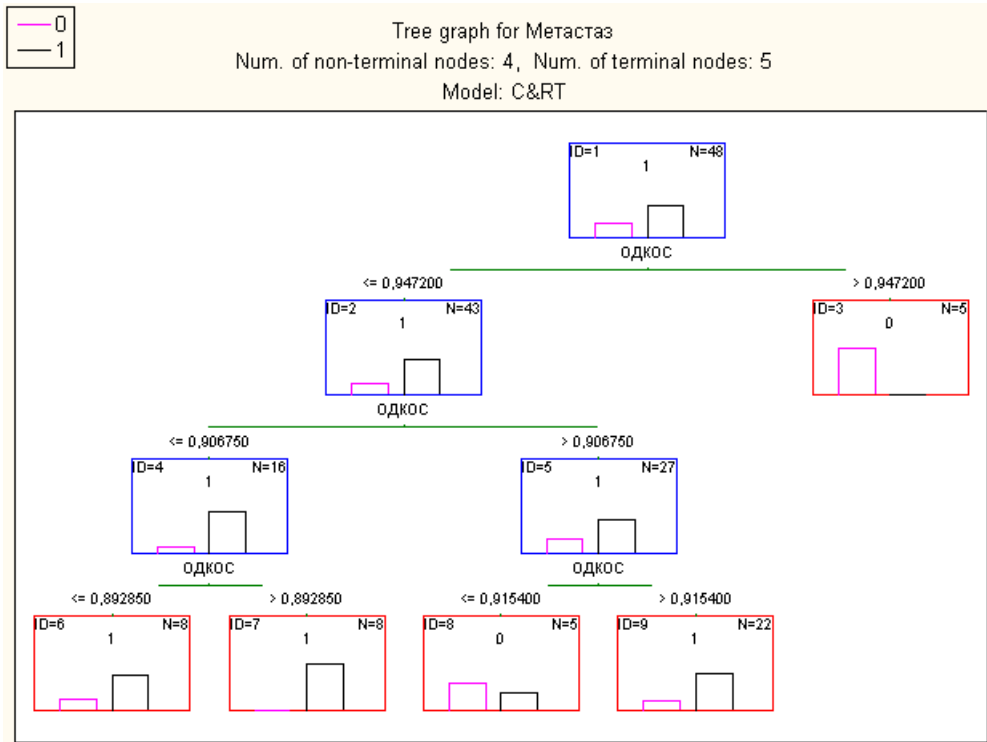


Рис. 10. Дерево, автоматически построенное на основе дискриминирующих значений ОДКОС (относительной доли крупных объектов сосудов) и ОДМОС (относительной доли мелких объектов сосудов) опухоли щитовидной железы.

“Деревья решений” (классификации) — метод, позволяющий предсказывать принадлежность наблюдений или объектов к тому или иному классу категориальной зависимой переменной в соответствии со значениями одной или нескольких предикторных переменных. Основные понятия из теории “деревьев решений”:

- Объект — пример, шаблон, наблюдение;
- Атрибут — признак, независимая переменная, свойство;
- Метка класса — зависимая переменная, целевая переменная, признак, определяющий класс объекта;
- Узел — внутренний узел дерева, узел проверки;
- Лист — конечный узел дерева, узел решения;
- Проверка — условие в узле.

Отличительная черта метода “деревьев классификации” — это присущая ему гибкость, — способность “деревьев классификации” последовательно изучать эффект влияния отдельных переменных. Есть еще целый ряд причин, делающих деревья

классификации более гибким средством, чем традиционные методы анализа. Широкая сфера применения “деревьев классификации” делает их весьма привлекательным инструментом анализа данных, но не следует полагать, что его рекомендуется использовать вместо традиционных методов статистики. Напротив, если выполнены более строгие теоретические предположения, налагаемые традиционными методами, и выборочное распределение обладает некоторыми специальными свойствами, то более результативным будет использование именно традиционных методов. Как метод разведочного анализа или последнее средство, в случае отказа всех традиционных методов.

Основными достоинствами метода "деревья решений" являются:

- быстрый процесс обучения;
- генерация правил в областях, где эксперту трудно формализовать свои знания;
- извлечение правил на естественном языке;
- понятная на интуитивном уровне классификационная модель;
- достаточно высокая точность прогноза, сопоставимая с другими методами (нейронными сетями, случайными лесами);
- построение непараметрических моделей [<http://cdo.bseu.by/stat1/lab7>].

При изучении прогностического значения комплекса характеристик изображений наилучшие в плане корректной классификации и, соответственно, прогноза, результаты были получены при применении бинарной логистической регрессии. При изучении прогностического веса индивидуальных характеристик изображений наименьшая стандартная ошибка классификации была выявлена для параметров площади и однородности. Учитывая разную природу характеристик изображений, мы не использовали текстурные параметры Харалика в одном стеке предикторов при расчете их прогностического веса.

Прогностический вес численных значений текстуры, которые дали корреляцию  $<0,05$  по двустороннему критерию, представлены на рисунке 8. Учитывая небольшое число пациентов и изображений (81 карцинома яичников, 48 карцином щитовидной железы), мы не стали изучать индивидуальное прогностическое значение каждого численного значения полученного текстурного признака Харалика, оставив новизну воплощения этой идеи для других исследователей. Применяя таким образом стандартный математический функциональный аппарат, мы предложили новые морфометрические характеристики, алгоритмы, системно-аналитическую методологию для узкой области изучения морфологической картины лимфангиогенеза и прогноза опухолевой агрессии. В данном исследовании изучение текстуры и фрактальных параметров уникальной группы клинических патоморфологических изображений было

направлено не на распознавание образов и классификацию изображений, что не имело бы значительной новизны в связи с большим количеством аналогичных публикаций, а на получение с изображений двух классов численных характеристик, которые можно было использовать для сравнения эволюции опухолей, их развития и прогноза. Опыт изучения морфометрии лимфангиогенеза, позволил нам сформулировать методологию её применения:

- Морфометрию лимфангиогенеза целесообразно выполнять для фундаментального изучения морфологической картины злокачественных опухолей.
- Числовые параметры, полученные от обработанных программным обеспечением изображений, представляют собой *дополнительную информацию* об изучаемом организме и могут быть использованы для определения весовых коэффициентов прогноза клинических фактов, характеризующих состояние пациента в сравнении с другими параметрами.
- Рекомендуется формировать базы данных морфометрических параметров для возможности оценки эволюции морфометрической картины опухолей и возможности сформировать значительную по объему выборку для научных исследований.
- Рекомендуется применять площадь прокрашенных маркером сосудов и значение однородности распределения сосудов на изображении как основные дескрипторы опухолевой картины лимфангиогенеза.
- Рекомендуется использовать маркер D2-40 для морфометрии лимфангиогенеза опухолей яичников и щитовидной железы.
- Рекомендуются дальнейшее изучение прогностической ценности морфометрических параметров лимфангиогенеза в сравнении с лабораторными и клиническими предикторами.
- Не рекомендуется применять морфометрию лимфангиогенеза для попыток установления и уточнения клинического диагноза у онкологических пациентов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опыт изучения прогностических возможностей морфометрии показал, что метастазирование щитовидной железы лучше поддается прогнозу, чем рецидив рака яичников, что обусловлено большей агрессивностью рака яичников и, соответственно, более динамичным экспансивным процессом распространения опухолевых клеток репродуктивной системы. За 5 лет исследования данные о метастазировании щитовидной железы не изменились, но к 5-му году исследования количество случаев рецидива



рака яичников увеличилось относительно того временного момента, когда были получены данные об исходе заболевания. Стратификация данных по разным признакам и свойствам выборки для улучшения однородности данных была невозможна в связи с ограниченным количеством биологических объектов исследования. Таким образом, опыт изучения разных граней развития злокачественных опухолей позволил сформировать рекомендации для следующих экспериментов в этой области. Применение морфометрии опухолевого ангио- и лимфангиогенеза показывает, что *накопленная морфометрическая информация может служить источником новых исследований взаимоскорреляции и другой зависимости* клинических и лабораторных данных. Однако, безусловно, такая информация по своей природе не может иметь ключевого диагностического характера. Пригодность характеристик изображений для прогноза исхода карцином должна изучаться на верифицированном материале большого объема и однородной структуры по разным критериям с возможностью стратифицировать пациентов по группам различных параметров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сприндзук М. В.* Цифровая обработка гистологических изображений: введение в область исследования и алгоритмы для морфометрии изображений ангиогенеза и лимфангиогенеза // *Врач и Информационные Технологии.* – 2012. – № 4. – С. 58–68.  
*Sprindzuk M. V.* 2012. *Digital processing of histological images: introduction to the research field and the algorithms for the morphometry of angiogenesis and lymphangiogenesis.* *Vrach i Informaciyonnie Technologii*, 4, pp. 58–68.
2. *Сприндзук М. В., Ковалев В. А., Кончиц А. П., Демидчик Ю. Е., Фридман М. В., Богущ А. Л., Ляховский В. В.* / Ангиогенез: программное обеспечение для исследования феномена и вопросы количественной оценки гистологических изображений // *Врач и Информационные Технологии.* – 2010. – № 3. – С. 38–46.  
*Sprindzuk M.V., Konchits A.P., Bogush A.L., Liakhovski V.V.* 2010. *Angiogenesis: software for the research of the phenomena and the questions of the quantitative evaluation of the histological images.* *Vrach i Informaciyonnie Technologii*, 3, pp. 38–46.
3. *Сприндзук М. В., Кончиц А.П., Богущ А. Л.* / Коррелятивный анализ плотности лимфатических капилляров и параметров, полученных при анатомическом и гистологическом исследовании образцов папиллярного рака щитовидной железы в группе 43 педиатрических пациентов // *Хирург.* – 2010. – № 11. – С. 7–14.  
*Sprindzuk M.V., Konchits A.P., Bogush A.L.* 2010. *Correlative analysis of the lymphatic microvessel density and parameters derived on anatomical and histological exploration of the 43 juvenile papillary thyroid cancer patients.* *Hirurg*, 11, pp. 7–14.

4. Спринджук М. В. Ангиогенез // Морфология. – 2010. – № 11. – С. 4–13.  
Sprindzuk M. V. 2010. *Angiogenesis. Morphologia*, 11, pp. 4–13.
5. Спринджук М.В., Ковалев В.А., Богущ А.Л., Шелкович С.Е. Ангиогенез злокачественных опухолей щитовидной железы и яичников. Возможности цифровой обработки микроскопических изображений // ARS medica. Искусство медицины. – 2010.- № 3. – С. 9–24.  
Sprindzuk M.V., Kovalev V.A., Bogush A.L., Shelkovich S.E. 2010. *Angiogenesis of malignant tumors of thyroid gland and ovaries. Capabilities of the digital image processing*. ARS Medica, No. 3, P. 9–24.
6. Спринджук М. В., Ковалев В. А., Фридман М. В. Ангиогенез: значение в современной медицине, ключевые аспекты патогенеза, проблемы оценки изображений, полученных при исследовании гистологических микропрепаратов // Медицинская Панорама. – 2009. – № 10. – С. 5–9.  
Sprindzuk M. V., Kovalev V. A., Fridman M. V. 2010. *Angiogenesis: the role in modern medicine, key aspects of pathogenesis, questions of the histology sample image evaluation*. Meditsinskaya Panorama, 10, pp. 5–9.
7. Спринджук М.В., Кончиц А.П. Рост и развитие опухолевых лимфатических капилляров при папиллярном раке щитовидной железы /М.В. Спринджук, А.П. Кончиц // Онкохирургия. – 2012. – №3. –С. 12-23.  
Sprindzuk M.V., Konchits A.P. 2012. *Growth and development of the tumoral lymphatic capillaries in papillary thyroid cancers*. Oncohirurgiya, pp. 12–23.
8. Спринджук М.В. Ангиогенез. /М.В. Спринджук // Вестник Восстановительной Медицины. – 2011. – №5. – С. 23–32.  
Sprindzuk M.V. 2011. *Angiogenesis*. Vestnik Vosstanovitel'noi Meditsini, 5, pp. 23–32.
9. Спринджук М.В., Кончиц А.П. Опыт пилотного исследования патоморфологии лимфатических капилляров папиллярного рака щитовидной железы по данным обработки изображений, окрашенных маркером D2-40. /М.В. Спринджук, А.П. Кончиц // Современные технологии в медицине – 2011. – №3. – С. 48-53.  
Sprindzuk M.V., Konchits A.P. 2011. *The pilot experience of the pathomorphological exploration of the lymphatic microvessels of thyroid cancer based on image processing of the images produced from D2-40 stained samples*. Sovremennie Technologii v Meditsine, 3, pp. 48–53.
10. Sprindzuk, M. V., Konchits, A. P., Shukelovich, A. V., Demidchik, Y. P., Shelkovich, S. E., Fridman, M. V. 2014. The technology and algorithms for tumoral behavior prediction based on computerized lymphangiogenesis morphometry of D2-40 stained images. *Information Control Management Systems*, 1, pp. 65–70.
11. Sprindzuk, M. V., Konchits, A. P., Shukelovich, A. V., Demidchik, Y. P., Shelkovich, S. E., Fridman, M. V. 2013. The method for ovarian cancer prediction based on computerized morphometry of D2-40 stained images. *International Conference on Digital Technologies, Slovakia, Zilina, IEEE*, 1, pp. 52–54.
12. Sprindzuk, M. V., Dmitruk, A. A., Kovalev, V. A., Bogush, A. L., Tuzikov, A. V., Liakhovski, V. V., Fridman, M. V. 2011. Computer-aided image processing of angiogenic histological samples in ovarian cancer. *Journal of Clinical Medicine Research*, 1, pp. 10–15.

13. Sprindzuk, M. V. 2010. Angiogenesis in Malignant Thyroid Tumors. *World Journal of Oncology*, 1, pp. 221–223.
14. Sprindzuk, M. V. 2010. Angiogenesis in thyroid malignant neoplasm: State of the art and advances of the modern digital pathology and nanotechnology. *Journal of Clinical Pathology and Forensic Medicine*, 1, pp. 16–34.

*Статья поступила в редакцию 16.01.2014*

---

Авторы выражают благодарность сотрудникам Минского Онкологического Диспансера и лаборатории патоморфологической диагностики БелМАПО, а также профессорам-математикам: Михаилу Яковлевичу Ковалеву, Александру Николаевичу Вальвачеву, Борису Андреевичу Залесскому, Виктору Владимировичу Краснопрошину, Александру Васильевичу Тузикову, Василию Ивановичу Бернику, Элле Ивановне Ковалевской, Виктору Абрамовичу Мильману, Юрию Назаровичу Сотскову и Валерию Васильевичу Старовойтову.

*Исследование имело финансовую поддержку фондов МНТЦ и CRDF*

---

Бухтояров С. Е., Емеличев В. А. Об устойчивости векторной инвестиционной задачи с критериями крайнего оптимизма / С. Е. Бухтояров, В. А. Емеличев // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 7–13.

*Получены нижняя и верхняя оценки радиуса устойчивости многокритериальной инвестиционной булевой задачи с критериями крайнего оптимизма (МАХМАХ) по доходности портфеля и паретовским принципом оптимальности в случае, когда в пространстве состояний финансового рынка задана произвольная метрика Гёльдера  $l_p, 1 \leq p \leq \infty$ , а в пространствах проектов и критериальном пространстве экономической эффективности проектов — метрика Чебышева  $l_\infty$ .*

---

Донской В. И. Интеллектуальное управление: обзор / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 14–35.

*В результате обзора современного состояния исследований в сфере интеллектуального управления отмечается, что важнейшими направлениями развития в этой области являются: разработка специфических моделей памяти для агентов, алгоритмических баз знаний агентов, моделей динамической автоматической классификации состояний управляемых объектов и среды, автоматического изменения структур математических моделей и даже автоматической смены используемой агентом модели.*

---

Емец А. О. Нечеткие линейные системы уравнений: допусковые решения с разным типом принадлежности / А. О. Емец // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 36–46.

*В работе введено понятие допускового с типом принадлежности  $\langle t, \tau \rangle$  решения нечеткой линейной системы уравнений и дана его характеристика.*

Михайлов Д. В., Емельянов Г. М. Смысловые эталоны и передача знаний в задаче их оценки на основе тестов открытого типа / Д. В. Михайлов, Г. М. Емельянов // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 47–62.

*Статья посвящена проблеме передачи знаний, представляемых текстами на Естественном Языке (ЕЯ), между экспертами и обучаемыми в системе автоматизированного обучения и контроля знаний. Ставится задача минимизации потерь полезной информации при формировании базы знаний системы на основе текстового описания фактов предметной области теста. Предложено решение указанной задачи в рамках теории Анализа Формальных Понятий (АФП) на базе концепции Ситуации Языкового Употребления (СЯУ) как единицы формализованного описания семантики.*

---

---

Руденко Л. И. Алгоритм синтеза линейной функции и его приложения / Л. И. Руденко // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 63–73.

*Рассматривается порядковый подход к доопределению линейной функции на основе непротиворечивой начальной информации, формулируется алгоритм синтеза функции и обсуждаются прикладные задачи с использованием этого алгоритма. Частичная информация о функции задается на подмножестве допустимых значений с помощью бинарного отношения  $\tilde{x} \succ \tilde{y} \Leftrightarrow f(\tilde{x}) > f(\tilde{y})$ ,  $\tilde{x}, \tilde{y} \in D$ , которое устанавливается экспертными оценками. Возможность восстановления функции в классе линейных означает, по определению, существование вектора  $\tilde{c} \in \mathbb{R}^n$ , такого, что  $f(\tilde{x}) > f(\tilde{y}) \Leftrightarrow (\tilde{c}, \tilde{x}) > (\tilde{c}, \tilde{y})$ . Алгоритм синтеза частично заданной функции предполагает проверку непротиворечивости начальной информации и восстановление набора коэффициентов на основе процедуры линейной коррекции. Рассматриваются области применения алгоритма синтеза линейной функции в том числе, в решении слабоопределенных задач линейного программирования, в решении многокритериальных задач методом свертывания критериев, при восстановлении нелинейных функций, в задаче коллективного выбора решений.*

Третьяков Д. В., Халилова З. И. Об одном классе  $t$ -дискриминантов и  $t$ -уравнениях Пелля / Д. В. Третьяков, З. И. Халилова // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 74–87.

*В работе исследуются квадратичные иррациональности  $\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a}$ , которые характеризуются разложением в периодическую цепную дробь определённой структуры  $\alpha = [-q_0, \overline{q_1, \dots, q_1}, tq_0], t \geq 2$ . Часть периода разложения - палиндром. Эти иррациональности называются  $t$ -дискриминантами. Рассмотрен класс диофантовых уравнений, порождаемых  $t$ -дискриминантами - так называемых  $t$ -уравнений и минус- $t$ -уравнений Пелля. Доказана теорема об описании всех решений этих уравнений, в том случае, когда они существуют. Решения указанных уравнений описываются с помощью циклических групп, которые здесь естественно возникают.*

---

Спринджук М. В., Демидчик Ю. Е., Шелкович С. Е., Кончиц А. П. Методология, модели и алгоритмы обработки изображений лимфангиогенеза для сравнения и прогноза развития злокачественных опухолей / М. В. Спринджук, Ю. Е. Демидчик, С. Е. Шелкович, А. П. Кончиц // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 2 (25). — С. 88–99.

*Авторы сообщают 5-летний опыт изучения обработки изображений опухолевого лимфангиогенеза. Текстурные и новые фрактальные характеристики изображений могут быть дополнительными дескрипторами, помимо традиционной площади, окрашенной маркером сосудов. Опыт практической обработки изображений выявил вопросы верификации, правильной организации, вычислимости исходных данных, а также проблему адекватности выбора прогностических алгоритмов.*

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

*Бухтояров Сергей  
Евгеньевич*

к. ф.-м. н., ассистент кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь

*Демидчик Юрий  
Евгеньевич*

д. м. н., профессор, член-корреспондент Национальной академии наук республики Беларусь, врач-хирург, директор республиканского центра опухолей щитовидной железы, Минск, Беларусь  
*e-mail: yu.demidchik@gmail.com*

*Донской Владимир  
Иосифович*

д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры информатики, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, факультет математики и информатики, главный редактор журнала ТВИМ  
*e-mail: donskoy@tnu.crimea.ua*

*Емеличев Владимир  
Алексеевич*

д. ф.-м. н., профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, г. Минск, Беларусь  
*e-mail: emeliche@tut.by*

*Емельянов Геннадий  
Мартынович*

д. ф.-м. н., профессор кафедры информационных технологий и систем, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия  
*e-mail: Gennady.Emelyanov@novsu.ru*

*Емец Александра  
Олеговна*

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли, г. Полтава, Украина  
*e-mail: yemets2008@ukr.net*

- Кончиц Андрей Петрович** к. б. н., ведущий научный сотрудник Института леса Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь  
*e-mail: konchits@yandex.ru*
- Михайлов Дмитрий Владимирович** д. ф.-м. н., доцент кафедры информационных технологий и систем, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия  
*e-mail: Dmitry.Mikhaylov@novsu.ru*
- Руденко Людмила Ивановна** к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики, Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия  
*e-mail: domlir@yandex.ru*
- Спринджук Матвей Владимирович** научный сотрудник лаборатории математической кибернетики Объединенного института проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, г. Минск, Беларусь  
*e-mail: msprindzhuk@mail.ru*
- Третьяков Дмитрий Вадимович** к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики, Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия  
*e-mail: dvtvd@mail.ru*
- Халилова Зарема Исметовна** аспирант кафедры алгебры и функционального анализа факультета математики и информатики, Таврический национальный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
- Шелкович Светлана Евгеньевна** к. м. н., доцент кафедры Белорусской академии последипломого образования, врач-гинеколог, г. Минск, Беларусь  
*e-mail: s.shelkovich@mail.ru*



Подписано к печати 19.12.2014. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.  
Издано в редакционном отделе Таврического национального университета им. В. И. Вернадского  
просп. Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007