Таврический Вестник Информатики и Математики

№ 1 (24) ' 2014

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 26.05.2010 р. № 1-05/4 журнал "Таврійський вісник информатики та математики" внесено до переліку фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата фізико-математичних наук (01.01 – математика, 01.05 – інформатика і кібернетика).

КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУКИ И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский научный центр Национальной Академии наук и
Министерства образования и науки Украины
пр-т Вернадского, 2, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Факультет математики и информатики ТНУ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Республика Крым, 295007

Тел. гл. редактора:	(0652) 63-75-42
Тел. редакции:	(0652) 602-466
e-mail (гл. редактор):	donskoy@tnu.crimea.ua
e-mail (для переписки):	article@tvim.info
сайт журнала:	www.tvim.info

Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Вычислительная математика

Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ Национальной академии наук
и Министерства образования и науки Украины
Протокол № 4 от 10 июня 2014 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Редакционный совет журнала ТВИМ, математики и программисты, публиковавшиеся в журнале, выражают глубокую благодарность своим коллегам, оказавшим спонсорскую помощь, без которой выпускать наш журнал было бы невозможно. Мы благодарим ***Е. А. Гукштейна, Н. и С. Терещенко, к.ф.-м.н. А. М. Петрова.***

КОНСТАНТИНУ ВЛАДИМИРОВИЧУ РУДАКОВУ — 60 ЛЕТ

Известный российский ученый, математик, член-корреспондент РАН Константин Владимирович Рудаков родился 21 июня 1954 года. Окончил 1971 году среднюю школу и в том же году поступил в Московский физико-технический институт на факультет управления и прикладной математики. Окончил институт в 1978 году и поступил в аспирантуру Вычислительного центра РАН. В июне 1981 года защитил кандидатскую диссертацию «О некоторых классах алгоритмов распознавания». С января 1982 года работает в ВЦ РАН. Во время учёбы в МФТИ Константин Владимирович интенсивно занимался изучением функционального анализа, топологии, алгебры, математической логики и дискретного анализа.

В 1984 году К. В. Рудаков стал Лауреатом премии Ленинского комсомола в области науки и техники. Докторскую диссертацию «Теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания» защитил в 1992 году. В мае 1997 года был избран членом-корреспондентом РАН. В 2003 году совместно с академиком Ю. И. Журавлевым стал Лауреатом Ломоносовской премии I-й степени.

Основные научные результаты члена-корреспондента РАН, доктора физико-математических наук, профессора К. В. Рудакова посвящены развитию алгебраического подхода к синтезу корректных алгоритмов на основе эвристических информационных моделей, основы которого были заложены Ю. И. Журавлевым в середине 70-х годов XX-го века.

К. В. Рудаков — заведующий отделом интеллектуальных систем ВЦ РАН, заведующий кафедрой интеллектуальных систем факультета управления и прикладной математики МФТИ, профессор ВМК МГУ и МПГУ, член ряда научных советов и редколлегий научных журналов.

Редакционный совет журнала ТВИМ, научная общественность Таврического университета, крымские математики и кибернетики сердечно поздравляют Константина Владимировича с юбилеем. Здоровья и творческих успехов!

УДК 519.95

НЕВЫЧИСЛИМОСТЬ VC-РАЗМЕРНОСТИ СЕМЕЙСТВ КЛАССИФИЦИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

© В. И. Донской

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
пр-т Вернадского, 4, Симферополь, Республика Крым, Россия
e-mail: *donskoy@tnu.crimea.ua*

Noncomputability of VC Dimension of Classifier Families.

Donskoy V. I.

Abstract. The following theoretical result is got in the article: Vapnik-Chervonenkis capacity or, speaking otherwise, VC dimension of arbitrary general recursive family of classifiers is noncomputable. VC dimension (VCD) or capacity of families of mappings which decision rules are extracted from, is one of major concepts of machine learning theory. Practice explored that VC dimension succeeded to be found only for a few simple families of classifiers. If to take into account that machine learning implies the use of computers, consideration of VC dimension of families of general recursive functions (algorithms) will be correct. Thus makes sense to examine such families of functions, which defined by neuron networks, decision trees, SVM, and other models in-use in the tasks of machine learning only. Such families, designated $\mathscr{S}$, and functional

$$\mathscr{F} : \mathscr{S} \to VCD(\mathscr{S}),$$

determined on these families and taking on a numerical value equal to the VC-dimension of these families, are examined. By description families of general recursive functions as the lines of arbitrary length, the functional is replaced by function in Turing presentation. Noncomputability of $VCD(S)$ is further proved for arbitrary family $\mathscr{S}$. Kolmogorov complexity of family of general recursive functions $K_l(S)$ is entered to do that, where l is a variable which defines sample length. It is well known that Kolmogorov complexity of arbitrary string is noncomputable. We proved that comlexity $K_l(S)$ is noncomputable as well. Inequality

$$VCD(\mathscr{S}) \leq K_l(\mathscr{S}) < VCD(\mathscr{S}) \log l$$

was proven in [3]. Noncomputability of $VCD(S)$ is proved by this inequality usage.

Relation between sample compression, learnability, and VCD was studied in [8]. The compression function takes away from the sample so-called *the compression set*, consisting of no more than k teaching examples (number k is referred to the size of compression).

In the same paper [8] it was proven, that *at the length of sample l and the use of family of classifiers $\mathscr{S}$ there is a scheme of compression of size k, satisfying to inequality*

$$VCD(\mathscr{S}) < k \leq VCD(\mathscr{S}) \log l.$$

We proved that the size of compression $k = k(l, \mathscr{S})$ is noncomputable as well.

1. Введение. Постановка задачи

В теории машинного обучения одним из важнейших понятий является *VC-размерность* или *емкость семейств отображений*, из которых извлекаются решающие правила. Если полагать, что машинное обучение подразумевает использование компьютеров, то корректным будет рассмотрение VC-размерности семейств рекурсивных функций (алгоритмов).

Обозначим $\mathfrak{S}$ — семейство общерекурсивных функций (алгоритмов) вида

$$A : X^n \to \{0,1\},\ X^n = \big\{X = (x_1, ..., x_j, ..., x_n) : x_i \in \{0,1,2,\ldots,\}\big\}.$$

В теории машинного обучения функции семейства $\mathfrak{S}$ называют *классификаторами.*

(Заметим, что при вычислениях на реальных компьютерах множество значений переменных ограничено: $x_i \in \{0,1,\ldots,2^M-1\}$, где M — зафиксированное целое положительное число. Обычно M является разрядностью компьютера — количеством бит, выделяемых для представления одного числа или одного элемента памяти).

В семействе $\mathfrak{S}$ выделим множество подсемейств общерекурсивных классификаторов: $\{\mathscr{S}_1 \subset \mathfrak{S},\ \mathscr{S}_2 \subset \mathfrak{S}, \ldots\}$. Будем называть эти подсемейства *классами решающих правил.* Такие классы в рамках парадигмы *машинного обучения* соответствуют семействам общерекурсивных классификаторов, реализуемых, например, нейронными сетями, решающими деревьями, машинами опорных векторов, алгоритмами вычисления оценок [4] и другими алгоритмическими моделями классификации.

Произвольный класс решающих правил (алгоритмов) будем обозначать $\mathscr{S}$, $\mathscr{S} \subset \mathfrak{S}$.

Выборка, состоящая из l произвольных элементов (точек) множества X^n, обозначается $\widetilde{X}_l = X_1, \ldots, X_l$ и представляет собой набор $n \times l$ чисел из расширенного натурального ряда. Теоретически и практически допустимо считать все рассматриваемые числа представленными в виде бинарных строк. Множество всех выборок обозначается $\mathscr{X}^l$.

Применение произвольного классификатора $A \in \mathscr{S}$ к l точкам выборки $\widetilde{X}_l$ порождает l двоичных значений – бинарную строку

$$\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_j, \ldots, y_l)\ : y_j = A(X_j) \in \{0,1\},\ j = 1, \ldots, l.$$

Будем называть строку $\tilde{y}$ *разбиением выборки $\widetilde{X}_l$ на два класса* в соответствии со значениями 0 и 1 функции (алгоритма) A и использовать обозначение $\tilde{y_A} = A(\tilde{X}_l)$.

Применение одного и того же алгоритма к различным выборкам и применение различных алгоритмов к одной и той же выборке дает, вообще говоря, различные разбиения. Алгоритмы, порождающие одинаковые разбиения любых допустимых выборок, будем называть *подклассом эквивалентных алгоритмов* семейства $\mathscr{S}$.

Определение 1. [1] VC-размерностью или емкостью семейства функций $\mathscr{S} = \{A : X^n \to \{0,1\}\}$, обозначаемой $VCD(\mathscr{S})$, называется наибольшее значение l^* такое, что найдется выборка $\widetilde{X}_{l^*}$, которая может быть разбита всеми 2^{l^*} способами алгоритмами семейства $\mathscr{S}$:

$$\exists \tilde{X_{l^*}} \ : |\ \{\tilde{y} : \tilde{y} = A(\tilde{X_{l^*}}), A \in \mathscr{S}\} \ |= 2^{l^*},$$

но никакая выборка длины большей, чем l^*, разбита всеми способами быть не может. Если же при любом l найдется выборка, разбиваемая всеми 2^l способами, то VC-размерность семейства $\mathscr{S}$ полагается неограниченной (∞).

Определение 2. Пусть $\mathscr{B}(\mathfrak{S})$ — множество всех подмножеств семейства $\mathfrak{S}$ и $\mathscr{K} \in \mathscr{B}(\mathfrak{S})$. Назовем отображение

$$\mathscr{F} : \mathscr{S} \to VCD(\mathscr{S}), \quad \mathscr{F} \in \mathscr{K},$$

функционалом комбинаторной размерности (VC-*размерности*).

Целью дальнейшего изложения является выяснение вопроса: является ли функционал комбинаторной размерности вычислимым?

2. Представление функционала комбинаторной размерности в виде функции, предназначенной для вычисления на машине Тьюринга

Функционал $\mathscr{F}$ ставит в соответствие некоторому подклассу общерекурсивных функций $\mathscr{S}$ число $VCD(\mathscr{S})$. Переходя к эквивалентному тьюринговскому языку представления рекурсивных функций, покажем, что *интересующие нас* семейства $\mathscr{S}$ при зафиксированном (но любом!) значении параметров могут быть представлено словом $W(\mathscr{S})$ на ленте машины Тьюринга. При таком представлении функционал $\mathscr{F}$ интерпретируется заданием функции, которая по слову $W(\mathscr{S})$ должна, если функционал вычисл*и*м, выдавать число $VCD(\mathscr{S})$. Указанное представление упростит рассмотрение вопроса о вычислимости функционала $\mathscr{F}$.

Приведем примеры конструирования слова $W(\mathscr{S})$ для некоторых используемых при машинном обучении классов $\mathscr{S}$.

2.1. **Семейство классификаторов, представляемых бинарными решающими деревьями (БРД).** Программирование слова $W_{\mu\text{БРД}}$ для представления семейства $\mathscr{S}_{\mu\text{БРД}}$ БРД с μ листьями основано на представлении каждой из $\mu - 1$ вершин ветвления словом-атомом, состоящим из двух частей – префикса и окончания атома:

Код номера переменной или значение решающей функции (0 или 1)

Номер следующего атома в конкатенации или значение решающей функции (0 или 1)

Префикс атома может иметь $n + 1$ значение, если 0 и 1 резервируются для значений классифицирующей функции, а значениями $2, 3, \ldots, n + 1$ кодируются номера переменных-признаков $1, 2, \ldots, n$. Окончание атома может иметь μ значений: 0 и 1 резервируются также, как в префиксе. Остальные $\mu - 2$ значений соответствуют направленным рёбрам дерева, являющимися указателями на решающие вершины дерева (атомы списка). Указатель на одну (начальную вершину дерева) не требуется: нужны указатели только на $\mu - 2$ оставшиеся внутренние вершины. Всего получается μ значений для окончания атома.

Слово $W_{\mu\text{БРД}}$ будет конкатенацией вида: <атом><атом>...<атом>. Если значения префиксов и окончаний всех атомов слова $W_{\mu\text{БРД}}$ зафиксировать, то будет задан некоторый единственный алгоритм $A \in \mathscr{S}_{\text{БРД}}$. Если же значения всех префиксов и окончаний считать пробегающими все допустимые значения, то слово $W_{\text{БРД}}$ будет представлять все семейство $\mathscr{S}_{\mu\text{БРД}}$.

Таким образом получается описание любого семейства БРД-классификаторов для любого сколь угодно большого (но конечного) μ.

2.2. **Семейство классификаторов $\mathscr{S}_{NN}$, представляемых нейронными сетями.** Описание слова $W_{\mu NN}$ определяется следующим образом.

Будем использовать гёделевы номера машин Тьюринга для представления рекурсивных функций ядер нейронных сетей. Узлы нейронной сети будут представляться атомами, состоящими из описания списка входов, строкой-описанием функции ядра и описанием выхода. Каждый узел имеет номер. Каждый вход узла имеет идентификатор, состоящий из номера узла и номера его входа. Каждый выход узла снабжается указателем на некоторый вход какого-либо узла. Свободные входы (на которые не направлен никакий указатель) предназначаются для приема описания классифицируемых объектов. Свободный выход предназначается для значений, выдаваемых нейронным классификатором.

Слово $W_{\mu NN}$ будет являться конкатенацией описаний узлов.

Если разрешить в слове $W_{\mu NN}$ любые допустимые значения параметров, то будет получено описание класса $\mathscr{S}_{\mu NN}$. Для любых возможных значений μ получается описание семейства $\mathscr{S}_{NN}$.

2.3. **Семейство классификаторов $\mathscr{S}_{k-NN}$ — по методу ближайших соседей.** Для формирования слова $W_{\mathscr{S}_{k-NN}}$ в каждом допустимом случае используется сама входная выборка, описание числа k, описание рекурсивной функции расстояния и описание рекурсивной функции вычисления $\arg\min$.

3. Колмогоровская сложность и вычислимость VC-размерности

Определение 3. [6] Колмогоровская сложность слова (строки) x *при заданном способе описания* – вычислимой функции (декомпрессоре) D есть

$$KS_D(x) = \min\{l(p)|D(p) = x\},$$

если существует хотя бы одно двоичное слово p такое, что $D(p) = x$. Иначе полагается, что значение сложности не ограничено. Будем говорить, что в таком случае колмогоровская сложность не определена.

Здесь и далее $l(p)$ обозначает длину слова p в битах.

Определение 4. Условная колмогоровская сложность слова x при заданном слове y есть

$$KS_D(x|y) = \min\{l(p)|D(p, y) = x\};$$

если y – пустое слово, то $KS_D(x|y) = KS_D(x)$

Определение 5. Говорят, что декомпрессор D_1 (слова x) не хуже декомпрессора D_2, если $KS_{D_1}(x|y) \leq KS_{D_2}(x|y) + O(1)$. Декомпрессор называют оптимальным, если он не хуже любого другого декомпрессора.

Теорема 1. (*Соломонова-Колмогорова*) [6]. *Существуют оптимальные декомпрессоры.*

Эта теорема позволяет использовать в определении колмогоровской сложности произвольный оптимальный декомпрессор.

Определение 6. [6] Колмогоровской сложностью $KS(x)$ слова (строки) x называют сложность $KS_U(x)$ при способе описания U, являющемся произвольным оптимальным декомпрессором. Соответственно, условной колмогоровской сложностью $KS(x|y)$ слова x при заданном слове y называют сложность $KS_U(x|y)$.

Доказан и хорошо известен следующий факт теории колмогоровской сложности [5, 2, 9]:

Теорема 2. *Колмогоровская сложность $KS(x|y)$ не является вычислимой функцией.*

Определение 7. [3] Пусть U — такая частично-рекурсивная функция, что для каждого алгоритма $A \in \mathscr{S}$ и для любой выборки $\widetilde{X}_l$ найдется двоичное слово p, которое обеспечивает выполнение равенства $U(p, \widetilde{X}_l) = \widetilde{y}_A$, где $\widetilde{y}_A = A(X_1), ..., A(X_l)$ — двоичное слово (строка) длины l. При этом каждый алгоритм $A \in \mathscr{S}$ полагается определенным на каждой выборке $\widetilde{X}_l$ из X^l. Функция U с указанными свойствами существует в силу существования универсальной функции двух аргументов для любого семейства частично-рекурсивных функций одного аргумента.

1. Сложность алгоритма A относительно выборки $\widetilde{X}_l$ по частично-рекурсивной функции U есть
$$K_U(A|\widetilde{X}_l) = \min\{len(p) : U(p, \widetilde{X}_l) = \widetilde{y}_A\}.$$
2. Сложность алгоритма A на множестве $\mathscr{X}^l$ по частично-рекурсивной функции U есть
$$K_{U,\mathscr{X}^l}(A) = \max_{\widetilde{X}_l \in \mathscr{X}^l} K_U(A|\widetilde{X}_l)$$
3. Сложность семейства алгоритмов $\mathscr{S}$ на множестве $\mathscr{X}^l$ по частично-рекурсивной функции U есть
$$K_{U,\mathscr{X}^l}(\mathscr{S}) = \max_{A \in \mathscr{S}} K_{U,\mathscr{X}^l}(A).$$
4. Сложность семейства алгоритмов $\mathscr{S}$ на множестве $\mathscr{X}^l$ есть
$$K_l(\mathscr{S}) = \min_{U \in P_{p.r.}} K_{U,\mathscr{X}^l}(\mathscr{S}).$$

В приведенном определении сложность семейства алгоритмов $\mathscr{S}$ на множестве всех возможных выборок $\mathscr{X}^l$ длины l – это наименьшая длина двоичного слова p, по которому можно восстановить самый сложный (и любой) алгоритм $A \in \mathscr{S}$. Важно, что слово p обрабатывается одной и той же функцией (программой) U^*, причем, согласно 4°, наилучшей в следующем смысле. Программа U^* обеспечивает наибольшее сжатие информации о семействе $\mathscr{S}$ в слово p длины $K_l(\mathscr{S})$. Мажоранту сложности $K_l(\mathscr{S})$ можно получить, если точно указать структуру слова p, подлежащего расшифровке, и его длину в битах, а также представить алгоритм обработки этого слова, который будет использоваться вместо программы U^* для оценивания сложности сверху.

Теорема 3. *Колмогоровская сложность $K_l(\mathscr{S})$ произвольного семейства общерекурсивных функций $\mathscr{S}$ невычислима.*

Доказательство. В определении колмогоровской сложности $K_l(\mathscr{S})$ содержится невычислимое (в силу теоремы 2) выражение

$$K_U(A|\widetilde{X}_l) = \min\{len(p) : U(p, \widetilde{X}_l) = \widetilde{y}_A\}.$$

Это приводит к невычислимости $K_l(\mathscr{S})$. □

Теорема 4. [3] *Пусть система частично-рекурсивных функций $\mathscr{S}$ вида $A : X^n \longrightarrow \{0,1\}$ имеет ограниченную емкость $h_{\mathscr{S}} = VCD(\mathscr{S})$ и колмогоровскую сложность $K_l(\mathscr{S})$. Тогда при конечных значениях $h_{\mathscr{S}} \geq 2$ и $l > h_{\mathscr{S}}$ имеет место двойное неравенство*

$$h_{\mathscr{S}} \leq K_l(\mathscr{S}) < h_{\mathscr{S}} \log l. \tag{1}$$

Теорема 5. *VC-размерность произвольного рекурсивного семейства $\mathscr{S}$ невычислима.*

Доказательство. Предположим, что $h_{\mathscr{S}}$ вычислима. Из неравенств (1) следует

$$K_l(\mathscr{S}) = h_{\mathscr{S}} + j,$$

где j – константа из целочисленного отрезка $0, 1, 2, \dots, [h_{\mathscr{S}}(logl - 1)]$. Тогда $K_l(\mathscr{S})$, как сумма двух вычислимых слагаемых – $h_{\mathscr{S}}$ и константы, – также должна быть вычислимой. Но это приводит к противоречию: в силу теоремы 3, колмогоровская сложность $K_l(\mathscr{S})$ вычислимой не является. □

Связь между сжатием обучающей выборки, обучаемостью и VCD была изучена в работе Флойда и Вармута [8]. Функция сжатия отбирает из обучающей выборки так называемое *множество сжатия*, состоящее из не более чем k обучающих примеров (число k называют размером сжатия).

В этой же работе [8] было доказано, что *при длине обучающей выборки l и использовании семейства классификаторов $\mathscr{S}$ существует схема сжатия размера k, удовлетворяющая неравенству*

$$VCD(\mathscr{S}) < k \leq VCD(\mathscr{S})logl. \tag{2}$$

Теорема 6. *Размер сжатия $k = k(l, \mathscr{S})$ при использовании для обучения рекурсивного семейства $\mathscr{S}$ и длине обучающей выборки, равной l, невычислим.*

Доказательство. Предположим, размер сжатия k является вычислимым. Но тогда, с учетом неравенства (2),

$$VCD(\mathscr{S}) = k - j \geq 0, \tag{3}$$

где j — некоторая константа. Учитывая, что $VCD(\mathscr{S})$ непустого семейства $\mathscr{S}$ принимает положительные целочисленные значения, можно сделать вывод, что $VCD(\mathscr{S})$ вычислима. Действительно, при таком предположении размер k – вычисл*им*, константа j – вычисл*им*а и $k \dot{-} j$ – вычисл*им*ая функция (здесь $\ll \dot{-} \gg$ – рекурсивная функция – усеченная разность,– заменяющая обычное вычитание в формуле (3)). Но сделанное предположение противоречит теореме 5: $VCD(\mathscr{S})$ является невычислимой. $\square$

Заключение

В статье получен следующий теоретический результат: емкость Вапника-Червоненкиса или, говоря иначе, VC-размерность произвольного общерекурсивного семейства классификаторов невычислима.

Направление дальнейших исследований связано с повышением точности оценок VC-размерности на основе метода $pVCD$ [3].

Список литературы

1. *Вапник В. Н., Червоненкис А. Я.* Теория распознавания образов. М.: Наука, 1974. — 416 с.
   V. N. Vapnik *Statistical Learning Theory.* Wiley, New York, 1998.

2. *Вьюгин В. В.* Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность / В. В. Вьюгин. — М.: МФТИ, 2012. — 131 с.

   V. V. V'yugin *Kolmogorov Complexity and Algorithmic Randomness.* MPTI, Moscow, 2012.

3. *Донской В. И.* Сложность семейств алгоритмов обучения и оценивание неслучайности извлечения эмпирических закономерностей / В. И. Донской // Кибернетика и системный анализ, 2012. — № 2. — С. 86–96.

   V. I. Donskoy. Complexity of families of learning algorithms and estimation of empirical pattern extraction nonrandomness // *Cybernetics and System Analysis*, 2012, 2, pp. 86–96.

4. *Журавлев Ю. И.* Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок / Ю. И. Журавлев, В. В. Никифоров // Кибернетика, 1971. — № 3. — С. 1–11.

   Yu. I. Zhuravlev. Recognition algorithms based on estimates calculation // *Cybernetics*, 1971, 3, pp. 1–11.

5. *Звонкин А. К., Левин Л. А.* Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов / А. К.|;Звонкин, Л. А. Левин // Успехи математических наук, 1970. — Т. 25:6(156). — С. 85–127.

   A. K. Zvonkin, L. A. Levin. The complexity of finite objects and the development of the concepts of information and randomness by means of the theory of algorithms // *Uspekhi Mat. Nauk*, 1970, 25:6(156), pp. 85–127.

6. *Колмогоров А. Н.* Теория информации и теория алгоритмов // А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1987. — 304 с.

   A. N. Kolmogorov. Selected Works. Volume III: *Information Theory and the Theory of Algorithms*. Math. and its Applications, Volume 27, 1993.

7. *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Шень А.* Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность / В. А. Успенский, Н. К. Верещагин, А. Шень. — М.:МЦНМО, 2010. — 556 с.

   V. A. Uspensky, N. K. Vereshchagin, A. Shen. *Kolmogorov complexity and algorithmic randomness*. MCCME, Moskow, 2010.

8. *Floyd S., Warmuth M.* Sample Compression, learnability, and the Vapnik-Chervonenkis dimension / Sally Floyd, Manfred Warmuth // J. Machine Learning. – 1995. — Vol. 21. — Iss. 3. — P. 269–304.

9. *Li M., Vitanyi P.* An introduction to Kolmogorov complexity and its applications / Ming Li, Paul M. B. Vitanyi. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 637 p.

Статья поступила в редакцию 02.06.2014

УДК 517.589, 517.926.4

ІНТЕГРАЛИ ВІД ФУНКЦІЙ, ПОРОДЖЕНИХ ЗРОСТАЮЧИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ СТЕПЕНЯМИ

© Т. П. Гой

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
Факультет математики та інформатики
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ, 76018, Україна
e-mail: *tarasgoy@yahoo.com*

Integrals from functions generated by increasing factorial powers.

Goy T. P.

Abstract. Mathematical models of various natural and industrial processes often lead to problems, exact solutions of which it is impossible to obtain by means of well-known classical methods. This is the reason for further development of function theory and numerical analysis. Enlargement "library" of non-elementary functions leads to the enlargement of tasks that can be solved in closed form. That's why the introducing of new non-elementary functions and studying their properties are actual tasks. Further studying of the new non-elementary functions is prospective and very useful for different branches of science.

The classical transcendental functions $\cos x$, $\sin x$ is given by the corresponding power series with factorials, which can be written as the falling factorial power $n^{\underline{n}}$ (i.e. usual funtorials). Replacing the falling factorial powers by the corresponding rising factorial powers $n^{\overline{n}}$, we get the new non-elementary real functions $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$.

In general, duality of rising and falling factorial powers is a common feature in the combinatorial analysis. In other words, if a problem leads to some combinatorial identity constructed with the help of falling factorial powers, then there is often a dual combinatorial problem, which leads to a dual combinatorial identity involving rising factorial powers.

In this paper we consider new integral functions $\widetilde{S}(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}(t)\,dt$, $\widetilde{C}(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}(t)\,dt$. We sketch graphs of these functions and find some of their basic properties. In particular, we established the relationship of these functions with the generalized hypergeometric function ${}_2F_3(a_1, a_2; b_1, b_2, b_3; z)$. We also showed that functions $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ are solutions of linear ordinary differential equations of four order with variables coefficients.

Вступ

Постановка проблеми. Математичні моделі багатьох природних і технічних процесів приводять до задач, точні розв'язки яких отримати класичними методами неможливо. Розширення "бібліотеки" неелементарних функцій приводить до значного розширення кола задач, які не можуть бути розв'язані у замкненому вигляді. Тому запровадження нових неелементарних функцій та вивчення їх властивостей є актуальною задачею, яка зумовлює подальший розвиток наближених методів і теорії функцій.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У [1], [2] досліджені нові неелементарні функції $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$, утворені заміною у степеневих рядах тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$ спадних факторіальних степенів (звичайних факторіалів) відповідними зростаючими факторіальними степенями. Виведені також формули, що пов'язують ці функції. Показано, що функції $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ є розв'язками звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами.

У [3] введені інтегральні функції, утворені заміною у класичних інтегралах Френеля (синус-інтегралі та косинус-інтегралі Френеля) $\int\limits_0^x \sin t^2 dt$, $\int\limits_0^x \cos t^2 dt$ тригонометричних функцій на функції $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$ відповідно. Встановлені формули, що пов'язують введені функції з класичними інтегралами Френеля.

Мета дослідження. У цій статті досліджені властивості інтегралів зі змінною верхньою межею від функцій $\mathrm{Sin}\,(x)$, $\mathrm{Cos}\,(x)$, встановлений їхній зв'язок з узагальненими гіпергеометричими функціями.

Також отримані лінійні звичайні диференціальні рівняння зі змінними коефіцієнтами, розв'язками яких є функції $\int\limits_0^x \mathrm{Sin}\, t^2 dt$, $\int\limits_0^x \mathrm{Cos}\, t^2 dt$.

1. Основні означення й поняття

Для довільних $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}$ *факторіальним степенем* m з кроком $k \in \mathbb{R}$ називають вираз

$$x^{m\{k\}} = \begin{cases} x(x+k)\cdot(x+2k)\cdot\ldots\cdot(x+(m-1)k), & \text{якщо } m \neq 0, \\ 0, \quad \text{якщо } m = 0. \end{cases}$$

Факторіальний степінь $x^{m\{k\}}$ називають *зростаючим*, якщо $k > 0$, і *спадним*, якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то маємо звичайний степінь, бо $x^{m\{0\}} = x^m$.

Найчастіше використовують зростаючі та спадні факторіальні степені з кроками 1, (-1) відповідно, які позначатимемо через

$$x^{\overline{m}} = x^{m\{1\}} = x(x+1)\cdot\ldots\cdot(x+m-1),$$
$$x^{\underline{m}} = x^{m\{-1\}} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-m+1).$$

Очевидно, що $n! = 1^{\overline{n}} = n^{\underline{n}}$.

Відомо (див., наприклад, [4]–[6]), що зростаючим і спадним факторіальним степеням у комбінаторному аналізі зазвичай притаманна двоїстість, тобто якщо задача приводить до комбінаторної тотожності, побудованої при допомозі спадних факторіальних степенів, то існує змістовна комбінаторна задача, яка приводить до двоїстої тотожності із зростаючими факторіальними степенями.

За аналогією з відомими степеневими розвиненнями

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\underline{2n+1}}}\, x^{2n+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\underline{2n}}}\, x^{2n},$$

у [1], [2] досліджені нові неелементарні функції дійсної змінної $\mathrm{Sin}(x)$ і $\mathrm{Cos}(x)$, побудовані при допомозі зростаючих факторіальних степенів:

$$\mathrm{Sin}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{\overline{2n+1}}}\, x^{2n+1}, \qquad \mathrm{Cos}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^{\overline{2n}}}\, x^{2n}.$$

Зокрема, у [1] доведено, що

$$\begin{aligned} \mathrm{Sin}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(4n-3)!}\, x^{2n-1} = \\ &= 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) + \sin\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cos}(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n-1)!}{(4n-1)!}\, x^{2n} = \\ &= 1 + 2\sqrt{x}\left(\cos\frac{x}{4}\cdot S\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right) - \sin\frac{x}{4}\cdot C\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{2}$$

де $S(p)$ і $C(p)$ — інтеграли (синус-інтеграл і косинус-інтеграл) Френеля, які визначаються формулами [7]

$$S(p) = \int_0^p \sin\frac{\pi t^2}{2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}\, p^{4n+3},$$

$$C(p) = \int_0^p \cos\frac{\pi t^2}{2}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}\, p^{4n+1}.$$

Графіки функцій $y = \mathrm{Sin}\,(x)$ і $y = \mathrm{Cos}\,(x)$ зображені на рисунках 1, 2 відповідно.

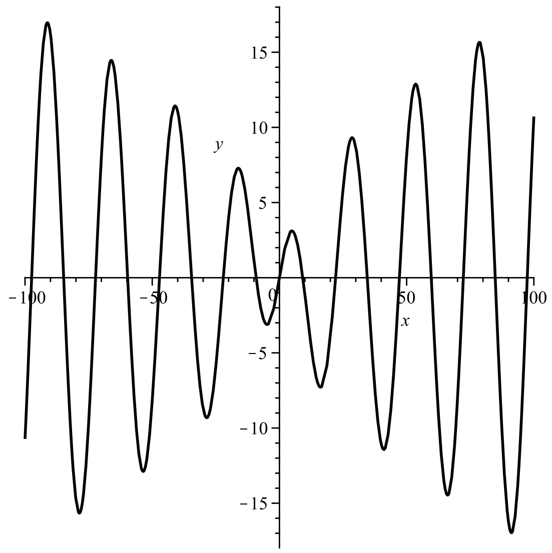

Рис. 1. Графік функції $y = \mathrm{Sin}(x)$

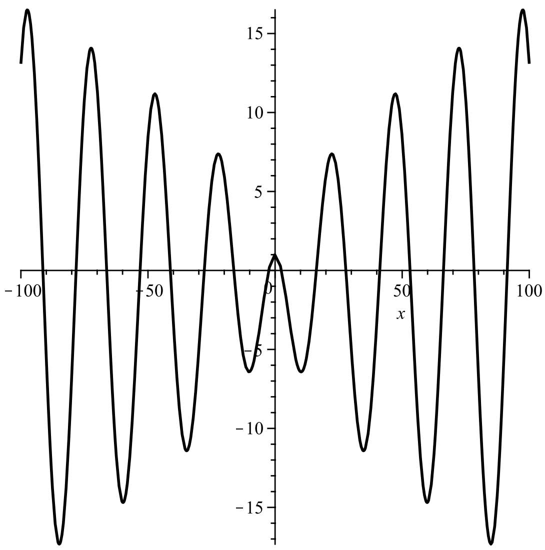

Рис. 2. Графік функції $y = \mathrm{Cos}(x)$

2. Зв'язок функцій $\mathbf{Sin}\,(x)$, $\mathbf{Cos}(x)$ з узагальненими гіпергеометричними функціями

Позначимо через ${}_sF_q\,(a_1, a_2, \ldots, a_s;\, b_1, b_2, \ldots, b_q;\, z)$ узагальнену гіпергеометричну функцію, тобто функцію, яка визначається за допомогою узагальненого гіпергеометричного ряду [8]

$$ {}_sF_q\,(a_1, a_2, \ldots, a_s;\; b_1, b_2, \ldots, b_q;\; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_1^{\overline{n}}\, a_2^{\overline{n}} \ldots a_s^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}}\, b_2^{\overline{n}} \ldots b_q^{\overline{n}}} \cdot \frac{z^n}{n!}, $$

де $a_1^{\overline{n}}$, $a_2^{\overline{n}}, \ldots,$ $a_s^{\overline{n}}$, $b_1^{\overline{n}}$, $b_2^{\overline{n}}, \ldots,$ $b_q^{\overline{n}}$ — зростаючі факторіальні степені.

Теорема 1. *Для всіх* $x \in (-\infty; +\infty)$ *справджуються тотожності*

$$ \mathrm{Sin}(x) = x \cdot {}_1F_2\left(1;\; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; -\frac{x^2}{64}\right), \tag{3} $$

$$ \mathrm{Cos}(x) = 1 - \frac{x^2}{6} \cdot {}_1F_2\left(1;\; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{x^2}{64}\right). \tag{4} $$

Доведення. З (1), враховуючи, що $n! = 1^{\overline{n}}$, а $(4n+1)! = 2^{2n}(2n)!(4n+1)!!$, для функції $\mathrm{Sin}(x)$ одержуємо:

$$ \mathrm{Sin}(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(4n+1)!}\, x^{2n} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (4n+1)!!}\, x^{2n} = $$

$$ = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \big(3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1)\big) \cdot \big(5 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot (4n+1)\big)}\, x^{2n} = $$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{64^n\cdot\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)}\,x^{2n} =$$

$$= x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}n!}\cdot\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = x\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{3}{4},\frac{5}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Для функції $\mathrm{Cos}(x)$ з (2), враховуючи, що $(4n+3)! = 2^{2n+1}(2n+1)!(4n+3)!!$, маємо:

$$\mathrm{Cos}\,(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(4n+3)!}\,x^{2n+2} = 1-\frac{x^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(4n+3)!!}\,x^{2n} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n\cdot\big(5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\big)\cdot\big(7\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+3)\big)}\,x^{2n} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{64^n\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{13}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)}\,x^{2n} =$$

$$= 1-\frac{x^2}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}}\left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}}n!}\cdot\left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = 1-\frac{x^2}{6}\cdot {}_1F_2\left(1;\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{x^2}{64}\right).$$

Теорему доведено. □

3. Інтеграли від функцій $\mathrm{Sin}(x)$, $\mathrm{Cos}(x)$

Позначимо через $\widetilde{S}(x)$ і $\widetilde{C}(x)$ інтеграли зі змінною верхньою межею від функцій $\mathrm{Sin}(x)$ і $\mathrm{Cos}(x)$, тобто

$$\widetilde{S}(x) = \int_0^x \mathrm{Sin}\,t\,dt, \qquad \widetilde{C}(x) = \int_0^x \mathrm{Cos}\,t\,dt. \tag{5}$$

Враховуючи формули (1), (2), з (5) одержуємо такі зображення функцій $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ у вигляді степеневих рядів, абсолютно збіжних на всій числовій осі:

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2n(4n-3)!}\,x^{2n}, \tag{6}$$

$$\widetilde{C}(x) = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!}{(2n+1)(4n-1)!}\,x^{2n+1}. \tag{7}$$

З (6), (7), зокрема, випливає, що функція $\widetilde{S}(x)$ є парною, а функція $\widetilde{C}(x)$ — непарною.

Графіки функцій $y = \widetilde{S}(x)$ і $y = \widetilde{C}(x)$ наведені на рисунках 3, 4 (на рис. 4 пунктиром проведено пряму $y = -x$).

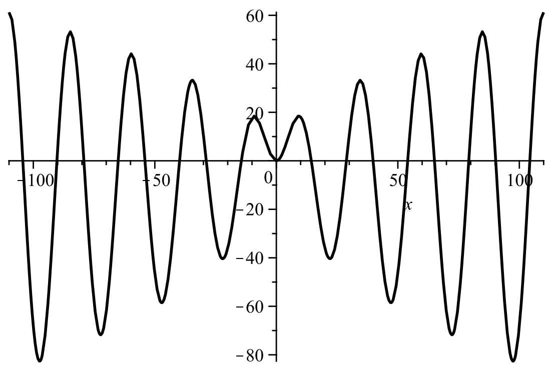

Рис. 3. Графік функції $y = \widetilde{S}(x)$

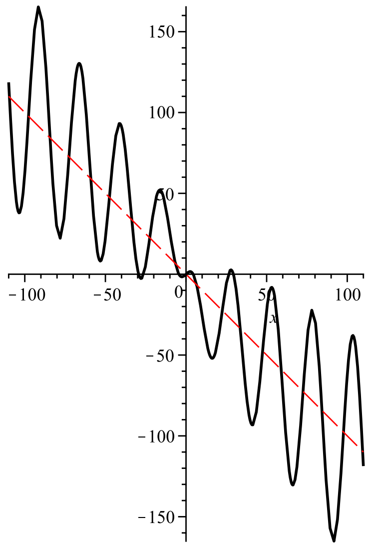

Рис. 4. Графік функції $y = \widetilde{C}(x)$

Теорема 2. *Для всіх* $x \in (-\infty; +\infty)$

$$\widetilde{S}(x) = \frac{x^2}{2} \cdot {}_2F_3\left(1, 1;\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right), \tag{8}$$

$$\widetilde{C}(x) = x - \frac{x^3}{18} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2};\ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right). \tag{9}$$

Доведення. Аналогічно до доведення теореми 1, використовуючи формули (6), (7), одержуємо:

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{(2n+2)\,(4n+1)!}\, x^{2n+2} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!\,(4n+1)!!\,4^n}\, x^{2n} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n-1}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)(n+1)!} \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n =$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}}\,1^{\overline{n}}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}} 2^{\overline{n}}\, n!} \cdot \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = \frac{x^2}{2} \cdot {}_2F_3\left(1, 1;\ \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right);$$

$$\widetilde{C}(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(2n+3)(4n+3)!}\, x^{2n+3} = x - \frac{x^3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(4n+3)!!\,4^n}\, x^{2n} =$$

$$= x - \frac{x^3}{18} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{9}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+1}{4}\right)\cdot\left(\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{4n+3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n+3}{2}\right)} \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n =$$

$$= x - \frac{x^3}{18} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^{\overline{n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\overline{n}}}{\left(\frac{5}{4}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{7}{4}\right)^{\overline{n}} \left(\frac{5}{2}\right)^{\overline{n}} n!} \cdot \left(-\frac{x^2}{64}\right)^n = x - \frac{x^3}{18} \cdot {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2};\ \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right).$$

Теорему доведено. □

Диференціальні рівняння функцій $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$

Покажемо, що функції $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ є розв'язками задач Коші для лінійних неоднорідних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами.

Теорема 3. *Функції* $\widetilde{S}(x), \widetilde{C}(x)$ *є розв'язками відповідно таких задач Коші*:

$$\left.\begin{array}{c} 16x^3y^{(4)} + (x^3+12x)y'' + (x^2-12)y' = 0, \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ y''(0)=1,\ \ y'''(0)=0, \end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\left.\begin{array}{c} 16x^3y^{(4)} - 16x^2y''' + (x^3+28x)y'' + 24y' = -24, \\ y(0)=0,\ \ y'(0)=1,\ \ y''(0)=0,\ \ y'''(0)=-1/3. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Доведення. Те, що функції $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$ задовольняють відповідні початкові умови з (10), (11), випливає з формул (6), (7).

Доведемо тепер, що ці функції є розв'язками відповідних диференціальних рівнянь. Узагальнена гіпергеометрична функція ${}_2F_3\,(a_1, a_2;\, b_1, b_2, b_3;\, z)$, через яку, згідно з (8), (9), виражаються функції $\widetilde{S}(x)$, $\widetilde{C}(x)$, є розв'язком лінійного звичайного диференціального рівняння четвертого порядку [8]

$$\big(\delta(\delta+b_1-1)(\delta+b_2-1)(\delta+b_3-1) - z(\delta+a_1)(\delta+a_2)\big)w(z) = 0,$$

де через δ позначено диференціальний оператор $\delta = z\frac{d}{dz}$.

Отже, функція

$$w(z) = {}_2F_3\left(1, 1;\, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2;\, z\right) \tag{12}$$

з (8) є розв'язком рівняння

$$\left(\delta\left(\delta-\frac{1}{4}\right)\left(\delta+\frac{1}{4}\right)(\delta+1) - z(\delta+1)(\delta+1)\right)w(z) = 0. \tag{13}$$

Оскільки

$$\delta = z\frac{d}{dz}, \qquad \delta^2 = z\frac{d}{dz} + z^2\frac{d^2}{dz^2}, \qquad \delta^3 = z\frac{d}{dz} + 3z^2\frac{d^2}{dz^2} + z^3\frac{d^3}{dz^3},$$

$$\delta^4 = z\frac{d}{dz} + 7z^2\frac{d^2}{dz^2} + 6z^3\frac{d^3}{dz^3} + z^4\frac{d^4}{dz^4},$$

то з (13), виконавши нескладні перетворення, одержуємо, що функція $w(z)$ з (12) є розв'язком диференціального рівняння

$$z^3w^{(4)} + 7z^2w''' + \left(\frac{159}{16}\,z - z^2\right)w'' + \left(\frac{15}{8} - 3z\right)w' - w = 0. \tag{14}$$

Виконаємо тепер у (14) заміну незалежної змінної за формулою $z = -\,x^2/64$. Тоді

$$w'_z = -\,32x^{-1}w'_x, \qquad w''_z = 32^2x^{-3}(xw''_x - w'_x),$$

$$w'''_z = -\,32^3x^{-5}\big(x^2w'''_x - 3xw''_x - 3w'_x\big),$$

$$w^{(4)}_z = 32^4x^{-7}\big(x^3w^{(4)}_x - 6x^2w'''_x + 15w''_x - 15w'\big)$$

і, підставляючи у (14), переконуємося, що функція

$$w(x) = {}_2F_3\left(1, 1;\; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 2; -\frac{x^2}{64}\right)$$

є розв'язком диференціального рівняння

$$4x^3w^{(4)} + 32x^2w''' + \left(\frac{x^3}{4} + 51x\right)w' + \left(\frac{5x^2}{4} + 9\right)w' + xw = 0.$$

Нарешті, підставляючи в останнє рівняння $y = x^2w(x)/2$, одержуємо, що функція $y = \widetilde{S}(x)$ є розв'язком рівняння з (10).

Аналогічно доводиться, що функція $v(z) = {}_2F_3\big(1, \frac{3}{2};\; \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2};\; z\big)$ з (9) — розв'язок рівняння

$$z^3v^{(4)} + \frac{17}{2}z^2v''' + \left(\frac{259}{16}z - z^2\right)v'' + \left(\frac{175}{32} - \frac{7}{2}z\right)v' - \frac{3}{2}v = 0,$$

а функція

$$v(x) = {}_2F_3\left(1, \frac{3}{2};\; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{2}; -\frac{x^2}{64}\right)$$

є розв'язком лінійного однорідного рівняння

$$16x^3v^{(4)} + 176\,x^2v''' + (x^3 + 460)v'' + \,(6x^2 + 240)v' + 6xv = 0.$$

Підставляючи в останнє рівняння $y = x - x^3v(x)/3$, одержуємо, що функція $y = \widetilde{C}(x)$ є розв'язком рівняння з (11).

Теорему доведено. $\square$

Висновки

У статті запропоновані дві нові неелементарні функції дійсної змінної, які є інтегралами від неелементарних функцій, побудованих при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Досліджені деякі їх властивості, показаний зв'язок введених функцій з узагальненими гіпергеометричними функціями. Встановлено, що нові функції є розв'язками задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку з неперервними коефіцієнтами.

Список літератури

1. Гой Т. П. Нові функції, породжені зростаючими факторіалами, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Буковинський математичний журнал. — 2013. — Т. 1. — № 1–2. — С. 28–33.

   Goy T. P. New functions defined by rising factorials, and its properties / T. P. Goy, R. A. Zatorsky // Bukovyna Math. J., 2013, Vol.1, No. 1–2, pp. 28–33.

2. Гой Т. П. Про нові функції, породжені зростаючими факторіальними степенями, та їх властивості / Т. П. Гой, Р. А. Заторський // Матеріали Міжнар. наук.-практ. інтернет-конф. "Математичне моделювання прикладних задач математики, фізики, механіки" (Харків, 10-25 трав. 2013 р.). — Харків : Екограф, 2013. — С. 103–106.

   Goy T. P. On new functions defined by rising factorials, and its properties / T. P. Goy, R. A. Zatorsky // Proceedings of the Internet Conference "Mathematical modeling applied problems in mathematics, physics, mechanics", May 10–25, 2013, Kharkiv, Ukraine. — Kharkiv : Ekograph, 2013. — pp. 103–106.

3. Goy T. P., Zatorsky R. A. New integral functions generated by rising factorial powers. Carpathian Mathematical Publications, 2013, Vol.5, No. 2, pp. 217-224.

4. Грэхем Р. Конкретная математика. Основания математики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. — М. : БИНОМ, Лаборатория знаний. — 2009. — 703 с.

   Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics: a Foundation for Computer Science. — Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

5. Jordan C. Calculus of Finite Differences. — New York : Chelsea Publishing, 1950.

6. Заторський Р. А. Числення трикутних матриць та його застосування / Р. А. Заторський. — Івано-Франківськ : Сімик, 2010. — 508 с.

   Zatorsky R.A. Calculus of Triangular Matrices and Its Applications. Ivano-Frankivsk: Simyk, 2010. (in Ukrainian).

7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — М. : Наука. — 1979. — 832 с.

   Abramowitz M., Stegun I.A. (eds). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. — New York : Dover Publications, 1972.

8. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М. : ФИЗМАТЛИТ. — 2003. — 688 с.

   Prudnikov A. P., Brichkov Y. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Volume 3: More Special Functions. — CRC Press, 1990.

Статья поступила в редакцию 19.02.2014

UDC 004.021: 004.312.4: 004.421.6: 004.414.2

ON CONDITIONS IMPOSED ON SECTIONS OF A KRIPKE STRUCTURE THAT SIMULATE THE FUNCTIONING OF THE COMPOUND COMPONENTS ALLOCATED IN DETAILED PETRI NET OF PARALLEL DISTRIBUTED SYSTEM FOR VERIFICATION OF ACCURACY OF TEMPORAL LOGIC FORMULAE

© E. A. Lukyanova

Taurida National V. I. Vernadsky University
Mathematics and Computer Science Department
e-mail: *lukyanovaea@mail.ru*

Abstract. Kripke structures of detailed Petri net and its component Petri net of parallel distributed system are investigated. Necessary and sufficient conditions are established for checking the validity of formulas of temporal CTL-logic on reduced Kripke structure — Kripke structure of component Petri net.

1. Introduction

Method for model checking [1, 2, 3] is one of the most convenient methods for verifying complex real systems. This method involves building of the model of the studied system and checking the system under consideration for possession of the necessary property. For this purpose, for the system researched, one type of apparatus is built — its Kripke structure. The property required, for which the system undergoes checking, is written in terms of temporal logic [1, 2, 4], then the accuracy of this formula is determined on the Kripke structure built. For systems with concurrency, such structures may have a huge number of states, and thus verification of such systems is very difficult if possible. The problem of building an adequate Kripke structures (models corresponding to a given analyzed system), the dimensions of which are suitable for verification, can be solved, for example, by reduction of the originally built models [3].

In [5, 6] as necessary Kripke structure, a reduced Kripke structure K_{CN} of investigated parallel distributed systems was considered, obtained as Kripke structure of component Petri net (CN-Net) of investigated parallel distributed system [7, 8]. It is shown that Kripke structures K_N and K_{CN} accordingly of detailed Petri net and its component Petri net system under investigation are homomorphic [6] and bisimular [5]. Homomorphism stated of obtained Kripke structures of investigated system allowed to obtain algorithm of accuracy verification formulas of temporal CTL-logic, specifying system property, on the reduced Kripke model — Kripke structure component of Petri net of the system being analyzed.

The purpose of this work is to establish uniform conditions which should have all parts of Kripke structure K_N that simulate the functioning of the compound components of the component CN Petri net of the investigated parallel distributed system, at the proof of the accuracy of CTL-logic formulas, used algorithm [6] to check CTL-formulas on the model K_N by checking accuracy of this formula on the reduced model.

The presence of such common conditions will significantly improve the previously proposed algorithm.

2. Statement of the problem

Studies, carried out in [5, 6], allow as a reduced Kripke structure to use Kripke structure K_{CN} of component CN Petri net of the system under consideration. CN component Petri net is an adequate model of the researched system and has significantly smaller dimensions than the original detailed Petri net N of the studied system. The CN net is based on the N net by separating compound components: component-places C_p and component-transitions C_t. Consequently, Kripke structure K_{CN} of component Petri net has much smaller size than the original Kripke structure of detailed Petri net N.

Set of states of Kripke structure K_N is partitioned into disjoint equivalence classes by the relation of component χ_1 [9], each class includes states for which the following conditions are true:

1) each state of Kripke structure K_N is in relation χ_1 with itself;

2) two states of Kripke structures K_N are in relation χ_1 if they are states of one section of Kripke structure K_N, which reflects the dynamics of the functioning of the respective compound components allocated in the net. If the state of a Kripke structure K_N is not a state of any section of the Kripke structure of net N, reflecting the dynamics of functioning of compound component allocated in N, then this state represents by itself an equivalence class — the unit class.

In [5], the following rules for the interconnected verification for models

$$K_N = (G, G_0, R, f) \quad \text{and} \quad K_{CN} = (G', G'_0, R', f')$$

are established:

1) for a single equivalence class and atomic statement $p \in P \quad f(g) = f'(h(g))$ is fulfilled, where g is any state of G, $h(g) = g'$, $g' \in G'$, h — homomorphism of these models K_N and K_{CN}, as a result of which each section of the structure K_N, reflecting the dynamics of functioning of compound components, is encapsulated in one state (state-encapsulant) in the model K_{CN};

2) for non-single equivalence class and atomic statement $p \in P$ are true in each state of section of Kripke structure K_N, reflecting the dynamics of the operation of

corresponding compound component, allocated in the net N, we have the accuracy of this atomic statement in the corresponding state-encapsulant of structure K_{CN};

3) if an atomic statement $p \in P$ is true in a state-encapsulant of structure K_{CN}, then it sufficient to carry out check on the validity of the atomic statements in the structure K_N in states of only one of the identical section of structure K_N, reflecting the dynamics of the operation of the same compound component;

4) if the formula φ of CTL-logic is not performed on the reduced structure K_{CN}, this formula is not met either on detailed models of the original detailed Petri net.

In [6], the possibility was studied of a further verification of formula φ on the structure K_N, provided that the formula K_N holds for the reduced structure K_{CN}. Homomorphism of paths in the structures K_N and K_{CN} and the following possible cases for the path states π' in the structure K_{CN} are determined: 1) when the sequence of states that make up the path π' contains only images of the states of structure K_N, which are not states of any areas of weak connectivity of Kripke structure K_N simulating the operation of the respective compound component, allocated in Petri net of the system under consideration; 2) when the path π' contains a state-encapsulents. In the first case, the homomorphism path π' of the structure K_N is bijective and for the states of these paths, performability (non-performability) of formula φ on the path π' implies performability (non-performability) of this formula on the path π . In the second case, the following options are possible: a) formula φ is not fulfilled on the path π' of structure K_{CN}. Then, obviously, the formula φ is not fulfilled on the path π of the structure K_N; b) formula φ is fulfilled on the path π' of structure K_{CN}. In this case, special consideration is required for state-encapsulents g_i' and their archetypes — states g_{i_k} of the structure K_N which are the states of one section of weak connectivity of Kripke structure K_N that simulates the operation of the respective compound component, allocated in detailed Petri net of the system under consideration.

However, given the presence of the same and similar parallel processes in the studied system, not all state-encapsulents and, respectively, not all sections of weak connectivity of Kripke structure K_N can be considered that simulate the functioning of the compound components. It suffices to investigate only one of their representatives with fewer identical and similar parallel processes. Such investigation contains the verification of the performability of formula φ for all paths of the given section of structure K_N which are subpaths of the path π, homomorphic image of the corresponding path π' of structure K_{CN}.

Checking algorithm for CTL-logic is proposed for formulas using the logical operations of negation, conjunction, disjunction ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) and CTL-operators $\Diamond\bigcirc$, $\Diamond\bullet$, $\Diamond◐$, as these logic operations and operators can be reasonably regarded as basic [2, 6]: any CTL-formula can be written using only given logical operations and CTL-operators.

Proposed in [6] the process of checking for CTL-logic formulas on a section of weak connectivity of Kripke structure K_N that simulates the operation of the respective compound component, allocated in detailed of Petri net of studied system, allows us to check not all formulas, but only the formulas recorded by base connections and operators. We want to get a universal opportunity to test the veracity of the formula φ or the possibility to affirm that in certain conditions in the sections of weak connectivity of structure K_N, that simulate the functioning of the relevant compound components allocated in the detailed Petri net N of the system under consideration, to establish the accuracy of the formula φ on the structure K_{CN} implies the accuracy of the formula on structure K_N.

3. Necessary and sufficient conditions for checking the accuracy of CTL-formula in a section of weak connectivity of Kripke structure simulating the operation of the respective compound component, allocated in detailed Petri net of the system under consideration

During verification of the performability of formula φ in the relevant section of weak connectivity of Kripke structure K_N, that simulates the operation of the compound component and meets its state-encapsulant g_i' of the structure K_{CN} in [6], the necessary sequence of actions was established for the inspection of all possible subformulae for formulas written using basic connectors and operators. Verification of $mutex$ and $fairness$ properties was considered separately — it is important for models with concurrency. At the same time, atomic statement φ and formulas $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg(\varphi \vee \psi)$, $\varphi \wedge \psi$, $\neg(\varphi \wedge \psi)$, $\Diamond \bigcirc \varphi$, $\Diamond\bullet\varphi$, $\Diamond◐(\varphi, \psi)$ were subject to testing. These checks were carried out in the states of paths π_k of sections π of sections of the structure K_N that respond to particular states-encapsulants g_i' of the structure K_{CN}. Such paths π_k are subpaths of corresponding path π of the structure K_N, whose image under the homomorphism h is the appropriate path π' of the structure K_{CN}.

1. Necessary conditions that should be possessed by sections of weak connectivity of the structure K_N, simulating the operation of the compound component of the Petri net of the studied system with concurrency, to establish the accuracy of CTL-formulas on the paths of these sections.

The condition of presence, on the section of weak connectivity of the structure K_N, simulating the operation of the compound component, the path π_k being the subpath of the path π of structure K_N, which homomorphic image is path π' of structure K_{CN}.

For this, there should not be dead states on the section under investigation of the structure K_N — the states, from which there are no transitions to other states. That can mean either constructing error both of the Kripke structure and the original Petri net model, or the incompleteness or inaccuracy of the original data. The existence of these troubles can be set on the stage of allocation of compound components in the constructed Petri model of the studied system. In this case, deadlocks and traps in sections of Petri nets, corresponding to chosen compound components, can be found by solving a system of logical equations, which describe these properties, or equivalent system of homogeneous linear Diophantine inequalities over the set $\{0, 1\}$ [10, 11].

For Petri net, non-empty set of places Q is called a) deadlock, if and only if $^{\bullet}Q \subseteq Q^{\bullet}$; b) trap, if and only if $Q^{\bullet} \subseteq {}^{\bullet}Q$.

In deadlock, all input transitions for set Q are its output transitions, resulting in none of them can not work if there is no tokens in Q. In trap, all output transitions for set of places Q are its input transitions, bringing non-decreasing number of tokens in the trap.

But not every deadlock leads to the dead transitions. According to theorem [11], Petri net of free choice is alive if and only if each deadlock of the net has trap labeled with initial marking. This fact for certain Petri net can also be established by writing logic equations and the equivalent system of linear homogeneous Diophantine inequalities over the set $\{0, 1\}$ [11].

Theorem 1. If there are no deadlock states in Kripke structure K_N of the studied system with concurrency, then for any section of weak connectivity of the structure K_N that simulates the operation of the compound component, allocated in the Petri net model of the studied system, there is always a path π_k, being a subpath π of the structure K_N, which homomorphic image is path π' of the structure K_{CN}.

The proof of Theorem 1 is based on established in [6] strong consistency [12] of reflection h with the same relations. Here we consider the relationship of transitions R and R', and the relationships of components χ_1 and χ_1'. Herewith Kripke structures K_N and K_{CN} are represented as one-type algebraic systems [13] $K_N = (G, R, \chi_1)$ and $K_{CN} = (G', R', \chi_1')$. Then for states of homomorphic models $K_N = (G, R, \chi_1)$ and $K_{CN} = (G', R', \chi_1')$ we can justify as follows:

1) for the two states g_1 and g_2 of the structure K_N, only one of them, g_1 or g_2 is the state of the section with weak connectivity of the structure K_N that simulates the operation of the respective compound components, allocated in detailed Petri net N of

the system under consideration, the following is performed;

$$(R'(h(g_1), h(g_2)) = T) \Longrightarrow \exists_G\, g'_1, g'_2\ ((h(g_k) = h(g'_k), k = 1, 2) \wedge (R(g'_1, g'_2) = T) \qquad (1);$$

2) for two states g_1 and g_2 of the structure K_N, which are the states of one section of weak connectivity of the structure K_N that simulates the operation of the respective compound component, allocated in the detailed Petri net N, the following is performed:

$$(\chi'_1(h(g_1), h(g_2)) = T) \Longrightarrow \exists_G\, g'_1, g'_2\ ((h(g_k) = h(g'_k), k = 1, 2) \wedge (R(g'_1, g'_2) = T) \qquad (2).$$

2. Sufficient conditions required for sections with weak connectivity of the structure K_N, simulating the operation of the compound components of the Petri nets of the studied system with concurrency, to determine the accuracy of CTL-formulas on the paths of these sections.

By definition of the Kripke structure, for the structure $K_{CN} = (G', R', \chi'_1)$ function $f' : G' \to B(P)$ marks each state $g' \in G'$ of the structure with set of atomic statements that are true in this state. This set is denoted by $lable(g)$. So the set of true in g'_i atomic statements — $lable(g'_i)$ is mapped with states-encapsulants g'_i of the structure K_{CN}.

Let φ is an atomic statement belonging to the set $lable(g'_i)$. In this case, φ is an atomic statement of state g'_i and $K_{CN}, g'_i \models \varphi$. Then, to establish the accuracy of CTL-formula on K_N by accuracy of this formula on K_{CN} it is sufficient to verify that φ the is atomic statement of the path π_k. Where path π_k — the path of section of weak connectivity of the structure K_N, which is encapsulated in the mapping h in the state g'_i, i.e. $K_{CN}, \pi_k \models \varphi$.

Let state-encapsulant formula g'_i of the structure K_{CN} is the formula $\Diamond \bigcirc \varphi$ or formula $\Diamond \bullet \varphi$, or formula $\Diamond ◐ (\varphi, \psi)$. Rules for the implementation of these formulas for the structure K_{CN} are as follows:

1). If g'_i of the structure K_{CN} holds formula $\Diamond \bigcirc \varphi$, then there is a condition g' in K_{CN}, in which there is a transition $((g'_i, g') \in R')$ from the state g'_i and such that $g'(\varphi) = 1$.

2). If in g'_i of the structure K_{CN} the formula $\Diamond \bullet \varphi$ is fulfilled, then in the structure K_{CN} from the state g'_i there is a path π' so that for any state g' of this path $g'(\varphi) = 1$ is executed.

3). If in g'_i of the structure K_{CN} the formula $\Diamond ◐ (\varphi, \psi)$ is fulfilled, then in the structure K_{CN} there is a path π' from state g'_i, and the state g' of path π', so that $g'(\psi) = 1$ and for any state g'' preceding state g' on this path, a condition $g''(\varphi) = 1$ is fulfilled.

Considering rules 1) - 3), and considering successions (1) and (2) from the proof of Theorem 1, one can prove, that in order to establish the accuracy of such CTL-formula on K_N by the accuracy of this formula on K_{CN}, it is sufficient to find such path π_k, which is a subpath of the path π, a homomorphic image of which is appropriate path π' of the structure K_{CN}, in states that the formula φ is satisfied, i.e. φ is a formula of the path π_k. So, theorem holds:

Theorem 2. Temporal CTL logic formula is true in a Kripke structure K_N, if it is true on Kripke structure K_{CN} that is homomorphic to it and the following implementations are true: 1) if the atomic statement φ is true in a state-encapsulant g_i' of the structure K_{CN}, then it must be true in all states of the path π_k of the section of the structure K_N that encapsulates in the state g_i' at the homomorphism of structures K_N and K_{CN}; 2) if formula $\varphi \vee \psi$ or $\Diamond \bigcirc \varphi$, or $\Diamond \bullet \varphi$, or $\Diamond \mathbin{◐} (\varphi, \psi)$ is formula of state-encapsulant g_i' of the structure K_{CN}, then formula φ (or ψ only in case of formula $\varphi \vee \psi$) must be a formula of path π_k of the structure K_N; 3) if the formula $\neg\varphi$ is the formula of state-encapsulant g_i' of the structure K_{CN}, then formula $\neg\varphi$ should be the formula of path π_k of the structure K_N.

4. Conclusion

The article continues initiated in [5, 6] study on the possibilities of attracting apparatus of component Petri nets for the verification of parallel distributed systems using the automatic validation of the method $ModelChecking$, which involves the use of a semantic Kripke structure and apparatus of temporal logic CTL. Necessary and sufficient conditions are formulated which sectors of weak connectivity of Kripke structure of detailed Petri net of studied system must have to participate in the verification of CTL-formulas on Kripke structure, which encapsulates at homomorphism in the states of Kripke structure of component Petri net, that has significantly smaller sizes than original model.

References

1. *Clarke, E. and Grumberg, O. and Peled, D.* 1999. Model Checking. The MIT Press, 314 p.
2. *Mironov, A.* Program Verification by Model Checking. http://www.intsys.msu.ru/staff/mironov/modelchk.pdf
3. *Velder, S. and Shalyto, A.* 2007. On Verification of Simple Automation Programs Based on Model Checking Method. Informationno-Upavlyayuschie Systemy, 3, pp. 5–12.
4. *Mironov, A.* Mathematical Theory of Software Systems. http://www.intsys.msu.ru/staff/mironov/mthprogsys.pdf.
5. *Lukyanova, E.* 2014. Application of Component Petri Nets in the Tasks of Verification of Parallel Distributed Systems. Problemy programuvannya, 2–3, pp. 93–98.
6. *Lukyanova, E.* 2014. On Verifying Formulas of CTL-Logic on Kripke Models of Petri Net of Parallel Distributed System. Bionica Intellecta, 1 (82), pp. 29–35.
7. *Lukyanova, E.* 2011. On Component Analysis of Parallel Distributed Systems. TVIM, 2, pp. 71-81.

8. *Lukyanova, E.* 2012. The Structural Elements of a Petri Net Component. Problemy programuvannya, 2–3, pp. 25–32.
9. *Lukyanova, E.* 2013. On Bisimulational Equivalence of Detailed Petri Net and Its CN-model of the Investigated Parallel Distributed System. Visnyk of Kyiv Univ. im. Tarasa Shevchenka. Series: physico-matematical sciences, Special Issue.
10. *Murata, T.* 1989. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. In Proceedings of the IEEE, V. 77, 4, pp. 541–580.
11. *Kryvy, S.* 2007. Discrete Mathematics. Selected Problems. Kyiv: Kievo-Mogilyanska academia, 570 p.
12. *Gurov, S.* 2002. Elements of the Theory of Ordered Sets and Universal Algebra. Moscow: Publishing Department of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 100 p.
13. *Maltsev, A.* 1970. Algebraic systems. Moscow: Nauka, 392 p.

Статья поступила в редакцию 01.06.2014

УДК 519.83

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ІГРОВОГО ТИПУ

© О. В. Ольховська

Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014, Україна
e-mail: *lena@olhovsky.name*

The estimate of the convergence rate of the iterative method for solving combinatorial optimization problems of the gaming type.

Olkhovskaja E. V.

Abstract. Combinatorial optimization problems of the gaming type in which combinatorial restrictions are imposed on the strategies of the players are an important class of combinatorial optimization problems. For solving this class of problems iterative methods were previously developed such as game-playing and those similar to the method of Brown - Robinson in matrix games . These methods are implemented in software. Numerical experiments conducted on it show that the iterative algorithm is convergent. It's also proved through theoretical study of convergence. The purpose of this publication is to define the a priori estimate of the convergence rate of the iterative method for solving combinatorial optimization problems of the gaming type with restrictions and permutations on the strategy of one player, as well as to spread this estimate on problems of the same class with other combinatorial restrictions. Using the developed software implementation, the theoretical estimate of the convergence rate of the method was compared to the results obtained experimentally. According to the results, the theoretical estimate of the rate of convergence was confirmed experimentally. In particular, the problems with a square matrix of order A that is equal to 10, it was found that the rate of convergence does not exceed its theoretical estimate at the 5th iteration already. This article examines the proof of convergence, the estimate of the convergence rate of the iterative method for solving combinatorial optimization problems with restrictions and permutations that are imposed on the strategies of one player. Since combinatorial restrictions on strategies of players can be represented as different combinatorial sets, we carried out a synthesis of the estimate of the convergence rate of iterative methods for solving combinatorial optimization problems of the gaming type with different types of combinatorial restrictions.

Вступ

У роботах [1-9] введено до розгляду новий клас задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу у яких на стратегії гравців накладаються комбінаторні обмеження.

Даний клас задач є актуальним та певним реальні задачі конкуренції виробників [3]. Для розв'язування даного класу задач розроблено ітераційні методи, які є розігруванням гри та подібні до методу Брауна-Робінсон в матричних іграх. Розроблені методи реалізовані у програмному комплексі. Числові експерименти проведені за його допомогою показують, що ітераційний алгоритм показав має збіжність по ціні гри. Метою даної публікації є визначення апріорної оцінки швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями–переставленнями на стратегії одного гравця, а також поширення цієї оцінки на задачі даного класу з іншими комбінаторними обмеженнями.

Постановка задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях [5]. Введемо позначення. Нехай P_i^x — елемент мультимножини $P^x = \{P_1^x, P_2^x, ..., P_m^x\}$, що складається з m дійсних чисел, серед яких v різних. Позначимо її основу $S\left(P^x\right)$, а первинну специфікацію – $[P^x] = (\eta_1, ..., \eta_v)$. Нехай $0 \leq P_i^x \leq 1$, $i \in J_m = \{1, 2, ..., m\}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i^x = 1$. Тут і далі J_m — множина m перших натуральних чисел. Позначимо $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — вектор-переставлення, елемент x_i — ймовірність застосування стратегії i — належить P^x,$x^i \in P^x$, а сам вектор належить множині $E_{m\nu}\left(P^x\right)$ m-переставлень з елементів мультимножини P^x, тобто $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_{m\nu}\left(P^x\right)$. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Гра полягає в тому, що перший гравець вибирає стратегію-вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_{mv}\left(P^x\right)$, а другий вибирає стратегію-число $j \in J_n$; і при цьому перший гравець платить другому платежі $a'_{1j}, ..., a'_{mj}$ з ймовірностями $x_1, ..., x_m$ відповідно, де a'_{ij} — задані дійсні числа $\forall i \in J_m \forall j \in J_n$.

Якщо при реалізації гри виконується рівність $\max\limits_{j \in J_n} \min\limits_{X_i \in E_{mv}(P^x)} a_{ij} = \min\limits_{X_i \in E_{mv}(P^x)} \max\limits_{j \in J_n} a_{ij} = v$, то досягаються оптимальні стратегіями першого та другого гравців відповідно та ціна гри, якщо ж ні то ставиться задача пошуку мішаних стратегій.

Для пошуку розв'язку гри введемо поняття мішаних стратегії для такої гри. Позначимо $S_k = \left\{ p = (p_1, p_2, ..., p_k),\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \right\}$; $S_n = \left\{ q = (q_1,\ ...,\ q_n),\ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1,\ \ q_j \geq 0 \ \ \right\}$.

Мішаною стратегією першого гравця є елемент $p \in S_k$. Це вектор $p = (p_1, p_2, ..., p_k)$, де $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. Тут k — кількість елементів в $E_{Mv}(P^x)$. Аналогічно мішаною стратегією гравця 2 є елемент $q \in S_n$. Тобто вектор $q = (q_1, ..., q_n)$, такий, що $q_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Числа p_i, q_j є ймовірностями застосування стратегій x^i та j першого та другого гравців відповідно. Якщо $p_e = 1$ $(q_e = 1)$, а отже $p_i = 0$ $\forall i \neq e$ ($q_j = 0$, $\forall j \neq e$), то мішана стратегія $(p_1, ..., p_k)$ означає, що з ймовірністю 1 застосовується чиста стратегія e гравця 1, а мішана стратегія $(q_1, ..., q_n)$ — означає, що з ймовірністю 1 застосовується чиста стратегія x^e — гравця 2 відповідно.

Якщо гравець 1 застосовує свою мішану стратегію $p = (p_1, ..., p_k)$, а 2-й — $q = (q_1, ..., q_n)$, то платою гравця 1 гравцю 2 є величина $F(p, q)$, яка являється математичним сподіванням випадкової величини, яка полягає в реалізації випадкової величини — платежу a_{ij} одночасному настанні випадкових подій: вибір стратегії x^i першим гравцем та вибір стратегії j — другим. Ця випадкова величина значення a_{ij}, $\forall i \in J_k$, $\forall j \in J_n$, приймає з ймовірністю $p_i q_j$ (добуток p_i та q_j):

$$F(p, q) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} p_i q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j, \tag{1}$$

де p_i — ймовірність вибору x^i, а q_j — ймовірність вибору j.

Природно, що очікуваний виграш другого гравця також обчислюється за формулою (1), оскільки гра є грою з нульовою сумою.

Нескладні міркування показують, що гравець 1 може забезпечити собі програш не більше $\min\limits_{p \in S_k} \max\limits_{q \in S_n} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$, а гравець 2 може забезпечити собі виграш не менше $\max\limits_{q \in S_n} \min\limits_{p \in S_k} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$.

Якщо(p^*, q^*) — сідлова точка функції $F(p, q)$, що визначається (2), тобто виконуються нерівності $F(p^*, q) \leq F(p^*, q^*) \leq F(p, q^*)$, то p^*, q^* називають оптимальними мішаними стратегіями гравців 1 та 2 відповідно. В цьому випадку, як відомо: $F(p^*, q^*) = \max\limits_{q \in S_n} \min\limits_{p \in S_k} F(p, q) = \min\limits_{p \in S_k} \max\limits_{q \in S_n} F(p, q)$.

При цьому будемо казати, що задача комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях має розв'язок в мішаних стратегіях, а $F(p^*, q^*)$ — ціна гри.

Векторна система ітераційного методу

Позначимо A' матрицю, з елементами a'_{ij}. Середній платіж (математичне сподівання) першого гравця другому (при виборі стратегії $x^i = (x_{1i}, ..., x_{mi}) \in E_{mv}(P^x)$, і стратегії $j \in J_n$ відповідно 1-м і 2-м гравцям, $i \in J_k$) виражається функцією

$$F(x^i, j) = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} = a_{ij}, \tag{2}$$

де $k = |E_{Mv}(P^x)| = \dfrac{m!}{\eta!, ..., \eta_v!}$.

Розглянемо $k \times n$ матрицю $A = (a_{ij})$, де a_{ij} обчислюється за (2). Нехай ймовірність вибору першим гравцем i-го рядка матриці A (тобто переставлення $x^i \in E_{mv}(P^x)$) дорівнює p_i, а ймовірність обрати другим гравцем її j-й стовпчик — q_j, де $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, $q_j \geq 0$ $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$. Математичне сподівання платежу першого гравця за (2) дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$.

Представимо $\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$, як $p_1 \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + ... + p_m \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$ $= q_1 \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i + ... + q_n \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$, замінивши $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ на $\min\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ з лівого боку в останній рівності на $\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$ з правого боку та врахувавши, що суми $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$ та $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$ одержимо: $\min\limits_{1 \leq i \leq k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \leq \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$, або

$$\min_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \max_{j} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i. \tag{3}$$

З основної теореми теорії ігор [10] випливає, що існують деякі вектори $p^* \in S_k$, $q^* \in S_n$, що в (3) досягається рівність, а значення υ ціни гри таке: $\upsilon = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} q_i^* = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i^*$, де (p^*, q^*) — оптимальні мішані стратегії.

Для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях запропоновано ітераційний метод [5]. Ідея ітераційного методу така. Розігрується гра, в якій супротивники застосовують свої стратегії. Експеримент складається з послідовності ходів. Гра починається з того, що один з гравців вибирає довільно одну зі своїх стратегій, інший на це відповідає своєю стратегією, котра йому найбільш вигідна (отже найменш вигідна супротивнику) і т. д. У кожній партії, коли настає черга гравця вибирати стратегію, інший відповідає своєму противнику тієї своєю чистою стратегією, яка є найгіршою для противника з урахуванням усіх його попередніх виборів. Сукупність ходів розглядаються, як своєрідна «мішана стратегія», де чисті стратегії змішані у пропорціях, відповідних частоті їх застосування в минулому. Такий спосіб є моделлю реального практичного «взаємного навчання» гравців, коли кожен з них на досвіді досліджує спосіб поведінки супротивника.

Нагадаємо позначення та формули ітераційного методу з [5, 8], які використовуються і далі. Позначатимемо A матрицю, яка складається з елементів a_{ij} за (2). Нехай B_j — стовпці матриці A $j \in J_n$, а $x^i = (x_{1i}, ..., x_{mi})$ та j — стратегії 1-го і 2-го гравцям відповідно $x^i \in E_{mv}(P^x)$, $i \in J_k$, $j \in J_n$. Тут як і далі, N — кількість ітерацій методу.

При реалізації алгоритму методу з [5] утворюються послідовність n-вимірних векторів чисел $SUM_L(0)$, $SUM_L(1)$, ... та послідовності k-вимірних векторів чисел $SUM_R(0)$, $SUM_R(1)$, ... На нульовій ітерації ці вектори нульові: $SUM_L(0) = \bar{0}_L$, $SUM_R(0) = \bar{0}_R$, де $\bar{0}_L$, $\bar{0}_R$ — відповідної довжини нульові вектори. На $N+1$ кроці алгоритму вектор $SUM_L(N+1)$ є сумою вектора $SUM_L(N)$ на кроці N та вектора скалярних добутків $sum_L(N+1) = ((B_1, x^{i*}(N)), (B_2, x^{i*}(N)), ..., (B_j, x^{i*}(N)), ..., (B_n, x^{i*}(N)))$ на кроці $N+1$, тобто $SUM_L(N+1) = SUM_L(N) + sum_L(N+1)$, де $(B_j, x^i(N))$ — скалярний добуток векторів B_j та x^{i*}, а $x^{i*} = \arg\min_{x^i \in E_{m\nu}(P^x)} (x; SUM_R(N))$.

На $N+1$ кроці алгоритму вектор $SUM_R(N+1)$ є сумою векторів B_j та $SUM_R(N)$ на кроці N, тобто $SUM_R(N+1) = SUM_R(N) + B_j$, де номер j стовпця B_j знаходиться з умови: $(SUM_L(N))_j = \max\limits_{1 \le t \le n} \{(SUM_L(N))_1, ..., (SUM_L(N))_t, ..., (SUM_L(N))_n\}$, а $(SUM_L(N))_t$ — це -та координата вектора $SUM_L(N)$, $t \in J_n$.

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \ge \upsilon$ виконується для $\forall j \in J_n$, в тому числі й для того на якому досягається максимум в лівій частині $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \ge \upsilon$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon$ виконується для $\forall i \in J_k$ в тому числі і для того i, для якого досягається мінімум в правій частині то ціна гри задовольняє нерівність:

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \frac{\min\limits_{x^i \in E_{M\nu}(P^x)} (SUM_R(N), x^i)}{N} \le \upsilon \le \frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N} \le \max_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i. \tag{4}$$

Введемо в розгляд означення векторної системи.

Означення векторної системи. Система $(SUM_L(N), SUM_R(N))$, яка складається з послідовності n-вимірних векторів чисел $SUM_L(0)$, $SUM_L(1)$, $\ldots$ та послідовності k-вимірних векторів чисел $SUM_R(0)$, $SUM_R(1)$, $\ldots$ називається векторною системою для матриці A, якщо виконуються такі умови:

1. $SUM_L(0) = \bar{0}_L$, $SUM_R(0) = \bar{0}_R$, де $\bar{0}_L$, $\bar{0}_R$ - відповідної довжини нульові вектори.
2. Вектор $SUM_L(N+1)$ є сумою вектора $SUM_L(N)$ на кроці N та вектора скалярних добутків $sum_L(N+1) = ((B_1, x^{i*}(N)), (B_2, x^{i*}(N)), ..., (B_j, x^{i*}(N)), ..., (B_n, x^{i*}(N)))$ на кроці $N+1$: $SUM_L(N+1) = SUM_L(N) + sum_L(N+1)$, де $(B_j, x^i(N))$-скалярний добуток векторів B_j та x^{i*}, а
$$x^{i*} = \arg \min_{xi \in E_{m\nu}(P^x)} (x; SUM_R(N)). \tag{5}$$
3. Вектор $SUM_R(N+1)$ є сумою векторів B_j та $SUM_R(N)$ на кроці N: $SUM_R(N+1) = SUM_R(N) + B_j$, де номер j стовпця B_j знаходиться з умови: $(SUM_L(N))_j = \max\limits_{1 \le t \le n} \{(SUM_L(N))_1, ..., (SUM_L(N))_t, ..., (SUM_L(N))_n\}$, а $(SUM_L(N))_t$ - це t-та координата вектора $SUM_L(N)$, $t \in J_n$.

Вектори $SUM_L(N)$ та $SUM_R(N)$ назвемо векторами накопичених сум.

Зауваження 1. Мінімум в (5) знаходиться відповідно теореми 3.1 з [11].

Зауваження 2. Максимальний елемент вектора $SUM_L(0)$ дорівнює мінімальному елементу вектора $SUM_R(0)$, тому що вони нульові вектори, тобто: $\max\limits_{1 \le j \le n} SUM_L(0) = \min\limits_{1 \le i \le k} SUM_R(0) = 0$.

Очевидно, що у випадку коли гра має розв'язок у мішаних стратегіях і $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i = \upsilon$ то і t $\lim\limits_{N \to \infty} \frac{\min\limits_{xi \in E_{M\nu}(P^x)} \left(SUM_R(N), x^i\right)}{N} = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N} = \upsilon$.

Про збіжність та оцінку швидкості ітераційного методу

Доведемо, що $\frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N}$ при будь-якій стратегії не може бути менша $\frac{\min\limits_{xi \in E_{M\nu}(P^x)} \left(SUM_R(N), x^i\right)}{N}$ при оптимальній стратегії, тобто менша υ, а також відсутня така стратегія для якої б виконувалося: $\upsilon > \frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N}$.

Доведення даного факту проводиться відповідно тереми 2.8 з [12, с.52]. Нехай величина $F(p,q)$ – математичне сподівання виграшу в прямокутній матриці розмірності $m \times n$ та ціною гри υ. Тоді, для того щоб елемент p^* множини S_k був оптимальною стратегією для p необхідно та достатньо, щоб для кожного елементу q множини S_n мала місце нерівність: $\upsilon \le F\left(p^*, q\right)$.

Аналогічно, для того, щоб елемент q^* множини S_n був оптимальною стратегією для q необхідно та достатньо, щоб для кожного елементу p множини S_k мала місце нерівність: $F\left(p, q^*\right) \le \upsilon$.

Доведення цього факту розглянуто в [12, с.53].

Вибір x^i в (4) означає вибір i -го рядка в матриці вимірності $k \times n$ $A = (a_{ij})$, де a_{ij} обчислюється за (2), що зводить векторну систему $\left(SUM_L\left(N\right), SUM_R\left(N\right)\right)$ до векторної системи (U,V) з [12]. Утворена векторна система $\left(SUM_L\left(N\right), SUM_R\left(N\right)\right)$ в методі для розв'язування ЗКОІТП аналогічно утворюється векторна система (U,V) для метода Брауна-Робінсон. Доведення збіжності ітераційного методу розв'язування ігрових задач з обмеженнями, що визначаються переставленнями на стратегії одного гравця є аналогічним доведення збіжності методу Брауна-Робінсон для матричної гри з матрицею A викладене в [12].

В роботі [13] дана оцінка швидкості збіжності методу Брауна-Робінсон для матричної гри, яка базується на доведенні того, наскільки швидко $\frac{\max U(N) - \min V(N)}{N}$ наближається до нуля при збільшенні кількості ітерацій.

Для оцінки швидкості збіжності ітераційного методу з [13] для розв'язування ігрових комбінаторних оптимізаційних задач розглядається слідкуючий факт.

Теорема. *Якщо* $\max\limits_{1 \le j \le n} SUM_L\left(0\right) = \min\limits_{1 \le i \le k} SUM_R\left(0\right) = 0$, *то*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\min\limits_{x^i \in E_{M\nu}(P^x)} \left(SUM_R(N), x^i\right) - \max\limits_{j} \left(SUM_L(N)\right)_j}{N} \le a_{ij} 2^{k+n} N^{-\frac{1}{k+n-2}}.$$

Доведення даного факту здійснюється індуктивно та є аналогічним доведенню з [13]. Тобто оцінка швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач з обмеженнями–переставленнями на стратегії одного гравця рівна $O\left(N^{-\frac{1}{k+n-2}}\right)$. Оскільки, $k = \left|E_{Mv}\left(P^x\right)\right| = \frac{m!}{\eta_1!, \ldots, \eta_v!}$, то запишемо $O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!, \ldots, \eta_v!} + n - 2}}\right)$.

За допомогою розробленої програмної реалізації було порівняно отриману теоретичну оцінку швидкості збіжності методу з результатами, отриманими експериментально (рис. 1).

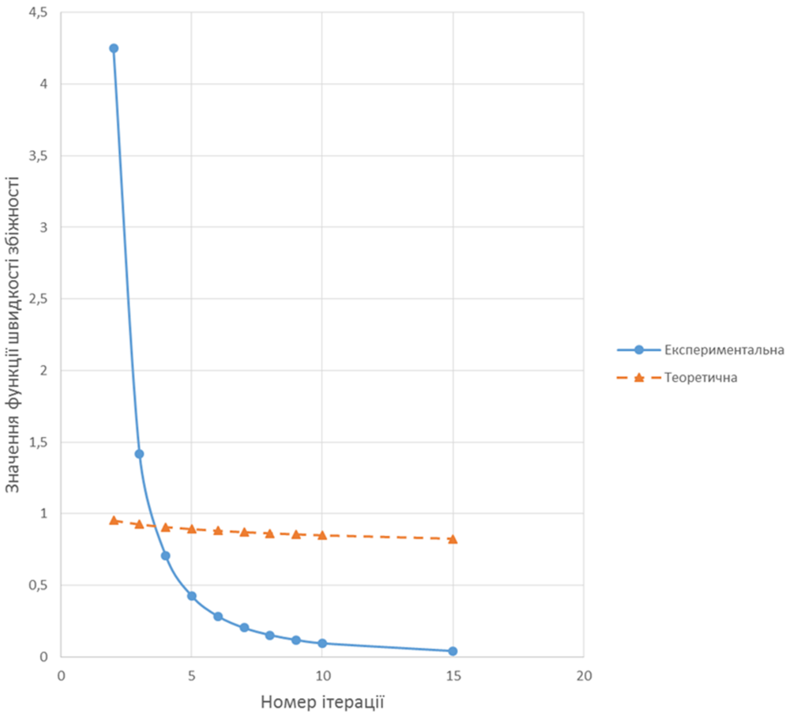

Рис. 1. Залежність швидкості збіжності від номеру ітерації

Відповідно до отриманих результатів, отримана теоретична оцінка швидкості збіжності підтвердилась експериментально. Так, зокрема, на задачах порядком квадратної матриці A, рівній 10, було виявлено, що швидкість збіжності не перевищує її теоретичну оцінку вже на 5-й ітерації (рис. 1).

Комбінаторні обмеження на стратегії гравця можуть бути представлені різними комбінаторними множинами. У [4, 8] розглянуті математичні моделі задач, у якій комбінаторні обмеження накладаються на стратегії другого гравця [4] та на обох гравців [8] і визначаються переставленнями. Введемо необхідні позначання. P_j^y — елемент мультимножини $P^y = \{P_1^y, P_2^y, ..., P_l^y\}$, що складається з l дійсних чисел, серед яких μ різних. Позначимо її основу $S\left(P^y\right)$, а первинну специфікацію – $[P^y] = (\lambda_1, ..., \lambda_\mu)$. Тоді $Y = (y_1, y_2, ..., y_l)$ — вектор-переставлення, елемент y_j — ймовірність застосування стратегії j — належить P^y,$y^j \in P^y$, а сам вектор належить множині $E_{l\mu}\left(P^y\right)$ l-переставлень з елементів мультимножини P^y, тобто $Y = (y_1, y_2, ..., y_l) \in E_{l\mu}\left(P^y\right)$. При реалізації матричної гри мішана стратегія другого гравця це вектор $q = (q_1,\ ...,\ q_h)$, де $q_j \geq 0\,,\ \sum\limits_{j=1}^{h} q_j = 1$. Тут h — кількість елементів в $E_{n\mu}\left(P^y\right)$, $h = \left|E_{n\mu}\left(P^y\right)\right| = \frac{l!}{\lambda_1!,...,\lambda_\mu!}$.

Розглянуті також задачі комбінаторної оптимізації у яких на стратегії гравців накладаються обмеження, що визначені розміщеннями [7]. За такої математичної постановки задачі позначимо $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — вектор-розміщень, елемент x_i — ймовірність застосування стратегії i першого гравця — належить P^x,$x^i \in P^x$, а сам вектор належить множині $E^m_{Mv}(P^x)$ множина m- розміщень з M елементів вектора P^x, тобто $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E^m_{M\nu}(P^x)$. Тоді при реалізації матричної гри мішана стратегія першого гравця це вектор $p = (p_1, ..., p_k)$, де $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_i = 1$. Тут d - кількість елементів у $E^m_{M\nu}(P^x)$, яка дорівнює відповідно [14] $d = |E^m_{M\nu}(P^x)| = \sum\limits_{\substack{V_1+V_2+...+V_v=m \\ 0 \leq V_i \leq \eta_i}} \frac{m!}{V_1!,...,V_v!}$, де $(V_1, ..., V_v)$ — кількість використаних елементів з множини розміщення.

Якщо комбінаторні обмеження накладаються на стратегії другого гравця то позначимо $Y = (y_1, y_2, ..., y_l)$ – вектор-переставлення, елемент y_j - ймовірність застосування стратегії j - належить P^y,$y^j \in P^y$, а сам вектор належить множині $E^l_{L\mu}(P^y)$ — множина l-розміщень з L елементів множини P^y, тобто $Y = (y_1, y_2, ..., y_l) \in E^l_{L\mu}(P^y)$. При реалізації матричної гри мішана стратегія другого гравця це вектор $q = (q_1, ..., q_r)$, де $q_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} q_j = 1$. Тут r — кількість елементів в $E^l_{L\mu}(P^y)$, яка за [14] дорівнює $r = \left|E^l_{L\mu}(P^y)\right| = \sum\limits_{\substack{V_1+V_2+...+V_\mu=l \\ 0 \leq V_j \leq \mu_j}} \frac{l!}{V_1!,...,V_\mu!}$, де $(V_1, ..., V_\mu)$ — кількість використаних елементів з множини розміщення.

Доведення швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування цих класів задач є аналогічним розглянутим для переставлень. У таблиці 1 представлена оцінки швидкості збіжності для задач із різними типами комбінаторних обмежень.

Таблиця 1. Зведена таблиця оцінки швидкості збіжності ітераційних методів розв'язування ЗКОІТ з різними типами комбінаторних обмежень

Обмеження на стратегії першого гравця	Комбінаторне обмеження на стратегії другого гравця		
	Переставлення	Розміщення	Відсутнє
Переставлення	за формулою (6)	за формулою (7)	за формулою (8)
Розміщення	за формулою (9)	за формулою (10)	за формулою (11)
Відсутнє	за формулою (12)	за формулою (13)	за формулою (14) [13]

Формули, відповідно до яких визначається оцінка швидкості збіжності ітераційних методів:

$$O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!,\ldots,\eta_v!}+\frac{n!}{\lambda_1!,\ldots,\lambda_\mu!}-2}}\right) \tag{6}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!,\ldots,\eta_v!}+\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\ldots+V_\mu=l\\ 0\leq V_j\leq\mu_j}}\frac{l!}{V_1!,\ldots,V_\mu!}-2}}\right) \tag{7}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!,\ldots,\eta_v!}+n-2}}\right) \tag{8}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\ldots+V_v=m\\ 0\leq V_i\leq\eta_i}}\frac{m!}{V_1!,\ldots,V_v!}+\frac{l!}{\lambda_1!,\ldots,\lambda_\mu!}-2}}\right) \tag{9}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\ldots+V_v=m\\ 0\leq V_i\leq\eta_i}}\frac{m!}{V_1!,\ldots,V_v!}+\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\ldots+V_\mu=l\\ 0\leq V_j\leq\mu_j}}\frac{l!}{V_1!,\ldots,V_\mu!}-2}}\right) \tag{10}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\ldots+V_v=m\\ 0\leq V_i\leq\eta_i}}\frac{m!}{V_1!,\ldots,V_v!}+n-2}}\right) \tag{11}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{m+\frac{l!}{\lambda_1!,\ldots,\lambda_\mu!}-2}}\right) \tag{12}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{k+\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\ldots+V_\mu=l\\ 0\leq V_j\leq\mu_j}}\frac{l!}{V_1!,\ldots,V_\mu!}-2}}\right) \tag{13}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{k+n-2}}\right) \tag{14}$$

Висновки

У роботі розглянуто доведення збіжності, оцінки швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач з обмеженнями-переставленнями, що накладаються на стратегії одного гравця. Узагальнена оцінка швидкості збіжності ітераційних методів розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з різними типами комбінаторних обмежень.

Список літератури

1. *Емец О. А.* Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа. / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Кибернетика и сист. анализ. — 2007. — №6. — С. 103–114.

   Yemets O. O. Study of mathematical models and methods of solving problems on permutations of the gaming type. Yemets O. O., Ustian N. Y. Kibernetika i sist. analiz (Ukraine), 2007, 6, pp. 103–114.

2. *Ємець О. О.* Розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян. — Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2007. — №3. — С. 47–52.

   Yemets O. O. Solving game problems on permutations. Yemets O. O., Ustian N. Y. Naukovi Visti NTUU "KPI"(Ukraine), 2007, 3, pp. 47–52.

3. *Емец О. А.* Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 37–47.

   Yemets O. O. Solving some combinatorial optimization problems on arrangements and permutations of the gaming type. Yemets O. O., Ustian N. Y. Problemy upravleniia i informatiki (Ukraine), 2006, 3, pp. 37–47.

4. *Емец О. А.* Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 26–36.

   Yemets O. O. Study of combinatorial optimization problems of the gaming type on arrangements. Yemets O. O., Ustian N. Y. Problemy upravleniia i informatiki (Ukraine), 2007, 1, pp. 26–36.

5. *Ємець О. О.* Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян. — Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2008. — №3. — С.5–10.

   Yemets O. O. One iterative method of solving game problems on permutations. Yemets O. O., Ustian N. Y. Naukovi Visti NTUU "KPI"(Ukraine), 2008, 3, pp. 5–10.

6. *Емец О. А.* Игры с комбинаторными ограничениями / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Кибернетика и сист. анализ. — 2008. — №4. — С.134–141.

   Yemets O. O. Games with combinatorial restrictions. Yemets O. O., Ustian N. Y. Kibernetika i sist. analiz (Ukraine), 2008, 4, pp. 134–141.

7. *Емец О. А.* Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях / О. А.Емец, Е. В. Ольховская. — Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 69–78.

   Yemets O. A. The iterative method of solving combinatorial optimization problems of the gaming type on arrangements. Yemets O. O., Olkhovska O. V. Problemy upravleniya i informatiki (Ukraine), 2011, 3, pp. 69–78.

8. *Ємець О. О.* Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців: ітераційний метод / О.О. Ємець, О.В. Ольховська. — Системні дослідження та інфораційні технології . — №4. — С. 80–93.

Yemets O. O. Solving combinatorial problems of the gaming type with permutations-restrictions of both players: the iterative method. Yemets O. O., Olkhovska O. V. Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii (Ukraine), 4, pp. 80–93.

9. *Емец О. А.* Доказательство сходимости итерационного метода решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская. — Кибернетика и сист. анализ. — 2013. — № 1. — С. 102–114.

   Yemets O. O. 2013. Proof of convergence of the iterative method for solving combinatorial optimization problems of the gaming type on arrangements. Yemets O. O., Olkhovska O. V. Kibernetika i sist. analiz (Ukraine), 1, pp. 102–114.

10. *Вентцель Е. С.* Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип. / Е.С. Вентцель — М.: Физматгиз, 1961. — 68 с.

    Venttsel Y. S. 1961. Elements of the theory of games. 2nd stereotype edition. Venttsel Y.S. Moscow, Fizmatgiz (Russia), p. 68.

11. *Стоян Ю. Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.

    Stoyan Y. G. 1993. Theory and methods of euclidean combinatorial optimization / Y. G. Stoyan, O. O. Yemets. Kyiv: Institute for System Studies of Education, 188 p.

12. *Robinson J.* An iterative method of solving a game / J. Robinson // The Annals of Mathematics, Second Series. — Vol. 54, No. 2. — 1951. — P. 296–301.

13. *Shapiro H. M.* Note on a computation method in the theory of games / H. M. Shapiro // — Comm. Pure and Appl. Math. 11, № 4. — 1958. — P. 588–593.

14. *Ємець О. О.* Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та полірозміщень / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (21–23 березня 2013 р.) — Полтава: РВВ ПУСКУ, 2013. — С. 117–125.

    Yemets O. O. About the number of elements in the overall sets of arrangements and polyarrangements. Yemets O. O. Chilikina T.V. Informatika ta systemni nauky (ISN-2013): Materials of the Ukrainian theoretical and practical conference (21–23 March 2013), Poltava (Ukraine), 2013, pp. 117–125.

Статья поступила в редакцию 27.01.2014

УДК 681.3.06

СИСТЕМИ СПЕЦИФІКАЦІЙ ОБ'ЄКТНО-ОРІЄНТОВАНИХ ПРОГРАМ НАД НОМІНАТИВНИМИ ДАНИМИ

© Л. Л. Омельчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
факультет кібернетики
кафедра теорії та технології програмування
пр-т Академіка Глушкова, 4д, м. Київ, 03680, Україна
e-mail: *l.omelchuk@gmail.com*

The specification systems of the object-oriented programs with nominative data.

Omelchuk L. L.

Abstract. Today the problem of fast and economical design of reliable software is up to date. For a quick and economical design of reliable software is possible to apply formal methods of software specifications. Formal methods allow to prove some properties of programs using mathematical methods.

Specifications program should include a description of program goals, functional program structure, input application program output. Problem improving the adequacy of representation of data structures, functions, and compositions used in programming is important.

In this article the notion of abstract computably has been defined. Complete classes of computable functions of various abstraction levels have been described. Formal semantic-syntactic models of specification and programming languages have been defined and investigated.

Imperative and declarative models of nondeterministic programs based on composition-nominative approach are constructed and investigated. Semantics of such programs is presented by partial multi-valued functions. The complete class of naturally computable functions of described type is defined and its algebraic representation is built. A special computability considered in this paper is nominative computability. Nominative computability allows to set adequately a complete class of computable functions over nominative data. At the same time nominative computability is invariant relative to a set of basic elements. Moreover, it is oriented to functions and compositions, which are close to function and compositions of programming languages.

You can increase the adequacy of the default data structures, functions, and compositions used in programming languages if you use nominative data.

Axiomatic theory of nominative data develops a theory of admissible sets. This theory has a number of advantages with respect to the adequacy of programming. It is powerful enough to produce computable function over various data structures. It is not as restrictive as different versions of constructive logic, but not too strong and does not allow, for example, the use of axioms constructing the set of all subsets (compared to the set theory ZF). This theory uses the basic data (praelementy) corresponding methods of constructing data programming.

An axiomatic theory of nominative data, which is capable to specify all computable functions, is constructed. The axiomatic system of program specification over nominative data is constructed.

Prototype axiomatic system software specifications of nominative data (OBJ-NDSL) is constructed. It is based on composition nominative method, axiomatic system software specifications of nominative data and it is based on the sequent calculi for logics. This prototype is based also on language Object-Z.

OBJ-NDSL system allows to prove some properties of programs. shown that for an axiomatic system specification software method can effectively use composition nominative approach. Composition nominative approach is sufficient to adequately meet the needs of programming.

Вступ

Постійне розширення сфери застосування обчислювальної техніки та необхідність побудови все більш складних програмних систем загострює проблему швидкого та економічного конструювання надійного програмного забезпечення. Ускладнення програмних комплексів, а також збільшення залежності людей від правильного функціонування систем, викликає зростання вимог до їх надійності. В багатьох випадках «ручні» методи розробки програмного забезпечення стають незадовільними.

Одним з кроків до вирішення проблеми швидкого та економного конструювання надійного програмного забезпечення в умовах постійно зростаючої складності конструюємих програмних систем є застосування формальних методів специфікацій програм, що дозволяє доведення певних властивостей програм, зокрема властивості правильності, за допомогою математичних методів.

Специфікація програми повинна включати в себе опис цілей програми, її функціональну структуру, вхідні та вихідні дані програми. При побудові мов специфікацій програм, важливою є задача підвищення рівня адекватності подання структур даних, функцій та композицій, що використовуються в програмуванні.

В [1, 2] показано, що з точки зору композиційно-номінативного підходу (КНП) [1, 2, 3, 4], використовуючи номінативні дані [1, 2, 3, 4] можна підвищити адекватність задання структур даних, функцій та композицій, що використовуються в мовах програмування (процедурне програмування), та будувати системи специфікацій програм на єдиній концептуальній основі. В композиційному програмуванні досліджуються системи на різних рівнях абстракції [3, 4], які виникають на шляху експлікації програмування — абстрактному, булевському та номінативному (атрибутному) рівнях.

Системи останнього рівня, композиційно-номінативні системи, є досить багатими для адекватного задання моделей структур даних, програм та засобів їх конструювання.

1. Аксіоматична теорія номінативних даних

Аксіоматична теорія номінативних даних [1, 2, 3] розвивається в дусі теорії допустимих множин (С. Кріпке, Р. Платек, Дж. Барвайз, Ю.Л. Єршов). Ця теорія має низку переваг, у відношенні адекватності до програмування: з одного боку, вона досить потужна, щоб породжувати обчислювані функції над різними структурами даних, з іншого ж боку, не настільки обмежувальна, як різні варіанти конструктивних логік, але і не надмірно потужна та не допускає, наприклад, застосування аксіоми побудови множини всіх підмножин (в порівнянні з теорією множин ZF). Крім того, ця теорія використовує базові дані (праелементи), що відповідає методам побудови даних у програмуванні. Теорія номінативних даних будується як аксіоматична теорія 1-го порядку з рівністю та тернарною зв'язкою (предикатом) номінативної належності, що записуються в інфіксній формі $x \mapsto y {\in_n} a$ (або $(x, y){\in_n} a$).

Класом Δ_0-формул називається найменший клас Y, що містить елементарні формули і замкнений відносно наступних операцій: 1) якщо $\varphi \in Y$, то і $\bar{\varphi} \in Y$, 2) якщо $\varphi, \psi \in Y$, то і $\varphi \vee \psi \in Y$ і $\varphi \wedge \psi \in Y$, 3) якщо $\varphi \in Y$, то і $\forall x \mapsto y {\in_n} a \varphi, \exists x \mapsto y {\in_n} a \varphi \in Y$ для всіх змінних x, y, a.

Клас Σ-формул є найменший клас Z, що містить Δ_0-формули і замкнений відносно умов 2) і 3) визначення класу Δ_0-формул і наступної умови екзистенціальної квантифікації: якщо $\varphi \in Z$, то $\exists u \varphi \in Z$.

Спеціальні аксіоми аксіоматичної системи специфікацій програм над НД діляться на три групи: перша група описує властивості рівності; друга — описує властивості множини імен та даних; третя група аксіом описує властивості НД:

1. екстенсіональність: $\forall x \forall y (x \mapsto y {\in_n} a \leftrightarrow x \mapsto y {\in_n} b) \to a = b$;
2. фундованість (індукція за належністю):
   $(\forall a (\forall x \mapsto y {\in_n} a \varphi(x) \wedge \varphi(y) \to \varphi(a))) \to \forall a \varphi(a)$;
3. індукція за включенням: $(\forall a (\forall b \subset a \varphi(b) \to \varphi(a))) \to \forall a \varphi(a)$;
4. Δ_0-виділення: $\exists b \forall x \forall y (x \mapsto y {\in_n} b \leftrightarrow x \mapsto y {\in_n} a \wedge \varphi_0(a))$;
5. іменування: $\exists c x \mapsto y {\in_n} c$;
6. об'єднання: $\exists c (a \subseteq c \wedge b \subseteq c)$;
7. нетривіальність: $\exists a \exists x \exists y (x \mapsto y {\in_n} a)$.

2. Номінативна обчислюваність

В [3] введено до розгляду та досліджено спеціальний вид обчислюваності — номінативну обчислюваність. Номінативно обчислюваними називаються функції над номінативними даними, отримані замиканням функцій $\{\Rightarrow 0, \Rightarrow 1, \bar{[]}_D, \searrow_D, \bigcup_D, \setminus_D, (=_W)_D, as_D, cn_D, \in W_D\}$ відносно множини композицій $\{\circ_D, \diamond_D, *_D, \Theta_D\}$. Показано [1], що довільна частково-рекурсивна функція може бути представлена номінативно обчислюваними функціями над множиною натуральних чисел при їх моделюванні у класі номінативних даних. Крім того, показано [1, 2], що кожна номінативно обчислювана [1, 2] функція представима деяким бінарним Σ-предикатом $P(x, y)$, тобто $f(x) = y$ тоді і тільки тоді, коли $P(x, y)$. Для цього будуються представлення всіх функцій, зазначених у визначенні номінативної обчислюваності, а також всіх функцій, отриманих застосуванням композицій.

3. Системи специфікацій програм для ООП над номінативними даними

На сьогоднішній день абсолютним лідером в прикладному програмуванні є об'єктно-орієнтоване програмування (ООП) [5]. Таким чином при побудові сучасних мов специфікацій програм необхідно враховувати специфіку об'єктно-орієнтованих мов програмування, а саме те, що методологія ООП базується на представленні програми у вигляді сукупності об'єктів, кожен з яких є екземпляром певного класу, а класи утворюють ієрархію наслідування [5]. Покажемо, що КНП може бути застосований для побудови систем специфікацій програм для ООП [5]. Для цього спочатку формалізуємо поняття об'єкта, використовуючи КНП. Базові типи даних мов програмування були задані в [1, 2], крім того в [1, 2] було задано функції над номінативними даними. Об'єкт можна представити номінативними даними наступного вигляду:

$< \text{об'єкт} >::= []|[< \text{ім'я} - \text{об'єкту} > \mapsto < \text{опис} - \text{об'єкту} >]$
$< \text{опис} - \text{об'єкту} >::= [class \mapsto [name \mapsto < \text{ім'я} - \text{класу} >, base \mapsto []|$
$< \text{об'єкт} >, interface - list \mapsto []| < \text{інтерфейси} >, members \mapsto []|$
$[attributes \mapsto []|< \text{атрибут} >, \ldots, < \text{атрибут} >, methods \mapsto []|$
$< \text{метод} >, \ldots, < \text{метод} >, properties \mapsto []|< \text{властивість} >, \ldots, < \text{властивість} >]]$
$< \text{інтерфейси} >::= < \text{інтерфейс} >, \ldots, < \text{інтерфейс} >$
$< \text{інтерфейс} >::= [< \text{ім'я} - \text{інтерфейсу} > \mapsto < \text{опис} - \text{інтерфейсу} >]$
$< \text{опис} - \text{інтерфейсу} >::= [interface \mapsto [name \mapsto < \text{ім'я} - \text{інтерфейсу} >,$
$interface - list \mapsto []| < \text{інтерфейси} >, members \mapsto []|[methods \mapsto []$
$|< \text{метод} >, \ldots, < \text{метод} >, properties \mapsto []|< \text{властивість} >, \ldots, < \text{властивість} >]]$
$< \text{атрибут} >::= [visibility \mapsto < \text{видимість} >, name \mapsto < \text{номінативне}_\text{д}\text{ане} >]$

$<$ метод $>::= [visibility \mapsto <$ видимість $>,$
$modif \mapsto <$ модифікатор $>, name \mapsto <$ номінативне $-$ дане $>]$
$<$ властивість $>= [visibility \mapsto <$ видимість $>,$
$get \mapsto [visibility \mapsto <$ видимість $>, prop \mapsto <$ номінативна $-$ функція $>],$
$set \mapsto [visibility \mapsto <$ видимість $>, prop \mapsto <$ номінативна $-$ функція $>]]$
$<$ видимість $>\in \{0, 1, 2, 3\}$
$//$позначають модифікатори public, protected, private, internal
$<$ модифікатор $>\in \{0, 1\}$ $//$позначають модифікатори virtual, override

Таке дане складається з композиції типів даних визначених в [1, 3, 4], таким чином, очевидно, що вище представлені об'єкти можна задати в класі номінативних даних.

Запропоноване представлення об'єктів підтримує такі основні властивості ООП, як наслідування, інкапсуляцію та може підтримувати поліморфізм.

Зважаючи на можливість представлення об'єкту за допомогою номінативних даних можна розширити запропонований в [1] прототип аксіоматичної системи специфікацій програм над номінативними даними (NDSL), що побудований на основі композиційно-номінативного методу уточнення поняття програми [1, 2, 3, 4], аксіоматичної системи специфікацій програм над номінативними даними [1, 3], секвенційного числення над номінативними даними [1, 6], та бере за основу синтаксичну нотацію мови специфікацій Z [7]. Для такого розширення (OBJ-NDSL) візьмемо за основу запропоноване представлення об'єктів, синтаксичну нотацію мови Object-Z [8] та розширимо мову NDSL поняттям класу.

OBJ-NDSL специфікація складається з формального математичного тексту та інтуїтивного неофіційного пояснення (у вигляді коментарів). Формальний текст складається з послідовності параграфів, що представляють схеми-класи, схеми, глобальні змінні, базові типи специфікацій. Кожен параграф базується на попередніх та може визначати один чи більше імен схем-класів, схем, основних типів, глобальних змінних та глобальних констант. Він може використовувати імена, визначені в інших параграфах.

Існує кілька видів параграфів. Основні визначення типу, схема стану (обов'язково присутня та єдина), схема ініціалізації (обов'язково присутня та єдина), визначення схеми, операції, предикати та інше.

Визначення базових типів представляє один, чи кілька основних типів. Імена, що використовуються не повинні мати попередньої глобальної декларації. Область їх дії простягається від визначення до кінця специфікації, їх імена стають частиною глобального словника основних типів.

Визначення схеми включає вид схеми (схема-клас, схема стану, схема ініціалізації, операція), ім'я, декларативну та аксіоматичну частини. При цьому, декларативна частина складається з набору декларацій змінних з типами, що є глобальними типами, або побудовані за допомогою конструкторів типів (декартовий добуток, множина, список, номінативна множина, клас). Аксіоматична частина складається з набору Δ_0-предикатів [1, 3].

Визначення схеми-класу включає ім'я, частину наслідування, декларативну та предикатну частини, схему ініціалізації об'єкта (конструктор), схема-деструктор, схеми-методи. Частина наслідування може містити один параграф з об'єктом відповідного базового класу, та (або) декілька реалізацій інтерфейсів. Декларативна частина може містити public, protected, private та internal параграфи, що містять відповідні набори декларацій атрибутів з типами, що є глобальними типами, або побудовані за допомогою конструкторів типів (декартовий добуток, множина, список, номінативна множина, клас). Предикатна (аксіоматична) частина складається з набору Δ_0-предикатів [1, 3]. Схема ініціалізації та схема деструктор є відповідно конструкторами та деструкторами об'єкта, схеми-методи та схеми-властивості — є звичайними схемами виду операція.

Список предикатів може з'явитися і як окремий параграф. У цьому випадку, він визначає властивості специфікації виконання яких потрібно перевірити. При цьому використовуються глобальні змінні.

Висновки

Базуючись на композиційно-номінативному методі уточнення поняття програми [1, 3], аксіоматичній системі специфікацій програм над номінативними даними [1, 2, 3], секвенційному численні композиційно-номінативних логік [1, 5] та мові Object-Z [8] побудовано прототип аксіоматичної системи специфікацій програм над номінативними даними (OBJ-NDSL). Система OBJ-NDSL дозволяє доводити певні властивості програм. Тим самим показано, що КНП може ефективно використовуватися для побудови аксіоматичної системи специфікацій програм (в тому числі і об'єктно-орієнтованих) над номінативними даними, що достатньо адекватно відповідає проблемам програмування.

Список літератури

1. *Омельчук Л. Л.* Аксіоматичні системи специфікацій програм над номінативними даними: Дисертація к.ф.-м.н.: 01.05.01. — К., 2007. — 142 с.

   Omelchuk, L. L. 2007. Axiomatic Systems of Specifications of Programs over Nominative Data. *Ph. D. Thesis: 01.05.01. (Ukrainian)*, Kyiv, 142 p.

2. *Омельчук Л. Л.* Прототип реалізації аксіоматичної системиспецифікацій програм над метаномінативними даними. Theoretical and applied aspects of program systems development (TAAPSD'2007). — Abstracts. — Berdyansk, Ukraine, 2007. P. 107–113.

   Omelchuk, L. L. 2007. A prototype of axiomatic system of specifications of programs over metanominative data. *Theoretical and applied aspects of program systems development (Ukrainian)*, Abstracts. Berdyansk, Ukraine, P. 107–113.

3. *Никитченко Н. С.* Композиционно–номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования. — 1999. — №. 1. — С. 16–31.

   Nikitchenko, N. S. 1999. Composite-nominative approach to updating the concept of the program *Problems in programming (Ukrainian)*, 1, pp. 16–31.

4. *Редько В. Н.* Основания композиционного программирования // Программирование. — 1979. — № 3. — С. 3–13.

   Redko, V. N. 1979. The grounds of the composite programming. *Programming (Russia)*, Kyiv, 3, pp. 3–13.

5. *Grady Booch.* Object-Oriented Analysis and Design with Applications (3rd Edition)*Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc. Redwood City, CA*, USA 2004 ISBN:020189551X. p. 534.

6. *Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.* Математична логіка. Додаткові розділи: Навчальний посібник. — Київ.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2004. — 77 с.

   Nikitchenko, M. S. and Shkilnyak, S. S. 2004. Logic. More sections: Tutorial*Publishing center "Kyiv University" (Ukrainian)*, Kyiv, 77 p.

7. *J. M.|;Spivey* 1998. The Z Notation: A Reference Manual.–Oriel College, Oxford, OX1 4EW, England.

8. *Graeme Smith* 2000. The Object-Z Specification Language. — Advances in Formal Methods Series, Kluwer Academic Publishers.

Статья поступила в редакцию 24.09.2013

УДК 517

СВЕРТКА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© Е. А. Павлов

Крымский инженерно-педагогический университет
факультет информатики
Севастопольская, 21, пер. Учебный, 8, г. Симферополь, 295015
e-mail: *pavlov-oe@bk.ru*

Convolution of symmetric spaces.

Pavlov E. A.

Abstract. In this article we discuss a problem of finding the most restricted Marcinkiewicz space that containing a convolution of given Marcinkiewicz spaces.

Введение

Классическое неравенство Юнга (см. [2]) на языке теорем вложения означает вложение

$$\mathscr{L}_p * \mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_r, \tag{1}$$

где $1/p + 1/q = 1 + 1/r, \quad p,\, q,\, r \geq 1.$

Из результата О'Нейла (см. [2]) следует вложение

$$\mathscr{L}_p * \mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_{r,s}, \tag{2}$$

где

$$1/p + 1/q = 1 + 1/r; \quad 1/p + 1/q \geq 1/s; \quad s \geq 1.$$

Справедливо вложение (см. [1], [2])

$$\mathscr{L}_{r,s} \subset \mathscr{L}_r.$$

Таким образом, вложение (2) является более "сильным" , чем вложение (1). Возникает задача нахождения самого "узкого" банахова пространства, в которое вложено множество $\mathscr{L}_p * \mathscr{L}_q$, которое, вообще говоря, не является линейным многообразием.

Целью данной работы является определение свертки симметричных банаховых пространств измеримых функций.

Основные определения

Определение 1. Функциональное банахово пространство на полуоси $(0,+\infty)$ с мерой Лебега называется симметричным, если:

1) из того, что $y \in E$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$ почти всюду на $(0,+\infty)$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$;
2) из того, что $y \in E$ и функция $|x(t)|$ равноизмерима с функцией $|y(t)|$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Определение 2. Пусть $\psi(t)$ — квазивогнутая функция на $(0,+\infty)$. Пространством Марцинкевича M_ψ называется множество измеримых функций f таких, что

$$\sup_{0<h<\infty} \frac{1}{\psi(h)} \int\limits_0^h f^*(s)ds < \infty, \tag{3}$$

где $f^*(s)$ — перестановка (см. [1], [2]) функции $|f(s)|$.

Определение 3. Фундаментальной функцией симметричного пространства E называется функция

$$\varphi_E(t) = \|\chi_{0,t}(s)\|_E.$$

Определение 4. Пусть $\varphi(t)$ — квазивогнутая функция на $(0,+\infty)$. Пространством Лоренца Λ_φ называется множество функций $y(t)$ таких, что

$$\int\limits_0^\infty y^*(t)d\varphi(t) < \infty,$$

где $y^*(t)$ — перестановка (см. [2]) функции $|y(t)|$.

Предложение 1. (Обобщенное неравенство Минковского). Справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_\Omega F(s,t)ds \right\|_{E^{11}} \leq \int\limits_\Omega \|F(s,t)\|_E ds,$$

где $E^{11} = (E^1)^1$, где E^1 — ассоциировано с E пространство.

Предложение 2. Из соотношения $E_1 * E_2 \subset E_3$ следует неравенство

$$t \cdot \varphi_{E_3}(t) \leq c \cdot \varphi_{E_1}(t) \cdot \varphi_{E_2}(t).$$

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *– квазивогнутые функции, определенные на* $(0,+\infty)$ *(см.* [2]*) и обладающие свойствами:*

1) $\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)/t$*– квазивогнута на* $(0,+\infty)$*,*
2) $\gamma_{\varphi_1}+\gamma_{\varphi_2}>1$.

Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение

$$M_{\varphi_1^*}*M_{\varphi_2^*}\subset M_{\varphi_3^*},$$

где $\psi^*(t)=t/\psi(t)$*, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$t\cdot\varphi_3(t)\le c\cdot\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t).$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.1 (см. [4]).
Достаточность. Известно (см. [4], [5]) классическое неравенство О'Нейла

$$(f*g)^{**}(t)\le t\cdot f^{**}(t)g^{**}(t)+\int\limits_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds. \tag{4}$$

Далее получаем

$$(f*g)^{**}(t)\cdot\varphi_3(t)\le c\cdot(f*g)^{**}(t)\frac{\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)}{t}.$$

Пользуясь неравенством О'Нейла, получаем

$$(f*g)^{**}(t)\cdot\varphi_3(t)\le$$

$$\le c\left[f^{**}(t)\varphi_1(t)\cdot g^{**}(t)\varphi_2(t)+\frac{\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)}{t}\cdot\int\limits_t^\infty f^*(s)g^*(s)ds\right]\le$$

$$\le c\left[\|f\|_{M_{\varphi_1^*}}\cdot\|g\|_{M_{\varphi_2^*}}+\int\limits_t^\infty f^{**}(t\cdot\tau)\varphi_1(t)\cdot g^{**}(t\cdot\tau)\varphi_2(t)d\tau\right]\le$$

$$\le c\left[\|f\|_{M_{\varphi_1^*}}\cdot\|g\|_{M_{\varphi_2^*}}+\int\limits_t^\infty \|f(t\cdot\tau)\|_{M_{\varphi_1^*}}\|g(t\cdot\tau)\|_{M_{\varphi_2^*}}d\tau\right]\le$$

$$\le c\left[\|f\|_{M_{\varphi_1^*}}\cdot\|g\|_{M_{\varphi_2^*}}\left(1+\int\limits_t^\infty M_{\varphi_1^*}\left(\frac{1}{\tau}\right)M_{\varphi_2^*}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\tau\right)\right]. \tag{5}$$

Покажем конечность интеграла в правой части неравенства (5).

Из свойств полумультипликативных функций (см. [1]) получаем неравенства

$$M_{\varphi_1^*}\left(\frac{1}{\tau}\right) \le \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma_{\varphi_1}-\varepsilon}, \tag{6}$$

$$M_{\varphi_2^*}\left(\frac{1}{\tau}\right) \le \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma_{\varphi_2}-\varepsilon}, \tag{7}$$

для достаточно больших $\tau > N$.

Неравенства (6) и (7) равносильны неравенствам

$$M_{\varphi_1}\left(\frac{1}{\tau}\right) \le \tau^{\varepsilon-\gamma_{\varphi_1}},$$

$$M_{\varphi_2}\left(\frac{1}{\tau}\right) \le \tau^{\varepsilon-\gamma_{\varphi_2}},$$

для достаточно больших $\tau > N$.
Следовательно, справедливо неравенство

$$M_{\varphi_1}\left(\frac{1}{\tau}\right) M_{\varphi_2}\left(\frac{1}{\tau}\right) \le \tau^{2\varepsilon-\gamma_{\varphi_1}-\gamma_{\varphi_2}}$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $\tau > N$.

Далее, с учетом условия $\gamma_{\varphi_1}+\gamma_{\varphi_2} > 1$, получаем

$$\int\limits_N^\infty \tau^{2\varepsilon-\gamma_{\varphi_1}-\gamma_{\varphi_2}} d\tau = \tau^{2\varepsilon+1-\gamma_{\varphi_1}-\gamma_{\varphi_2}} \,|_N^\infty = A < \infty. \tag{8}$$

Наконец, учитывая неравенство (8), получаем конечность интеграла в правой части неравенства (5). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $M_{\varphi_1^*}$ и $M_{\varphi_2^*}$ – пространства Марцинкевича, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – квазивогнутые функции, определенные на $(0,+\infty)$. Пространство Марцинкевича $M_{\varphi_3^*}$ является самым "узким" из всех пространств Марцинкевича, где $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)/t$, в которое вложено множество $M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}$, если $\gamma_{\varphi_1}+\gamma_{\varphi_2} > 1$.*

Доказательство. Пусть имеет место вложение

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subset M_{\psi^*}. \tag{9}$$

Тогда из теоремы 3.1 (см. [4]) следует неравенство

$$t \cdot \psi(t) \le c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t), \tag{10}$$

которое равносильно неравенству

$$\psi(t) \le c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)/t.$$

Как и в теореме 1 обозначим

$$\varphi_3(t) = c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)/t.$$

Из соотношений (9) и (10) получаем неравенство

$$\psi(t) \leq c \cdot \varphi_3(t).$$

Следовательно, (см. [1]) имеет место вложение

$$M_{\varphi_3^*(t)} \subseteq M_{\psi^*(t)}.$$

Далее, с учетом вложения

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subseteq M_{\varphi_3^*},$$

получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Определение 5. Сверткой двух симметричных пространств E_1 и E_2 называется самое «узкое» симметричное пространство, содержащее множество $E_1 * E_2$.

Замечание 1. Если рассмотреть только класс пространств Марцинкевича, то как следует из теоремы 2, сверткой пространств Марцинкевича $M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}$ в классе пространств Марцинкевича является пространство Марцинкевича $M_{\varphi_3^*}$ при дополнительных условиях:

1) $\varphi_3(t)$ – квазивогнута на $(0, +\infty)$,
2) $\gamma_{\varphi_1} + \gamma_{\varphi_2} > 1$.

Вопрос о самом «узком» симметричном (не только пространстве Марцинкевича) пространстве E, содержащем множество $M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}$ остается открытым. На основании теоремы 3.1 (см. [4]) можно лишь утверждать, что фундаментальная функция пространства E удовлетворяет неравенству

$$\varphi_E(t) \leq c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)/t.$$

Учитывая теорему 2, можно лишь утверждать, что справедливо вложение

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subseteq M_{\varphi_E^*}. \tag{11}$$

Вложение (11) еще не гарантирует справедливости вложения

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subset E,$$

так как (см. [1]) имеет место вложение

$$E \subset M_{\varphi_E^*}.$$

Заключение

Таким образом, в данной работе в классе пространств Марцинкевича найдено самое «узкое» пространство, содержащее свертку двух фиксированных пространств Марцинкевича.

Список литературы

1. Функциональный анализ / Под общей ред. С. Г. Крейна, М.: Наука. — 1972.

   Functional Analysis. 1972. Under Krain, S. G. general edition. Moscow: Nauka.

2. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М: Наука. — 1978.

   Krain, S. G., Petunin, Yu. I. and Semenov, E. M. 1978. Interpolation of Linear Operators. Moscow: Nauka.

3. Павлов Е.А. Операция свертки и операторы типа свертки в банаховых функциональных пространствах / Е. А. Павлов. — Диссертация доктора физико-математических наук, Луганск, 1992.

   Pavlov, E. A. 1992. Convolution operation and convolution type operators in Banach function spaces. Dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences. Lugansk, Ukraine.

4. Павлов Е. А. О свертках функций из симметричных пространств / Е. А. Павлов // Доклады АН Украины. — 1993. — Т. 23, № 12. — С. 15–29.

   Pavlov, E. A. 1993. The convolutions of functions from symmetric spaces. Reports of the Academy of Sciences of Ukraine, 23 (12), pp. 15–29.

5. Павлов Е. А. Об операции свертки в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Математические заметки. — 1993. — Т. 6, Вып. 2. — С. 257–258.

   Pavlov, E. A. 1993. About the convolution operation in symmetric spaces. Matematicheskiye Zametki, 6 (2), pp. 257–258.

6. Павлов Е. А. Об операторе свертки в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Успехи математических наук. — 1976. — Т. 31, № 1(187). — С. 36–40.

   Pavlov, E. A. 1993. About the convolution operator in symmetric spaces. Advances of Mathematical Sciences, 31 (1), pp. 36–40.

Статья поступила в редакцию 14.01.2014

УДК 519.658

МЕТАЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ (ОБЗОР)

© О. А. Щербина

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 295007
e-mail: *oshcherbina@gmail.com*

Metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems (Review).

Shcherbina O. A.

Abstract. We survey metaheuristic algorithms that perform directed random searches of possible solutions of combinatorial optimization problems, optimal or near optimal, until a particular termination condition is met or after a predefined number of iterations. Metaheuristics combine basic heuristic methods in higher level frameworks aimed at efficiently and effectively exploring a search space. Metaheuristics fall in two categories: local search metaheuristics and evolutionary algorithms. In this paper, we describe the major solution methods: Local Search Metaheuristics (Simulated Annealing, Tabu Search, Greedy Randomized Adaptive Search Procedure (GRASP), Variable Neighborhood Search) and Evolutionary Algorithms (Genetic Algorithms, Ant Colonies Optimization).

Введение

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими задачами

Анализ последних исследований и публикаций оптимизации показывает, что использование моделей и алгоритмов комбинаторной оптимизации (КО) позволяет решать многие практические задачи, поскольку дискретные оптимизационные модели адекватно отражают нелинейные зависимости, неделимость объектов, учитывают ограничения логического типа и всевозможные технологические, в том числе и имеющие качественный характер, требования. Согласно Papadimitriou и Steiglitz [39], задачей комбинаторной оптимизации (КО) $\mathscr{P} = (\mathscr{S}, f)$ называется задача оптимизации, в которой задано конечное множество объектов $\mathscr{S}$ и целевая функция $f : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^+$, которая назначает положительное значение стоимости для каждого из объектов

$s \in \mathscr{S}$. Цель состоит в том, чтобы найти объект с минимальным значением стоимости. Объектами, как правило, являются целые числа, подмножества множества элементов, перестановки множества элементов или графовые структуры. Примером задачи КО может служить известная задача коммивояжера [32]. Другие примеры задач КО: задачи о назначениях, задачи составления расписаний, а также задачи планирования. К сожалению, большинство интересных задач КО являются NP-трудными и точное решение их в худшем случае может требовать построения дерева поиска решений экспоненциального размера. В связи с практической значимостью задач КО, для их решения разработан ряд алгоритмов, которые могут быть классифицированы как точные или приближенные алгоритмы. Точные алгоритмы гарантированно находят оптимальное решение для любой задачи КО конечного размера за ограниченное время (см. [37], [39]). В связи с этим чрезвычайно актуальны разработка и исследование приближенных, в том числе метаэвристических, алгоритмов для решения задач КО.

Метаэвристики являются мощным и чрезвычайно популярным классом оптимизационных методов. позволяющих находить решения для широкого круга задач из различных приложений. Сила метаэвристик состоит в их способности решения сложных задач без знания пространства поиска, именно поэтому эти методы дают возможность решать трудноразрешимые задачи оптимизации. Упрощенно можно рассматривать метаэвристики как алгоритмы, реализующие прямой случайный поиск возможных решений задачи, оптимальных или близких к оптимальным, пока не будет выполнено некое условие или достигнуто заданное число итераций.

Термин *метаэвристика*, впервые введенный в [23], происходит от композиции двух греческих слов («мета» + «эвристика»). «Мета» означает «за его пределами, в верхнем уровне». «Эвристика» происходит от глагола heuriskein[1]. Поначалу, как правило, для решения сложных задач комбинаторной оптимизации разрабатывались специализированные *эвристики*. Эвристика – это любая процедура, которая находит допустимое решение $\widetilde{x} \in X$. Конечно, хотелось бы, чтобы $\widetilde{x}$ совпадало с оптимальным решением x^* (если последнее решение единственно) или $f(\widetilde{x})$ было бы равно $f(x^*)$. Для большинства эвристик, однако, можно только надеяться (и для некоторых и доказать), что $f(\widetilde{x})$ является «близким» к $f(x^*)$. Более общие схемы решения задач КО, называемые *метаэвристиками*, были разработаны Фредом Гловером в 1986 году [23], [26]. Метаэвристики пытаются объединить основные эвристические методы в рамках алгоритмических схем более высокого уровня, направленных на эффективное изучение пространства поиска. Это обычно требует много меньше работы, чем

[1]heuriskein ($\epsilon\upsilon\rho\iota\sigma\kappa\epsilon\iota\nu$) означает «найти».

разработка специализированных эвристик «с нуля». Задача теперь состоит в адаптации общих (метаэвристических) схем решения к решению трудных задач КО. Кроме того, хорошая реализация метаэвристики может обеспечить нахождение за разумное время близкого к оптимальному решения.

Прежде чем термин «метаэвристики» получил широкое распространение, метаэвристики часто называли *современными эвристиками* [40]. Класс метаэвристических алгоритмов включает в себя — но не ограничивается — алгоритмы оптимизации муравьиной колонии (ant colony optimization (ACO)), эволюционные вычисления, включая генетические алгоритмы (ГА), итеративный локальный поиск, метод имитации отжига и алгоритм табу-поиска (или поиска с запретами).

В настоящее время существует достаточно много обзоров, библиографий и классификаций метаэвристических алгоритмов (см., например, Voß (1993) [42], Glover & Laguna (1997) [25], Osman & Laporte [38]).

К сожалению обзоров на русском языке, посвященных метаэвристическим подходам к решению задач КО, в настоящее время нет, хотя имеются публикации, посвященные отдельным метаэвристикам: [5, 6, 7, 8, 9, 12]. В основном имеется литература, посвященная генетическим алгоритмам: [1, 3, 4, 10] и эволюционному моделированию [2]. Единственным исключением, насколько известно автору, является книга [11].

Разумеется, в рамках данной обзорной статьи невозможно подробно описать все аспекты и направления метаэвристических подходов к решению задач КО, поэтому более полную информацию можно найти в следующих книгах и обзорах по метаэвристикам: [14, 26, 44].

Настоящая статья призвана заполнить указанный пробел и дать нашему читателю представление об основных направлениях метаэвристических подходов к решению задач КО.

1. Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации

Метаэвристики — это общие эвристики, позволяющие находить близкие к оптимальным решения различных задач оптимизации за приемлемое время.

Различные описания метаэвристик в литературе позволяют сформулировать некоторые фундаментальные свойства, которыми характеризуются метаэвристики:

- Метаэвристики — это стратегии, которые «управляют» процессом поиска решения.
- Цель метаэвристики состоит в эффективном исследовании пространства поиска для нахождения (почти) оптимальных решений.

- Метаэвристические алгоритмы варьируют от простых процедур локального поиска до сложных процессов обучения.
- Метаэвристические алгоритмы являются приближенными и, как правило, недетерминированными.
- Метаэвристические алгоритмы могут включать механизмы избегания попадания в ловушку в ограниченном области пространства поиска.
- Метаэвристики могут быть описаны на абстрактном уровне (т.е. они не предназначены для решения конкретных задач).
- Метаэвристики могут использовать предметно-ориентированных знания в виде эвристик, которые находятся под контролем стратегии верхнего уровня.
- Современные метаэвристики используют сохраненный в памяти опыт поиска решения для управления поиском.

Каждая метаэвристика имеет свои собственное поведение и характеристики. Однако все метаэвристики имеют ряд основных компонент и выполняют операции в пределах ограниченного числа категорий.

1. *Инициализация.* Метод нахождения начального решения.

2. *Окрестности.* Каждому решению x соответствует множество окрестностей и связанные с ними переходы: $\{N_1, N_2, \ldots, N_q\}$.

3. *Критерий выбора окрестности* определяется в случае наличия более одной окрестности. Этот критерий должны указать не только выбираемую окрестность, но и условия ее выбора. Альтернативы варьируют от «на каждой итерации» (например, генетические методы) до «при данных условиях».

4. *Отбор кандидатов.* Окрестности могут быть очень большими. Тогда обычно рассматривается только подмножество переходов на каждой итерации. Соответствующий список кандидатов $C(x) \subseteq N(x)$ может быть постоянным и обновляемым от итерации к итерации (например, табу-поиск), или же он может быть построен на каждой новой итерации (например, генетические методы). Во всех случаях критерий выбора определяет, каким образом могут быть выбраны решения для включения в список кандидатов.

5. *Критерий принятия.* Переходы оцениваются с помощью функции $g(x, y)$ зависящей от таких параметров двух решений, как значение целевой функции, штрафы за нарушение некоторых ограничений и т.п. Выбирается наилучшее решение по отношению к этому критерию $\widetilde{x} = argopt\{g(x, y); y \in C(x)\}$ (с учетом необходимости предотвращения зацикливания).

6. *Критерии остановки.* Метаэвристика может быть остановлена согласно различным критериям: время вычислений, число итераций, темпы улучшения решения

1. Инициализация: x^0
2. Выбор окрестностей $\mathscr{N} \in \{N_1, \ldots, N_q\}$
3. Выбор кандидата $\mathscr{C}(x) \subseteq \mathscr{N}(x)$
4. Оценка перехода/исследование окрестности $g(x,y), y \in \mathscr{C}(x)$
5. Реализация перехода $\widetilde{x} = argopt\{g(x,y)\}$
6. Оценка решения, обновить параметры поиска
7. Проверка критериев остановки: Stop или Goto 3 (продолжить локальный поиск)
   или Goto 2 (начать новый этап поиска)

Рис. 1. Общая метаэвристика.

1. Определить исходное решение $x^0 \in \mathscr{X}$; $k = 0$;
2. $k = k + 1$;
3. Найти $\widetilde{x} = argminf(x)|x \in \mathscr{N}(x^k)$;
4. Если $f(\widetilde{x}) \geq f(x^k)$ Stop.
5. Иначе $x^{k+1} = m(\widetilde{x})$; Goto 2.

Рис. 2. Простая эвристика локального поиска.

и т.д. Может быть определен более чем один критерий для управления различными фазами поиска.

Используя эти определения, опишем метаэвристическую процедуру, показанную на Рис. 1, и используем ее для описания трех главных классов метаэвристик: генетических методов, методов имитации отжига и табу-поиска.

Метаэвристики включают две категории: метаэвристики локального поиска (МЛП[2]) и эволюционные алгоритмы (ЭА).

2. Методы локального поиска

2.1. **Общие замечания.** Алгоритм локального поиска начинает свою работу с начального решения. На каждом шаге поиска текущее решение заменяется другим, лучшим, решением, найденным в окрестности текущего решения (рис. 2).

[2]LSMs — local search metaheuristics.

МЛП обычно позволяет найти локальный оптимум. К основным методам МЛП относятся метод имитации отжига [30], табу-поиск [24], процедура жадного рандомизированного адаптивного поиска (GRASP[3]) [19], метод поиска чередующихся окрестностей VNS[4] [35].

2.2. **Метод имитации отжига.** Эта метаэвристика является рандомизированным методом локального поиска, позволяющим избежать плохих локальных оптимумов. Имитация отжига [31] исходит из аналогии с физическим процессом отжига, направленным на получение твердых тел с низкой энергией состояния. В физике конденсированного состояния отжиг является процессом, в котором твердое тело сначала расплавляют путем увеличения температуры, затем постепенно снижают температуру для восстановления твердого состояния с низкой энергией. Метод имитации отжига – это стохастический метод поиска, в котором на каждом шаге текущее решение заменяется другим, случайно выбранным из окрестности и улучшающим значение целевой функции решением. Метод имитации отжига использует управляющий параметр, именуемый температурой, для определения вероятности принятия решений, не улучшающих значение целевой функции. Температура постепенно снижается согласно графику охлаждения так, что отдельные не улучшающие значение целевой функции решения принимаются в конце поиска.

Тщательный отжиг с рядом температурных уровней, на которых температура достаточно долго сохраняется с целью достижения равновесия системы, приводит к более регулярным структурам, соответствующим твердым телам с низкой энергией. В отличие от большинства метаэвристик, для алгоритма имитации отжига доказана асимптотическая сходимость к глобальному оптимуму. Успех метода имитации отжига вызвал разработку детерминистских аналогов, эффективность которых близка к эффективности имитации отжига: Threshold Accepting [18], Record-to-record Travel [17], и алгоритм Great Deluge[5] [17].

2.3. **Табу-поиск.** Как и алгоритм имитации отжига, табу-поиск [25] является метаэвристикой, основанной на локальном поиске, где на каждой итерации выбирается лучшее решение в окрестности текущего решения в качестве нового текущего решения, даже если это приводит к увеличению стоимости решения.

[3]GRASP=Greedy Randomized Adaptive Search Procedure)

[4]Variable Neighborhood Search

[5]Алгоритм Великого Потопа

1. инициализация: выбрать
   a) начальное состояние (решение) $x = x_0$;
   b) начальную температуру $\tau = \tau_0$;
   c) функцию снижения температуры α;
2. окрестность и выбор кандидатов: нет (как правило); заменить;
3. выбрать число итераций L для приблизительного равновесия температуры τ;
4. изменение положения оценки/исследования окрестности: случайным образом выбрать $y \in \chi$;
5. изменение положения $\delta f := f(y) - f(x)$;

   если $\delta f \leq 0$ **то**
     $x := y$
   иначе
     если $g(x, y) = \exp(-\delta f/\tau) > random(0, 1)$ **то**
       $x := y$
6. оценки решения;
7. проверка выполнения критерия остановки
   a) **если** число итераций меньше L **то**
        Goto 4
   b) **если** сходимость не доказана **то**
        $\tau = \alpha(\tau)$; **Goto** 3;

Рис. 3. Общая процедура имитации отжига.

Метод табу-поиска, таким образом, может уйти от плохих локальных оптимумов. В кратковременной памяти, называемой списком табу, сохраняется недавно найденные решения (или атрибуты недавно найденных решений), чтобы избежать краткосрочного зацикливания. Поиск прекращается после определенного числа итераций или если после ряда последовательных итераций не было достигнуто каких-либо улучшений в наилучшем известном решении.

2.4. **Жадный рандомизированный адаптивный поиск GRASP.** Основная идея жадной рандомизированной адаптивной процедуры поиска (GRASP) [20], [41] состоит в использовании рандомизированной жадной эвристики в мультистарт-процедуре для генерирования различных решений. На каждом шаге жадной эвристики элементы, еще не включенные в текущее частичное решение, оцениваются с помощью эвристической функции, а лучшие элементы сохраняются в ограниченном

Вход: Пример задачи
Выход: суб-оптимальное решение

1. найти начальное решение случайным образом и инициализировать температуру T;
2. **пока** $(T > 0)$
   a) **пока** (достижимо термическое равновесие)
      (i) создать случайным образом окрестность состояния и оценить изменения в энергетическом уровне δE;
      (ii) если $\delta E < 0$ обновить текущее состояние на новое состояние;
      (iii) если $\delta E >= 0$ обновить текущее состояние на новое состояние с вероятностью $e^{\frac{-\delta E}{K_B T}}$;
   b) снижение температуры T в соответствии с расписанием отжига;
3. вывод решения, имеющего самую низкую энергию;

Рис. 4. Алгоритм имитации отжига.

1. инициализация: x_0;
2. выбор окрестности: локальный поиск, интенсификация, диверсификация, . . . ;
3. выбор кандидата $C(\mathrm{x}) \subseteq N(x)$;
4. изменение положения оценки/окрестности исследования: критерии табу, критерий аспирации.
5. изменение положения реализации;
6. обновление памяти и статуса табу;
7. проверка выполнения критерия остановки

если проверка не прошла, **то**
   Goto 3 //*продолжение локального поиска* **or** **Goto** 2 //*изменение фазы поиска*

Рис. 5. Табу-поиск.

списке кандидатов. Один из элементов затем случайно выбирается из этого списка и включается в частичное решение. Когда процесс построения решения завершен, решение дополнительно улучшается с помощью локального поиска. Лучшее решение получается в конце вычислений после определенного количества перезапусков.

Вход: пример задачи
Выход: суб-оптимальное решение

1. инициализация:
   a) Создать начальное решение x и множество $x^* = \{x\}$;
   b) Инициализировать список табу $T = \emptyset$;
   c) Положить счётчики итераций $k = 0$ и $l = 0$;
2. **пока** $(N(x) \setminus T \neq \emptyset)$
   a) $k = k + 1, l = l + 1$;
   b) Выбрать x в качестве лучшего решения из множества $N(x) \setminus T$;
   c) Если $f(\tilde{x}) < f(x^*)$ тогда обновить $x^* = x$ и множество $l = 0$;
   d) Если $k = \bar{k}$ или $l = \bar{l}$ **Goto** 3;
3. вывод лучшего найденного решения x^*;

Рис. 6. Алгоритм табу-поиска.

Вход: пример задачи
Выход: суб-оптимальное решение
множество $x^* = \infty$;
пока (условие остановки не выполнено)
(a) найти случайное «жадное» решение x;
(b) найти локальный минимум $\tilde{x}$ из окрестности $N(x)$ решения x;
(c) **если** $f(\tilde{x}) < f(x^*)$ **то**
обновить множество $x^* = \tilde{x}$;
вывод лучшего найденного решения x^*;

Рис. 7. Общий поиск GRASP.

2.5. **Метод поиска чередующихся окрестностей.** Метод чередующихся окрестностей VNS[6] [28, 35] — это метаэвристика локального поиска, которая использует окрестности для ухода от плохих локальных оптимумов. Основная идея поиска с чередующимися окрестностями VNS [35] состоит в последовательном изучении набора предопределенных окрестностей для получения лучшего решения. Алгоритм VNS использует метод спуска для получения локального минимума. Затем он исследует

[6]Variable Neighborhood Search (VNS)

Вход: пример задачи
Выход: суб-оптимальное решение

1. инициализация: множество решений $S = \emptyset$;
2. **пока** (не построено решение)
   (a) с помощью «жадной» функции создать ограниченный список кандидатов;
   (b) случайно выбрать элемент s из списка кандидатов;
   (c) поместить s во множество решений, то есть $S = S \cup \{s\}$;
   (d) изменить «жадную» функцию с учётом обновленного S;
3. вывод лучшего решения x, соответствующего набору S;

Рис. 8. Алгоритм GRASP.

Вход: пример задачи, решение x, окрестность $N(x)$
Выход: локально-оптимальное решение $\tilde{x}$

пока (x не локально-оптимальное)
    (a) найти $\tilde{x} \in N(x)$, где $f(\tilde{x}) < f(x)$;
    (b) обновить $x = \tilde{x}$;
вывод локально-оптимального решения x;

Рис. 9. Фаза локального поиска алгоритма GRASP

случайно либо систематически множество окрестностей. Текущее решение заменяется новым лучшим решение. Поиск начинается с первой окрестности. Если решение, лучшее, чем текущее, там не будет найдено, алгоритм переходит к следующей окрестности, случайным образом генерирует новое решение, и пытается улучшить его. Когда в данной окрестности найден локальный оптимум, выбирается другая окрестность, которая используется на следующих итерациях. Таким образом, для данного множества окрестностей решение порождается случайным образом в первой окрестности текущего решения, из которого выполняется локальный спуск. Если полученный локальный оптимум не лучше текущего решения, то процедура повторяется для следующей окрестности. Поиск стартует вновь из первой окрестности, когда либо найдено решение, лучшее, чем текущее решение, либо все окрестности

Вход: пример задачи P, возможное решение $s_0 \in F$, и
окрестности $N_1, N_2, \ldots, N_p$
Выход: суб-оптимальное решение $s \in F$

1. инициализация: $s = s_0$, $Improve =$ **истина**
2. **пока** ($Improve ==$ **истина**)
   a) $Improve =$ **ложь**;
   b) $k = 1$;
   c) **пока** $k \leq p$
      (i) создать s' в случайной $N_k(s)$;
      (ii) применить локальный поиск для N_1 и использовать s' в качестве локального решения. **пусть** s'' будет локальным оптимумом;
      (iii) **если** $f(s'') < f(s)$ **то**
            пусть $s = s''$;
            $Impruve =$ **истина**;
            прерывание;
         иначе
            $k = k + 1$
3. вывод s в качестве субоптимального решения;

Рис. 10. Метод спуска переменных окрестностей.

были просмотрены. В известном методе локального спуска с чередующимися окрестностями[7], рассматривается наилучший сосед текущего решения вместо случайного выбора. Локальный спуск для этого соседа не выполняется. Этот сосед может стать новым текущим решением в случае улучшения для него значения целевой функции. Поиск затем возобновляется из первой окрестности. Иначе рассматривается следующая окрестность.

3. Эволюционные алгоритмы

3.1. **Общие замечания.** Эволюционные алгоритмы (ЭА) — это стохастические методы поиска, которые успешно применяются во многих реальных и сложных приложениях (эпистатические, мультимодальные, многоцелевые и очень ограниченные задачи). Успех этих алгоритмов в решении сложных задач оптимизации способствовал исследованиям в области, известной как эволюционные вычисления (ЭВ) [13]. ЭА — итеративный метод, которое применяет стохастические операторы к группе

[7]Variable Neighborhood Descent (VND)

```
Generate(P( 0));
t := 0;
while not Termination-Criterion(P(t)) do
Evaluate( P( t ));
P'(t) := Selection(P(t));
P'(t) := ApplyReproduction-Ops(P'( t));
P(t + 1) := Replace(P(t), P'(t));
t := t + 1;
endwhile
```

Рис. 11. Псевдокод ЭА.

индивидуумов (популяции) (см. алгоритм 2). Каждая особь в популяции является кодированной версией предполагаемого решения. Первоначально эта популяция генерируются случайным образом. Функция оценки ставит в соответствие значение пригодности для каждой особи, оценивая ее пригодность для рассматриваемой задачи.

ЭА включают генетические алгоритмы [13], эволюционные стратегии [13], генетическое программирование [13], метод оптимизации муравьиной колонии [15], Estimation of Distribution Algorithms [36], Scatter Search (Рассеянный поиск) [22]). ЭА используют случайно порожденную популяцию решений. Начальная популяция улучшается путем естественного эволюционного процесса. При каждой генерации процесса вся популяция (либо ее часть) заменяется вновь сгенерированными индивидуумами (обычно лучшими, чем предшествующие).

3.2. **Генетические алгоритмы.** Генетические алгоритмы относятся к классу эволюционных методов и имитируют процессы эволюции биологических организмов. В биологии природные популяции изучаются на протяжении многих поколений, оказывается, что они развиваются в соответствии с принципами естественного отбора и выживания наиболее приспособленных для воспроизводства «хорошо адаптированных» особей. Генетические алгоритмы имитируют этот процесс при решении задач оптимизации (Holland 1975 [29]; Goldberg 1989 [27]; Whitley 1994 [43]; Fogel 1994 [21]; Michalewicz 1992 [33]; Michalewicz & Fogel 2000 [34]). Согласно этой парадигме, популяция решений (обычно закодированных в виде битовых или целочисленных строк, называемых хромосомами) эволюционирует от одного поколения к следующему путем применения операторов, подобных тем, что существуют в природе (селекция, генетическое скрещивание и мутация). В процессе селекции только лучшие решения

1. Инициализация: порождение начальной популяции.
2. Выбор окрестности: выбор операторов crossover и mutation.
3. Выбор кандидата-родителя: использование оператора селекции к текущей популяции
4. Оценка шага/исследование окрестности: не производятся
5. Реализация шага: использование операторов crossover, mutation, hill climbing, выбора потомка и родителя для получения новой популяции
6. Если критерии остановки не выполняются, Goto 3 (продолжить эволюцию) или Goto 1.3 (изменить критерии эволюции)

Рис. 12. Общий генетический алгоритм.

могут быть взяты в качестве родителей для создании потомства. Процесс спаривания, известный как скрещивание, использует два выбранных родительских решения и комбинирует их наиболее желательные свойства для получения одного или более решений-потомков.

Оператор hill climbing (локальный поиск) меняет определение характеристик новых индивидуумов для улучшения их годности и разнообразия популяции. Процесс повторяется, пока не будет получено новое поколение потомков. Наконец каждый потомок меняется случайным образом с помощью оператора мутации. Начиная с некоторой начальной популяции (полученной случайным образом или с помощью эвристической процедуры), этот цикл повторяется для множества поколений и в конце будет найдено лучшее решение.

На рис. 12 показаны основные шаги общего генетического алгоритма.

3.3. **Метод оптимизации муравьиной колонии.** Эта метаэвристика инспирирована общением и механизмами взаимодействия реальных муравьев, которые позволяют им найти короткие пути из муравейника к источникам пищи. Средой, через которую осуществляется общение муравьев, является химическое соединение, известное как *феромон*, который оставляется на земле. В то время как изолированный муравей более или менее случайно блуждает, муравей, обнаруживший путь, помеченный феромоном, с некоторой вероятностью последует по нему и укрепит его своим собственным феромоном.

Таким образом, вероятность того, что в будущем другие муравьи будут двигаться по данному пути, растет с числом муравьев, ранее использовавших этот путь. Это приводит к возникновению кратчайших путей, так как феромон стремится аккумулироваться скорее на этих путях. В методе оптимизации муравьиной колонии

инициализация переменных *pheromone*;
повторять
  для $k = 1, \ldots, m$
    построить решение;
  для всех переменных *pheromone*
    построить решение, уменьшить переменную на некоторый процент {испарение};
  для всех переменных *pheromone*, соответствующих хорошему решению
    увеличить переменную { усиление};
пока не выполнится критерий остановки

Рис. 13. Алгоритм оптимизации муравьиной колонии.

(ACO) [16], множество искусственных муравьев строят решения на каждом цикле случайным и «жадным» способом. Каждый муравей выбирает следующий элемент для включения в свое частичное решение, основываясь на эвристическом оценивании этого элемента и количества феромона – его веса, связанного с этим элементом. Феромон представляет память системы и связан с наличием того элемента в хороших решениях, ранее построенных муравьями. Алгоритм оптимизации муравьиной колонии естественным образом был применен для решения задачи коммивояжера.

Заключение

В настоящей статье сделан краткий обзор метаэвристических алгоритмов, в том рассмотрены числе алгоритмы оптимизации муравьиной колонии, эволюционные алгоритмы, включая генетические алгоритмы, итеративный локальный поиск, метод имитации отжига и алгоритм табу-поиска (или поиска с запретами). Метаэвристики являются мощным и чрезвычайно популярным классом оптимизационных методов, позволяющих находить решения для широкого круга задач комбинаторной оптимизации из различных приложений.

Список литературы

1. *Алексеева Е.В., Кочетов Ю.А.* Генетический локальный поиск для задачи о р-медиане с предпочтениями клиентов // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2007. – Т. 14, No 1. – С. 3–31.
2. *Емельянов В.В., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Теория и практика эволюционного моделирования. – М: Физматлит, 2003. – 432 с.
3. *Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М.* Генетические алгоритмы: Учебное пособие. – 2-е изд. – М: Физматлит, 2006. – 320 с.

4. *Гладков Л.А., Курейчик В.В, Курейчик В.М. и др.* Биоинспирированные методы в оптимизации: монография. – М: Физматлит, 2009. – 384 с.

5. *Гончаров Е.Н., Кочетов Ю.А.* Вероятностный поиск с запретами для дискретных задач безусловной оптимизации // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. –2002. – Т.9, No 2. – С. 13–30.

6. *Кононов А.В., Кочетов А.В., Плясунов А.В.* Конкурентные модели размещения производства // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т. 49, No 6. – С. 1037– 1054.

7. *Кононова П.А., Кочетов Ю.А.* Локальный поиск с чередующимися окрестностями для задачи Джонсона с пассивным буфером // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2012. – Т. 19, № 5. – С. 63–82.

8. *Кочетов Ю.А.* Вычислительные возможности локального поиска в комбинаторной оптимизации // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т.48, No 5. – С. 747–764.

9. *Кочетов Ю., Младенович Н., Хансен П.* Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискретный анализ и исследование операций. Серия 2. – 2003. – Т. 10, No 1. – С. 11–43.

10. *Кочетов Ю.А., Плясунов А.В.* Генетический локальный поиск для задачи о разбиении графа на доли ограниченной мощности // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 1. – С. 164–176.

11. Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. – М: МАИ-Принт, 2009. – 159 стр.

12. *Штовба С. Д.* Муравьиные алгоритмы // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2004. – № 4.

13. *Bäck T., Fogel D.B., and Michalewicz Z., eds.* Handbook of Evolutionary Computation. –Oxford University Press, 1997.

14. *Blum C. and Roli A.* Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison // ACM Computing Surveys. – 2003. – 35(3). – P. 268-308.

15. *Dorigo M.* Optimization, Learning and Natural Algorithms. PhD thesis, Dipartamento di Elettronica, Politecnico di Milano, 1992.

16. *Dorigo M. and Stützle T.* Ant Colony Optimization: Overview and Recent Advances // M. Gendreau and J.-Y. Potvin, editors, Handbook of Metaheuristics, volume 146 of International Series in Operations Research & Management Science, chapter 8, pages 227-263. – New York: Springer, 2010. Режим доступа http://code.ulb.ac.be/dbfiles/DorStu2010MetaHandBook.pdf.

17. *Dueck G.* New optimization heuristics: the great deluge algorithm and the record-to-record travel // Journal of Computational Physics. – 1993. – 104 – P. 86–92.

18. *Dueck G. and Scheuer T.* Threshold Accepting: a general purpose optimization algorithm // Journal of Computational Physics. – 1990. – 90 – P. 161–175.

19. *Feo T.A. and Resende M.G.C.* Greedy randomized adaptive search procedures // Journal of Global Optimization. – 1999. – 6. – P. 109-133.

20. *Festa P. and Resende M.G.C.* GRASP: An annotated bibliography // Essays and Surveys on Metaheuristics / C.C. Ribeiro and P. Hansen, eds., pp. 325–367. – Kluwer Academic Publishers, 2002.
21. *Fogel D.B.* Evolutionary Programming: An introduction and some current directions // Statistics and Computing. — 1994. – 4. – P. 113–130.
22. *García-López F., García-Torres M., Melián-Batista B., Moreno-Pérez J.A., Moreno-Vega J.M.* Solving feature subset selection problem by a Parallel Scatter Search // European Journal of Operational Research. – 2006. – 169(2). – P. 477-489.
23. *Glover F.* Future paths for integer programming and links to artificial intelligence // Computers & Operations Research. — 1986. — 131. — P. 533-549.
24. *Glover F.* Tabu Search, part I // ORSA, Journal of Computing. – 1989. – 1. – P. 190-206.
25. *Glover F. and Laguna M.* Tabu Search. – Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1997.
26. *Glover F. and Kochenberger G., eds.* Handbook of Metaheuristics. – Norwell: Kluwer Academic Publishers, 2002.
27. *Goldberg D.E.* Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. – Reading: Addison-Wesley, 1989.
28. *Hansen P. and Mladenović N.* Variable Neighborhood Search // Chapter 6 in Handbook of Metaheuristics, F. Glover and G.A. Kochenberger, eds., Kluwer, 145–184, 2003.
29. *Holland J.H.* Adaptation in Natural and Artificial Systems. – The University of Michigan Press, 1975.
30. *Kirkpatrick S., Gelatt C.D., and Vecchi M.P.* Optimization by simulated annealing // Science. – 1983. – 220(4598). – P. 671-680.
31. *van Laarhoven P.J.M. and Aarts E.H.L.* Simulated Annealing: Theory and Applications. – Dordrecht: Springer, 1987.
32. *Lawler E., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., and Shmoys D.B.* The Travelling Salesman Problem. — New York: John Wiley & Sons, 1985.
33. *Michalewicz Z.* Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs. – Springer-Verlag, 1992.
34. *Michalewicz Z. & Vogel D.B.* How to Solve it: Modern Heuristics – Berlin: Springer, 2000.
35. *Mladenović N. and Hansen P.* Variable neighborhood search // Computers and Opereration Research. – 1997. –24. – P. 1097-1100.
36. *Mühlenbein H., Mahnig T., and Ochoa A.* Schemata, distributions and graphical models in evolutionary optimization // Journal of Heuristics. – 1999. – 5(2). – P. 215-247.
37. Nemhauser G.L. and Wolsey A.L. Integer and Combinatorial Optimization. – New York: John Wiley & Sons, 1988.
38. *Osman I.H., Laporte G.* Metaheuristics: a bibliography // Ann. Oper. Res. – 1996. – V. 63. – P. 513–628.
39. *Papadimitriou C.H. and Steiglitz K.* Combinatorial Optimization – Algorithms and Complexity. – New York: Dover Publications, 1982.

40. *Reeves C.R., ed.* Modern Heuristic Techniques for Combinatorial Problems. – Oxford: Blackwell Scientific Publishing, 1993.
41. *Resende M.G.C., and Ribeiro C.C.* Greedy Randomized Adaptive Search Procedures // Chapter 8 in Handbook of Metaheuristics, F. Glover and G.A. Kochenberger, eds., Kluwer, pp. 219–249, 2003.
42. *Voß S.* Tabu Search: Applications and Prospects // Network Optimization Problems / Du D.-Z. and Pardalos P., eds., pp. 333–353. – Singapor: World Scientific Publishing Co., 1993.
43. *Whitley L.D.* A Genetic Algorithm Tutorial // Statistics and Computing. – 1994. – 4. – P. 65–85.
44. *Yagiura M. and Ibaraki T.* On metaheuristic algorithms for combinatorial optimization problems // Systems and Computers in Japan. – 2001. – 32(3). – P. 33-55.

Статья поступила в редакцию 16.02.2014

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

© Т. К. Юлдашев, К. Х. Шабадиков

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева
Институт информатики и телекоммуникации
пр-т Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск, 660014, Россия
Ферганский государственный университет им. Улугбека
Физико-математический факультет
ул. Мураббийлар, 19, г. Фергана, 150100, Узбекистан
e-mail: *tursunbay@rambler.ru, konak.shabadikov@mail.ru*

The inverse problem for the hyperbolic Fredholm integro-differential equations.

Yuldashev T. K. & Shabadikov K. H.

Abstract. It is studied one value solvability of nonlinear inverse problem for hyperbolic Fredholm integro-differential equation. It is used the method of integral transformation and the method of successive approximation.

Постановка задачи

В бесконечной полосе $\Omega \equiv \Omega_T \times \Re$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \int\limits_0^T K(t,s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds + f(t,x,\sigma(t)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ u_t(0,x) = \varphi_2(x),\ x \in \Re, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)t + N_1\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds, \tag{3}$$

$$u_x(t,0) = \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0)t + N_2\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f_x(s,0,\sigma(s))ds \tag{4}$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x_0) = \psi(t),\ t \in \Omega_T,\ x_0 \neq 0, \tag{5}$$

$$\sigma(0) = \sigma_0 = const \neq 0, \tag{6}$$

где $f(t,x,\sigma(t)) \in C^{0,2,0}(\Omega \times \Omega_T)$, $\varphi_i(x) \in C^2(\Re)$, $K(t,s) = a(t) \cdot b(s)$, $a(t), b(s) \in C(\Omega_T)$, $\sigma(t)$ — восстанавливаемая функция, N_i — заданные постоянные, $i = 1, 2$, $\Omega_T \equiv [0, T]$, $0 < T < \infty$, $\Re \equiv (-\infty, \infty)$.

Отметим, что изучению дифференциальных уравнений гиперболического типа посвящено много работ. Но, изучению интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа посвящено сравнительно мало. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенностей в вопросе однозначной разрешимости [1], [2]. Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти, например в [3]–[5].

В настоящей работе изучается обратная задача, где восстанавливаемая функция $\sigma(t)$ нелинейно входит в уравнение. Задание условия (6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке $t = 0$.

Основная идея, на которой основан развиваемый в данной работе подход, состоит в том, что *при решении обратной задачи относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое при условии (6) с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода.*

Определение 1. Решением обратной задачи (1)–(6) называется пара функций $\{u(t,x) \in C^{2,2}(\Omega), \sigma(t) \in C(\Omega_T)\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(6).

1. Начальная задача (1)–(4)

Используется метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. При помощи обозначения

$$c(x) = \int_0^T b(s) \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} ds \tag{7}$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a(t)c(x) + f(t,x,\sigma(t)).$$

С учетом условия (2) двукратное интегрирование последнего равенства по t дает

$$u(t,x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)t+c(x)\int_0^t(t-s)a(s)ds+\int_0^t(t-s)f(s,x,\sigma(s))ds. \qquad (8)$$

Дифференцируем (8) два раза по x:

$$u_x(t,x)=\varphi_1'(x)+\varphi_2'(x)t+c'(x)\int_0^t(t-s)a(s)ds+\int_0^t(t-s)f_x(s,x,\sigma(s))ds, \qquad (9)$$

$$u_{xx}(t,x)=\varphi_1''(x)+\varphi_2''(x)t+c''(x)\int_0^t(t-s)a(s)ds+\int_0^t(t-s)f_{xx}(s,x,\sigma(s))ds. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (7), имеем

$$c(x)=\int_0^T b(s)\Big[\varphi_1''(x)+\varphi_2''(x)s+$$

$$+c''(x)\int_0^s(s-\theta)a(\theta)d\theta+\int_0^s(s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta\Big]ds. \qquad (11)$$

Пусть

$$A=\int_0^T b(s)q(s)ds>0, \qquad (12)$$

где $q(t)=\int_0^t(t-s)a(s)ds$.

Тогда для определения $c(x)$ в (7) получаем из (11) следующее дифференциальное уравнение

$$c''(x)-Bc(x)=F(x), \qquad (13)$$

где

$$B=A^{-1},$$

$$F(x)=-BF_0(x),$$

$$F_0(x)=\int_0^T b(s)\Big[\varphi_1''(x)+\varphi_2''(x)s\Big]ds+\int_0^T b(s)\int_0^s(s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta ds.$$

Решая дифференциальное уравнение (13) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c(x) = D_1 \operatorname{ch} \nu x + D_2 \operatorname{sh} \nu x + \frac{1}{\nu} \int\limits_0^x F(y) Q(x,y) dy, \tag{14}$$

где $Q(x,y) = \operatorname{sh} \nu(x+y) + \operatorname{sh} \nu(x-y)$, $\nu = \sqrt{B}$, коэффициенты D_i подлежат определению, $i = 1, 2$.

Из (14) имеем

$$c(0) = D_1,\ c'(0) = \nu D_2. \tag{15}$$

С учетом (15) из (8) и (9) получаем, что

$$u(t,0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)t + D_1 \int\limits_0^t (t-s) a(s) ds + \int\limits_0^t (t-s) f(s,0,\sigma(s)) ds, \tag{16}$$

$$u_x(t,0) = \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0)t + \nu D_2 \int\limits_0^t (t-s) a(s) ds + \int\limits_0^t (t-s) f(s,0,\sigma(s)) ds. \tag{17}$$

Сравнение соотношений (16) и (17) с заданными условиями (3) и (4) дает

$$D_1 = N_1,\ D_2 = \frac{N_2}{\nu},$$

т.е. (14) принимает вид

$$c(x) = N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x + \frac{1}{\nu} \int\limits_0^x F(y) Q(x,y) dy. \tag{18}$$

Подстановка (18) в (8) дает

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \int\limits_0^t (t-s) f(s,x,\sigma(s)) ds +$$

$$+ q(t) \Big\{ N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x - \nu \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^x Q(x,y) \Big[\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y) s \Big] ds dy -$$

$$- \nu \int\limits_0^x Q(x,y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta, y, \sigma(\theta)) d\theta ds dy \Big\}. \tag{19}$$

2. Восстанавливаемая функция

В силу условия (5), из (19) получаем

$$\int_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds =$$

$$= \nu q(t)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(s)\int_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy + g(t), \tag{20}$$

где

$$g(t) = \psi(t) - \varphi_1(x_0) + \varphi_2(x_0)t - q(t)\Big[N_1 \operatorname{ch}\nu x_0 + \frac{N_2}{\nu}\operatorname{sh}\nu x_0 -$$

$$-\nu\int_0^T b(s)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\Big(\varphi_1''(y)+\varphi_2''(y)s\Big)dsdy\Big].$$

Нелинейное интегральное уравнение первого рода (20) при начальном условии (6)эквивалентно следующему интегральному уравнению второго рода (см., напр. [6]–[8]):

$$\sigma(t) = \Big[\sigma(t) + \int_0^t G(s)\sigma(s)ds - \int_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds +$$

$$+\nu q(t)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(s)\int_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy + g(t)\Big]e^{-\mu(t)} +$$

$$+\int_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}\Big[\sigma(t)-\sigma(s)+\int_0^t G(s)\sigma(s)ds - \int_0^s G(\theta)\sigma(\theta)d\theta -$$

$$-\int_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds + \int_0^s (s-\theta)f(\theta,x_0,\sigma(\theta))d\theta +$$

$$+\nu q(t)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(s)\int_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy -$$

$$-\nu q(s)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(\theta)\int_0^\theta (\theta-\xi)f_{yy}(\xi,y,\sigma(\xi))d\xi d\theta dy + g(t) - g(s)\Big]ds, \tag{21}$$

где $\mu(t)=\int\limits_0^t G(s)ds>0$ такая, что

$$e^{-\mu(t)}\ll 1;\ 2\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}ds\ll 1.$$

Для произвольной непрерывной функции $h(t)$ в области Ω_T норму вводим следующим образом:

$$\|h(t)\|=\max\left\{|h(t)|:t\in\Omega_T\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\max\left\{|g(t)|:t\in\Omega_T\right\}\le\delta<\infty$;
2. $\max\left\{|f(t,x,\sigma(t))|;\ |f_{xx}(t,x,\sigma(t))|\right\}\le\Delta<\infty$;
3. $f(t,x,\sigma)\in Lip\{L_{1|\sigma}\},\ 0<L_1=const<\infty$;
4. $f_{xx}(t,x,\sigma)\in Lip\{L_{2|\sigma}\},\ 0<L_2=const<\infty$;
5. $\rho=\left[1+\mu_0+L_1\frac{T^2}{2}+\nu q_0L_2\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T\frac{s^2}{2}b(s)dsdy\right]P(T)<1$,

   где

$$\mu_0=\max\left\{\mu(t):t\in\Omega_T\right\},\ q_0=\max\left\{|q(t)|:t\in\Omega_T\right\},$$

$$P(t)=e^{-\mu(t)}+2\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}ds.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение (21) имеет единственное решение на отрезке Ω_T.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\sigma_0(t)=0,\ \sigma_1(t)=\Big[-\int\limits_0^t(t-s)f(s,x_0,0)ds+$$

$$+\nu q(t)\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s(s-\theta)f_{yy}(\theta,y,0)d\theta dsdy+g(t)\Big]e^{-\mu(t)}+$$

$$+\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}\Big[-\int\limits_0^t(t-s)f(s,x_0,0)ds+\int\limits_0^s(s-\theta)f(\theta,x_0,0)d\theta+$$

$$+\nu q(t)\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s(s-\theta)f_{yy}(\theta,y,0)d\theta dsdy-$$

$$-\nu q(s)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(\theta)\int\limits_0^{\theta}(\theta-\xi)f_{yy}(\xi,y,0)d\xi d\theta dy + g(t)-g(s)\Big]ds, \qquad (22)$$

$$\sigma_k(t)=\Theta(t;\sigma_{k-1}),\ k=2,3,4,\ \ldots\ . \qquad (23)$$

В силу условий теоремы, из последовательных приближений (22) и (23) получаем

$$\|\sigma_1(t)-\sigma_0(t)\|\le\Big[\Delta\frac{T^2}{2}+\nu q_0\Delta\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T\frac{s^2}{2}b(s)dsdy+\delta\Big]P(T), \qquad (24)$$

где $\delta=\max\left\{|g(t)|:t\in\Omega_T\right\}$;

$$\|\sigma_k(t)-\sigma_{k-1}(t)\|\le\Big[1+\mu_0+L_1\frac{T^2}{2}+\nu q_0 L_2\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T\frac{s^2}{2}b(s)dsdy\Big]\times$$

$$\times P(T)\|\sigma_{k-1}(t)-\sigma_{k-1}(t)\|. \qquad (25)$$

Из оценок (24) и (25) следует, что оператор в правой части (21) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (21) имеет единственное решение на отрезке Ω_T. □

3. Разрешимость начальной задачи (1) – (4) и основная теорема

Теорема 2. *Пусть:*

1. *Выполняются условия теоремы 1 и условие (12);*
2. $\max\left\{|\varphi_i(x)|\right\}<\infty,\ i=1,2$*;*
3. $\left|\int\limits_0^x Q(x,y)\Big(\varphi_1''(y)+\varphi_2''(y)s\Big)dy\right|<\infty$*;*
4. $\left|\int\limits_0^x Q(x,y)f_{yy}(t,y,\sigma(t))dy\right|<\infty.$

Тогда в области Ω *существует единственное решение начальной задачи (1)–(4).*

Доказательство теоремы 2 следует из того, что подставляя в (19) решение интегрального уравнения (21), получаем искомую функцию $u(t,x)$.

Из справедливости приведенных выше двух теорем следует, что справедлива

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда существует единственная пара решений* $\left\{u(t,x)\in C^{2,2}(\Omega),\sigma(t)\in C(\Omega_T)\right\}$ *задачи (1)–(6).*

Заключение

Изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. При решении обратной задачи относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода. Поскольку восстанавливаемая функция нелинейно входит в уравнение, задание начального условия (6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке.

Список литературы

1. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. — Фрунзе: Изд-во Кирг. ГУ, 1957. — 328 с.

   Bykov, Ya. V. 1957. *On some problems of the theory of integro-differential equations.* Frunze, Kyrgyzstan: KyrSU Press.

2. *Иманалиев М.* Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе: Илим, 1974. — 352 с.

   Yimanaliyev, M. 1974. *Vibrations and stability of solutions of singularly perturbed integro-differential systems.* Frunze, Kyrgyzstan: Ilim.

3. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ, 1994. — 285 с.

   Denisov, A. M. 1994. *Introduction to the theory of inverse problems.* Moscow: MSU.

4. *Романов В. Г.* Обратные задачи для математической физики. — М.: Наука, 1984. — 264 с.

   Romanov, V. G. 1984. T*he mathematical physics inverse problems.* Moscow: Nauka.

5. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. — М.: Наука, 1999. — 330 с.

   Lavrentiev, M. M. and Saveliev, L. Ya. 1999. *Linear operators and incorrectly posed problems.* Moscow: Nauka.

6. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник ТомГУ. Математика и Механика. — 2012. — Том 14. — № 2. — С. 56–62.

   Yuldashev, T. K. 2012. On the inverse problem for a quasilinear first order partial differential equations. *Vestnik TomSU. Mathematics and Mechanics*, 14 (2), pp. 56–62.

7. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. — 2012. — Том 28. — № 3. — С. 17–29.

Yuldashev, T. K. 2012. The inverse problem for the nonlinear high order pseudoparabolic operator equation. Vestnik SamSTU. Physics and Mathematics Series, 28 (3), pp. 17–29.

8. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени // Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2013. — Том 5. - № 1. — С. 69–75.

Yuldashev, T. K. 2013. The inverse problem for the nonlinear high order hyperbolic operator integrodifferential equation. Vestnik YuzhnoUralSU. Mathematics. Mechanics. Physics., 5 (1), pp. 69–75.

Статья поступила в редакцию 07.10.2013

УДК 338.468.5+519.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОЗАГРУЗКИ РЕКРЕАЦИОННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

© Д. В. Донской

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
Факультет управления
просп. Вернадского, 4, г. Симферополь, 295007, Россия
e-mail: *ddv-ddv@mail.ru*

Mathematical model of optimum additional charge of recreation enterprise.

Donskoy D. V.

Abstract. Mathematical model of optimum additional charge of recreation enterprise for seasons with low intensity of demand is offered. Appropriate heuristic GREEDY algorithm for the decision of the task determined by this model is presented.

Recreation enterprises are counted on maintenance of customers and possess resources, many of which can be used whole-yearly. However much the stream of customers has different intensity which depends on the temporal seasons of year. When a recreation enterprise stands from the shortage of customers, expediently addition loading of him, providing services to other customers, possibly even not on the basic type of enterprise. To that end marketing researches are conducted and new targets accounts come to light. Such actions must be executed constantly with the purpose of filling of store of basic specific resource – input stream of customers.

A store is a file in which with attachment at times descriptions and quantitative indexes are brought on the found targets accounts. It contains information about the possible users of recreation resources of enterprise – additional customers, foremost such which can take advantage of services of recreation enterprise in the seasons of the least demand.

The purpose of this paper is the revision of mathematical model and improvement of algorithm of addition loading of recreation enterprise with the purpose of his steady functioning in the seasons characterized by low intensity of input customer stream. The article continues the researches begun in [2,3].

It is assumed that the number of places in a recreation enterprise is fixed and equal n. In every discrete moment of time $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., t_0 + T - 1$ the current planned load is permanent and equal n^*, and possible addition load makes a size $\Delta n = n - n^*$. Customer with a number j can occupy k_j places of service in the interval of time T (that corresponds to the height of rectangle with a mark τ_j) and to stay in the enterprise of service τ_j in succession going time units (that corresponds to the width of this rectangle). In geometrical interpretation the decided task consists of receipt maximally dense packing of the set rectangular region by the set of the fixed rectangles with limitations on piling.

1. Описание проблемной области и постановка задачи

Рекреационные объекты и процессы являются проблемной областью для широкого применения математических методов и моделей. К этому научному направлению проявляют интерес исследователи во многих странах мира [4, 5, 6].

Рекреационные предприятия рассчитаны на обслуживание рекреантов и обладают ресурсами, многие из которых могут использоваться круглогодично. Однако поток рекреантов имеет различную интенсивность, которая зависит от временных сезонов года. Когда рекреационное предприятие простаивает из-за нехватки рекреантов, целесообразно дозагрузить его, предоставляя услуги другим заказчикам, возможно даже не по основному профилю предприятия. С этой целью проводятся маркетинговые исследования и выявляются новые потенциальные заказчики. Такие действия должны выполняться постоянно с целью наполнения *накопителя основного специфического ресурса — входного потока рекреантов*.

Накопитель представляет собой файл, в который с привязкой по времени заносятся характеристики и количественные показатели по найденным потенциальным заказчикам. Он содержит информацию о возможных потребителях рекреационного ресурса предприятия — дополнительных заказчиках, прежде всего таких, которые могут воспользоваться услугами рекреационного предприятия в сезонах наименьшего спроса.

Целью настоящей работы является доработка математической модели и усовершенствование алгоритма дозагрузки рекреационного предприятия с целью его устойчивого функционирования в сезонах, характеризующихся низкой интенсивностью входного рекреационного потока. Статья продолжает исследования, начатые в работах [2, 3].

Введенное понятие *дозагрузки* в контексте потокового управления рекреационными предприятиями является более точным вариантом термина *доводка*, введенного в логистике. Дозагрузка осуществляется из накопителя основного специфического ресурса.

Для оптимальной (с наибольшей прибыльностью) дозагрузки предприятий можно использовать оптимизационный подход. Прежде чем приступить к его изложению, рассмотрим диаграмму дозагрузки рекреационного предприятия, представленную на рис. 1.

Предполагается, что число мест в рекреационном предприятии фиксировано и равно n. В каждый дискретный момент времени $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., t_0 + T - 1$ текущая плановая загрузка постоянна и равна n^*, а допустимая дозагрузка составляет величину $\Delta n = n - n^*$. Заказчик с номером j может занять k_j мест обслуживания

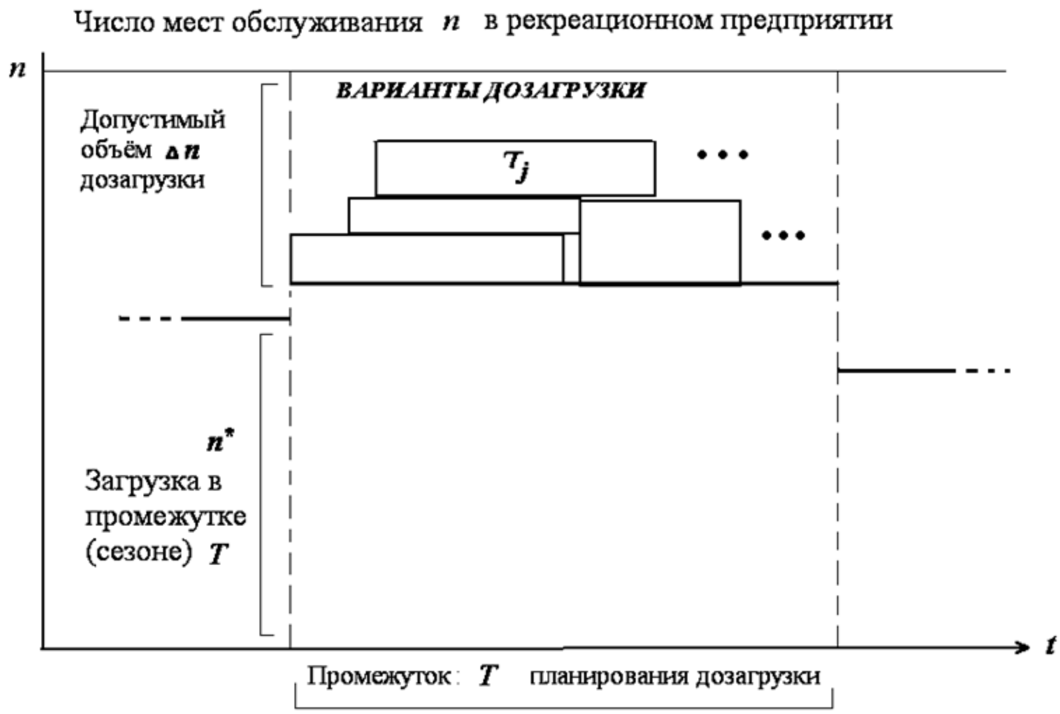

Рис. 1. *Диаграмма дозагрузки рекреационного предприятия*

в промежутке времени T (что соответствует высоте прямоугольника с пометкой τ_j на рис. 1) и пробыть в предприятии обслуживания τ_j подряд идущих единиц времени (что соответствует ширине этого прямоугольника на рис. 1). В геометрической интерпретации решаемая задача состоит в получении максимально плотной упаковки заданной прямоугольной области набором фиксированных прямоугольников с ограничениями на укладку, которые иллюстрируются рисунком 1.

В следующем разделе уточняются все используемые обозначения, необходимые для построения математической модели дозагрузки.

2. Построение модели

Введем следующие обозначения.

n — число мест обслуживания, которыми располагает рекреационное предприятие.

T — некоторый произвольно выбранный временной промежуток (сезон) планирования загрузки рекреационного предприятия; длина этого промежутка обозначается тем же символом T, так что промежуток может быть определён как множество единиц времени $1, 2, ..., t, ..., T$.

n^* — основная уже запланированная нагрузка (число мест) в рассматриваемом временном промежутке T.

$\Delta n = n - n^*$ — максимальный возможный объём дозагрузки рекреационного предприятия.

$C_1, ..., C_j, ..., C_m$ — дополнительные заказчики (потребители) рекреационных услуг, которые предполагают получить обслуживание в указанном временном промежутке T.

$\tau_j \geq 1$ — количество единиц неразрывного времени обслуживания в рекреационном предприятии, требуемого заказчику с номером j.

k_j — количество мест обслуживания, требуемых заказчику с номером j.

g_j — прибыль в единицу времени, получаемая рекреационным предприятием от обслуживания заказчика с номером j.

$t, ..., q, ..., t + \tau_j - 1$ — идущие подряд номера единиц времени, начинающиеся с номера t и в совокупности составляющие непрерывный промежуток обслуживания заказчика с номером j.

На диаграмме дозагрузки (рис. 1) отображается область, соответствующая промежутку планирования T. Внутри этой области прямоугольниками с высотой k_j и шириной τ_j обозначаются заказы, включаемые в обслуживание рекреационным предприятием в промежутке планирования. Суммарная высота таких прямоугольников определяет общий объём дозагрузки, который не должен превышать величину Δn.

Введем логические переменные

$$y_{t,j} = \begin{cases} 1, \text{если заказчик } c \text{ номером } j \text{ обслуживается в момент времени } t; \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$\bar{y}_{t,j} = 1 - y_{t,j}$ — обозначение инверсии логической переменой.

Целевая функция имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} g_j y_{t,j}.$$

В ней внутренняя сумма для каждого значения j выражает прибыль, которая может быть получена при полном выполнении заказа с номером j (если этот заказ в промежутке T не выполняется, то соответствующая внутренняя сумма равна нулю). Двойная сумма выражает полную *дополнительную прибыль* рекреационного предприятия за время работы T (временной отрезок планирования дозагрузки).

Поскольку речь идёт о дозагрузке предприятия и использовании данных из накопителя основного ресурса — потока рекреантов, — нужно учитывать возможность возникновения ситуаций, когда помимо основных внутренних ресурсов предприятия (и внешних природных рекреационных ресурсов) может понадобиться привлечение *дополнительных ресурсов*. Привлечение дополнительных ресурсов требует дополнительных затрат и реальной возможности получить эти ресурсы в планируемом промежутке времени, поэтому вводятся следующие величины.

$R_1, ..., R_r, ..., R_s$ — максимально возможные количества дополнительных привлекаемых ресурсов с номерами $1, ..., r, ..., s$ для обеспечения работы предприятия в течение всего периода T.

$\lambda_{r,j}$ — количество дополнительного ресурса с номером r, потребляемого в единицу времени при выполнении заказа с номером j.

Ограничения, необходимые для точного выполнения условий рекреационного обслуживания в промежутке времени T, могут быть условно разделены на две группы: ресурсные неравенства и логические условия размещения заказов.

a) Ограничения объема дозагрузки:

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \cdot y_{t,j} \leq \Delta n \text{ для всех } t \in 1, ..., T.$$

b) Ограничения по доступным объемам дополнительных ресурсов:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{r,j} \cdot y_{t,j} \leq R_r \text{ для всех } r \in 1, ..., s.$$

c) Логическое ограничение неразрывности обслуживания во времени каждого отдельного заказчика. Для записи этого ограничения следует учесть, что заказ j может либо вовсе не выполняться в промежутке T, либо, если он выполняется в промежутке T, то этот заказ должен "занимать"единственный неразрывный блок единиц времени длины τ_j в этом промежутке T.

Условие

$$\bigwedge_{t=1}^{T} \bar{y}_{t,j} = 1$$

равносильно тому, что заказ с номером j не будет выполняться в промежутке времени T.

Обозначим

$$U_t = \left(\bigwedge_{q=1}^{t-1} \bar{y}_{q,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t}^{t+\tau_j-1} y_{q,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t+\tau_j}^{T} \bar{y}_{q,j} \right).$$

$U_t = 1$ — условие, обеспечивающее неразрывность блока единиц времени длины τ_j в промежутке T, начиная с временного отсчёта t. Тогда условие

$$\left(\bigvee_{t=1}^{T-\tau_j+1} U_t\right) = 1$$

означает существование хотя бы одного блока из τ_j единиц времени в промежутке времени T .

Неравенства

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t,j} \leq \tau_j \text{ для всех } j = 1, 2, ..., m$$

обеспечивают наличие в промежутке T не более одного такого блока для каждого заказа.

С учетом введенных обозначений, целевой функции и ограничений, модель оптимальной дозагрузки получает следующий окончательный вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} g_j y_{t,j}; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \cdot y_{t,j} \leq \Delta n \text{ для всех } t \in \{1, 2, ..., T\}; \tag{2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{r,j} \cdot y_{t,j} \leq R_r \text{ для всех } r \in \{1, ..., s\}; \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t,j} \leq \tau_j \text{ для всех } j = 1, 2, ..., m \ ; \tag{4}$$

$$\left(\bigwedge_{t=1}^{T} \bar{y}_{t,j}\right) \vee \left(\bigvee_{t=1}^{T-\tau_j+1} \left(\left(\bigwedge_{q=1}^{t-1} \bar{y}_{q,j}\right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t}^{t+\tau_j-1} y_{q,j}\right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t+\tau_j}^{T} \bar{y}_{q,j}\right)\right)\right) = 1 \tag{5}$$

$$\text{для всех } j = 1, 2, ..., m;$$

$$y_{t,j} \in \{0, 1\} \text{для всех } t \in \{1, ..., \tau_j\} \text{ и } j = 1, 2, ..., m. \tag{6}$$

Уточним использованное выше обозначение многоместной конъюнкции. Его следует понимать так:

$$\bigwedge_{q=\alpha}^{\beta} \bar{y}_{q,j} = \begin{cases} \bar{y}_{\alpha,j} \wedge \bar{y}_{\alpha+1,j} \wedge \cdots \wedge \bar{y}_{\beta+1,j}, & \text{если } \alpha \leq \beta; \\ 1, & \text{если } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Приведенное уточнение связано с тем, что при начальном шаге времени $t = T - \tau_j + 1$ размещение заказа с номером j возможно, поскольку от $t = T - \tau_j + 1$

до T включительно помещается ровно τ_j единиц времени, требуемых для размещения этого заказа. Поэтому при размещении заказа с произвольным номером j в самом конце промежутка T в уравнении (5) появляется выражение

$$\bigwedge_{q=T-\tau_j+1+\tau_j}^{T} \bar{y}_{q,j} = \bigwedge_{q=T+1}^{T} \bar{y}_{q,j} = \bigwedge_{q=\alpha}^{\beta} \bar{y}_{q,j} \text{ где } \alpha > \beta \ . \tag{7}$$

В таком случае свободных единиц времени после размещения заказа не остается, и соответствующих переменных с инверсиями нет. Поэтому конъюнкция (7) заменяется единицей.

Развернутое выражение в левой части уравнения (5) представляет собой дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) следующего вида:

$$\mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j}) = \bar{y}_{1,j} \cdots \bar{y}_{T,j} \vee$$

$$y_{1,j} y_{2,j} \cdots y_{\tau_j,j} \bar{y}_{\tau_j+1,j} \cdots \bar{y}_{T,j} \vee$$

$$\bar{y}_{1,j} y_{2,j} \cdots y_{\tau_j+1,j} \bar{y}_{\tau_j+2,j} \cdots \bar{y}_{T,j} \vee$$

$$\bar{y}_{1,j} \bar{y}_{2,j} y_{3,j} \cdots y_{\tau_j+2,j} \bar{y}_{\tau_j+3,j} \cdots \bar{y}_{T,j} \vee$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots..$$

$$\bar{y}_{1,j} \bar{y}_{2,j} \bar{y}_{3,j} \cdots \bar{y}_{T-\tau_j,j} y_{T-\tau_j+1,j} \cdots y_{T,j}$$

В этой ДНФ содержится $T - \tau_j + 2$ конъюнкций, и такая ДНФ входит в левую часть каждого из $j = 1, ..., m$ логических ограничений (5). Единичное покрытие

$$N_{\mathscr{D}_j} = \{\sigma_1, ..., \sigma_T : \mathscr{D}_j(\sigma_1, ..., \sigma_T = 1)\}$$

состоит из $T - \tau_j + 2$ точек, соответствующих конъюнкциям из ограничений (5).

Рассмотрим любую пару конъюнкций из $\mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j})$, не содержащую первую конъюнкцию этой ДНФ. Выберем из конъюнкций, входящих в пару, по одному литералу одной и той же переменной так, чтобы эти литералы были взаимоинверсны. Рис.2 поможет увидеть, что среди оставшихся литералов в этих двух конъюнкциях останется хотя бы одна пара взаимоинверсных литералов. Таким же свойством будет обладать любая пара различных конъюнкций, содержащая *первую* конъюнкцию из $\mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j})$ при $\tau_j \geq 2$. Поэтому *для любой пары конъюнкций из* $\mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j})$ *невозможно применение операций склеивания и обобщенного склеивания, приводящих к получению новой конъюнкции.*

Набор ограничений (5), который можно представить в виде $\mathscr{D}_j = 1$, $j = 1, ..., m$, где $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j})$, можно заменить одним ограничением: $\mathscr{K} = \mathscr{D}_1 \wedge ... \wedge \mathscr{D}_j \wedge ... \wedge \mathscr{D}_m$.

0 ... 0	1 1 1 ... 1 1 1	0 0 ... 0 0 0

0 ... 0 0	1 1 1 ... 1 1 1	0 0 0 ... 0 0 0

Рис. 2. Размещение положительных (1) и отрицательных (0) литералов в одной паре различных конъюнкций

Заметим, что в любой паре различных ДНФ $\mathscr{D}_j$ и $\mathscr{D}_k$, $1 \leq j < k \leq 1$ из конъюнктивной нормальной формы (КНФ) $\mathscr{K}$ содержатся разные переменные — по вторым индексам j и k. Следствием указанных свойств ДНФ, входящих в ограничения (5) являются следующие утверждения:

I^o ДНФ $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j})$ *не может быть упрощена ни при каком* $j = 1, ..., m$.

II^o КНФ $\mathscr{K} = \mathscr{D}_1 \wedge ... \wedge \mathscr{D}_j \wedge ... \wedge \mathscr{D}_m$ *не может быть упрощена.*

III^o Для приведения КНФ $\mathscr{K}$ к ДНФ понадобится выполнить T^m логических умножений.

IV^o Являясь NP-трудной без ограничения (5), задача (1–6) остается не менее сложной при добавлении этого ограничения.

3. GREEDY алгоритм решения задачи

Построенная модель целочисленного 0-1 программирования содержит достаточно большое число переменных Например, при $T = 45$ дней и $m = 10$ дополнительных источниках дозагрузки будет использовано 450 переменных. При таких параметрах число вариантов размещения в промежутке T одного заказа длительностью 7 дней с учетом только одного ограничения (6) будет равно 39. Прямой перебор размещения десяти таких заказов оценивается сверху 39^{10} вариантами.

Задачи, соответствующие таким моделям, как показано выше, являются очень сложными с вычислительной точки зрения, и для их решения целесообразно применять приближенные, но имеющие существенно более низкую степень сложности чем точные, алгоритмы.

Для приближённого решения задачи оптимальной дозагрузки ниже предлагается алгоритм *АПОД 0.2* (Алгоритм *П*риближённой к *О*птимальной *Дозагрузки*) типа *GREEDY*[1].

Алгоритм АПОД 0.2

1° Выбрать временной промежуток (сезон) планирования.

2° По исходным величинам — числу мест рекреационного предприятия n и объёму основной загрузки n^* (с учётом прогноза) определить максимальную возможную дозагрузку в этом временном промежутке Δn.

3° Упорядочить возможные заказы из накопителя основного ресурса по невозрастанию ожидаемой прибыли, получаемой рекреационным предприятием в единицу времени. В случае равного значения ожидаемой прибыли первым ставится заказ большей продолжительности; если же и продолжительность одинакова — первым ставится любой из рассматриваемых заказов. Далее заказы из накопителя рассматриваются в порядке, полученном в результате указанной в этом пункте сортировки.

4° Обнулить специальный одномерный последовательный числовой массив — *маску использованных заказов*. Номера идущих подряд элементов маски должны соответствовать порядковым номерам заказов, полученным в результате проведенной в предыдущем пункте сортировки. По мере выполнения алгоритма, если заказ будет принят к обслуживанию, то соответствующий элемент маски должен устанавливаться в единицу.

Установить указатель текущего рассматриваемого заказа (далее — *указатель*) на первый элемент маски и положить $j = 1$. По мере выполнения алгоритма *указатель* может смещаться только вправо.

5° Обнулить значения решающих переменных $y_{t,j}$ для всех $t \in \{1, ..., T\}$ и $j = 1, 2, ..., m$.

Инициализировать массив суммарной дозагрузки $L(q) = 0, \ \ q = 1, ..., T$. В этом массиве хранится текущее (по шагам выполнения размещения заказов алгоритмом) суммарное количество дополнительных занятых мест в рекреационном предприятии.

6° Просматривая элементы маски подряд слева направо и перемещая при этом *указатель* из текущего положения вправо, найти первый ноль и зафиксировать *указатель* в позиции j, соответствующий найденному нулевому разряду маски (если ни одного нуля при таком просмотре не встретится или указатель пройдет все элементы маски, то перейти на 9°, поскольку в таком случае все заказы из накопителя основного ресурса, для которых выполнены все ограничения, размещены). Номер j определяет текущий заказ, который алгоритм будет пытаться разместить, не нарушая ограничения.

7° Выполнить цикл проверки возможности размещения заказа по всем единицам времени, начиная с $t = 1, 2, ..., (T - \tau_j + 1)$ (дням) промежутка планирования. Положить $t^* = t$; $L_{min} = 2\Delta$. Установить флажок размещения заказа в ноль: $Flag := 0$.

Начало цикла по t.

Проверяются только ограничения (2) и (3), которые должны удовлетворяться при назначении единиц переменным $y_{q,j}$, $q = t, t + 1, ..., t + \tau_j - 1$, где τ_j — необходимое для выполнения рассматриваемого заказа время.

Если указанные ограничения удовлетворяются, то $Flag := 1$ (заказ размещается), и при выполнении условия $L(q) < L_{min}$ выполнить: $L_{min} := L(q)$ и $t^* = t$ для вычисления точки "наилучшего" (это — эвристический элемент алгоритма) начального размещения заказа.

Конец цикла по t.

Если $Flag = 1$, то найденное значение t^* определяет начальную точку времени размещения заказа с номером j. Тогда вполнить следующее:

Учесть дополнительную загрузку за счет включаемого в обслуживание заказа j

$$L(q) := L(q) + k_j,\ q = t^*, t^* + 1, ..., t^* + \tau_j - 1$$

и установить *элемент маски с номером* j *в единицу, а переменным* $y_{q,j}$, $q = t^*, t^* + 1, ..., t^* + \tau_j - 1$, *окончательно присвоить единичные значения*;

в противном случае, если $Flag = 0$, эти переменные и j-й разряд маски остаются нулевыми, а указатель сдвигается на одну позицию вправо.

8° Перейти на 6°.

9° Алгоритм *АПОД 0.2* завершен. Результатом его работы являются значения переменных $y_{t,j}$,$t = 1, ..., T$, $j = 1, .., m$, которые и определяют план дозагрузки. Номера принятых к размещению заказов определяются единичными разрядами маски.

Заключение

В статье предложены математическая модель оптимальной дозагрузки рекреационного предприятия для сезонов с низкой интенсивностью спроса и алгоритм *АПОД 0.2* решения определяемой этой моделью задачи. *АПОД 0.2* основан на идее построения алгоритмов типа *GREEDY* с привлечением эвристик, способствующих получение приближенного решения, близкого к оптимальному. Предложенная модель может использоваться и в других проблемных областях, где требуется находить оптимальное динамическое размещение объектов или действий. Направление дальнейшей работы связано с совершенствованием алгоритма *АПОД 0.2* с целью повышения его точности.

Список литературы

1. *Garey M. R.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness / Michael R. Garey, David S. Johnson. — NY.: W. H. Freeman & Co., 1979. — 340 p.

2. *Донской Д. В.* Планирование и оптимизация рекреационных предприятий на основе анализа и прогнозирования потоков рекреантов / Д. В. Донской // Економічний простір, 2009. — №22/1. — С. 278 — 286.

Donskoy D. V. Recreation enterprises optimal planning based on customers flow prediction / *Economic space (Ukraine)*, 2009, 22/1, pp. 278–286.

3. *Донской Д. В.* Планирование сезонной дозагрузки рекреационных предприятий / Д. В. Донской // Экономика: вопросы теории и практики, 2009. — Т. 6. — Вып. 7. — С. 1496–1504.

   Donskoy D. V. Planning of season additional loading of recreation enterprises / *Economics: Theory and Practice (Ukraine)*, 2009, **6**, 7, pp. 1496–1504.

4. *Щербина О. А.* Оптимизация рекреационной деятельности / М. Я.|;Лемешев, О. А. Щербина. — М.: Экономика, 1986. — 160 с.

   Lemeshev M. J. and Shcherbina O. A. *Recreation business optimization.* 1986. Moscow: Economics.

5. *Law R.* Data Mining in Tourism Demand Analysis: A Retrospective Analysis / R. Law, H. Mok, C. Goh // Lecture Notes in Computer Science, 2007. — Vol. 4632. — P. 508–515.

6. *Mason P.* Local Planning for Recreation and Tourism: A Case Study of Mountain Biking from New Zealand's Manawatu Region / P. Mason, S. Leberman // Journal of Sustainable Tourism, 2000. — Vol. 8.— No. 2. — P. 97–115.

Статья поступила в редакцию 04.06.2014

УДК 51.76

РАЗРАБОТКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОСПРОИЗВОДСТВА РЫБ ДЛЯ СЦЕНАРНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ[1]

© А. Ю. Переварюха

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
лаборатория Прикладной информатики
14-линия, 39, г. Санкт-Петербург, 199178, Россия
e-mail: *madelf@pisem.net*

The development of computational models for fish reproduction to scenario research.

Perevaryukha A. Yu.

Abstract. The article considers new computational model of population dynamics, which is designed for application in the specialized software tools and supports event-driven simulation. The basis of the model is the original formalization of changes in mortality rate of annual generations, which depends on its density and growth rate. Proposed implementation of iterative mode by numerical solution of differential equations on the time interval is due to practical needs of the fishery. For example, this would allow assessing the effectiveness of artificial replenishment of commercial stocks at cultivation juveniles of different age or weight. Representation of the model most corresponds to the problem of formation of scenarios and analysis of various variants of continuation for situations in the fishery. Algorithmic structure allows you to dynamically change the specified set of control actions and detect signs of threatening the regime of fishing withdrawal.

Введение

Актуальность совершенствования методов математической экологии подтверждается регулярно объявляемыми временными мораториями на промысел видов рыб, которые вызваны истощением нерационально эксплуатировавшихся запасов. Трудности при формировании долгосрочных промысловых прогнозов не преодолены, несмотря на предлагавшиеся различными заинтересованными организациями многочисленные способы расчета допустимого улова по статистическим данным. Решаемые компьютерным моделированием динамики промысловых популяций практические задачи имеют ряд специфических особенностей. Традиционные для подобных задач дискретные матричные системы считаются простыми и адаптируемыми к применению на любой ЭВМ. Их свойства могут оказаться весьма нетривиальны, что было установлено почти случайно еще в середине 1970-х гг. в [1]. Качественное описание

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 14-07-00066.

реакции моделей на параметрические изменения вызывает продолжающиеся дискуссии среди специалистов. Часто проблемы связаны с тем, что в завершении модельных исследований необходимо представлять биологам непротиворечивую интерпретацию всем возможным метаморфозам в их качественном поведении. Разнообразие нелинейных эффектов предполагает выявление некоторых результатов экспериментов, логически отбрасываемых при переходе от математического к биологическому описанию ситуации.

Современные вычислительные средства помогают использовать недоступные ранее приемы моделирования, например предикативное переопределение правых частей уравнений. Различные алгоритмические формализмы, такие как динамические карты состояний и гибридные автоматы, позволят при должном обосновании расширять классические представления математической биологии о факторах саморегуляции репродуктивной активности.

В настоящей статье обсуждается разработка популяционной модели, наиболее естественно описывающей свойства процесса восполнения биоресурсов и последствия антропогенного воздействия. Анализируются параметрические диапазоны поведения и прогностические возможности популярных в биологии моделей. Полностью непрерывные моделирующие системы несут большее сущностной интерпретации, но не могут учесть резкие изменения факторов, которые свойственны популяционных процессам у рыб. Обосновывается перспективный по нашему мнению сценарный подход, объединяющий возможности аппарата дифференциальных уравнений и дискретно-событийного компьютерного моделирования. Приводится пример использования данного подхода при попарном сопоставлении динамики развития модельной ситуации с последствиями «перелова» (так называют состояние после значительного превышения норм промыслового изъятия вида, распространяющего действие по пищевым цепям экосистемы) волжских осетровых, поддерживаемых в настоящее время в большей степени искусственным воспроизводством.

1. Проблемы дискретных систем в экологическом моделировании

Систематической концепцией, которую можно использовать для развития методов моделирования в ихтиологических исследованиях, представляется теория формирования пополнения запасов рыб. Ее изначальные основные идеи изложены У. Рикером в [2]. Принципы подхода опираются на реальные наблюдения и до сих пор интересны для внимательного читателя, так как не все описанные в [2] явления получили в дальнейшем попытки модельного описания. Примеры реализации крупномасштабных экосистемных модельных комплексов показывают особую роль в их структуре функционального компонента описания воспроизводства. В некоторых случаях можно увидеть, как стремление к улучшению прогностических характеристик приводило разработчиков к постоянному усложнению формулы расчета пополнения за счет различных корректирующих поправок.

Проблема математической формализации в рамках концепции о регулирующей зависимости между нерестовым запасом и формирующимся пополнением актуальна для исследования популяционных изменений рыб, мигрирующих из морей в реки для размножения. Тогда точнее подсчитывается численность родительского стада. Можно определить площадь постоянно пригодных нерестилищ при известном уровне реки. Для зарегулированной реки сток и температура в половодье измеряются точно. Систематические мониторинговые наблюдениях ЦНИОРХ за скатом молоди осетровых в створе Волги в 1980-е гг. позволяют оценить начальную численность их поколений.

Теория допускает развитие методов моделирования, абстрагируясь от специфических особенностей миграции взрослых рыб, так как ее основе лежит классификация механизмов, которые определяют смертность молоди в зависимости от уровня внутривидовой конкуренции в местах размножения.

У. Рикер обосновал ставшую популярной функцию $R = f(S)$ связи «запас $\to$ пополнение», которая позволяет учесть негативное действие на выживаемость поколения повышенной плотности запаса. Будем рассматривать его модель как дискретную систему при вычислении итераций $\{\psi^{(j)}\}_{j \geq 0}$, где $R_0, R_1, R_2 \ldots$ последовательность точек траектории, определенных условием эволюции системы: $R_{j+1} = aR_j \exp(-bR_j)$.

Сущностные свойства модели можно раскрыть при переходе к дифференциальному уравнению убыли текущей численности $N(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = -(\alpha N(0) + \beta)N(t), t \in [0, \vartheta]. \tag{1}$$

Константы заданного на промежутке времени ОДУ соотносятся с константами формулы Рикера: $a = \lambda \exp(-\beta\vartheta), b = \alpha\vartheta, \lambda -$ средняя плодовитость популяции. Согласно его теории повышенная плотность на нерестилищах становится негативным фактором, увеличивающим смертность. Предполагается, что на коэффициент мгновенной смертности влияет начальная численность: $N(0) = \lambda S$. Длительность интервала ϑ задает период уязвимости поколения по отношению к основным факторам смертности. Для вариативности в оценках параметров можно использовать модель воспроизводства в виде численного решения задачи Коши (1) [3]. В (1) скорость убыли численности во многом задается исходным количеством икры, что является весьма специфичным предположением (больше всего подходит замкнутый водоем, где обитает один существующий за счет каннибализма вид рыб) и большинстве случаев оно не подтверждается.

Итерационная система для любых $j > 0$ обладает аттрактором A таким, что для $\forall R_0 \lim_{j\to\infty}\{\psi^{(j)}\} = A$. Для нашего случая аттрактор глобальный и является устойчивым состоянием равновесия: $A \equiv R^* = \psi(R^*)$. Первый метаморфоз A определен условием нарушения критерия устойчивости неподвижной точки $|\psi\prime(R^*)| < 1$, следующего из теоремы, независимо доказанной Д. Гробманом и Ф. Хартманом [4]. При значении производной $\psi\prime(R^*) = -1$, когда $a = \mathbf{e}^2$ происходит бифуркация удвоения периода. У функциональной итерации возникают две новые циклические точки $\psi^n(R^*) = \psi^{n+2}(R^*)$, являющиеся неподвижными точками второй итерации $\psi^2(R)$. При дальнейшем увеличении параметра две неподвижные точки $\psi^2(R)$ аналогично потеряют устойчивость и появятся $n = 4$ точек $\psi^4(R)$. Любая ранее устойчивая R^* становится репеллером и делит область притяжения образовавшегося цикла на субинтервалы Υ_1, Υ_2. Для $R_0 \approx \widehat{R}_0, R_0 \in \Upsilon_1, \widehat{R}_0 \in \Upsilon_2$ отличается порядок обхода цикла $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(R_0)^n = R_1^*$ при $n = 2^i$ и соответственно $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(\widehat{R}_0)^n = R_1^*$ при $n \neq 2^i$. При изменении управляющего параметра в диапазоне значений $\mathbf{e^2} < a < \hat{a}$ реализуется каскад бифуркаций удвоения периода, происходящих при $\psi^{2n}\prime(R^*) = -1$.

Существует значение $\hat{a}$, когда период цикла становится бесконечным и образуется странный аттрактор гомеоморфный канторовскому множеству [5]. Действие оператора удвоения периода цикла описывается установленными М. Фейгенбаумом двумя универсальными константами [6]. Из-за бесконечного количества малых субинтервалов наблюдается чувствительная зависимость от точности начальных условий.

Практические цели предметной области диктуют необходимость биологической интерпретации сценария хаотизации учитывая, что амплитуда таких флуктуаций очень велика. Бифуркационный параметр a в записи (1) пропорционален репродуктивному потенциалу популяции, что приведет к предположению о связи высокой плодовитости λ и скорости прохождения периода ϑ с неустойчивостью колебаний численности. Отметим, что сценарий каскада удвоений связан с возникновением ряда других нелинейных эффектов при уже при $a > \hat{a}$. Некоторым подобным явлениям трудно подобрать популяционную интерпретацию. Известны модели пополнения, в которых хаотизация происходит при увеличении иначе трактуемых параметров, и по нашему мнению необходимо пересмотреть подходы к классификации дискретных систем в биологической проблематике.

Сценарий хаотизации свойство определенного класса дискретных систем, называемых SU-отображения. Нам неизвестны работы, где была бы дана биологическая интерпретация критериям теоремы Д. Сингера [7]. Так задачи промысловой ихтиологии пересекаются с фундаментальными и еще не полностью разрешенными проблемами, т. к. в модельных комплексах управления биоресурсами, включающих компонент (1), должно присутствовать более одного бифуркационного параметра.

2. Уравнения новой вычислительной модели

Особенность зависимости между запасом и пополнением по решению (1) с резко выраженным единственным экстремумом далеко не всегда согласуется с данными наблюдений ихтиологов. С точки зрения теории дискретных итераций характер такой кривой означает возможность появления циклов всевозможных периодов вплоть до появления периода $p = 3$ в соответствии с порядком теоремы А. Н. Шарковского [8].

Опубликованные результаты наблюдений [9] свидетельствуют о возможности появления различных экстремумов S_{m1}, S_{m2} на графике зависимости нерестового запаса и пополнения. Самый простой способ описания сложной формы кривой воспользоваться второй итерацией формулы Рикера $f(f(S)) \equiv f^2(S)$. Подобные попытки моделирования известны. Однако, трудно представить, что выполнится $f(S_{m1}) = f(S_{m2})$, более того данный способ некорректен из-за свойств функции $R = f(S)$:

$$\frac{df(S)}{dS} = a\mathbf{e}^{-bS}(1 - bS), \lim_{S\to 0} \frac{df(S)}{dS} = a,$$

$$\frac{df^2(S)}{dS} = a^2 \exp\left(-bS - abS\mathbf{e}^{-bS}\right)(1 - abS\mathbf{e}^{-bS} - bS + ab^2S^2\mathbf{e}^{-bS}), \lim_{S\to 0} \frac{df^2(S)}{dS} = a^2.$$

подразумевающих, что при деградации запаса скорость воспроизводства стремиться к предельному значению a, но в f^2 возрастает уже до a^2.

Неоднократно отмечалось по данным о нересте осетровых рыб, что при существенном снижении плотности запаса эффективность воспроизводства резко уменьшается. Иначе происходят бифуркации $R_{n+1} = f(f(R_n)), f(R) = aR\mathbf{e}^{-bR}$. После потери устойчивости возникает не цикл, а аттракторы A_1, A_2, с которыми происходят удвоения периода. Задачу описания разнообразных сложных форм зависимости мы предлагаем решать при помощи введения функционалов с подобранной ограниченной областью значений $E(\Theta) = [l, 1), l > 0$ в правую часть (1).

Анализ опубликованных данных о воспроизводстве находящейся на грани выживании популяции волжского осетра позволил сделать вывод о сильном действии эффекта Олли [10]. Словесно описанное зоологами нелинейное явление выражается в том, что если плотность популяции в большом ареале обитания становится ниже оптимальной, то непропорционально резко падает эффективность воспроизводства. Оценка смещения максимума распределения веса молоди в прудах при увеличенной сверхнорматива плотности позволил нам предложить модель в виде системы уравнений первого порядка с функционалом $\Theta(S)$, описывающую убыль поколения на интервале уязвимости $t \in [0, T]$.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -(\alpha w(t)N(t) + \Theta(S)\beta)\,N(t) \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{g}{N^k + \zeta}\,, \Theta(S) = \dfrac{1}{1 - \exp(-cS)}, \end{cases} \tag{2}$$

где: S – величина нерестового запаса; $w(t)$ — отражает условный уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; g — параметр, учитывающий ограниченность количества доступных кормовых объектов; убывающая функция $\Theta(S) \to 1$ при $S \to \infty$ и не влияет на вычисление $N(T)$ (возьмем $T = 40$ сут.) если численность запаса достаточно велика. Введение в систему ОДУ быстро убывающей функции $\Theta(S)$ отражает снижение эффективности воспроизводства при деградации популяции, связанное с уменьшением вероятности встречи особей в местах размножения. Влияние данного эффект можно оценить по имеющимся данным о состоянии осетровых [11]. Необходимый параметр ζ должен учесть ограничение темпов развития, не зависящее от $N(t)$; c — характеризующий степень выраженности эффекта Олли коэфициент; α — мгновенный коэффициент компенсационной смертности; β — мгновенный коэффициент декомпенсационной смертности. По мнению некоторых биологов начальный размер икринки должен уменьшаться при большей плодовитости, потому начальные условия (2) можно определять $N(0) = \lambda S,\ w(0) = \bar{w}/\sqrt{\lambda},$ где λ — средняя плодовитость популяции. В дальнейшем можно усложнить определение задачи Коши установлением связи плодовитости и введенного в модель показателя размерного развития $\lambda \sim w(T)$.

График моделируемой зависимости $R = f(S) = N(T)$ запаса и пополнения (рис. 1), полученный при численном решении задачи Коши (2) в инструментальной среде *AnyLogic* является унимодальной кривой с двумя нетривиальными пересечениями R_1^*, R_2^* с биссектрисой $N(T) = S$. Кривая отличается пологой ниспадающей правой ветвью с ненулевой горизонтальной асимптотой и крутой восходящей ветвью только при $R_1^* < R < R_{max}$.

(2) разработана для применения в форме дискретно-непрерывной системы в вычислительной среде, поддерживающей помимо библиотеки многошаговых численных методов и средства имитационного моделирования. Так получена последовательность непрерывных систем, связанных в момент переопределения начальных

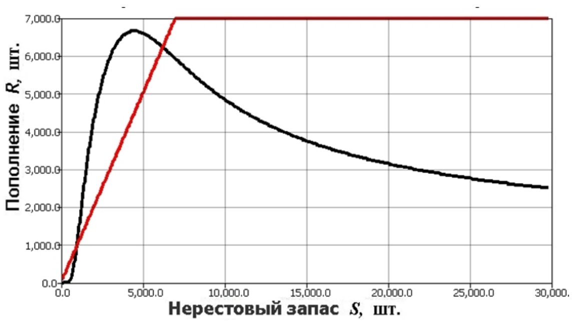

Рис. 1. $f(S), S \in \mathbb{N}^+$ по численному решению задачи Коши (2) для $t = T$.

условий: $N_{i+1}(0) = N_i(T)\lambda, w(0) = const$, и задающих дискретную траекторию. При организации модельных экспериментов необходимо вводить соответствие условного модельного времени отрезков $t \in \{[0, T]_i\}$ календарному. Использование событийно-управляемого подхода позволяет выделить некое особое и приводящее к переменам состояние итерационной системы, что в сочетании с непрерывным описанием популяционного процесса актуально для задачи рассмотрения последствий изменяющегося по некоторым условиям внешнего воздействия.

3. Свойства новой итерационной системы

Особенности разработанной модели удобно использовать для новых методов оценки последствий различных антропогенных воздействий на благополучие популяций, которые имеют несколько возможных вариантов. Для получения сравнительных характеристик различных стратегий эксплуатации биоресурсов мы предлагаем исследовать в вычислительной среде парные наборы модельных сценариев вмешательства в саморегулируемые популяционные процессы. Качественный сценарий будет отражать алгоритм изменений управляющего воздействия, решение о котором может быть принято в реальности контролирующим уровень воздействия экспертом.

Интересна последовательность решений и ответных реакций на них, приводящих к деградации эксплуатируемых биоресурсов. Так можно выделять динамику состояния с тогда момента, когда давление промысловой эксплуатации начинает превышать некоторый «неистощительный» уровень изъятия. Развитие моделируемой ситуации при изменении режима промысла зависит от свойств фазового портрета итерационной системы с адекватным статистическим данным законом эволюции. Для анализа данных мониторинга применяются специальные методы [12].

Поведение дискретно-непрерывной модели с законом эволюции на основе численного решения (2) качественно отличаются от итераций функций Рикера или

Шепарда разделением фазового пространства на две области притяжения. Граница областей $\partial\Omega_1$ представляет простой случай для мультистабильных систем, являясь неустойчивой точкой равновесия $\partial\Omega_1 \equiv R_1^*$, называемой репеллером. Анализ устойчивости неподвижных точек итерационной системы, реализованной в инструментальной среде моделирования, можно проводить с использованием свойства второй итерации $\psi^2(x)$. Необходимым и достаточным условием устойчивости неподвижной точки x^* одномерного отображения является неравенство $\psi^2(x) > x$ при $x < x^*$ и $\psi^2(x) < x$ при $x > x^*$.

Устойчивым является тривиальное состояние равновесия. Таким образом, модель подразумевает наличие критически низкой численности для существования биологического вида. Интересным представляется поведение траектории в окрестности точки репеллера $R_1^* \pm \epsilon$, когда под действием внешнего воздействия, характеризующегося некоторой неопределенностью, траектория медленно покидает эту окрестность.

4. Пример сценарного использования модели (2)

Рассмотрим сценарий, когда после длительного периода получения стабильных уловов у рыболовецких организаций возникает предположение, что запасы популяции S_{st} недоиспользуются промыслом. Подобное мнение победило при организации промысла волжских осетровых в начале 80-х гг. Пусть разрешенная доля изъятия H в момент $\bar{t}$ увеличивается: $H_1 = H_0 + \Delta H, \Delta H \approx 0.15$. В дискретно-непрерывной итерационной системе начальные условия сопрягаются так:

$$N_{i+1}\left|_{t=0} = (1-H)\lambda N_i\right|_{t=T_i}.$$

Несколько следующих сезонов уловы превышают среднемноголетние за предыдущий период. Эксперты, обосновавшие возможность увеличения уровня эксплуатации, утверждаются в своей правоте.

В сцепленных имитационных сценариях будем сравнивать популяции с различной введенной дополнительной промысловой нагрузкой и последующим её изменением в некоторый момент, визуализируя на графике две временных диаграммы величины уловов. К диаграммам под осью t выводится пересчет модельного времени в нумерованные календарные сезоны Y_i. Далее принятие решений и развитие процесса может происходить разными путями, отраженными в предикативно заданных условиях двух модельных экспериментов.

После кратковременного увеличения уловы снижаются до прежних значений и продолжают медленно уменьшаться со скоростью, зависящей от ΔH. Эксперты предполагают стабилизацию популяции, не вносят изменений в режим промысла и далее происходит резкое падение уловов. После такого падения остановка лова не спасает от деградации (рис. 2) $R_i \ll S_{st}$. Длительный сценарий деградации растянулся на 33 модельных сезона. Предположим, для второй популяции H_1 значительно превышает оптимальный уровень эксплуатации. Объемы вылова падают быстрее и эксперты смогут осмыслить негативные последствия. Тогда наиболее очевидное их решение в сезоне Y_{21} вернуться к уровню H_0, когда состояние популяции в ϵ окрестности репеллера R_1^* (назовем его псевдостабильным). Некоторое время уловы постоянны и промысловики не хотят уменьшать H. Незначительные изменения смертности неожиданно резко выведут из псевдостабильного равновесия и произойдет деградация (синяя кривая рис. 2). Поведение популяции низкой численности перестает удовлетворительно описываться детерминированной динамикой средних величин. Ученые имеют очень мало сведений о реальном состоянии потерявших промысловое значение биоресурсов.

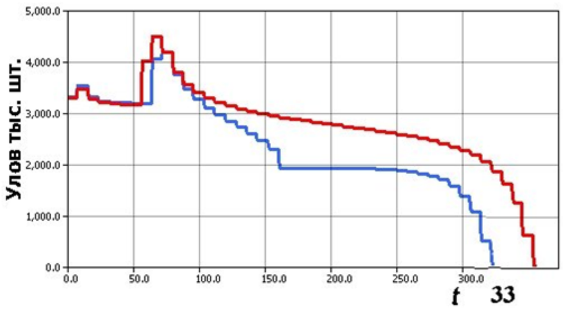

Рис. 2. Сценарии деградации при различном уровне перелова.

В случае, когда эксперты после получения данных о сокращении уловов за предыдущие три сезона своевременно переводят промысловый режим $H_2 = H_0 - \Delta H$ при $R_j > R_1^*$ обе имитированные популяции за 39 сезонов восстанавливают свои промысловые запасы (рис. 3).

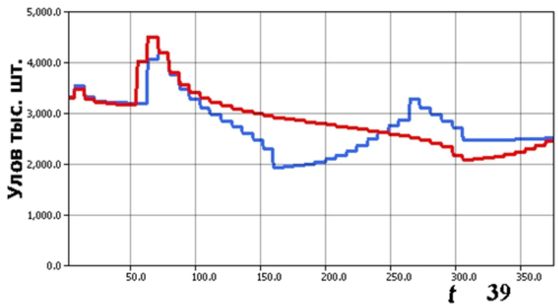

Рис. 3. Сценарии восстановления после перелова.

Длительный сценарий деградации (подобный красной кривой рис. 2) реализовался для популяций осетровых Каспийского моря. В 1979 г. уловы достигли рекордных 27 тыс.тонн в 1988-89 гг. произошло резкое падение уловов. Промысел не был приостановлен вовремя, эксперты рассчитывали на успех технологии искусственного воспроизводства [13]. Только в ноябре 2010 г. главы пяти государств Каспийского бассейна одобрили введение пятилетнего моратория на промышленный лов всех осетровых рыб. Три вида включены в список Конвенции по международной торговле видами дикой фауны и флоры, находящимися под угрозой уничтожения (CITES). Однако, остановить незаконный промысел несмотря на декларируемые усилия не удается, т. к. браконьерство часть системной социальной проблемы [14].

Известны примеры успешного преодоления риска деградации. За счет гибкой системы регулирования удалось предотвратить истощение запасов горбуши тихоокеанского побережья Канады, где установился баланс промысел–пополнение. Падение уловов привело к уменьшению из-за низкой рентабельности промысла числа купивших лицензию на лов рыболовецких судов.

Заключение

В работе предложена вычислительная модель воспроизводства водных биоресурсов, учитывающая ряд нелинейных эффектов. В системе ОДУ описано резкое снижение эффективности воспроизводства в ограниченном диапазоне низкой численности нерестового стада. Получена итерационная система для анализа управляемой популяционной динамики с двумя нетривиальными состояниями равновесия и имеющая точку критической численности. Развиваемый метод моделирования последствий эксплуатации популяций основан на формировании и сравнении модельных сценариев, для чего наиболее подходит предлагаемая дискретно-непрерывная структура.

Сценарный подход предполагает формализацию логики принятия экспертных решений по управлению промыслом. Особый интерес представляет выявление с помощью сценарных экспериментов характерных признаков начинающейся деградации биоресурсов из-за продолжающегося их перелова. Последствия перелова ощущают очень долго многие водные экосистемы. Постоянно отдыхающие в Крыму с начала 90-х гг. могли время от времени наблюдать буквально заполненные медузами бухты. К середине 80-х гг. турецкий промысел подорвал запасы хамсы, доминирующего планктоноядного вида и кормовой базы крупных хищников, что привело к вспышке численности питающихся планктоном медуз. Размножившиеся медузы поедают личинки рыб, и это препятствует восстановлению популяций черноморской хамсы и шпрота. Очевидно численность мелких рыб рода *Clupeonella* не вернется к прежнему уровню. Как свидетельствует Энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона в XIX веке кильку вылавливали в огромном количестве и использовали в качестве удобрения для полей. В нынешних условиях действуют несколько другие механизмы регулирования численности массовых биологических видов, и требуется постоянное совершенствование методов их компьютерного моделирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 14-07-00066.

Список литературы

1. *May R.M.* Simple mathematical model with very complicated dynamics // Nature, 1976, № 5560, P. 459–467.
2. *Ricker W.* Stock and recruitment // J. of the Fisheries research board of Canada, 1954, Vol. 5, P. 559—623.
3. *Perevaryukha A. Yu.* Hybrid model of bioresourses' dynamics: Equilibrium, cycle, and transitional chaos // Automatic Control and Computer Sciences, 2011, №4, P. 223—232.
4. *Hartman Ph.* On the local linearization of differential equations // Proceedings of the American Mathematical Society, 1963, Vol. 4, P. 568–573.
5. *Misiurewicz M.* Structure of mappings of an interval with zero entropy // Publ. Math. IHES, 1981, Vol. 53, P. 5–16.
6. *Feigenbaum M. J.* Universal behavior in nonlinear systems // Physica D, 1983, Iss. 1—3, P. 16–39.
7. *Singer D.* Stable orbits and bifurcations of the maps on the interval //SIAM journal of applied math, 1978, Iss. 35,P. 206–268.
8. *Sharkovskii A.N.* Coexistence cycles of continuous map of the line into itself // International Journal of Bifurcation and Chaos, 1995, Vol. 5, P. 1263—1273.
9. *Shepard M.P., Withler F. C.* Spawning stock size and resultant production for Skeena sockeye // J. of the Fisheries research board of Canada, 1958, №5, P. 1007–1025.
10. *Allee W., Bowen E.* Studies in animal aggregations: mass protection against colloidal silver among goldfishes // Journal of Experimental Zoology, 1932, №2, P. 185–207.
11. *Veshchev P.V., Guteneva G.I.* Efficiency of natural reproduction of sturgeons in the lower Volga under current conditions // Russian Journal of Ecology, 2012, Vol. 43, Iss. 2, P. 142–147.
12. *Garvey J. E., Wright R. A.* Searching for threshold shifts in spawner-recruit data // Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences, 2009, Iss. 2, P. 312—320.
13. *Zhuravleva O.L., Ivanova L.A.* Structural changes in the Russian sturgeon spawning stock under the regulated Volga flow // Journal of Applied Ichthyology, 1997, Vol. 15, P. 305-310.
14. *Matishov G.G., Raspopov V.M., Ponomareva E.N.* Contemporary state of the Russian sturgeon *Acipenser gueldenstaedtii* population of the Volga-Caspian basin // Problems of fisheries, 2010, Vol. 11, №2, P. 263—279.

Статья поступила в редакцию 17.01.2014

Донской В. И. Невычислимость VC-размерности семейств классифицирующих функций / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 5–13.

В статье получен следующий теоретический результат: емкость Вапника-Червоненкиса или, говоря иначе, VC-размерность произвольного общерекурсивного семейства классификаторов невычислима

У статті отриманий наступний теоретичний результат: місткість Вапника-Червоненкиса або, кажучи інакше, VC-размерность довільного загальнорекурсивного сімейства класифікаторів невичислíма

Гой Т. П. Інтеграли від функцій, породжених зростаючими факторіальними степенями / Т. П. Гой // Таврійський вісник інформатики та математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 14–22.

В статье исследуются две новые неэлементарные функции действительного переменного, которые являются интегралами от функций, определенных с помощью возрастающих факториальных степеней. Построены графики этих функций, установлены некоторые их свойства, в частности, установлена их связь с обобщенными гипергеометрическими функциями. Выведены обыкновенные дифференциальные уравнения, решениями которых являются новые функции.

У статті досліджуються дві нові неелементарні функції дійсної змінної, які є інтегралами від функцій, побудованих при допомозі зростаючих факторіальних степенів. Побудовані графіки цих функцій, встановлені деякі їхні властивості, зокрема, показаний їхній зв'язок з узагальненими гіпергеометричними функціями. Виведені звичайні диференціальні рівняння, розв'язками яких є введені функції.

Lukyanova E. A. 2013. On conditions imposed on sections of a Kripke structure that simulate the functioning of the compound components allocated in detailed Petri net of parallel distributed system for verification of accuracy of temporal logic formulae. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 1, pp. 23–30.

Изучаются модели Крипке детальной сети Петри и её компонентной сети Петри параллельной распределённой системы. Устанавливаются необходимые и достаточные условия для проверки истинности формул темпоральной CTL-логики по редуцированной модели Крипке — модели Крипке компонентной сети Петри.

Вивчаються моделі Кріпке детальної мережі Петрі та її компонентної мережі Петрі паралельної розподіленої системи. Встановлюються необхідні та достатні умови для перевірки істинності формул темпоральної CTL-логіки по скороченій моделі Кріпке — моделі Кріпке компонентної мережі Петрі.

Ольховська О. В. Оцінка швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач ігрового типу / О. В. Ольховська // Таврійський вісник інформатики та математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 31–42.

Задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу, у яких на стратегії гравців накладаються комбінаторні обмеження, є актуальним класом задач комбінаторної оптимізації. Для розв'язування цього класу задач раніше розроблено ітераційні методи, які є розігруванням гри та подібні до методу Брауна-Робінсон в матричних іграх. Ці методи реалізовані у програмному комплексі. Числові експерименти проведені за його допомогою показують, що ітераційний алгоритм є збіжним. Це ж обґрунтовано і теоретичним дослідженням збіжності. Метою даної публікації є визначення апріорної оцінки швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями–переставленнями на стратегії одного гравця, а також поширення цієї оцінки на задачі даного класу з іншими комбінаторними обмеженнями. За допомогою розробленої програмної реалізації було порівняно отриману теоретичну оцінку швидкості збіжності методу з результатами, отриманими експериментально. Відповідно до отриманих результатів, отримана теоретична оцінка швидкості збіжності підтвердилась експериментально. Так, зокрема, на задачах порядком квадратної матриці A, рівній 10, було виявлено, що швидкість збіжності не перевищує її теоретичну оцінку вже на 5-й ітерації. У роботі розглянуто доведення збіжності, оцінки швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування *комбінаторних оптимізаційних задач з обмеженнями-переставленнями, що накладаються на стратегії одного гравця. Оскільки комбінаторні обмеження на стратегії гравців можуть бути представлені різними комбінаторними множинами проведено узагальнення оцінки швидкості збіжності ітераційних методів розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з різними типами комбінаторних обмежень.*

Задачи комбинаторной оптимизации игрового типа, в которых на стратегии игроков накладываются комбинаторные ограничения, являются актуальным классом задач комбинаторной оптимизации. Для решения этого класса задач разработаны итерационные методы, которые построены на принципе разыгрывания игры и подобны методу Брауна-Робинсон в матричных играх. Эти методы реализованы в программном комплексе. Численные эксперименты, проведенные с его помощью, показывают, что итерационный алгоритм является сходящимся. Это же обосновано и теоретическим исследованием сходимости. Целью данной публикации является определение априорной оценки скорости сходимости итерационного метода решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа с ограничениями-перестановками на стратегии одного игрока, а также распространение этой оценки на задачи данного класса с другими комбинаторными ограничениями. С помощью разработанной программной реализации было проведено сравнение полученной теоретической оценки скорости сходимости метода с результатами, полученными экспериментально. Согласно полученным результатам, полученная теоретическая оценка скорости сходимости подтвердилась экспериментально. Так, в частности, на задачах с порядком квадратной матрицы, равным 10, было обнаружено, что скорость сходимости не превышает ее теоретическую оценку уже на 5-й итерации. В работе рассмотрены доказательства сходимости, оценки скорости сходимости итерационного метода решения комбинаторных оптимизационных задач с ограничениями-перестановками, которые накладываются на стратегии одного игрока. Поскольку комбинаторные ограничения на стратегии игроков могут быть представлены различными комбинаторными множествами проведено обобщение оценки скорости сходимости итерационных методов решения задач комбинаторной оптимизации игрового типа с различными типами комбинаторных ограничений.

Омельчук Л. Л. Системи специфікацій об'єктно-орієнтованих програм над номінативними даними / Л. Л. Омельчук // Таврійський вісник інформатики та математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 43–49.

Базуючись на композиційно-номінативному методі уточнення поняття програми, аксіоматичній системі специфікацій програм над номінативними даними, секвенційному численні композиційно-номінативних логік та мові Object-Z побудовано прототип аксіоматичної системи специфікацій програм над номінативними даними (OBJ-NDSL).

Основываясь на композиционно-номинативном методе уточнения понятия программы, аксиоматической системе спецификаций программ над номинативных данным, секвенциальные многочисленные композиционно номинативных логик и языке Object-Z построено прототип аксиоматической системы спецификаций программ над номинативных данными (OBJ-NDSL).

Павлов Е. А. Свертка симметричных пространств / Е. А. Павлов // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 50–55.

В данной статье рассматривается задача отыскания самого "узкого" пространства Марцинкевича, содержащего свертку заданных пространств Марцинкевича.

У даній статті розглядається задача визначення самого "вузького" простору Марцинкевича, що містить згортку заданих просторів Марцинкевича.

Щербина О. А. Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор) / О. А. Щербиина // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 56–72.

В настоящей работе сделан краткий обзор основных метаэвристических алгоритмов для задач комбинаторной оптимизации. Метаэвристики — это общие эвристики, позволяющие находить близкие к оптимальным решения различных задач оптимизации за приемлемое время. Метаэвристики пытаются объединить основные эвристические методы в рамках алгоритмических схем более *высокого уровня, направленных на эффективное изучение пространства поиска. Метаэвристики включают две категории: метаэвристики локального поиска и эволюционные алгоритмы.*

У даній роботі зроблено короткий огляд основних метаевристичних алгоритмів для задач комбінаторної оптимізації. Метаевристики — це загальні евристики, що дозволяють знаходити близькі до оптимальних рішення різних задач оптимізації за прийнятний час. Метаевристики намагаються об'єднати основні евристичні методи у рамках алгоритмічних схем більш високого рівня, спрямованих на ефективне вивчення простору пошуку. Метаевристики включають дві категорії: метаевристики локального пошуку та еволюційні алгоритми.

Юлдашев Т. К. Обратная задача для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма / Т. К. Юлдашев, К. Х. Шабадиков // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 73–81.

Изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Используются метод интегральных преобразований и метод последовательных приближений.

Вивчається однозначна разрешимость нелінійної зворотньої задачі для гіперболічного інтегро-диференціального рівняння Фредгольма. Застосовуються метод інтегральних перетворень і метод послідовних наближень.

Донской Д. В. Математическая модель оптимальной дозагрузки рекреационного предприятия / Д. В. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 82–92.

В статье предложены математическая модель оптимальной дозагрузки рекреационного предприятия для сезонов с низкой интенсивностью спроса и эвристический алгоритм типа GREEDY для решения определяемой этой моделью задачи.

У статті запропоновані математична модель оптимальної дозагрузки рекреаційного підприемства для сезонів з низькою інтенсивністю попиту і евристичний алгоритм типу GREEDY для вирішення визначуваною цією моделлю завдання.

Переварюха А. Ю. Разработка вычислительных моделей воспроизводства рыб для сценарного исследования / А. Ю. Переварюха // Таврический вестник информатики и математики. — 2014. — № 1 (24). — С. 93–103.

Предложена вычислительная модель динамики популяций, которая предназначена для исследования в специализированной инструментальной среде, поддерживающей событийное моделирование. В основе модели оригинальная формализация изменения смертности поколения в зависимости от плотности и скорости роста. Использование итераций численного решения системы дифференциальных уравнений на интервале времени обусловлено практическими потребностями рыбоводства, например оценки эффективности искусственного пополнения промысловых запасов при выращивании молоди разного возраста или веса. Представление модели наиболее соответствует задаче формирования сценариев и анализа различных вариантов развития ситуаций при эксплуатации биоресурсов, так как позволяет динамически изменять заданный набор управляющих воздействий и определять признаки угрожающего режима промыслового изъятия.

Запропонована обчислювальна модель динаміки популяцій, яка призначена для дослідження в спеціалізованій інструментальної середовищі, що підтримує подійне моделювання. В основі моделі оригінальне формалізація зміни смертності покоління в залежності від щільності і швидкості росту. Користування ітерацій чисельного вирішення системи диференціальних рівнянь на інтервалі часу зумовлено практичними потребами рибництва, наприклад оцінювання ефективності штучного поповнення промислових запасів при вирощуванні молоді різного віку або ваги. Представлення моделі більше відповідає завданню формування сценаріїв та аналізу різних варіантів розвитку ситуацій при експлуатації біоресурсів, оскільки дозволяє динамічно змінювати заданий набір керуючих впливів і визначати ознаки загрозливого режиму промислового вилучення.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Гой Тарас Петрович	к. ф.-м. н., доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника, факультет математики и информатики *e-mail: tarasgoy@yahoo.com*
Донской Владимир Иосифович	д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры информатики, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, факультет математики и информатики, главный редактор журнала ТВИМ *e-mail: donskoy@tnu.crimea.ua*
Донской Дмитрий Владимирович	к. э. н., доцент кафедры государственного и регионального управления, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, факультет управления *e-mail: ddv-ddv@mail.ru*
Лукьянова Елена Александровна	к. ф.-м. н., доцент кафедры алгебры и функционального анализа, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, факультет математики и информатики *e-mail: lukyanovaea@mail.ru*
Ольховская Елена Владимировна	Заведующая сектором разработки электронных средств обучения, Полтавский университет экономики и торговли *e-mail: lena@olhovsky.name*
Омельчук Людмила Леонидовна	к. ф.-м. н., ассистент кафедры теории и технологии программирования, Киевский национальний университет имени Тараса Шевченко, факультет кибернетики *e-mail: l.omelchuk@gmail.com*
Павлов Евгений Александрович	д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедрой социальной информатики и математики, Крымский инженерно-педагогический университет, факультет информатики *e-mail: pavlov-oe@bk.ru*

Переварюха Андрей Юрьевич — к. т. н., сотрудник лаборатории прикладной информатики, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
e-mail: madelf@pisem.net

Шабадиков Конак Хусейнович — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет им. Улугбека, физико-математический факультет, г. Фергана, Узбекистан
e-mail: konak.shabadikov@mail.ru

Щербина Олег Александрович — д. ф.-м. н., профессор кафедры информатики, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, факультет математики и информатики
e-mail: oshcherbina@gmail.com

Юлдашев Турсун Камалдинович — к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет, г. Красноярск, Россия
e-mail: tursunbay@rambler.ru

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі «**Таврійський вісник інформатики і математики**» приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати наступне:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю у форматі PDF.
4. Заявку на сайті журналу **www.tvim.info**.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.

2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).

3. ***Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1*** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

   У *вступі* необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

   – *Постановка проблеми* у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями
   – *Аналіз останніх досліджень і публікацій,* в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор
   – *Невирішені* раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття
   – *Формулювання цілей статті (постановка задачі)*

   У *висновку* з данного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом) *результати* дослідження *та перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.*

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або абревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2008, № 3.
6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету twim.sty, який можно отримати за адресою **www.tvim.info**. Файли статті у форматі TeX і PDF (плюс графічні файли, якщо потрібні) необхідно прикріпити до заявки на публікацію статті на сайті журналу.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надавати за допомогою сайта **www.tvim.info**.
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

ПОСТАНОВА
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ
від 15.01.2003 р. №7-05/1

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 ”Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію“.

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання данної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження с повним обгрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України — В. В. Скопенко

Вчений секретар — Л. М. Артюшин

Подписано к печати 10.06.2014. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 12 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, Республика Крым, 295007