

ТАВРИЧЕСКИЙ
ВЕСТНИК
ИНФОРМАТИКИ И
МАТЕМАТИКИ

№ 1 (22) ' 2013

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 26.05.2010 р. № 1-05/4 журнал "Таврійський вісник інформатики та математики" внесено до переліку фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата фізико-математичних наук (01.01 – математика, 01.05 – інформатика і кібернетика).

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУКИ И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО**

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА

В. И. ДОНСКОЙ	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Е. П. БЕЛАН	профессор, доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЁВ	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ	профессор, доктор физико-математических наук
В. В. КРАСНОПРОШИН	профессор, доктор технических наук
М. А. МУРАТОВ	профессор, доктор физико-математических наук
И. В. ОРЛОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ	профессор, доктор физико-математических наук
С. К. ПОЛУМИЕНКО	доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
Ю. С. САМОЙЛЕНКО	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. ЧИКРИЙ	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
О. А. ЩЕРБИНА	профессор, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:

к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ученый секретарь,
к. ф.-м. н. **В. Ф. БЛЫЩИК**, к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА**

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский научный центр Национальной Академии наук и
Министерства образования и науки Украины
пр-т Вернадского, 2, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Факультет математики и информатики ТНУ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

Тел. гл. редактора: (0652) 63-75-42
Тел. редакции: (0652) 602-466
e-mail (гл. редактор): donskey@tnu.crimea.ua
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Машинное обучение, распознавание и извлечение закономерностей
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Вычислительная математика

Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ Национальной академии наук
и Министерства образования и науки Украины
Протокол № 3 от 4 июня 2013 г.

© КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

90 лет со дня рождения академика В. М. Глушкова	4
Donskoy V. I. Binary Decision Tree Synthesis: Splitting Criteria and the Algorithm LISTBB..	11
Блыщик В. Ф. Разработка и использование персонального сайта на CMS Drupal в учебно-методическом процессе	35
Ємець О. О., Тур О. В. Предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації	42
Коваленко А. И., Марянин Б. Д., Смолич В. П. Система массового обслуживания с ненадежной линией и нетерпеливыми заявками	53
Королік Р. П., Пічкур В. В. Максимальні за включенням множини практичної стійкості множинних систем з багатозначною динамічною складовою	61
Песчанский А. И., Коваленко А. И. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором	69
Щербина О. А. Средняя оценка эффективности локального алгоритма на классе всех блочно-древовидных структур с дополнительными ограничениями	80
Юлдашев Т. К. Задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени	89
Рефераты	99
Список авторов номера	104
К сведению авторов	106

**24 АВГУСТА ИСПОЛНЯЕТСЯ 90 ЛЕТ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ
ВЫДАЮЩЕГОСЯ УЧЕНОГО, ПРИЗНАННОГО ВО ВСЕМ МИРЕ
ПИОНЕРА КИБЕРНЕТИКИ, ГОРДОСТИ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ НАУКИ
АКАДЕМИКА ВИКТОРА МИХАЙЛОВИЧА ГЛУШКОВА**



Многие не без основания считают, что если бы идеи академика Глушкова были реализованы в 60-е годы прошедшего века, то, возможно, Советский Союз существовал и сейчас и был бы самой передовой державой мира. Через несколько месяцев после смерти Виктора Михайловича (1982) вышла последняя написанная им книга «Основы безбумажной информатики». Это было популярное издание, рассчитанное на широкую аудиторию, и многие её страницы с увлечением читались людьми, далекими от информатики. С не меньшим интересом эту книгу читают и сейчас. Академик увлекательно рассказал в ней о перспективах вычислительной техники в быту: о том, какими будут телевизоры и телевидение будущего, о многофункциональных телефонных аппаратах, о стиральных машинах с микропроцессорами и даже о компьютерных играх. Чрезвычайно любопытно читать рассуждения академика об издательском деле — какими будут компьютерная верстка газет, книг, журналов, электронные версии изданий.



А заканчивалась эта книга удивительными словами: «Уже недалёк тот день, когда исчезнут обычные книги, газеты и журналы. Взамен каждый человек будет носить с собой “электронный блокнот”, представляющий собой комбинацию плоского дисплея с миниатюрным радиоприемником-передатчиком. Набирая на клавиатуре этого “блокнота” нужный код, будет можно, находясь в любом месте на нашей планете, вызвать из гигантских компьютерных баз данных, связанных в сети, любые тексты, изображения (в том числе и динамические), которые и заменят не только современные книги, журналы и газеты, но и современные телевизоры. Зайдет ли дело в обозримом будущем столь далеко — гадать трудно. Несомненно одно, что прогресс электронной технологии, машинной информатики и телематики происходит столь бурными темпами, что фантастика в этой области становится реальностью буквально на наших глазах».

Через 28 лет после смерти Глушкова, 27 января 2010 года, Стив Джобс презентовал планшетник iPad — первое посткомпьютерное устройство, тот самый «электронный блокнот», о котором писал великий учёный. Качества, которыми обладал Джобс, — позволившие ему реализовать замечательное устройство, — в избытке были у Виктора Михайловича Глушкова с детства. Будучи ребенком, конечно же, вундеркиндом, он с упорством и ярким талантом доводил до конца свои начинания. Чего только стоит управляемая магистраль к его радиоуправляемой модели корабля! Тяжелый из-за большого числа деталей, появившихся на заре развития электроники,

корабль нужно было доставлять на пруд и возвращать обратно. И задача доводится до конца: магистраль — как миниатюрная железная дорога!

Конечно, Виктор Михайлович — выдающийся ученый, математик, мыслитель, гениальный изобретатель. Но в ряду великих — он один из тех немногих, кто умел доводить до конца сложнейшие проекты, воплощать в жизнь самые невероятные идеи. И мог это делать очень быстро! Нужно было только понять, насколько он опережает время, и верить не дряхлеющим руководителям страны, а человеку, который может не просто декларировать, а созидать!

На Западе Глушков считается «отцом советской кибернетики». Именно ему самая авторитетная энциклопедия в мире “Britannica” заказывала статью «кибернетика» (он также автор аналогичной статьи в Большой Советской Энциклопедии), много лет он был официальным советником генерального секретаря ООН по вопросам кибернетики. Его книга «Введение в кибернетику» была основным учебником в западных университетах. Американцы буквально охотились за академиком Глушковым. Ему предлагали любые условия для работы в США, приглашали читать лекции.

Глушков, будучи доктором наук в области чистой математики, занялся вопросами информатики только в 1957 году. К тому времени в СССР уже существовало и успешно развивалось научное направление, позже названное кибернетикой. Действительно, СССР, несмотря на все потери, осуществил историческую модернизацию, занял по абсолютным показателям промышленного производства второе место в мире после США и стал одной из двух стран, способных производить любой вид промышленной продукции, доступный тогда человечеству. В 1958/59 учебном году советские вузы выпустили в три раза больше инженеров, чем высшая школа США. Была реорганизована Академия наук, создано Сибирское отделение АН с крупнейшим в мире исследовательским центром в Новосибирске, создан Объединённый институт ядерных исследований в Дубне; запущен самый мощный в мире синхрофазотрон, созданы самые совершенные по тому времени реактивные самолёты; СССР уверенно опережал американцев в космосе.

Именно в эту эпоху, в 1956 году, для руководства бывшей лабораторией С. А. Лебедева (ныне Институт кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины) в Киев был приглашён молодой украинский ученый Виктор Глушков. Успехи Глушкова в немалой степени определялись его математической эрудицией алгебраиста. Он сам перед смертью вспоминал: «Вычислительные машины тогда проектировались на основе инженерной интуиции. Мне пришлось разбираться в принципах построения ЭВМ самому. Я решил превратить проектирование машин из искусства в науку. То же самое, естественно, делали и американцы, но у них эти материалы

появились позже». Действительно, Виктор Михайлович разработал методы структурного синтеза цифровых автоматов и методы автоматического построения ЭВМ вместе с программным обеспечением. Машины «сами» проектировали другие машины. И эффект не заставил себя ждать. Уже через три–четыре года созданные Глушковым вычислительные машины стали лучшими в мире, сам он стал академиком, вице-президентом АН Украины, Героем Социалистического труда, лауреатом Ленинской и всех мыслимых научных премий (кроме Нобелевской: математикам её не присуждают).



Глушков был чрезвычайно одарённым человеком не только в математике. Однажды студентом он на спор читал наизусть стихи десять часов подряд, причём «Фауста» Гете, Шиллера и Гейне на немецком языке. Знал немецкий, английский и французский языки. Много работать, учиться он привык с детского возраста, со школьной скамьи. В восьмом классе поставил себе цель: решить все задачи из университетского задачника по высшей математике — и сделал это за одно лето.

Под его руководством был разработан проект системы автоматизированного управления экономикой — «Общегосударственной автоматизированной системы учёта и обработки информации» (ОГАС). Глушков предполагал создание в масштабах страны мощной компьютерной сети, подобной нынешнему Интернету, но обладающей гораздо большим числом функций, с помощью которой можно было бы не только обрабатывать, контролировать и корректировать управленческие решения, но в итоге изменить сам механизм управления экономикой. Сейчас, идеи ОГАС используются крупными западными корпорациями в управлении производством.



Это была реальная программа, которая, по мнению Глушкова, за десять лет могла быть внедрена и оптимизировала бы всю советскую экономику. Но программу похоронило руководство СССР: они выбрали так называемую косыгинскую реформу, которая так и не была реализована и закончилась крахом СССР.

Американцы сильно обеспокоились возможностью создания ОГАС. ЦРУ провело блестящую операцию по недопущению реализации ОГАС. Вожди СССР получали обзоры западной прессы: «Царь советской кибернетики академик В. М. Глушков предлагает заменить кремлёвских руководителей вычислительными машинами», а западные «голоса» рассказывали, что ОГАС создается КГБ для тотальной слежки за гражданами. Сегодня, спустя тридцать лет, мы узнаем из новостей, распространенных по всему миру и подтвержденных достоверно, что слежку при помощи интернет широко используют спецслужбы США.

Борьба за ОГАС шла много лет, но система так и не была реализована. История этой драматической борьбы рассказана самим Глушковым с яркими характеристиками советских вождей (воспоминания записала его дочь на магнитофон). Упоминает Глушков и о двух покушениях на его жизнь, которые, по его мнению, организовывало ЦРУ.

В 1967 году американцы купили в СССР лучшую в мире на тот момент, оригинальную мощную глушковскую ЭВМ «МИР». Персональных компьютеров в ту пору не было. Реализованная блестяще машина имела стековую организацию памяти, дисплей со световым пером, обеспечивающий интерактивное взаимодействие пользователя с машиной, а главное — аппаратно реализованный язык программирования, позволявший выполнять символьно-аналитические преобразования, интегрировать функции, решать уравнения, выводить графики. Подобные возможности сегодня реализованы программно в пакетах «Математика», «Mathcad», «Maple».



Но в том же году в СССР было принято невероятное по глупости решение: приостановить отечественные разработки компьютеров и взять за основу унификации электронную платформу и программное обеспечение американской IBM 360. Академик Н. Н. Моисеев вспоминал, что Виктор Михайлович, потрясенный случившимся, тогда сказал: «Теперь они потеряют всё». Советские системы Лебедева и Глушкова остались только на атомных объектах и в противоракетной обороне. Глушков воспринял решение о прекращении отечественных разработок ЭВМ как личную трагедию. До конца жизни он пробивал в политбюро идею созыва специального пленума ЦК по информационным технологиям. Решение такое было принято. Пленум много раз переносился, но так и не состоялся. Подготовленные Глушковым материалы использовал Горбачёв на специальном совещании в ЦК в 1985 году. Но было уже поздно.



Прошли годы, и мир очень сильно изменился. Наступила информационная эпоха — такая, какой ее представлял Глушков.

Наследие ученого представляет огромный интерес, переосмысливается и внедряется в передовые технологии информационного управления. Но хочется обратить особое внимание на величие самоотдачи В. М. Глушкова, его преданность науке и самоабвенность, его величайший подвиг и жизнь, подобную мгновенному незабываемому полету звезды.

И вот что ещё запомнил Н. Н. Моисеев. Виктор Михайлович сказал: «смогут ли понять будущие поколения, какой интересной, наполненной жизнью мы жили . . . ».

Использованы воспоминания и фотографии ученых — соратников, современников, учеников академика Глушкова и материалы статьи:

Сергей Комарницын. Предвидевший будущее //

Газета «Городские новости»: Красноярск, 26.01.2012, №2511.

<http://gornovosti.ru/tema/history/predvidevshiy-budushcheye18984.htm>

BINARY DECISION TREE SYNTHESIS: SPLITTING CRITERIA AND THE ALGORITHM LISTBB

© V. I. Donskoy

TAVRIDA NATIONAL UNIVERSITY
MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE DEPARTMENT
VERNADSKY AV., 4, SIMFEROPOL, ARC, 95007, UKRAINE
E-MAIL: *donskoy@tnu.crimea.ua*

Abstract. In our days, interest to the class of inductors on the basis of decision trees does not weaken, especially in the context of Data Mining paradigm. At the same time most widespread Quinlan algorithms ID3 and C4.5, as we show in the paper, are not the best. It is therefore possible to see the successful attempts of creation another heuristic splitting criteria for the algorithms of synthesis of decision trees. Comparative definition of different splitting criteria used for the synthesis of binary decision trees is the purpose of the paper. We included the criteria D , Ω , Z_1 and other which were developed by the author yet at 1979-80 years. These criteria define combined splitting principle which is used in the algorithm LISTBB.

INTRODUCTION

The idea to use decisions trees for machine learning and recognition appeared in the articles of Hunt and Hoveland at the end of 50th past century. But the central work came into notice of mathematicians and programmers to this scientific direction all over the world there was the book of Hunt, Marine, and Stone published in 1966 [8]. In the Soviet union the scientific direction related to the decision trees began to develop approximately at the same time at A. Blokh [25] scientific school. From numerous works of this school it is necessary to pay the special attention to the paper of V. Orlov [39]. In this Orlov's paper, yet at the beginning of 70th last century — more than on 10 years before J. R. Quinlan — an entropy splitting criterion and the algorithm for decision tree synthesis was presented, which on principle did not differ from the widely in-use algorithm ID3.

In our days, interest to the class of inductors on the basis of decision trees does not weaken, especially in the context of paradigm of Data Mining. At the same time most widespread Quinlan's algorithms ID3 and C4.5, as possible to see below, are not the best. It is therefore possible to find out the successful attempts of creation another heuristic algorithms for synthesis decision trees by precedent information [15, 14].

The aim of the present paper is comparative description of the different splitting criteria used for the synthesis of binary decision trees (BDT), including the criteria developed by the author yet in 1979-80 years which underlay the algorithm LISTBB.

The name used for the algorithm LISTBB is explained to those, that it was first realized on the basis of list presentation (LIST); branching (B) — designate splitting, and second B — designate the case of Boolean variables.

Algorithm LISTBB and its modifications LISTD and LISTBB(P) were repeatedly used in practical tasks. These algorithms were used for development programm systems RADIUS-222, TRIOL, INTMAN [31, 34, 33]. The main feature of algorithm LISTBB consists of that he is “sharpened” exactly to minimization of the number of leaves of BDT inductor. Such approach gives results better then another approaches to splitting in the average (by a set of the tests).

BDT Synthesis, general speaking, consists of two stages: a) choice of feature predicates and b) decision tree construction. These stages can be joined as it used when decision tree corresponds to the partition of real feature space by hyper parallelepipedes. We will further suggest that two stage approach to the BDT synthesis is used, the set of feature predicates is given, and logical sample table is given as well.

Each inner node of BDT corresponds some fixed feature predicate. Each inner node has two outgoing edges which corresponds “zero” and “one” values of this fixed feature predicate. Any branch of BDT has no the same predicates in it nodes and ends by the leave marked by the class number. Recognizing algorithm which defined by the BDT uses this class to identify all the objects (points of the feature space) hits into partition element according to the branch.

It is well known that the number of the inner nodes of BDT is equal to $\mu - 1$, where μ is the leaves number. Then minimization of the leaves number is equal to minimization of the inner nodes number or the number of the tests executed in the inner nodes.

The length of the branch is the number of the nodes contained in this branch. The height of BDT is the length of its branch with the most nodes number. A tree is called uniform (balanced) if all its branches has equal length.

We will identify n feature predicates given for BDT synthesis with the Boolean variables x_1, \dots, x_n .

The class of the Boolean function which is representable by BDT is complete: by mean some BDT the algorithm for realization any Boolean function can be realized. This important property can be easy proved by consecutive Shannon expansion by one variable. But the class of Boolean functions defined by BDT with the number of leaves bounded by the constant μ is enough narrow [32].

The expansion by r variables along any BDT branch defines the interval of the rank r in the partition of the set B^n of the vertexes of unit n -dimensional cube. Any element of this partition is marked by the class number contained in the corresponded BDT

branch leaf. We can say that BDT classifies the intervals of the partition. The codes of the interval is the set of values of predicates, placed in the inner nodes of the branch. Dimension of the interval of rank r is $n - r$ and such interval contains 2^{n-r} points.

When we consider the branching process as the sequential partition of B^n to intervals we use the set-theoretic approach in Boolean algebra defined by Yu. I. Zhuravlev [36]. This very fruitful approach stimulated development of the splitting criteria based on the concept of separability [37] presented in this paper. BDT synthesis with minimum leaves number is equal to synthesis of shortest orthogonal covering which is correct relatively the sample points distribution by partition intervals.

The leaves number μ of BDT is natural measure of its complexity because the number of the inner nodes $\mu - 1$ defines the number of the same type executable steps in process of “steady raising” synthesized BDT.

Let q be number of the classes; $\mathcal{D}(n, q, \mu)$ be the family of BDT with exactly μ leaves. The exact formula for the number $d(n, q, \mu) = |\mathcal{D}(n, q, \mu)|$ is unknown. Arbitrary Boolean function is presented by BDT, generally speaking, not uniquely.

In the paper [32] the asymptotic estimation on condition that $n \rightarrow \infty$ is obtained:

$$d(n, q, \mu) \sim (\mu - 1)! [q(q - 1)]^{\mu-1} n(n - 1)^{\mu-2},$$

and it is proved that the number $b(n, 2, \mu)$ of Boolean functions which can be presented by BDT with exactly μ leaves satisfy inequality

$$b(n, 2, \mu) < (\mu - 1)! 2^{\mu-1} n^{\mu-1}.$$

Use of the pVCD method [29, 30] allows to find Vapnik-Chervonenkis Dimension (VCD) of the finite class $\mathcal{B}(n, 2, \mu)$ of decision functions presentable by BDT with the leaves number not exceeding μ in the case of two classes [4]:

$$VCD(\mathcal{B}(n, 2, \mu)) < (\mu - 1)(\log(n + 1) + \log \mu + 1). \tag{1}$$

1. ESTIMATION METHODS FOR DECISION TREES AS EMPIRICAL INDUCTORS

Machine Learning by sample (by precedents), we speak about in our paper, realizes empiric induction principle which consists in synthesis of decision by mean of generalization of particular cases to their common features. We consider such case when common features, which is found as result of machine learning, is represented as the set of concepts (by E. Hunt). These concepts are presented in the form of BDT. Conditional features or concepts are the conjunctions which corresponds to branches of the BDT. These conjunctions define the set of decision Boolean functions. Notice, machine learning must be organized such the way that common features were true on the as most as possible

examples which were not used to correct BDT in the learning process. So, if we have l examples in the sample, and we synthesize step by step BDT, we graft the Tree in case of error. Another words, we correct the Tree if example is recognized incorrectly. If r is such number of examples which is used for correction BDT, then the number $l - r$ examples must be as more as possible and these $l - r$ examples must be correct recognized by BDT. Then we can speak with confidence that learnability takes a place.

The aim of this paragraph is to ground that the problem of BDT synthesis must be stated as the problem of searching BDT with minimal leaves number which classifies correctly as more as possible number of examples. There are at least three approaches to ground this state.

- Class of BDT which is used for decisions making becomes narrower, when becomes smaller the parameter μ which bounds number of leaves. In that case VCD of this class becomes smaller and learnability has a place in accordance with statistical Vapnik-Chervonenkis theory.

- Another statistical estimations of the statistical reliability BDT, which doesn't use VCD, as well become better when the parameter μ becomes smaller.

- The description length of the BDT becomes shorter, when the number of his leaves is less, that determines reliability of recognition on the basis of principle of MDL – minimum description length.

We will describe these three approaches briefly.

1. Difficulty of estimation of BDT probability errors is explained thus empirical error rate, which is found by numbers of errors obtained by the count on the sample, are biased. But finiteness of VCD of the class of BDT is sufficient condition for uniform convergence of empirical error rate to the error probability. The less VCD the higher uniform convergence and the less examples we need to achieve adequate accuracy. The estimation (1) manifests the following conclusion: the smaller leaves number μ the smaller VCD of the class $\mathcal{B}(n, 2, \mu)$ of BDT. So, minimization of the leaves number μ allows to achieve learnability.

2. The accuracy of BDT as empirical inductor can be estimated by the check sample. In this case the following probability scheme is used. Elements from the check sample are drawn out from universe accidentally and independently of one another. The check sample is correct and has no examples which are contained in the learning sample. Then error rate of BDT on the check sample will be unbiased.

We consider Boolean variables and suppose that source feature space maps into $B^n = \{0, 1\}^n = \{\tilde{x} : \tilde{x} = (x_1, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}\}$. Let P is probabilistic measure on B^n ;

$\sum_{\tilde{x} \in B^n} P(\tilde{x}) = 1$. Let $P(E)$ be the error probability of arbitrary BDT with μ leaves when arbitrary $\tilde{x} \in B^n$ will be recognized.

If BDT classifier has μ leaves, the length of the check sample is l_c , and δ_c is the number of errors of this BDT on l_c tests, $0 \leq \delta < 1$, then for any $\varepsilon : 1 > \varepsilon > \delta$

$$\Pr(P(E) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu}{4l_c(\varepsilon - \delta)^2};$$

$$\Pr(P(E) \geq \varepsilon) < \exp\left\{-\frac{(\varepsilon - \delta)^2 l_c}{\mu}\right\}$$

(look Appendix I). From this inequalities we can conclude that statistical reliability of BDT as higher as the leaves number is smaller.

3. Not losing community, we consider the case when the number of classes is equal two. Let us programme the binary word p which can be used to decompress any BDT with μ leaves with a goal to estimate Kolmogorov complexity of such BDT. We present any BDT inner node $(1, \dots, \mu - 1)$ by the atom word which consists from two parts: cod of variable number $(1, \dots, n)$ -prefix — and concatenated code of the number of the next atom or class value (0 or 1) — ending. Atom prefix has $n + 1$ possible values. 0 and 1 reserved for class numbers; $2, 3, \dots, n + 1$ used for feature numbers $1, \dots, n$. Atom ending has μ possible values: 0 and 1 reserved for class numbers as well as in the prefix, and the rest $\mu - 2$ values reserved for the pointers to BDT nodes (atoms). We use the list of atoms to present and describe BDT. According this list we can estimate description length or prefix Kolmogorov complexity $KP(BDT_\mu)$ of BDT with μ leaves:

$$KP(BDT_\mu) < 2([\log \log n] + [\log \log \mu]) + (\mu - 1)([\log(n + 1)] + [\log \mu]),$$

$$KP(BDT_\mu) \approx 2(\log \log n + \log \log \mu) + (\mu - 1)(\log(n + 1) + \log \mu).$$

It is evident the less leaves number the shorter BDT classifier description or its prefix Kolmogorov complexity.

2. SPLITTING CRITERIA

The choice of variable or predicate for the splitting is the main element of all BDT synthesis algorithms. Splitting is equal to partition of some Boolean interval N_t into two intervals N_t^1 and N_t^2 so that $N_t^1 \cup N_t^2 = N_t$, $N_t^1 \cap N_t^2 = \emptyset$, where t is step splitting number. Partitionable interval must necessarily contains examples from different classes.

Let k be the number of variable which is chosen for the partition of the interval N_t . Then we denote two intervals of partition as $N_t^1(k)$ and $N_t^2(k)$. We define $A(k) = N_t^1(k) \cap T_{l,n}$ — the set of examples (points) from the learning sample (learning table) $T_{l,n}$ which hits to the interval $N_t^1(k)$. Analogously $B(k) = N_t^2(k) \cap T_{l,n}$.

The table $T_{l,n}$ consists of l rows (examples) and n columns — values of variables x_1, \dots, x_n . Additionally any row from $T_{l,n}$ is marked by the class number. Let $|A(k)| = m_1(k)$ and $|B(k)| = m_2(k)$.

We will talk that the predicate $S(k)$ is splitting criterion when variable x_k is chosen for splitting when $S(k) = 1(True)$.

Let us consider the following criteria.

S₂ criterion (of complete separability). $S_2(k) = 1$ iff the set $A(k)$ contains examples of only one class and $B(k)$ contains examples of only one class, and the classes of the examples from $A(k)$ and $B(k)$ are different. Else $S_2(k) = 0$.

S₁ criterion (of partial separability) [35].

$S_1(k) = 1$ iff the set $A(k)$ contains examples of only one class or $B(k)$ contains examples of only one class; else $S_1(k) = 0$. It is evidently that $[S_2(k) = 1] \implies [S_1(k) = 1]$.

Z₁ criterion (of maximum partial separability) [35].

Let $\exists k : S_1(k) = 1$ and $Z_1(k)$ is the number of points from the interval N_k^1 or N_k^2 which belong only one class. Then the variable with the number $k_* = \arg \max_k Z_1(k)$ must be chosen for the splitting.

D criterion (of uniform pairs separability) [35]. Let $T_{m_t,n} = T_{l,n} \cap N_t$ is subset of points from the learning sample contained in the interval N_t ; $K_t(k)$ — the number of pairs of examples of different classes in the subset $T_{m_t,n}$ which are different by the value of variable x_k . We will talk that **D** criterion is used iff $k^* = \arg \max_k K_t(k)$ and variable x_{k^*} is used for the splitting.

D criterion properties.

1° Let the number of points in the interval N_t which are to be shatter is fixed. Let any allocations of these points and their class number marks in the partitionable interval N_t are possible. To the value of $D(k^*) = \max_k K_t(k)$ be maximum possible (when interval N_t is shattered) it is necessary and sufficient the following two conditions simultaneously:

(i) the class of any point from $A(k^*)$ is different from the class of any point from $B(k^*)$ and

(ii) The partition of N_t is uniform: $m_1(k^*) = m_2(k^*)$ when $m_{1,2}$ is even and $|m_1(k^*) - m_2(k^*)| = 1$ when $m_{1,2}$ is odd, where $m_{1,2} = m_1(k^*) + m_2(k^*)$ is the number of points contained in the interval N_t .

2° **D** criterion can be specialized and used for any types feature spaces and any separating predicates.

DKM criterion (Dietterich, Kearns, Mansour) [10]. This criterion is meant for two classes of examples. If the first interval $N_t^1(k)$ of the partition contains s_{11} examples of the first class and second interval $N_t^2(k)$ of the partition contains s_{22} examples of the

second class then $DKM(k) = 2\sqrt{\frac{s_{11}s_{22}}{m_{1,2}}} = 2\sqrt{\hat{p}_{11}\hat{p}_{22}}$, where \hat{p}_{11} and \hat{p}_{22} are the empirical estimations of probability of examples of the first class will appear in the interval $N_t^1(k)$ and examples of the second class will appear in the interval $N_t^2(k)$. In the paper [10] it is shown that the DKM criterion is more preferable than E criterion and G (Gini) criterion (see below).

DKM criterion properties.

1° $DKM(k) = 1$ iff any interval of the partition contains examples which belong to only one class and $s_{11} = s_{22}$.

2° DKM criterion possesses the uniformity property as well as D criterion.

3° But D criterion has the preference in comparison with DKM criterion because it can be used when the number of classes is greater than 2.

TWO(Twoing) criterion.

Let we have two classes of examples and two intervals of the partition: $N_t^1(k)$ and $N_t^2(k)$. The interval $N_t^1(k)$ contains s_{11} points of the first class and s_{21} points of the second class; $N_t^2(k)$ — s_{12} points of the first class and s_{22} points of the second class; $m_1 = s_{11} + s_{21}$, $m_2 = s_{12} + s_{22}$. So, $m_{1,2}$ points are shattered. The Twoing criterion is defined by the following expression:

$$TWO = \frac{m_1 m_2}{m_{1,2}^2} \left(\left| \frac{s_{11}}{m_1} - \frac{s_{12}}{m_2} \right| + \left| \frac{s_{21}}{m_1} - \frac{s_{22}}{m_2} \right| \right)^2,$$

$$TWO = \hat{p}\hat{q} \left(|\hat{p}_{11} - \hat{p}_{12}| + |\hat{p}_{21} - \hat{p}_{22}| \right)^2,$$

where $\hat{p} = \frac{m_1}{m_{1,2}}$, $\hat{q} = \frac{m_2}{m_{1,2}}$, $\hat{p} + \hat{q} = 1$. When the partition is correct $s_{12} = s_{21} = 0$ then $TWO = 4\hat{p}\hat{q}$. If in addition to correctness the partition is uniform i.e. $\hat{p} = \hat{q} = 0.5$ then $TWO = 1$.

TWO criterion properties are mainly closely with the properties of DKM criterion.

Ω criterion [35]. Let variable x_k was used for the partition and the interval $N_t^1(k)$ contains points of $J_1(k)$ various classes and $N_t^2(k)$ contains points of $J_2(k)$ various classes. We denote $\Omega(k^*) = \min_k (J_1(k) + J_2(k))$. Then if the variable x^* is used for splitting and there exists a pair of different classes points $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$ in the intervals of the partition, i.e. $\hat{\alpha} \in N_t^1(k^*)$ and $\hat{\beta} \in N_t^2(k^*)$, we will say that Ω criterion is used.

Ω criterion properties.

1° $(\Omega(k) = 2) \Leftrightarrow (S_2(k) = 1)$.

2° If the value of $\Omega(k) = q$, where q is initial given number of classes in the solvable task, and variable x_k is used for splitting, then examples of any class contained in only one interval. We name this property *hierarchical separation sensitiveness*.

E criterion (entropic).

Let $s_{i,j}$ is the number of points of the class i in the interval $N_t^j(k), j = 1, 2$, which is gained as the result of the partition when variable x_k is chosen for splitting. In the general case $m_{1,2}$ points of learning sample will be distributed to the the pair intervals of the partition as shown on the table 1:

Table 1. Partitioning into two intervals

$N_t^1(k)$	$N_t^2(k)$
contains $m_1(k)$ points;	contains $m_2(k)$ points;
$s_{1,1}$ points attributed to the class 1	$s_{1,2}$ points attributed to the class 1
$s_{2,1}$ points attributed to the class 2	$s_{2,2}$ points attributed to the class 2

The probability of belonging of arbitrary point from the interval $N_t^j(k)$ to the class i can be estimated as $\hat{p}_{i,j} = s_{i,j}/m_j(k)$ where $m_j(k)$ is the number of points from learning sample which hit into the interval $N_t^j(k)$. Notice, that $\hat{p}_{i,j}$ is biased estimator.

Estimator of entropy of the interval $N_t^j(k)$ is $I_j(k) = - \sum_i \hat{p}_{i,j} \log \hat{p}_{i,j}$. The estimator of average entropy by two intervals $N_t^1(k)$ and $N_t^2(k)$ will be $E(k) = \frac{m_1(k)}{m_{1,2}(k)} I_1(k) + \frac{m_2(k)}{m_{1,2}(k)} I_2(k)$ because of $\frac{m_j(k)}{m_{1,2}(k)}$ is the estimator of probabilistic measure of interval $N_t^j(k)$. So, $E(k)$ is an average statistical estimator.

The E criterion of choice of splitting variable consists of use the variable with the number

$$k_* = \arg \min_k E(k).$$

This choice corresponds to minimization of uncertainty as a result of current interval splitting.

E criterion properties.

1° The entropy criterion E is not sensitive to uniformity of partition – it can give out equal values in the cases when the numbers of examples in the intervals is equal and when these values are different even through these values are 1 and $m_{1,2} - 1$.

Really, if some interval j contains examples from the only one class i then probability estimation $\hat{p}_{i,j} = s_{i,j}/m_j(k)$ will be equal to 1 regardless of the value $m_j(k)$. In particular, let's consider two tables (Fig. 1):

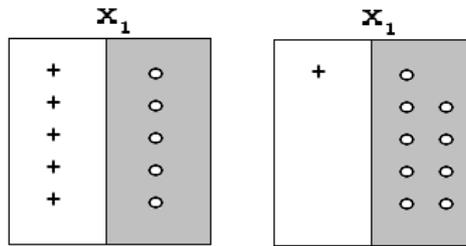


Fig. 1. Nonuniform example distribution by the intervals of partition



Fig. 2. Two cases when E criterion values are agree and equal to 1

In both cases (Fig. 1) E criterion value is equal to 0. Notice, the D criterion in these cases takes values 25 and 9.

2° The E criterion is not sensitive to the preference of hierarchical classification structure. This property is illustrated on the Fig.2.

IGain criterion (Information Gain) is meant for the choice of the splitting variable based on entropic approach. This criterion is improved to estimate average increase of information (gain) as result of branching step.

Initial average quantity of information needed to define the class of arbitrary point is

$$Info(T) = - \sum_{j=1}^q \frac{s_j}{l} \log \frac{s_j}{l} = - \sum_{j=1}^q \hat{p}_j \log \hat{p}_j,$$

where T is learning sample; l – the number of examples (points) in T ; q – the number of classes; s_j the number of points in T marked by class j ; \hat{p}_j – the estimator of appearance probability of the class j .

$IGain$ criterion of maximum information gain is $IGain(k) = Info(T) - E(k)$, where $E(k)$ is the value of defined above E criterion – the average entropy by intervals of the partition obtained by choice of the variable x_k .

MEE criterion (Minimum Error Entropy)[14].

Let's first consider the case of two classes – ω_1 and ω_2 . Let x_k is variable – candidate for splitting; ω_1 – the class number – candidate for the mark of interval $N_t^1(k)$ (the left

branch) if variable x_k is used. Then the right branch (and interval $N_t^2(k)$) is admittedly marked which the class ω_2 . If we suppose such splitting is correct then any point from the learning sample which hits in $N_t^1(k)$ but marked in the sample by the class ω_2 will be classified incorrectly. We denote correspondingly r_{12} and r_{21} the numbers of such incorrectly classified points in the intervals $N_t^1(k)$ and $N_t^2(k)$. Then estimators of error probabilities sort of "mixed up classis" in the shattered interval $N_t = N_t^1 \cup N_t^2$ is $\hat{P}_{12} = \frac{r_{12}}{m_{1,2}}$ and $\hat{P}_{21} = \frac{r_{21}}{m_{1,2}}$, where $m_{1,2}$ is the number of points of the sample hit in N_t . The value $1 - \hat{P}_{12} - \hat{P}_{21}$ is the estimation of probability of the correct computation of the class number by the node with the predicate (variable) x_k and edges marked ω_1 and ω_2 .

The MEE formula based the *error entropy* EE :

$$EE = EE(N_t, k, \hat{P}_{12}, \hat{P}_{21}) = \hat{P}_{12} \log \hat{P}_{12} - \hat{P}_{21} \log \hat{P}_{21} - (1 - \hat{P}_{12} - \hat{P}_{21}) \log(1 - \hat{P}_{12} - \hat{P}_{21}).$$

The rule of splitting by the *MEE* criterion consists in the choice of variable x_k^* where

$$k^* = \arg \min_{N_t, k} EE(N_t, k, \hat{P}_{12}, \hat{P}_{21}).$$

MEE criterion properties.

1° The minimum value of EE is equal to 1 when all examples are correctly classified by the partition created with splitting variable x_{r^*} . The maximum $EE=1$ is when examples are completely mixed up classis — when $\hat{P}_{12} = \hat{P}_{21} = 1/2$.

2° With mixed up classis increases the EE estimator increases too. Notice, the value of Ω criterion increases in this case as well.

3° When the partial separability takes a place ($S_1(k) = 1$), for example, when $\hat{P}_{12} = 1/2$, then $EE = 1$. Therefore *MEE* criterion sometimes can't detect the difference between cases of the partial and complete separability.

G criterion (based on Gini Index).

Gini Index of the interval $N_t^j(k)$ is

$$g(N_t^j(k)) = 1 - \sum_i \hat{p}_{i,j}^2 = 1 - \sum_i (s_{i,j}/m_j(k))^2.$$

Squares of estimators of conditional probabilities of all classes in the interval $N_t^j(k)$ are summed. If the interval $N_t^j(k)$ contains points of only one class then Gini Index reaches its minimum value equal to 0. *G* criterion defined by formula

$$G(k) = g(N_t^1(k)) + g(N_t^2(k)).$$

The splitting variable number is $k_* = \arg \min_k G(k)$.

G criterion properties.

1° If the interval contains points of only one class then its index is equal to 0, therefore G criterion is enable recognize the partial separability.

2° ($G(k) = 0$) \Leftrightarrow ($S_2(k) = 1$) what means ability of G criterion to recognize complete separability.

A		B	
40 points "+"	10 points "*"	40 points "+"	17 points "-"
20 points "-"	10 points "o"	3 points "-"	3 points "o"
		10 points "*"	
		7 points "o"	

Fig. 3. Two cases of points distribution

In the paper [21], page 7, it is shown that Gini criterion is disable recognize hierarchial separability of classes and the explanatory example is done (Fig. 3). On the Fig. 3 two cases of points displacement. The case A correspondents to the completely separability of two classes $(+)\cup(-)$ and $(*)\cup(o)$. But G criterion makes more preferable the partition B.

3. COMPARISON OF THE CRITERIA

Example 1. Let the interval of dimension 5 is given with 9 points distribution as shown on Fig. 4. These points classes denoted by symbols +, -, *. The values of splitting criteria when variable x_i is chosen, $x_i \in x_1, \dots, x_5$ are presented on the Fig. 5. The comparison of the criteria values shows that all criteria except S_1 and G criterions are concordant: they define a choice of the same variable x_5 . Criterions S_1 and G for one's turn put are concordant each other and pick out the case of partial separability.

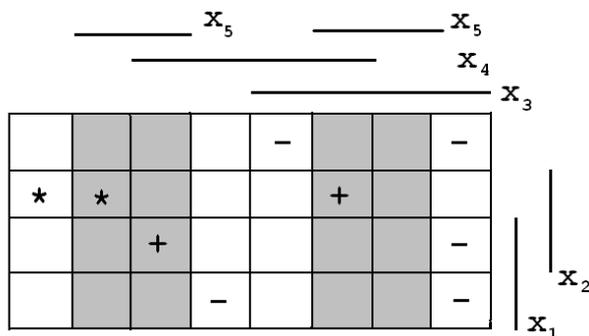


Fig. 4. The sample points distribution

If variables are ordered by the E criterion decrease then D criterion values will be increase but the monotonicity of the growth as it seen from the Table 2 and Fig. 6 is violated. For the variable x_3 increased value $D(3) = 15$ is explained the more sensitivity of D criterion to the partition separability in comparison with E criterion.

Table 2. E and D criterions comparison

Критерии	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
E	1.206	1.068	0.984	0.846	0.739
D	13	15	14	16	17

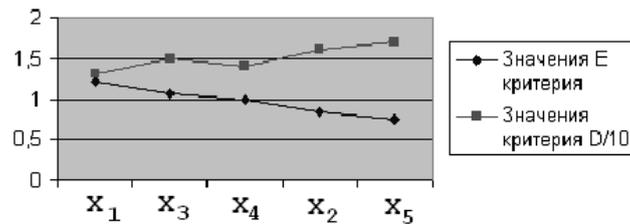


Fig. 5. E and D criterions comparison

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5																																																				
<table border="1"> <tr><td>+</td><td>+</td></tr> <tr><td>-</td><td>*</td></tr> <tr><td>-</td><td>*</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> </table>	+	+	-	*	-	*	-	-	-	-	<table border="1"> <tr><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>+</td><td>-</td></tr> <tr><td>*</td><td>-</td></tr> <tr><td>*</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> </table>	+	-	+	-	*	-	*	-	-	-	<table border="1"> <tr><td>+</td><td>+</td></tr> <tr><td>-</td><td>*</td></tr> <tr><td>-</td><td>*</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> </table>	+	+	-	*	-	*	-	-	-	-	<table border="1"> <tr><td>+</td><td>*</td></tr> <tr><td>+</td><td>*</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> </table>	+	*	+	*	-	-	-	-	-	-	<table border="1"> <tr><td>+</td><td>*</td></tr> <tr><td>+</td><td>*</td></tr> <tr><td>*</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> <tr><td>-</td><td>-</td></tr> </table>	+	*	+	*	*	-	-	-	-	-	-	-
+	+																																																							
-	*																																																							
-	*																																																							
-	-																																																							
-	-																																																							
+	-																																																							
+	-																																																							
*	-																																																							
*	-																																																							
-	-																																																							
+	+																																																							
-	*																																																							
-	*																																																							
-	-																																																							
-	-																																																							
+	*																																																							
+	*																																																							
-	-																																																							
-	-																																																							
-	-																																																							
+	*																																																							
+	*																																																							
*	-																																																							
-	-																																																							
-	-																																																							
-	-																																																							
$E(1) = 1.206$	$E(2) = 0.846$	$E(3) = 1.068$	$E(4) = 0.984$	$E(5) = 0.739$																																																				
$\Omega(1) = 5$	$\Omega(2) = 4$	$\Omega(3) = 5$	$\Omega(4) = 4$	$\Omega(5) = 4$																																																				
$D(1) = 13$	$D(2) = 16$	$D(3) = 15$	$D(4) = 14$	$D(5) = 17$																																																				
$S_1(1) = 0$	$S_2(1) = 1$	$S_3(1) = 0$	$S_1(4) = 0$	$S_5(1) = 0$																																																				
$G(1) = 1.015$	$G(2) = 0.64$	$G(3) = 0.945$	$G(4) = 0.98$	$G(5) = 0.722$																																																				

Fig. 6. Criteria values for the various point distribution

Example 2. Let the interval of dimension 4 is given which contains 10 points of 5 classes (Fig. 7)

The values of E and D criteria are concordant each step of splitting this example. We give their values only for the first step (Table 3).

Table 3. The first step E and D criterions values

Creteria	x_1	x_2	x_3	x_4
D	25	20	21	22
E	1.246	1.565	1.922	1.551

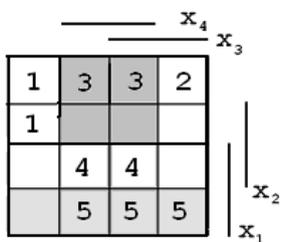


Fig. 7. Points distribution

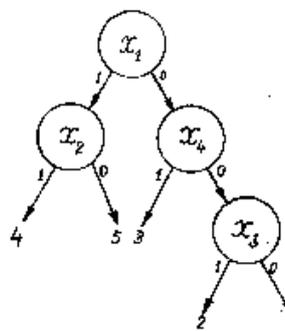


Fig. 8. Optimal BDT

It's easy to see criterion E gives value 0 when each interval of the partition contains points of only one class. And in this case E and D criteria values coincide.

According to multiple experiment computations with various splitting criteria the comparative data are presented in the paper [15]. In particular, the number of leaves of BDT were compared as result of synthesis. The comparison carried out on 36 real tasks. In the table 4 it is shown how many times the use of each from 5 criteria reduced to acquisition the BDT with the least leaves number (the best result or win) and the most ones (the worst result or loss) in comparison with all other algorithms.

Table 4. Comparison of the win numbers

Algorithms	Gini	Info Gain	Twoing	C4.5	MEE
Win number	11	9	8	1	18
Loss number	4	3	3	24	7

The data presented in the table 4 confirm first of all that *it's impossible to pick out a criterion which gives the best result all the cases for any admissible learning samples*. Nevertheless according to the table 4 the MEE algorithm wins at the minimum twice frequently in comparison with other. It's rather unexpectedly that the algorithm C4.5 was the worst in these experiments in spite of it's widely used in applications.

In the paper [35] experimental researches of BDT synthesis algorithms were carried out. In these experiments the points of $\{0, 1\}^n$ — examples — were generated according to the equally probable distribution with $n = 25$. As well random number was designated to each generated point. Result of these experiments are presented in the table 5.

Table 5. Comparison of the win numbers

Algorithms	Average by 15 experiments leaves number		
	5 classes 50 examples	2 classes 50 examples	5 classes 100 examples
LISTBB	23.1	11.3	44.7
LISTD	24.5	14.1	46.7
LISTB	44.9	34.9	-

The best in these experiments algorithm *LISTBB* (see below) is the hybrid procedure of situational choice of splitting criterion which depends from the initial value of the Ω criterion and of presence the partly or complete separability. The algorithm *LISTD* uses only *D* criteria. The algorithm *LISTB* uses random order of variables for the splitting.

Notice the algorithm *LISTBB* first computes the Ω criterion value which most closely to the *MEE* criterion.

4. THE STOPPING RULES AND BDT BRANCHE REDUCING

The BDT is called *correct* relatively the learning sample if all examples of this sample are classified by the BDT correctly. The feature space partition which is generated by the correct BDT is such that each terminal set included in this partition contains the points belonging to only one class. These terminal sets correspond to the BDT leaves and inherit leave numbers.

The rule 1. A branching process of the BDT synthesis is continued as long as this BDT becomes correct. This is possible if and only if predicate descriptions of of all pair sample examples are different.

The rule 2. A branching process of the BDT synthesis is stopped when the leaves number reaches established threshold.

The rule 3. A branching process of the BDT synthesis is stopped when Information gain can't be increased by adding a new inner node.

The rule 4. A branching process of the BDT synthesis is stopped when the lengths of all BDT branches reaches some given value.

The rule 5. A branching process of the BDT synthesis is stopped when all terminal sets which must be shattered contains the point numbers which are less then given threshold.

The rule 6. Stopping of the BDT synthesis is defined on the base of Minimum Description Length principle which is in accord with the choice of more probabilistic hypothesis by the Bayes rule [22] — one of formalization of “Occam’s razor”: *the best hypothesis is that which minimize sum of hypothesis description length (of the model) and data (relatively this hypothesis) length.* This stopping rule for the BDT synthesis is described in detail in [29].

The rule 7. A branching process of the BDT synthesis is stopped by the rule “*Plus five*” based on the class VCD with restricted μ leaves estimator [4].

The rule 8. A branching process of the BDT synthesis is stopped on the base of the theoretical estimator of error probability when adding any additional none to BDT doesn't result to this error probability decrease. Such approach is described in many papers for example in [29].

The last two rules are more theoretical grounded.

Any stopping rule listed above can be used together with another one ore jointly with some splitting criteria collection to obtain the new BDT synthesis algorithm. It can be seen in some publications dedicated to BDT inductors synthesis.

The pruning (reducing) rules define the maximum possible length of BDT branches. If some branch has the length more than the given bound then it is pruned and the last inner node is replaced by the class label. This label most often is defined by the class of the most quantity examples contained in the shattering interval which is correspond to the pruning branch.

Pruning must be used when synthesis of the correct BDT leads to its unjustified complexity.

5. THE BINARY DECISION TREE SYNTHESIS ALGORITHMS

The CLS algorithm (*Concept Learning System*). This is classical Hunt's algorithm [8] which is the base of most BDT algorithm synthesis methods. The algorithm CLS shatters cyclically the learning sample into subsets in accordance with its most separating capability. A shattering is ended when all obtained subsets contains points of one class. When in use shattering the BDT is synthesized.

The ID3 algorithm was offered by Hunt's student J. Ross Quinlan [17] (1986). ID3 was based on Hunt's CLS algorithm and used gain ratio as splitting criteria. The synthesis was stopped when the BDT became correct or when the further splitting didn't give the information gain increase.

The C4.5 algorithm This algorithm developed by Ross Quinlan (1993)[18] is improved variant of the ID3. It uses the gain ratio for the splitting. The synthesis is stopped when the BDT becomes correct or when the points number for the shattering becomes less then given threshold.

The CART algorithm. The abbreviature CART is given from "Classification and Regression Trees". The algorithm is intended for BDT regression synthesis as well as classification trees and uses the Twoing criterion. Regression trees have in its terminal nodes (leaves) some real numbers instead the class labels. The splitting is realized by the mean-square error minimum.

The CHAID algorithm [9] (**CH**isquare-**A**utomatic-**I**nteraction-**D**etection on the base of χ^2 criterion). The applications applied statistics methods for the BDT splitting obtained its development in the 70-s last century. The *CHAID* is the evolution of the *AID algorithm*[20] (**A**utomatic **I**nteraction **D**etection). The *CHAID* is destined for the choice of variable groups for the splitting in the following way. For each variable such pairs it values is found which are slightly changed with a changing of the goal feature (class number). Depending on types of features-variables slightness of such changing is estimated by the Pearson criterion χ^2 (for the nominal variables), by the Fisher criterion (for the continuous variables), by the likelihood ration test (for the rank variables). The statistical significantly distinguishable pairs of values are joined in the homogeneous group of values, and the process is reiterated while distinguishable pairs are found. The variable dividing the groups of the homogeneous values is chosen for the splitting. Stopping of the BDT synthesis takes place when any from the following conditions is holds:

- 1) The given maximum tree depth is reached;
- 2) Any terminal node contains smaller points number then given threshold points number.

Missing variable values (if such ones exist) is joined in the individual groups.

The QUEST algorithm [13] (**Q**uick **U**nbiased **E**fficient **S**tatistical **T**ree). For the splitting, a connection between each input variable and the goal variable is estimated on the base F-criterion ANOVA (Analysis Of Variances) or on the base the Levene test [11] of the dispersion homogeneity of the order or continuous variables, and on the base χ^2 criterion for the nominal variables. For the multiclass goal variables, cluster analysis is used to join in two superclass. For the splitting, the variable with the largest estimator of the statistical connection with the goal feature is chosen. A cross validation is used for the pruning. This gives grounds to speak about unbiasedness of the statistical estimations. Notice, we described only some part of the QUEST algorithm concerning the variable choice for the splitting. As a whole the QUEST can be classified as a complex system of data analysis which gives ability to analyze various variants of predictors and use optimization procedures to choose them.

The SLIQ algorithm [16] (**S**upervised **L**earning **I**n **Q**UEST). This algorithm is intended for Data Mining applications with the big size raw data. Gini Index and quick sort are used for the splitting.

The PUBLIC algorithm [19] (**P**running and **B**uilding **I**ntegrate **C**lassifier). The classes distribution bar chart is used for the splitting. Each point of the distribution bar chart is considered as a candidate to define the branch threshold. The entropic splitting criterion is used for the thresholds and variables choices.

The algorithms CAL5 [24], *FACT (early version of QUEST)*, *LMDT* [2], *T1* [7], *MARS* [6] and many others aren't principally different from above presented algorithms.

The Table 6 placed below presents comparative data of using of various BDT synthesis algorithms in medical applications.

Table 6. The usage of the algorithms in medical applications

The algorithm	Usage (%)
ID3	68
C4.5	54.55
CART	40.9
SLIQ	27.27
PUBLIC	13.6
CLS	9

6. THE HYBRID ALGORITHM LISTBB BASED ON THE AGGREGATE SPLITTING CRITERIA

Procedure LISTBB : a splitting variable choice
<i>Input</i> : The interval N_t to be shattered and points from the learning sample which are contained in N_t
<i>Output</i> : The variable for N_t splitting (for the current BDT growth)
<ol style="list-style-type: none"> 1: Compute the set of variable numbers for which the minimum of the Ω criterion is achieved: $\tilde{k}_\Omega = \{k_o : k_o = \arg \min_k \Omega(k)\}$, where k runs all numbers of free variables of the shattered interval 2: If $\tilde{k}_\Omega = 1$, i.e. the Ω criterion achieves the minimum for only one variable, then choose the variable x_{k_o} for splitting and return from the procedure 3: If $\min_k \Omega(k) = q$, where q is the initial number of classes, then choose any variable k^* such that $k^* = \arg \max_{k \in \tilde{k}_\Omega} D(k)$ and return from the procedure 4: If there is no partial separability, i.e. $\forall k \in \tilde{k}_\Omega (S_1(k) = 0)$, then choose for the splitting any variable k^* such that $k^* = \arg \max_{k \in \tilde{k}_\Omega} D(k)$ and return from the procedure 5: If the partial separability exists then choose for the splitting any variable k_* by the maximum of partial separability: such that $k^* = \arg \max_{k \in \tilde{k}_\Omega} Z_1(k)$ and return from the procedure

To explain step 3 of the procedure *LISTBB* the following example (Fig. 9) can be considered. Let six points in the shattering interval belong to the classes labeled by +, -, *, o, , Δ . Partitions by the variables x_1 and x_2 give $\Omega(1) = \Omega(2) = 5$, $D(1) = 8$ but $D(2) = 9$. This example proves then when values of Ω criterion is equal for some two variables, the D criterion for these variables can be different.

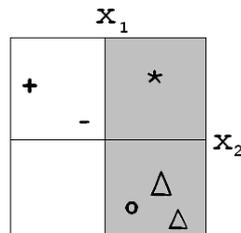


Fig. 9. Step 3 explanation

When the BDT is built, splitting steps are executed thus and so the leaves number grows. There exists a lower bound for the BDT leaves number which will be obtained when the synthesis stops. But while the BDT synthesis is run the lower bound can be changed. So we call such lower bound as current.

Proposition 1. When the procedure LISTBB is used, the value $\mu_t + \Omega(k^*) - 1$, where μ_t is the current BDT leaves number and $\Omega(k^*)$ is the maximum of the Ω criterion achieved for the variable x_k^* , is the current lower bound for the BDT leaves number which will be obtained when the synthesis stops.

Proof. Really, let's consider step t of BDT synthesis. Let μ_t is the current leaves number, the interval N_t must be shattered and splitting variable x_k^* is chosen. If we shatter the interval then one leaf is replaced by the new node pointing to the two intervals which contains $\Omega(k^*)$ various classes, consequently we will need to add at least $\Omega(k^*)$ leaves to reach correctness. So, we have the lower bound $\mu_t - 1 + \Omega(k^*)$. \square

Remark. Easy to see that $q \leq \Omega(k) \leq 2q$, where q is initial given number of example classes. Then if q is small ($q = 2$ or 3) utility of the above lower bound is minor. But with q increasing it becomes more and more.

Proposition 2. When the procedure LISTBB is used and on arbitrary step t of the BDT synthesis the partial separability exists, then the following estimator of the increment leaves number $\Delta\mu_t$, which will be added to the BDT when the synthesis stops, is true:

$$\min_k \Omega(k^*) - 1 \leq \Delta\mu_t \leq m_{1,2} - Z_1(k^*),$$

where k^* is the splitting variable number.

Proof. The left part of the inequality is proven (Proposition 1). The right part becomes evident if we note that $m_{1,2}$ points contained in the shattering interval and worse case each point may be separated by individual leaf. But when the partial separability exists, $Z_1(k^*)$ point will be separated into one correct interval, and another — second interval of the partition — will contain $m_{1,2} - Z_1(k^*)$ points. \square

According to propositions 1, 2, the algorithm LISTBB (in spite it is heuristic) is directed to the choice of splitting variable by such the way to minimize both lower and upper bounds of leaves number increment. But algorithm's LISTBB "bias" and its "drive for" partial separability can put to the cases when $Z_1(k^*)$ is very small, for example $Z_1(k^*) = 1$, and then the choice of variable based on partial separability may be unprofitable.

The parametric version LISTBB(p) contains the parametr p , which modifies step 5 by following:

5_(p): If the partial separability exists and $Z_1(k^*) > p$ then choose for the splitting any variable k^* by the maximum of partial separability: such that $k^* = \arg \max_{k \in \tilde{k}_\Omega} (Z_1 k)$ else choose for the splitting any variable k^* such that $k^* = \arg \max_{k \in \tilde{k}_\Omega} D(k)$ and return from the procedure.

The LISTBB algorithm (splitting) stops when a) correct partition is obtained or b) the list number exceeds the specified threshold. This threshold at first was an heuristic parameter, but now it is defined on the base of MDL principle [29].

7. APPENDIX I

We consider the case when variables are Boolean because we suppose that arbitrary feature space is mapped on $\{0, 1\}^n$ predicates values space. We denote $P(E)$ error probability of arbitrary BDT with μ leaves when admissible object described as $\tilde{x} \in \{0, 1\}^n$ is recognized. At length, $\Pr(P(U))$ is the probability of fulfilling some condition U .

Theorem 1. *If BDT μ leaves classifier made δl_c errors on the check sample of length l_c where $0 \leq \delta < 1$ then for any $\varepsilon : 1 > \varepsilon > \delta$ the following inequality takes a place:*

$$\Pr(P(E) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu}{4l_c(\varepsilon - \delta)^2}.$$

Proof. Let's denote BDT leaves labels as $\omega_1, \dots, \omega_s, \dots, \omega_\mu$ so that label ω_s defines the class of points hits in the interval N_s which corresponds to the BDT branch number s . So, this branch ends by leave ω_s . The probabilistic measure of interval N_s is denoted as $P(N_s) = \Pr(\tilde{x} \in N_s)$. For simplicity we will denote N_s the event " $\tilde{x} \in N_s$ " as well as the interval, and ω_s — the event of appearance of the point of the class ω_s . The intervals $N_1, \dots, N_s, \dots, N_\mu$ correspond the partition of $B^n = \{0, 1\}^n$ thus

$$\sum_{s=1}^{\mu} P(N_s) = 1; \quad P(E) = \sum_{s=1}^{\mu} P(E|N_s)P(N_s);$$

$$P(E|N_s) = 1 - P(\omega_s|N_s); \quad P(\omega_s, N_s) = P(\omega_s|N_s)P(N_s);$$

$$P(E) = \sum_{s=1}^{\mu} (1 - P(\omega_s|N_s))P(N_s) = \sum_{s=1}^{\mu} P(N_s) - \sum_{s=1}^{\mu} P(\omega_s, N_s) = 1 - \sum_{s=1}^{\mu} P(\omega_s, N_s).$$

For each interval of the partition frequency of events

$$\nu(\omega_s, N_s) = \frac{n(\omega_s, N_s)}{l_c}$$

are defined by the numbers $n(\omega_s, N_s)$ of points from the learning sample hits in interval N_s and classified as ω_s . These points are classified by the BDT correctly. Let's denote the number of points from the learning sample which hit in interval N_s but classified wrong as k_s . Then

$$\sum_{s=1}^{\mu} (n(\omega_s, N_s) + k_s) = l_c; \quad \sum_{s=1}^{\mu} \frac{n(\omega_s, N_s)}{l_c} + \sum_{s=1}^{\mu} \frac{k_s}{l_c} = 1;$$

$$\sum_{s=1}^{\mu} \nu(\omega_s, N_s) + \delta = 1,$$

where $\delta = \frac{1}{l_c} \sum_{s=1}^{\mu} k_s$ is the errors quota on the learning sample. Let's substitute the left part of the equality in lieu of 1 in the formula which defines the BDT error:

$$P(E) = 1 - \sum_{s=1}^{\mu} P(\omega_s, N_s) = \sum_{s=1}^{\mu} \nu(\omega_s, N_s) - \sum_{s=1}^{\mu} P(\omega_s, N_s) + \delta.$$

The event " $P(E) \geq \varepsilon$ " is equal to the event

$$\sum_{s=1}^{\mu} \nu(\omega_s, N_s) - \sum_{s=1}^{\mu} P(\omega_s, N_s) \geq \varepsilon - \delta.$$

Mathematical average and variance of the random quantity $\zeta = \sum_{s=1}^{\mu} \nu(\omega_s, N_s)$ of the sum of independent random quantities are

$$\mathbf{M}[\zeta] = \sum_{s=1}^{\mu} \mathbf{M}[\nu(\omega_s, N_s)] = \sum_{s=1}^{\mu} P(\omega_s, N_s);$$

$$\mathbf{D}[\zeta] = \sum_{s=1}^{\mu} \mathbf{D}[\nu(\omega_s, N_s)] = \sum_{s=1}^{\mu} \mathbf{M}\left[\left(\frac{n(\omega_s, N_s)}{l_c} - P(\omega_s, N_s)\right)^2\right] =$$

$$= l_c^{-2} \sum_{s=1}^{\mu} \mathbf{M}[(n(\omega_s, N_s) - l_c P(\omega_s, N_s))^2],$$

where $l_c P(\omega_s, N_s)$ is mathematical average and $\mathbf{M}[(n(\omega_s, N_s) - l_c P(\omega_s, N_s))^2]$ is variance of number of cases when the point hits in the interval N_s and its class is ω_s . From the inequality

$$l_c P(\omega_s, N_s)(1 - P(\omega_s, N_s)) \leq \frac{l_c}{4}$$

we get

$$\mathbf{D}[\zeta] \leq \frac{\mu}{4l_c}.$$

By the Chebyshev inequality

$$(\forall \varepsilon > 0) \mathbf{Pr}(|\xi - \mathbf{M}[\xi]| \geq \varepsilon) \leq \mathbf{D}[\xi]/\varepsilon^2$$

we get

$$\Pr(P(E) \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu}{4l_c(\varepsilon - \delta)^2}.$$

□

Corollary. *The less μ — leaves number of BDT — the more its statistical reliability.*

REFERENCES

1. Blumer A., Littlestone N. Learning faster than promise by the Vapnik-Chervonenkis dimension / Anselm Blumer, Nick Littlestone // *Discrete Applied Mathematics*, 1989. — Vol. 24. — Iss. 1–3. — P. 47–63.
2. Brodley C. E., Utgoff. P. E. Multivariate decision trees / C. E. Brodley, P. E. Utgoff // *Machine Learning*. — 1995. — Vol. 19. — P. 45–77.
3. Donskoy V. I. The Estimations Based on the Kolmogorov Complexity and Machine Learning from Examples / V. I. Donskoy // *Proceedings of the Fifth International Conference “Neural Networks and Artificial Intelligence” (ICNNAI’2008)*. — Minsk: INNS. — 2008. — P. 292–297.
4. Donskoy V. I. Complexity of families of learning algorithms and estimation of the nonrandomness of extraction of empirical regularities / V. I. Donskoy // *Cybernetics and System Analysis*. — 2012. — Vol. 48. — No 2. — P. 233–241.
5. Floyd S., Warmuth M. Sample Compression, learnability, and the Vapnik-Chervonenkis dimension / Sally Floyd, Manfred Warmuth // *J. Machine Learning*, 1995. — Vol. 21. — Iss. 3. — P. 269–304.
6. Friedman J. H. Multivariate Adaptive Regression Splines / J. H. Friedman // *The Annual of Statistics*. — 1991. — Vol. 19. — P. 1–141.
7. Holte R. C. Very simple classification rules perform well on most commonly used datasets / R. C. Holte // *Machine Learning*. — 1993. — Vol. 11. — P. 63–90.
8. Hunt E. B. *Experiments in Induction* / Earl B. Hunt, Janet Marin, Philip J. Stone. — N. Y.: Academic Press, 1966. — 247 p.
9. Kass G. V. An exploratory technique for investigating large quantities of categorical data / G. V. Kass // *Applied Statistics*. — 1980. — Vol. 29(2). — P. 119–127.
10. Kearns M. On the boosting ability of top-down decision tree learning algorithms / M. Kearns, Y. Mansour // *Journal of Computer and Systems Sciences*. — 1999. — Vol. 58 (1). — P. 109–128.
11. Levene H. Robust tests for equality of variances / H. Levene // *Contributions to Probability and Statistics* / Ed. I. Olkin, Palo Alto. — Stanford University Press: 1960. — P. 278–292.
12. Li M. Sharpening Occam’s Razor / Ming Li, John Tromb, Paul M. B. Vitanyi. — Research Rep. CT-94-03. — Amsterdam: ILLC, 1994. — 13 p. <http://www.illc.uva.nl/Research/Reports/CT-1994-03.text.pdf>
13. Loh W.-Y. Split Selection Methods for Classification Trees / Wei-Yin Loh and Yu-Shan Shih // *Statistica Sinica*. — 1997. — Vol. 7. — P. 815–840.

¹The use of Bernstein inequality allows to get the inequality

$$\Pr(P(E) \geq \varepsilon) < \exp\left(-\frac{(\varepsilon - \delta)^2 l_c}{\mu}\right).$$

14. Marques de Sa J. P. Tree Classifiers Based on Minimum Error Entropy Decisions / Joaquim P. Marques de Sa, Raquel Sebastiao and Joao Gama // Canadian Journal on Artificial Intelligence, Machine Learning and Pattern Recognition. — 2011. — Vol. 2. — № 3. — P. 41–55.
15. Marques de Sa J. P. New Results on Minimum Error Entropy Decision Trees / Joaquim P. Marques de Sa, Raquel Sebastiao and Joao Gama, Tanja Fontes // CIAPR'11 Proceedings of the 16th Iberoamerican Congress conference on Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer vision, and Applications. Chile, Pucon. — 2011. — P. 355–362.
16. Mehta M. SLIQ: A fast scalable classifier for data mining / Manish Mehta, Rakesh Agrawal, Jorma Rissanen / In Advances in Database Technology — EDBT'96. Avignon, France, March 1996 // Lecture Notes in Computer Science. — 1996. — Vol. 1057. — P. 18–32.
17. Quinlan J. R. Induction of decision trees // Machine Learning. — 1986. — Vol. 1. P. 81–106.
18. Quinlan J. R. C4.5: Programs for Machine Learning / John Ross Quinlan. — Morgan Kaufmann: 1993. — 302 c.
19. Rastogi R. PUBLIC: A Decision Tree Classifier that Integrates Building and Pruning / Rajeev Rastogi, Kyuseok Shim // Proceedings of the 24th VLDB Conference August 1998, USA. — New York: 1998. — P. 404–415.
20. Sonquist J. A. Searching for structure (alias-AID-III) // John A. Sonquist, Elizabeth Lauh Baker, James N. Morgan.—Institute for Social Research, University of Michigan: 1971. — 287 P.
21. Taylor P. C. Block diagrams and splitting criteria for classification trees / P. C. Taylor, B. W. Silverman // Statistics and Computing. — 1993. Vol.3. — P. 147–161.
22. Vitanyi P. Ideal MDL and Its Relation to Bayesianism Bayesianism / Paul M. B. Vitanyi, Ming Li // In Proc. ISIS: Information, Statistic and Induction in Science. — Singapore: World Scientific, 1996. — P. 282–291.
23. Vitanyi P. Minimum description length induction, Bayesianism, and Kolmogorov complexity / Paul M. B. Vitanyi, Ming Li // IEEE Transactions on Information Theory, 2000. — Vol. 46. — No 2. — P. 446–464.
24. Muller W. Automatic construction of decision trees for classification / W. Muller, F. Wysotzki // Annals of Operations Research. — 1994. — Vol. 52. — P. 231–247.
25. Блох А. Ш. Об одном алгоритме обучения для задач по распознаванию образов / А. Ш. Блох // Вычислительная техника в машиностроении. — Минск: 1966. — № 10. — С. 37–43.
26. Вапник В. Н. Теория распознавания образов / В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис. — М.: Наука, 1974. — 416 с.
27. Донской В. И. Колмогоровская сложность классов общерекурсивных функций с ограниченной ёмкостью / В. И. Донской // Таврический вестник математики и информатики, 2005. — №1. — С. 25–34.
28. Донской В. И. Оценки ёмкости основных классов алгоритмов эмпирического обобщения, полученные pVCD методом / В. И. Донской // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия “Физико-математические науки”, 2010. — Т. 23 (62). — № 2. — С. 56–65.
29. Донской В. И. Сложность семейств алгоритмов обучения и оценивание неслучайности извлечения эмпирических закономерностей / В. И. Донской // Кибернетика и системный анализ, 2012. — № 2. — С. 86–96.

30. Донской В. И. Колмогоровская сложность и ее применение в машинном обучении / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — № 2. — С. 4–35.
31. Донской В. И. О построении программного обеспечения распознающих систем / В. И. Донской // Программирование. — 1980. — № 2. — С. 87–90.
32. Донской В. И. Асимптотика числа бинарных решающих деревьев / В. И. Донской // Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского, серия “Информатика и кибернетика”. — 2001. — № 1. — С. 36–38.
33. Донской В. И. Интеллектуализированная программная система IntMap поддержки принятия решений в задачах планирования и управления / В. И. Донской, В. Ф. Блыщик, А. А. Минин, Г. А. Махина // Искусственный интеллект. — 2002. — №2. — С. 406–415.
34. Донской В. И. О совместном использовании абдукции, аналогии, дедукции и индукции при синтезе решений / В. И. Донской // Искусственный интеллект. — № 2. — 2000. — С. 59–66.
35. Донской В. И. Исследование алгоритмов распознавания, основанных на построении решающих деревьев: автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук: спец. 01.01.09 “Математическая кибернетика” / В. И. Донской. — М., 1982. — 16 с.
36. Журавлев Ю. И. Теоретико-множественные методы в алгебре логики / Юрий Иванович Журавлев // Проблемы кибернетики. — 1962. — Вып. 2. — С. 5–44.
37. Журавлев Ю. И. Об отделимости подмножеств вершин n -мерного куба / Юрий Иванович Журавлев // Науч. Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1958. — Т. 1. — С. 143–157.
38. Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов // А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
39. Орлов В. А. Применение граф-схемного метода распознавания образов: автореф. дисс. на соиск. уч. степени канд. техн. наук: спец. 05.13.01 “Техническая кибернетика и теория информации” / В. А. Орлов. — Владивосток, 1974. — 23 с.

Статья поступила в редакцию 26.05.2013

УДК 004.4'2

РАЗРАБОТКА И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРСОНАЛЬНОГО САЙТА НА CMS DRUPAL В УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ

© В. Ф. Блыщик

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: veb@land.ru

Abstract. The installation and configuration of the educational and methodical web-sites using by content management system Drupal are described. The basic elements of structure are viewed. The web-sites which are created by author are represented.

ВВЕДЕНИЕ

Важным направлением современного образования является внедрение и массовое использование средств дистанционного обучения. Огромный толчок в этом направлении обеспечили Интернет-технологии. Возможности которых стремительно развиваются год от года и на сегодняшний день обеспечивают диалог «учитель-ученик» в реальном времени (видео и аудио Интернет-конференции, интерактивные онлайн-доски и т.п.), в режиме контроля знаний (компьютерные тесты, онлайн-системы контроля задач, сертифицирование), а также предоставляют доступ к самым последним научным разработкам и новой литературе. *Использование подобных средств в учебно-методическом процессе становится актуальным, поскольку обеспечивает общедоступность образовательных ресурсов независимо от географического местоположения, позволяет проводить полноценный контроль знаний в удаленном режиме, а также предусматривают самостоятельную работу студента в удобное для него время.*

Целью данной статьи является показать возможности, предоставляемые персональным сайтом, развернутым на готовой системе управления контентом Drupal в контексте дистанционного обучения и описать начальные этапы установки и настройки такой системы.

Система управления содержанием или система управления контентом (англ. Content Management System, CMS) позволяет управлять текстовым и графическим содержанием сайта, изменять его информационное наполнение, не заботясь о внутреннем механизме построения и вывода веб-страниц. Архитектура CMS Drupal построена таким образом, что легко может быть использована для построения различных типов сайтов — от блогов и форумов, до информационных

архивов, сайтов новостей и учебно-образовательных порталов. Функциональность обеспечивается подключаемыми модулями, обращающимися к общему API Drupal [1].

Среди популярных учебно-образовательных порталов, развернутых на данной CMS, можно отметить следующие:

- <http://htmlbook.ru> – Учебный портал по веб-программированию;
- <http://www.openclass.ru> - Сетевые образовательные сообщества «Открытый класс»;
- <http://www.batu.edu.by> - Белорусский государственный аграрный технический университет;
- <http://www.uchi.kz> - Образовательное сообщество Казахстана.

1. ВЫБОР ПЛАТФОРМЫ И УСТАНОВКА

Изначально стоит отметить, что установку сайта стоит производить на собственном сервере и арендованном у регистратора доменном имени. Подобный подход имеет ряд следующих преимуществ:

- полный контроль по управлению сайтом и наполнению содержимым;
- отсутствие ограничений, накладываемых сторонними сервисами в случае развертывания сайта на их стороне (к подобным сервисам можно отнести сайты на бесплатном хостинге, группы в социальных сетях, системы управления электронными курсами);
- расширение функционала готовыми модулями;
- авторское оформление сайта, как визуальное, так и тематическое;
- установка необходимых дополнений, скриптов и сервисов;
- разработка собственных приложений;
- авторское право.

Услуги по предоставлению доменного имени и выделенного сервера для размещения сайта на сегодняшний день предоставляют огромное количество различных сервисов. Выбор поставщика услуг зависит от стоимости и необходимых ресурсов. По требованию клиента они же готовы произвести и установку указанной CMS, что позволяет на начальном этапе не вникать в тонкости настройки веб-сервера, изучения PHP, JavaScript, CSS и других специализированных языков веб-программирования, а непосредственно приступить к работе с содержимым сайта [2].

Выбор CMS Drupal среди остальных систем по управлению контентом обусловлен следующими факторами:

- является свободным программным обеспечением, защищённым лицензией GPL, и развивается усилиями энтузиастов со всего мира.
- категоризирует все виды содержимого — форумные сообщения, блоги, новостные ленты и т.д.;
- имеет достаточно широкий набор для построения рубрикаторов: иерархии, плоские списки, родственные категории и др.;
- позволяет использовать вложенность категорий любой глубины;
- осуществляет поиск на сайте по его содержимому, в том числе по пользователям и таксономии;
- использует разграничение доступа к материалам для пользователей;
- использует динамическое меню;
- поддерживает XML-форматы: RDF/RSS;
- позволяет осуществлять вставку материалов с других сайтов;
- авторизирует через OpenID;
- поддерживает разноязычный контент. Есть возможность переводить содержимое сайта на разные языки;
- поддерживает возможность создания сайтов с общей базой пользователей и настройками;
- производит уведомления об обновлениях модулей и расширений.

В стандартной поставке Drupal ориентирован на создание персонального блога или сайта-визитки. Однако, благодаря своей модульной структуре и огромной библиотеке дополнительных модулей, он может быть настроен на необходимую функциональность.

Для учебно-методического сайта имеет смысл использовать модули, описанные в таблице 1.

Таблица 1. Набор модулей Drupal для учебно-методического сайта.

Название	Функция
Comment	Позволяет пользователям комментировать и обсуждать опубликованные материалы. Стандартная поставка
Content Construction Kit (ССК)	Добавляет к существующим материалам новые поля, позволяет определять новые типы данных. Дополнительно: https://drupal.org/project/cck [1]

Forum	Позволяет проводить обсуждения с разбивкой по темам. Стандартная поставка
Locale	Добавляет поддержку языков и позволяет переводить пользовательский интерфейс на языки отличные от английского. Стандартная поставка
Menu	Позволяет администраторам настраивать меню на сайте. Стандартная поставка
PHP Filter	Включение PHP-кода в контент. Стандартная поставка
Poll	Позволяет проводить на сайте опрос по различным темам, с возможностью выбора нескольких вариантов ответа одновременно. Стандартная поставка
Privatemsg	Обеспечивает обмен личными сообщениями между пользователями сайта. Дополнительно: https://drupal.org/project/privatemsg [1]
Profile	Поддерживает настраиваемые анкетные данные (профили) пользователей. Стандартная поставка
Quiz	Позволяет проводить на сайте тестирование. С помощью этого модуля можно создавать списки вопросов с вариантами ответов, отслеживать ответы пользователей и оценивать их. Дополнительно: https://drupal.org/project/quiz [1]
Rules	Создает действия, на основе самых разнообразных событий и их сочетаний. Это аналог стандартного модуля Trigger, но с большими возможностями. Дополнительно: https://drupal.org/project/rules [1]
Search	Поиск по сайту. Стандартная поставка
Taxonomy	Позволяет упорядочить материалы по категориям. Стандартная поставка
Upload	Позволяет пользователям закачивать и прикреплять файлы к материалам сайта. Стандартная поставка
Views	Формирует запросы к БД и выводит содержимое в разнообразных форматах. Дополнительно: https://drupal.org/project/views [1]

2. НАСТРОЙКА И УПРАВЛЕНИЕ САЙТОМ

Инсталляция CMS Drupal производится на веб-сервер Apache с установленным PHP и развернутой СУБД MySQL. Процесс установки запускается файлом install.php. По завершению установки необходимо включить необходимые модули и приступить к настройке материалов сайта.

На первом шаге важно определить, как будет структурирован сайт, какие материалы будет содержать и каким категориям пользователей они будут доступны.

За структуру сайта отвечают словари создаваемые в разделе «таксономия». Все материалы сайта можно разбить по категориям в соответствии с терминами, заданными в этих словарях. Удобно создать словари, содержащие в качестве терминов названия курсов, предметы, темы лекций и т.п. Типы материалов могут быть созданы автоматически при включении соответствующих модулей или заданы вручную. Например, к типам материала «страница», «заметка», «опрос», созданным системой, можно добавить собственные: «урок», «лекция», «задача» и т.п. Привязка материалов к словарям производится в разделе «таксономия».

Далее идет распределение прав пользователей. По умолчанию права пользователей задаются тремя ролями: гости, пользователи, владелец-администратор. Для учебно-методического сайта имеет смысл расширить список ролей (табл. 2).

Таблица 2. Распределение прав для пользовательских ролей.

Роль	Права
Гость	- просмотр общедоступных материалов сайта; - комментирование некоторых материалов.
Пользователь	- просмотр общедоступных материалов сайта; - комментирование материалов сайта; - участие в некоторых опросах; - получение оповещений на e-mail; - доступ к личным сообщениям.
Студент (Ученик)	- просмотр всех материалов сайта; - комментирование материалов сайта; - получение оповещений на e-mail; - доступ к личным сообщениям; - участие в опросах; - прохождение тестов; - добавление некоторых материалов, с проверкой преподавателем; - просмотр своих оценок, наград, поощрений в профиле.

Преподаватель	<ul style="list-style-type: none"> - просмотр, редактирование и удаление материалов сайта; - добавление, редактирование и удаление комментариев; - получение оповещений на e-mail; - доступ к личным сообщениям; - участие в опросах; - создание, редактирование и настройка тестов; - просмотр результатов теста; - проверка и публикация материалов, добавленных студентами (учениками); - выставление оценок, наград и поощрений.
Администратор	<ul style="list-style-type: none"> - полный доступ с настройкой структуры, оформления и содержимого сайта; - распределение ролей пользователей; - настройка правил и событий; - установка и удаление модулей; - распределение дисковых квот; - локализация на различные языки.

На втором шаге следует приступить к оформлению сайта: выбору темы, настройке меню, отображению страниц и распределению блоков. На этом этапе важно использовать возможности модуля «Views», поскольку именно он позволяет делать любые выборки и представлять их в нужном виде. При этом в разделе «Arguments» модуля «Views» можно настроить на каких страницах и каким пользователям отображать данную выборку.

Заключительным этапом является наполнение сайта. Наиболее оптимально, чтоб интерфейс и права пользователей были настроены так, чтоб в этом процессе участвовали все пользователи сайта.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

CMS Drupal представляет собой полноценную систему для создания учебно-методического сайта и обладает всей необходимой функциональностью. Автором разработаны и внедрены следующие сайты, используемые учебными заведениями в образовательных целях:

- <http://grafika.me> – Компьютерная графика и вычислительная геометрия (2012 г.);
- <http://tvim.info> – Сайт журнала «Таврический Вестник Информатики и Математики» (2010 г.);

- <http://school43.net> – Сайт общеобразовательной школы №43, разработанный совместно с директором школы Н.В. Андрейчуком (2008 г.);
- <http://malacolog.com> – Сайт малакологического сообщества, разработанный совместно с доцентом кафедры зоологии С.В. Леоновым (2007 г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Drupal – Open Source CMS. Официальный сайт. [Электронный ресурс]. – URL: <https://drupal.org>.
2. Robertson J. 11 usability principles for CMS products [Электронный ресурс] / James Robertson. — URL: http://www.steptwo.com.au/papers/kmc_usabilitycms/index.html.

Статья поступила в редакцию 01.06.2013

ПРЕДФРАКТАЛЬНІ ПЕРЕСТАВНІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

© О. О. Ємець, О. В. Тур

ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ
 ВУЛ. КОВАЛЯ, 3, М. ПОЛТАВА, 36014, УКРАЇНА
 E-MAIL: yemetsli@mail.ru, tur.poltava@gmail.com

Abstract. Isomorphisms between the set of permutations without repetition and the set of graphs are introduced in this article. The operation of replacing graph vertices by a seeding agent for the graph, which corresponding to the permutations, is defined. This operation is defined in terms of permutations and substitutions too.

ВСТУП

Розвиток більш адекватного моделювання для оптимізації об'єктів і систем, що мають комбінаторні властивості, приводить до необхідності вивчення цих властивостей разом з їх фрактальними особливостями. Не зважаючи на величезну кількість праць з комбінаторної оптимізації (див. зокрема [1, 2, 3]) та з математичних аспектів фрактальних конструкцій (див. [4, 5]) практично не відомо робіт, в яких ставляться та розв'язуються задачі дослідження комбінаторних конфігурацій, що мають фрактальні властивості (див. [6, 7, 8, 9]).

Є потреба ввести необхідні поняття для дослідження комбінаторно-фрактальних властивостей об'єктів. Важливим тут вбачається встановлення ізоморфізмів між комбінаторними множинами та множинами графів, оскільки добре відомі [4, 5] підходи до дослідження фрактальних властивостей графів, які можуть стати при нагоді у дослідженні фрактальних властивостей комбінаторний об'єктів.

1. ІЗОМОРФІЗМ МНОЖИНИ ПЕРЕСТАНОВОК БЕЗ ПОВТОРЕНЬ З МНОЖИНОЮ ГРАФІВ

Нехай ϵ множина перестановок k перших натуральних чисел $E_k(J_k)$ [3], де $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$.

Розглянемо перестановку $(i_1, \dots, i_k) \in E_k(J_k)$. Його можна інтерпретувати як підстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$.

Поставимо у відповідність переставленню (i_1, \dots, i_k) (теж саме, що підстановці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$) граф $\Gamma = (J_k; S_j)$, де J_k виступає як множина вершин

графа, а S — множина дуг, яка визначається стовпцями підстановки, тобто $S = \{(1, i_1), (2, i_2), \dots, (k, i_k)\}$.

Будемо називати граф, що відповідає переставленню, графом переставлення.

Приклад 1. Переставленню $(1, 5, 4, 3, 2)$ відповідає граф $\Gamma = (J_k; \{(1, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\})$ (див. рис. 1).

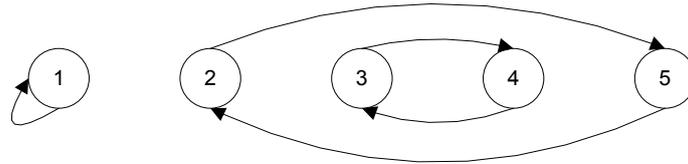


Рис. 1. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$.

Очевидно, що відповідність є взаємно однозначною, тобто ця відповідність є ізоморфізмом.

Множину графів, ізоморфних множині переставлень $E_k(J_k)$ позначимо $\Gamma_k(J_k)$.

В роботах розглянуто індуктивне введення фрактального графа на основі побудови предфрактальних графів. Використаємо цей підхід до графів переставлень.

Згідно [4, 5] треба ввести поняття початкового (вихідного) графу, затравки та сформулювати правило заміщення вершини графа затравкою.

В якості графа, який назвемо вихідний (початковим) використовується деякий граф $\Gamma \in \Gamma_k(J_k)$, тобто граф переставлення.

В якості затравки будемо використовувати граф, що визначається наступним чином.

Нехай ϵ переставлення з $n - k$ чисел $k + 1, \dots, n$, які об'єднані в множину $I_{k+1}^n = \{k + 1, k + 2, \dots, n\} = J_n \setminus J_k$. Множину таких переставлень позначимо $E_{n-k}(I_{k+1}^n)$. Кожному переставленню $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{n-k}) \in E_{n-k}(I_{k+1}^n)$ поставимо у відповідність підстановку $\begin{pmatrix} k + 1 & k + 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_{n-k} \end{pmatrix}$.

Графу Π та відповідній йому підстановці взаємно відповідним є граф $\Gamma_I = (I_{k+1}^n, S_I)$, де множина дуг S_I — це: $S_I = \{(k + 1, \pi_1), (k + 2, \pi_2), \dots, (n, \pi_{n-k})\}$.

Приклад 2. $\pi = (6, 8, 10, 9, 7)$; $k = 5$; $n = 10$. Переставленню π є відповідною підстановка $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Відповідний граф на рис. 2.

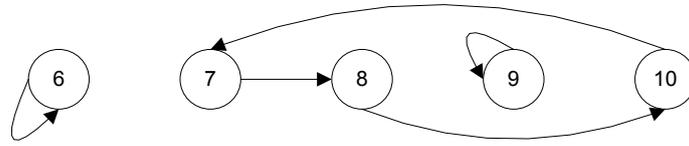


Рис. 2. Зображення графа переставлення $\pi = (6, 8, 10, 9, 7)$.

Заміщення вершини затравкою. Вершина має одне вхідну дугу, тобто в підстановці при заміні вершини t нас цікавлять два стовпці $\begin{pmatrix} \dots & t & \dots & \tau \\ \dots & i_t & \dots & t \end{pmatrix}$. Треба вирішити, яку дугу використовувати при заміщенні.

Приклад 3. На основі прикладів 1–2 виконаємо заміщення вершини затравкою.

Виконаємо заміщення ізольованої вершини під номером **1** графа $\Gamma = (J_k; \{(1, 1), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)\})$ затравкою $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

а) Використаємо при заміщенні петлю $(6, 6)$, тобто: $6 \leftrightarrow 6$; якщо взяти дугу, що виходить з **6** і замінити дугою з **1** в **1**, на $6 \leftrightarrow 6$ то воно знову відійде в **6**. (див. рис. 3).

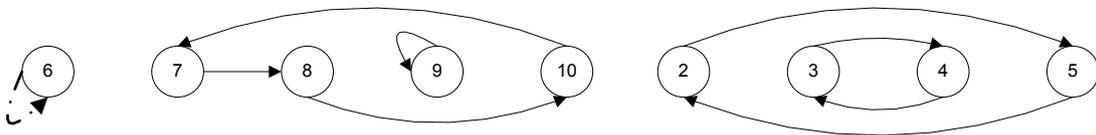


Рис. 3. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером **1**. На цьому та наступних рисунках — пунктирна з крапкою стрілка означає стару і нову дугу.

б) Використаємо при заміщенні дугу $(7, 8)$, тобто: $7 \leftrightarrow 8$. Якщо взяти дугу що виходило з 7, то вона знову відійде в 8 і тоді маємо граф, що зображено на рис. 4.

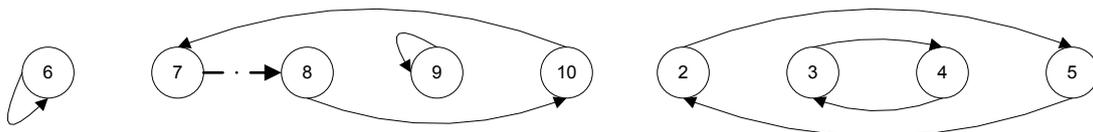


Рис. 4. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером.

Очевидно, якщо будемо в якості вершини t що заміщується брати ізольовану (з петлею), то граф, що одержуємо є *сумою двох графів*, один — вихідний граф без ізольованої вершини, а другий — затравка.

Розглянемо випадок коли t — не ізольована вершина.

Як приклад виконаємо заміщення не ізольованої вершини під номером 2 . Маємо 5 варіантів заміни дуг з яких зобразимо два (рис. 5–6).

1. Заміна дуги $(6,6)$ зображено на рис. 5.

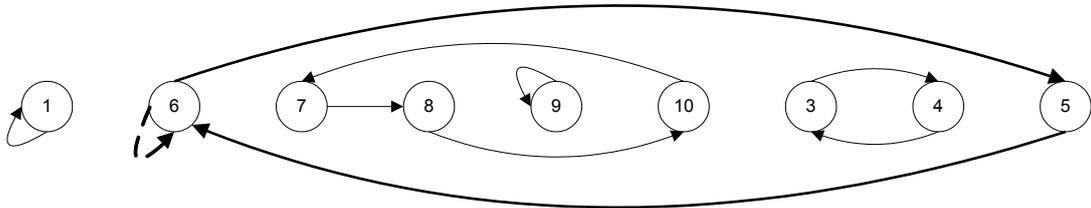


Рис. 5. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером 2 з використанням дуги $(6,6)$. На цьому та наступних рисунках дуга, яка використовується при заміщенні показана пунктирною лінією, а нові дуги – товстою лінією.

2. Заміна дуги $(7,8)$. (див. рис. 6).

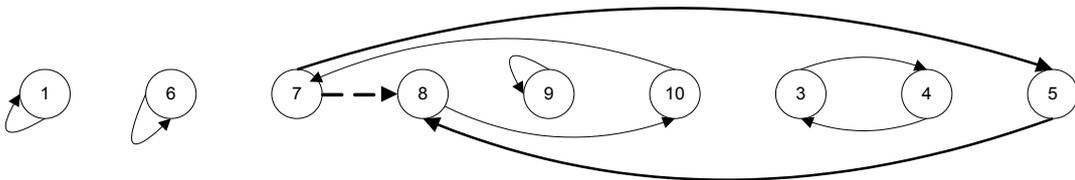


Рис. 6. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером 2 з використанням дуги $(7,8)$.

2. ДІЇ ПО ЗАМІНІ ВЕРШИНИ ЗАТРАВКОЮ В ТЕРМІНАХ ПІДСТАНОВОК ТА ПЕРЕСТАНОВОК

Розглянемо ці дії на прикладі. Ініціатор та затравку представимо підстановками.

Нехай ініціатор – це $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, а затравка – це $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Розглянемо заміну вершину у двох випадках: 1) вершина ізольована; 2) вершина неізольована.

В першому випадку, коли вершина ізольована, в підстановці-ініціаторі є стовпчик з однаковим значенням в обох рядках (в прикладі – це стовпчик з одиницями). Всі інші стовпці підстановки в приладі відповідають не ізольованим вершинам. Тобто, в першому випадку модифікується підстановка, зміною елемента підстановки, що стоїть одночасно і в першому і в другому рядку одного стовпця. В другому випадку – модифікується підстановка, за рахунок заміни стовпця з номером з першого рядка (що відповідає номеру вершини графа, який замінюється) та заміни стовпця підстановки з цим номером в другому рядку.

Перший випадок. В прикладі, візьмемо стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Використаємо стовпець затравки $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, який відповідає у графі петлі ізольованої вершини. Одержимо:

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ * & 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{array} \right) \quad (1)$$

Тут зірочка означає стовпець, який зникає в результуючій підстановці (або іншими словами елемент в результуючій перестановці). Зліва будемо писати ініціатор, а справа – затравку. В підстановці (1) вони розділені рискою. Ілюстрацію цього графа див. рис. 3.

Зауважимо, що якщо в затравці беремо стовпець з різними елементами (наприклад $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, що відповідають дузі $(7,8)$), то результат той же самий, що і в формулі (1).

Другий випадок. Використовується стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$, $t_i \neq \tau_i$. Тоді з ініціатора викреслюється стовпець $\begin{pmatrix} t_i \\ * \end{pmatrix}$, який отримують з стовпця $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$ заміною τ_i на зірочку. Справа в підстановку приписуємо затравку. Далі дії визначаються стовпцем $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix}$ затравки, що використовується. Стовпець $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix}$ замінюється на стовпець $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix}$: позначка $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix}$. Стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix}$ замінюємо на стовпець $\begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix}$: позначка $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix}$.

Приклад 4. Замінімо стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ затравкою взявши стовпець:

1. Якщо $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, тоді маємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & 2 & | & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$;

визначаємо стовпці для заміни: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Заміняємо стовпці в підстановці.

Остаточно з $\begin{pmatrix} 1 & \langle 2 \rangle & 3 & 4 & \langle 5 \rangle & | & \langle 6 \rangle & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & \langle 6 \rangle & | & \langle 5 \rangle & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ видаленням стовпця з

зірочкою отримуємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ (див. рис. 5). В формулі в дужки $\langle a \rangle$ взяті використані елементи.

2. Якщо $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, тоді маємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & 2 & | & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$;

визначаємо стовпці для заміни: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Заміняємо стовпці в підстановці. З

підстановки $\begin{pmatrix} 1 & \langle 2 \rangle & 3 & 4 & \langle 5 \rangle & | & 6 & \langle 7 \rangle & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & \langle 8 \rangle & | & 6 & \langle 5 \rangle & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ видаленням стовпця з

зірочкою одержуємо $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ (ілюстрація на рис. 6).

Приклад 5. Ініціатор та затравку представимо підстановками. Нехай ініціатор — це $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, а затравка — це $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Замінімо стовпець ініціатора

$\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ затравкою, використавши стовпець затравки: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. То-

ді маємо: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$;

в підстановці ставимо * під $2 = t_i$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 & 6 \\ 2 & * & 1 & | & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, далі виконуємо видалення

стовця з зіркою в підстановці $\left(\begin{array}{ccc|cc} \langle 1 \rangle & \langle 2 \rangle & 3 & 4 & \langle 5 \rangle & 6 \\ \langle 6 \rangle & * & 1 & 5 & \langle 3 \rangle & 4 \end{array} \right)$, одержуємо як результат підстановку $\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array} \right)$.

3. ІЗОМОРФІЗМ БОВМАНИ МІЖ ГРАФАМИ І ПЕРЕСТАНОВКАМИ ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ ПОВБУДОВИ ПРЕДФРАКТАЛЬНИХ ПЕРЕСТАВНИХ КОНФІГУРАЦІЙ

Нехай є повний орієнтований граф $F^o = (V, U)$ без петель, де V — множина його k вершин, U — множина, що містить $|U| = k(k-1)$ дуг (i, j) , $i \neq j$, $i, j \in V$, тобто $U = \{(i, j) \mid i \neq j; i, j \in V\}$.

Розглянемо частинний граф $F_k^o = (V, U^o)$, де $U^o \subset U$, причому, якщо $(i, j) \in U^o$, то $(j, i) \notin U^o$ та $\forall i, j \in V$ або $(i, j) \in U^o$ або $(j, i) \in U^o$.

Позначимо $N(i)$ — зовнішній ранг вершини i графа F_k^o — тобто кількість дуг, що виходять з вершини i . Позначимо $\{F_k^o\}$ множину всіх можливих графів F_k^o . Нехай $\{\Gamma^*\}$ — підмножина множини $\{F_k^o\}$, $\{\Gamma^*\} \subset \{F_k^o\}$, яка складається з таких графів $\Gamma^* = F_k^o$, які не містять циклів.

Розглянемо евклідову множину k -переставлень $E_k(J_k)[1]$, де $J_k = \{1, 2, \dots, k\}$ — множина перших k натуральних чисел.

Як відомо [10], множина переставлень $E_k(J_k)$ ізоморфна множині графів $\{\Gamma^*\}$. Ізоморфізм графів Γ^* та переставлень $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in E_k(J_k)$ встановлюється правилом: $\pi_i = N(i) + 1$, $\forall i \in J_k$.

Назвемо цей ізоморфізм ізоморфізмом Бовмана.

Приклад 6. Нехай є переставлення $\pi = (4, 1, 2, 3) \in E_4(J_4)$. Йому відповідає граф, що зображено на рис. 7. Зовнішні ранги $N(1) = 3$; $N(2) = 0$; $N(3) = 1$; $N(4) = 2$.

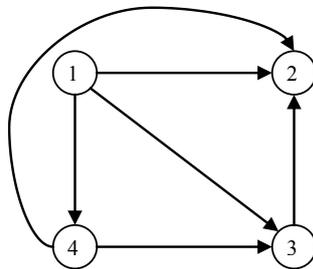


Рис. 7. Приклад відповідного до переставлення $(4, 1, 2, 3)$ графа.

Алгоритм побудови графа $\Gamma^*(\pi)$ ізоморфного за Бовманом переставленню $\pi \in E_k(J_k)$.

Побудова графа $\Gamma^*(\pi)$, ізоморфного за Бовманом переставленню $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in E_k(J_k)$ може бути здійснена за правилом:

1. За переставленням $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ записують підстановку $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_k \end{pmatrix}$, та підрахувати зовнішні ранги вершин $1, 2, \dots, i, \dots, k$ як $\pi_1 - 1, \pi_2 - 1, \dots, \pi_i - 1, \dots, \pi_k - 1$ відповідно.
2. Спершу (при $t = 1$) будують ребра з вершини $i_t = i_1$, що має максимальний зовнішній ранг $\pi_{i_1} - 1 = k - 1$ (тобто $\pi_{i_1} = k$), з'єднуючи всі вершини $j \neq i_1$ з вершиною i_1 ребрами (i, j) , $j \in J_k$;
3. Якщо $t = k$, зупинка, інакше вибирають вершину i_t з максимальним рангом $k - t$, з'єднуючи всі вершини j (крім вершин i_1, \dots, i_t з вершиною i_t ребром (i_t, j) , $j \in J_k$;
4. Збільшують t на одиницю, перехід на крок 2.

Твердження. Граф $\Gamma^*(\pi)$, побудований згідно наведеного алгоритму є ізоморфний за Бовманом переставленню π .

Доведення. Очевидно, що граф містить k вершин, у кожній з яких зовнішній ранг – це одне з чисел з множини $\{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$. Причому, якщо у вершині i ранг $N(i)$, то за побудовою $N(i) + 1 = \pi_i \quad \forall i \in J_k$. Граф $\Gamma^*(\pi)$ за побудовою не має петель.

Оскільки ребра для вершин будують згідно алгоритму з вершини в нерозглянуті ще вершини, то цикли не утворюються. За побудовою наступна вибрана вершина i з'єднується ребром (i, j) з усіма ще не розглянутими вершинами j . Отже, $\forall i, j \in V$ або (i, j) , або $(j, i) \in \Gamma^*(\pi)$. Тобто, побудовано граф $\Gamma^*(\pi) \subset \{F_k^o\}$, який не містить циклів та зв'язний з $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ алгоритмом $\pi_i = N(i) + 1$, тобто ізоморфний за Бовманом: $\Gamma^*(\pi) \in \{\Gamma^*\}$. Що і треба було довести. \square

Приклад 7. Нехай є граф Γ^* (рис. 8). Побудуємо відповідне йому за ізоморфізмом Бовмана переставлення. Для цього підрахуємо зовнішні ранги вершини: $N(1) = 2$; $N(2) = 1$; $N(3) = 3$; $N(4) = 0$, отже переставлення відповідне до графа Γ^* таке: $(3, 2, 4, 1)$.

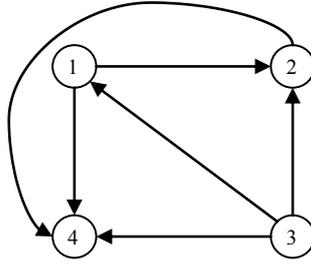


Рис. 8. Приклад відповідного до переставлення $(3, 2, 4, 1)$ графа.

Ізоморфізм Бовмана можна використовувати для побудови комбінаторних конфігурації, що мають фрактальні властивості.

Алгоритм побудови предфрактальних переставних конфігурацій.

Задається переставлення π .

В якості вихідного графа вибираємо граф $\Gamma^*(\pi)$, ізоморфний за Бовманом переставлення $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k) \in E_k(J_k)$.

В якості затравки вибираємо граф, ізоморфний за Бовманом деякому переставленню $\pi_z \in E_m(J_m)$.

Зауваження. Кількість елементів в π (число k) та π_z (число m) є не залежними один від одної величинами.

Правило заміщення вершини затравкою.

1. Кожен елемент π_i^z переставлення $\pi_z = (\pi_1^z, \dots, \pi_i^z, \dots, \pi_m^z)$ перетворюємо в число $\pi_i^z + k$, позначивши, переставлення, що утворилося π_z^{+k} . (Це переставлення з множини $E_m(J_{m+k} \setminus J_k)$).
2. Вибираємо (фіксуємо) вершину i^* , з зовнішнім рангом π_{i^*} , яка заміщується затравкою.
3. Утворюється граф, що має $k + m - 1$ вершин з номерами $1, 2, \dots, k, k + 1, \dots, k + m - 1$.
4. Вершинам $1, 2, \dots, k$, крім вершині i^* , привласнюють ті ж зовнішні ранги, що були у вершин з такими ж номерами в графі $\Gamma^*(\pi)$.
5. Вершині i^* привласнюється зовнішній ранг $N(i^*) = \pi_m^z + k - 1$.
6. Вершинам $j \in \{k + 1, k + 2, \dots, k + m - 1\}$ привласнюють зовнішній ранг $N(j) \in \{\pi_1^z + k - 1, \pi_2^z + k - 1, \dots, \pi_{m-1}^z + k - 1\}$ відповідно до правила: $N(k + i) = \pi_i^z + k - 1 \forall i \in J_{m-1}$.
7. У вершини, ранг якої рівний числу $k + m - 1$ (згідно п.6), замінюємо ранг на ранг вершини i^* , тобто на число $\pi_{i^*} - 1$.

Приклад 8. Вихідний граф на рис. 8. Йому відповідає переставлення $\pi = (3, 2, 4, 1)$. Затравка $\pi_z = (2, 3, 1)$. Вибрана для заміщення вершина $i^* = 1$ з зовнішнім рангом $\pi_{i^*} = 3$.

Розв'язок. Застосуємо правило заміни вершини затравкою.

Крок 1. Кожен елемент переставлення $\pi_z = (2, 3, 1)$ перетворимо додавши $k = 4$, одержимо $z_z^{+4} = (6, 7, 5) \in E_3(\{5, 6, 7\})$.

Крок 2. $i^* = 1$; $\pi_{i^*} = \pi_1 = 3$

Крок 3. Утворюємо граф, що має $k + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ вершин з номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Крок 4. Вершинам 2, 3, 4 (крім вершини 1) привласнюємо ті ж зовнішні ранги, що були: $N(2) = 1$; $N(3) = 3$; $N(4) = 0$.

Крок 5. Вершині $i^* = 1$ привласнюють зовнішні ранги $N(1) = \pi_3^z + 4 - 1 = 1 + 4 - 1 = 4$.

Крок 6. Вершинам $k + 1, \dots, k + m - 1$ (тобто 5, 6) привласнюють зовнішні ранги $N(k + i) = \pi_i^z + k - 1$, тобто $N(k + 1) = N(5) = \pi_1^z + 4 - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$; $N(k + 2) = N(6) = \pi_2^z + 4 - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Крок 7. Рангу вершині i , що рівний $k + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$, тобто вершині $i = 6$ привласнюємо нове значення $N(6) = \pi_{i^*} - 1 = 3 - 1 = 2$.

Граф побудовано. Маємо такі зовнішні ранги $N(1) = 4$; $N(2) = 1$; $N(3) = 3$; $N(4) = 0$; $N(5) = 5$; $N(6) = 2$. Відповідне йому переставлення $(5, 2, 4, 1, 6, 3)$.

Результат дії алгоритму заміщення вершини затравкою на рис. 9.

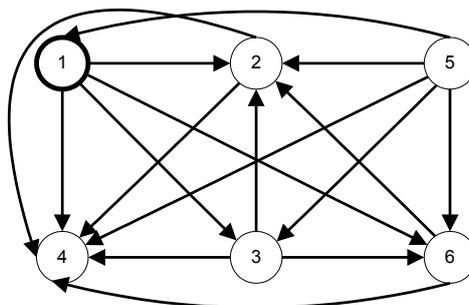


Рис. 9. Приклад заміщення вершини $i^* = 3$ затравкою $\pi^z = (2, 3, 1)$.

Звертаємо увагу, що ребра графа на рис. 8 збереглися на рис. 9, крім ребра $(3, 1)$ яке змінилося на $(1, 3)$.

Граф, що отримується в результаті викладеного алгоритму будемо називати предфрактальним переставним графом другого покоління. Вихідний граф називати ініціатором.

При повторенні цієї процедури l раз отримаємо предфрактальний переставний граф $(l + 1)$ -го покоління. Цей алгоритм можна викласти в термінах переставлення $\pi \in E_k(J_k)$ та $\pi_z \in E_m(J_m)$.

ВИСНОВОК

Запропоновано підхід до введення предфрактальних комбінаторних (переставних) конфігурацій. Доцільно дослідити це і для розміщень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Гуляницький Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 01.05.02 / Л. Ф. Гуляницький. — К., 2005. — 32 с.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
4. Перепелиця В. А. К проблеме распознавания фрактальных графов / Перепелиця В. А., Сергиенко Н. В., Кочкаров А. М. // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — №4. С. 72–89
5. Сергеева Л. Н. Нелинейная экономика: модели и методы / Л. Н. Сергеева. — Запорожье: «Полиграф» 2003. — 218 с.
6. Ємець О. О. Ізоморфізм Бовмана між графами і переставленнями та його використання для побудови предфрактальних переставних конфігурацій / О. О. Ємець, О. В. Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини: Матер. Всеукр. наук. сем. 26–27 серпня 2011 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — С. 54–57.
7. Ємець О. О. Деякі предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації / О. О. Ємець, О. В. Тур // Інформатика та системні науки: Матер. III Всеукр. наук.-практ. конф. 1–3 березня 2012 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. — С. 98–104.
8. Ємець О. О. Комбінаторні предфрактали як слова над заданим алфавітом та деякі їх властивості / О. О. Ємець, О. В. Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини: Матер. Всеукр. наук. сем. 7–8 вересня 2012 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. — С. 43–49.
9. Ємець О. О. Деякі предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації для переставлень з повтореннями / О. О. Ємець, О. В. Тур // 13 Міжвуз. наук.-практ. сем. «Комбінаторні конфігурації та їх застосування», 13–14.04.2012. — Кіровоград, 2012. — С. 55–58.
10. Bowman V. J. Permutation polyhedra / V. J. Bowman // SIAM J. Appl. Math. — 1972. — V. 22. — № 4. — P. 580–589.

Стаття поступила в редакцію 14.05.2013

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕНАДЕЖНОЙ ЛИНИЕЙ И НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАЯВКАМИ

© А. И. Коваленко, Б. Д. Марянин, В. П. Смолич

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, КРЫМ, УКРАИНА, 95007
E-MAIL: svp54@mail.ru

Abstract. A queueing system of type M/M/1 with customers impatience is considered. The system as a whole suffers occasionally a disastrous breakdown, upon which all present customers are cleared from the system and lost. A repair process then starts immediately. The equilibrium probabilities of the system, expected number of customers in the system, proportion of customers served, mean sojourn time of a served customer are obtained in the article.

ВВЕДЕНИЕ

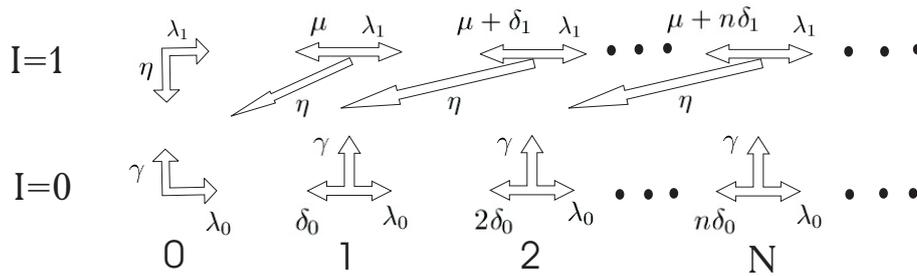
К настоящему времени имеется значительное количество работ по системам массового обслуживания с поломками. Модели, в которых заявки проявляют нетерпение и могут не дожидаться обслуживания также изучались многими авторами в прошлом. В работе [2] рассматриваются системы типа M/M/c с поломками в которых в процессе ремонта может накапливаться очередь, но при этом заявки проявляют нетерпение. Там же имеется список литературы по данной тематике. Авторы обобщают результаты работы [2] для системы M/M/1.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На систему, состоящую из одной линии и бесконечного множества мест для очереди, поступают простейшие потоки заявок: с параметром λ_1 , если линия исправна и с параметром λ_0 , если линия вышла из строя (поломалась). Время восстановления линии распределено экспоненциально с интенсивностью γ . Время обслуживания заявки исправной линией распределено экспоненциально с интенсивностью μ . Во время обслуживания линия может выходить из строя с интенсивностью η , то есть время безотказной работы линии — показательно распределенная случайная величина с параметром η , при поломке линии все заявки (обслуживаемая и находящиеся в очереди) теряются. Тем не менее, пока линия восстанавливается, заявки продолжают поступать в систему, возможно с меньшей интенсивностью. Заявки, находящиеся в

очереди, проявляют «нетерпение»: время пребывания заявки в очереди — показательно распределенная случайная величина, но интенсивность её зависит от состояния линии; если линия функционирует, то интенсивность равна δ_1 если же линия неисправна, то δ_0 .

Требуется найти вероятностные характеристики системы в стационарном режиме. Диаграмма переходов состояний системы представляется в виде:



Нумерация состояний осуществляется двумя индексами (j, k) , где $j = 1, 0$ (отмечает исправность и неисправность линии), $k = 0, 1, 2, \dots$ (отмечает количество заявок в системе, включая и обслуживаемую).

Через P_{jk} обозначим стационарные вероятности состояний (j, k) системы.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ

Предполагая, что система входит в стационарный режим, составим уравнения баланса.

Для состояний $j = 1$ (линия исправна):

$$\begin{aligned}
 P_{10}(\lambda_1 + \eta) &= P_{11}\mu + P_{00}\gamma \\
 P_{11}(\lambda_1 + \eta + \mu) &= P_{10}\lambda_1 + P_{12}(\mu + \delta_1) + P_{01}\gamma \\
 P_{12}(\lambda_1 + \eta + (\mu + \delta_1)) &= P_{11}\lambda_1 + P_{13}(\mu + 2\delta_1) + P_{02}\gamma \\
 P_{13}(\lambda_1 + \eta + (\mu + 2\delta_1)) &= P_{12}\lambda_1 + P_{14}(\mu + 3\delta_1) + P_{03}\gamma \\
 &\dots \\
 P_{1n}(\lambda_1 + \eta + (\mu + (n - 1)\delta_1)) &= P_{1(n-1)}\lambda_1 + P_{1(n+1)}(\mu + n\delta_1) + P_{0n}\gamma \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Для состояний $j = 0$ (линия в ремонте):

$$\begin{aligned}
 P_{00}(\lambda_0 + \gamma) &= P_{01}\delta_0 + P_{1\bullet}\eta \\
 P_{01}(\lambda_0 + \gamma + \delta_0) &= P_{02}2\delta_0 + P_{00}\lambda_0 \\
 P_{02}(\lambda_0 + \gamma + 2\delta_0) &= P_{03}3\delta_0 + P_{01}\lambda_0 \\
 P_{03}(\lambda_0 + \gamma + 3\delta_0) &= P_{04}4\delta_0 + P_{02}\lambda_0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 P_{0n}(\lambda_0 + \gamma + n\delta_0) &= P_{0(n+1)}(n+1)\delta_0 + P_{0(n-1)}\lambda_0, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

где через $P_{j\bullet} = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jn}$ ($j = 1, 0$) обозначены стационарные вероятности функционирования системы при исправной и неисправной линии ($P_{1\bullet} + P_{0\bullet} = 1$).

Введем производящие функции для числовых последовательностей $\{P_{1n}\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{P_{0n}\}_{n=0}^{\infty}$:

$$G_j(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{jn}z^n, \quad j = 0, 1$$

Нетрудно получить дифференциальные уравнения для производящих функций:

$$\begin{aligned}
 \delta_1 z(z-1)G_1'(z) + (\lambda_1 z(1-z) + (\delta_1 - \mu)(1-z) + \eta z)G_1(z) = \\
 \gamma z G_0(z) + (\delta_1 - \mu)(1-z)P_{10}, \quad G_1(0) = P_{10}
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\delta_0(z-1)G_0'(z) + (\gamma + \lambda_0(1-z))G_0(z) = \eta P_{1\bullet}, \quad G_0(0) = P_{00} \tag{2}$$

При $z = 1$ получаем $\eta P_{1\bullet} = \gamma P_{0\bullet}$, и с учетом нормировки $P_{1\bullet} + P_{0\bullet} = 1$ находим:

$$P_{0\bullet} = \frac{\eta}{\gamma + \eta}, \quad P_{1\bullet} = \frac{\gamma}{\gamma + \eta}. \tag{3}$$

Решение уравнения (2) выписывается по известной формуле [1]:

$$G_0(z) = \left(P_{00} - \frac{\eta P_{1\bullet}}{\delta_0} \int_0^z e^{-\frac{\lambda_0}{\delta_0}t} (1-t)^{\frac{\gamma}{\delta_0}-1} dt \right) e^{\frac{\lambda_0}{\delta_0}z} (1-z)^{-\frac{\gamma}{\delta_0}}.$$

Поскольку при $z \rightarrow 1$ множитель за скобками стремится к ∞ , то выражение в скобках стремится к нулю, тогда

$$P_{00} = \frac{\eta P_{1\bullet}}{\delta_0} \int_0^1 e^{-\frac{\lambda_0}{\delta_0}t} (1-t)^{\frac{\gamma}{\delta_0}-1} dt,$$

и окончательное выражение для $G_0(z)$ получается в виде:

$$G_0(z) = \frac{\eta P_{1\bullet}}{\delta_0} e^{\frac{\lambda_0}{\delta_0} z} (1-z)^{-\frac{\gamma}{\delta_0}} \int_z^1 e^{-\frac{\lambda_0}{\delta_0} t} (1-t)^{\frac{\gamma}{\delta_0}-1} dt \quad (4)$$

Заметим, что в точке $z = 1$ функция $G_0(z)$ доопределяется по непрерывности

$$G_0(1) = \lim_{z \rightarrow 1} G_0(z) = P_{0\bullet}$$

Все стационарные вероятности состояний системы (с неисправной линией) получаются по формулам: $P_{0n} = \frac{G_0^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$. К примеру, $P_{01} = G_0'(0) = \frac{(\lambda_0 + \gamma)P_{00} - \eta P_{1\bullet}}{\delta_0}$. Отсюда одним из необходимых условий существования стационарного режима является:

$$0 < \frac{(\lambda_0 + \gamma)P_{00} - \eta P_{1\bullet}}{\delta_0} < 1.$$

Точки $z = 0$ и $z = 1$ являются особыми точками для уравнения (1), и потому готовая формула с начальным условием при $z = 0$ не может быть использована. Однако на интервале $(0; 1)$ выполняются условия Коши (существования и единственности решения) для любого начального условия искомой функции в любой точке $z_0 \in (0; 1)$. В самом уравнении (1) удобно перейти к другой функции. Обозначим через $f(z) = \frac{1}{z}(G_1(z) - P_{10})$. Для упрощения выкладок введем еще обозначение

$$Q(z) = \frac{1}{\delta_1} (\gamma G_0(z) - (\lambda_1(1-z) + \eta)P_{10})$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$f'(z) + \left(-\frac{\lambda_1}{\delta_1} + \frac{\mu}{\delta_1 z} - \frac{\eta}{\delta_1(1-z)} \right) f(z) = -\frac{Q(z)}{z(1-z)}, \quad f(z_0) = y_0$$

Решение этого уравнения также выписываем по известной формуле, и после некоторых преобразований получаем:

$$f(z) = e^{\frac{\lambda_1}{\delta_1} z} z^{-\frac{\mu}{\delta_1}} (1-z)^{-\frac{\eta}{\delta_1}} \cdot \left(f(z_0) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} z_0} z_0^{\frac{\mu}{\delta_1}} (1-z_0)^{\frac{\eta}{\delta_1}} - \int_{z_0}^z Q(t) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} t} t^{\frac{\mu}{\delta_1}-1} (1-t)^{\frac{\eta}{\delta_1}-1} dt \right)$$

Переходя к пределу при $z_0 \rightarrow 0$, найдём:

$$f(z) = -e^{\frac{\lambda_1}{\delta_1} z} z^{-\frac{\mu}{\delta_1}} (1-z)^{-\frac{\eta}{\delta_1}} \int_0^z Q(t) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} t} t^{\frac{\mu}{\delta_1}-1} (1-t)^{\frac{\eta}{\delta_1}-1} dt.$$

Это решение по непрерывности доопределяется в точках $z = 0$ и $z = 1$, при этом на функцию $Q(t)$ накладывается ограничение

$$\int_0^1 Q(t) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} t} t^{\frac{\mu}{\delta_1}-1} (1-t)^{\frac{\eta}{\delta_1}-1} dt = 0$$

Из последнего соотношения вычислим P_{10} :

$$P_{10} = \frac{\gamma \int_0^1 G_0(t) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} t} t^{\frac{\mu}{\delta_1}-1} (1-t)^{\frac{\eta}{\delta_1}-1} dt}{\int_0^1 (\eta + \lambda_1(1-t)) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} t} t^{\frac{\mu}{\delta_1}-1} (1-t)^{\frac{\eta}{\delta_1}-1} dt}$$

Итак, решение уравнения (1) имеет вид:

$$G_1(z) = -e^{\frac{\lambda_1}{\delta_1} z} z^{1-\frac{\mu}{\delta_1}} (1-z)^{-\frac{\eta}{\delta_1}} \int_0^z Q(t) e^{-\frac{\lambda_1}{\delta_1} t} t^{\frac{\mu}{\delta_1}-1} (1-t)^{\frac{\eta}{\delta_1}-1} dt + P_{10} \quad (5)$$

Заметим, что функция $G_1(z)$ доопределяется по непрерывности в точках $z = 0$ и $z = 1$:

$$G_1(0) = \lim_{z \rightarrow 0} G_1(z) = P_{10}, \quad G_1(1) = \lim_{z \rightarrow 1} G_1(z) = P_{1\bullet}.$$

Все стационарные вероятности состояний системы (с исправной линией) получаются по формулам: $P_{1n} = \frac{G_1^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$

3. ДЛИНЫ ОЧЕРЕДЕЙ И ВРЕМЯ НАХОЖДЕНИЯ ЗАЯВКИ В СИСТЕМЕ.

Средние длины очередей при работающей и неисправной линии равны соответственно $L_1 = G'_1(1)$ и $L_0 = G'_0(1)$. Эти величины можно получить, используя уравнения (1) и (2). Поскольку $\eta P_{1\bullet} = \gamma P_{0\bullet} = \gamma G_0(1)$, то из (2) следует

$$G'_0(z) = \frac{\lambda_0}{\delta_0} G_0(z) - \frac{\gamma}{\delta_0} \cdot \frac{G_0(z) - G_0(1)}{z-1},$$

и при $z \rightarrow 1$ после некоторых преобразований получаем:

$$L_0 = G'_0(1) = \frac{\lambda_0 \eta}{(\gamma + \eta)(\gamma + \delta_0)} \quad (6)$$

Аналогично из (1) следует

$$\delta_1 G'_1(z) = \frac{\lambda_1 z + (\delta_1 - \mu)}{z} G_1(z) - \frac{\delta_1 - \mu}{z} P_{10} + \frac{\gamma G_0(z) - \eta G_1(z)}{z-1},$$

и при $z \rightarrow 1$ получаем:

$$L_1 = G'_1(1) = \frac{\lambda_1 P_{10} + (\delta_1 - \mu + \lambda_1)(P_{1\bullet} - P_{10}) + \gamma L_0}{\eta + \delta_1}. \quad (7)$$

Обозначим общее время пребывания заявки в системе, независимо от того завершено её обслуживание или нет, буквой W . И вычислим его математическое ожидание по формуле Литтла:

$$M[W] = \frac{L}{\lambda}$$

У нас $\lambda = \lambda_0 P_{0\bullet} + \lambda_1 P_{1\bullet}$ и $L = L_0 P_{0\bullet} + L_1 P_{1\bullet}$, следовательно

$$M[W] = \frac{L_0 P_{0\bullet} + L_1 P_{1\bullet}}{\lambda_0 P_{0\bullet} + \lambda_1 P_{1\bullet}}$$

Обозначим W_{jn} общее время пребывания заявки в системе при условии, что она дождется обслуживания, если она поступил в систему в состоянии (j, n) . Так как новое прибытие заявок не влияет на время нахождения данной заявки в системе, мы имеем

$$M[W_{10}] = \frac{\mu}{\mu + \eta} \left(\frac{1}{\mu + \eta} \right)$$

Заметим, что $M[W_{10}] < \frac{1}{\mu}$. Естественно, если заявка закончила обслуживаться до того как в системе произошла поломка, то её время обслуживания будет меньше среднего. Также, при $\eta \rightarrow 0$, $M[W_{10}] \rightarrow \frac{1}{\mu}$. Рассмотрим случаи, когда $n \geq 1$

$$\begin{aligned} M[W_{11}] &= \frac{\mu + \delta_1}{\mu + \delta_1 + \eta} \left(\frac{1}{\mu + \delta_1 + \eta} + \frac{\mu}{(\mu + \eta)(\mu + \eta)} \right) \\ M[W_{12}] &= \frac{\mu + 2\delta_1}{\mu + 2\delta_1 + \eta} \cdot \frac{1}{\mu + 2\delta_1 + \eta} + \frac{\mu + 2\delta_1}{\mu + 2\delta_1 + \eta} \cdot \frac{\mu + \delta_1}{\mu + \delta_1 + \eta} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\mu + \delta_1 + \eta} + \frac{\mu}{(\mu + \eta)(\mu + \eta)} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ M[W_{1n}] &= \frac{\mu + n\delta_1}{\mu + n\delta_1 + \eta} \left(\frac{1}{\mu + n\delta_1 + \eta} + M[W_{1,n-1}] \right) \frac{n-1}{n}, \end{aligned} \quad (8)$$

Проведем аналогичные выкладки для нерабочего состояния системы.

$$M[W_{00}] = \frac{\gamma}{\gamma + \delta_0} \left(\frac{1}{\gamma + \delta_0} + M[W_{10}] \right)$$

Для $n \geq 1$:

$$M[W_{0n}] = \frac{\gamma}{\gamma + (n+1)\delta_0} \left(\frac{1}{\gamma + (n+1)\delta_0} + M[W_{1n}] \right) + \frac{(n+1)\delta_0}{\gamma + (n+1)\delta_0} \cdot \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{\gamma + (n+1)\delta_0} + M[W_{0,n-1}] \right) \quad (9)$$

Рекуррентные формулы (8), (9) позволяют последовательно находить математические ожидания $M[W_{i,j}]$. По формуле полной вероятности, среднее время $M[W_s]$ пребывания заявки в системе, при условии, что она дождется обслуживания, равно

$$M[W_s] = \sum_{j=0}^{\infty} M[W_{0j}]P_{0j} + \sum_{j=0}^{\infty} M[W_{1j}]P_{1j}$$

Напомним, что система страдает от двух типов потерь: (1) — все заявки уходят, если система ломается и (2) — заявки могут покидать систему из-за нетерпения во время ремонта системы. Когда система в состоянии $(1, n)$ $n \geq 1$, η — интенсивность поломки системы, а n — количество потерянных заявок мы можем найти интенсивность потерь заявок в единицу времени:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} \eta n P_{1n} = \eta L_1 \quad (10)$$

Интенсивность отказов из-за «нетерпения» в работающей системе:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{n=2}^{\infty} \delta_1(n-1)P_{1n} = \delta_1(L_1 - P_{11}) - \delta_1(P_{1\bullet} - P_{10} - P_{11}) = \\ &= \delta_1 L_1 - \delta_1(P_{1\bullet} - P_{10}) \end{aligned} \quad (11)$$

Интенсивность отказов из-за «нетерпения» в неработающей системе:

$$R_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_0 n P_{0n} = \delta_0 L_0 \quad (12)$$

Аналогично, среднее количество заявок, обслуживаемых за единицу времени

$$S = \mu(P_{1\bullet} - P_{10}).$$

В стационарном режиме общая интенсивность λ входящего потока заявок естественным образом разлагается в сумму четырёх слагаемых:

$$\begin{aligned} \lambda &= R + R_0 + R_1 + S = \eta L_1 + \delta_0 L_0 + \delta_1 L_1 - \delta_1(P_{1\bullet} - P_{10}) + \mu(P_{1\bullet} - P_{10}), \\ \lambda &= (\eta + \delta_1)L_1 + \delta_0 L_0 + (\mu - \delta_1)(P_{1\bullet} - P_{10}) \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) можно другим способом определить L_1 :

$$L_1 = \frac{\lambda - \delta_0 L_0 - (\mu - \delta_1)(P_{1\bullet} - P_{10})}{(\eta + \delta_1)},$$

что, как нетрудно показать, совпадает с (7).

Из (13) найдём долю обслуженных заявок:

$$P_s = \frac{\mu}{\lambda}(P_{1\bullet} - P_{10}) = \frac{\mu(P_{1\bullet} - P_{10})}{\lambda_0 P_{0\bullet} + \lambda_1 P_{1\bullet}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассмотрена система массового обслуживания типа М/М/1, т.е. система с одной линией обслуживания, пуассоновскими потоками поступающих заявок, экспоненциальной функцией распределения времени обслуживания, отказами линии и восстановлением (ремонт). Время исправной работы линии, как и время ее ремонта — случайные величины, имеющие показательное распределение. Потоки заявок, поступающих на работающую и ремонтируемую линию имеют разную интенсивность. Заявки, находящиеся в очереди проявляют «нетерпение», при этом интенсивности «нетерпеливости» заявок в работающей и ремонтируемой системе различны. Найдены производящие функции распределений вероятностей функционирующей и неисправной линии, средние длины очередей, доля обслуженных заявок, среднее время пребывания в системе заявки, дождавшейся обслуживания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М.: Наука, 1965. — 367 с.
2. Uri Yechiali. Queues with system disasters and impatient customers when system is down / Yechiali Uri // *Queueing Systems*, 56 (2007). — P. 195–202.
3. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — М.: Наука, 1966. — 301 с.
4. Бочаров П. П. Теория массового обслуживания / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. — М. Рудн, 1995. — 529 с.
5. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М. Машиностроение, 1976. — 214 с.

Статья поступила в редакцию 27.05.2013

МАКСИМАЛЬНІ ЗА ВКЛЮЧЕННЯМ МНОЖИНИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ МНОЖИННИХ СИСТЕМ З БАГАТОЗНАЧНОЮ ДИНАМІЧНОЮ СКЛАДОВОЮ

© Р. П. Королік, В. В. Пічкур

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ

вул. Володимирська, 64, 01601, Київ, Україна

Е-МАЙЛ: *vpichkur@gmail.com, korolik@email.ua*

Abstract. In this paper the properties of optimal sets of initial conditions in the problem of practical stability of discrete set systems are considered. In the case of linear dynamic components Minkowski function, inverse Minkowski function, and support function of these sets are obtained.

Вступ

Дискретні системи мають суттєве прикладне значення в зв'язку з тим, що ряд економічних, біологічних, соціальних та технічних процесів описуються дискретними моделями. Крім того, різницеві співвідношення застосовуються при побудові числових методів для різних класів задач. Тому є актуальним дослідження якісних характеристик дискретних систем. Так, в роботах [7, 9, 10, 11] висвітлюються методи теорії стійкості, в [1, 3] отримані оцінки і властивості максимальних множин практичної стійкості дискретних систем, в [4] одержано властивості максимальних множин практичної стійкості множинних дискретних систем.

Якщо на праву частину системи діють постійні збурення, то дискретні моделі набувають форми включень. Дискретні включення застосовуються при апроксимації диференціальних включень та рівнянь Хукухари дискретними включеннями, оцінки точності таких наближень [8, 6]. Неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов досліджено в [5].

В роботі досліджено властивості максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних включень. У випадку лінійної динамічної складової отримана функція Мінковського та обернена функція таких множин. Результати мають алгоритмічну спрямованість.

Ми будемо використовувати такі позначення: \mathbb{R}^n — евклідовий n -вимірний простір, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток в \mathbb{R}^n , який породжує евклідову норму $\|\cdot\|$, $\text{int}A$, ∂A — сукупність внутрішніх точок і границя множини $A \subset \mathbb{R}^n$ відповідно, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ — одинична сфера, $K_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ — замкнена куля радіусу r з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ — сукупність всіх непорожніх

компактів з \mathbb{R}^n , $conv(\mathbb{R}^n)$ — сукупність всіх непорожніх опуклих компактів з \mathbb{R}^n , $[0, N] = \{0, 1, \dots, N\}$ — множина індексів, $A^\sigma = A + \sigma K_1(0)$ — σ -розширення множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $c(A, \psi)$ — опорна функція, $A \subset \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

1. ВЛАСТИВОСТІ МАКСИМАЛЬНОЇ ЗА ВКЛЮЧЕННЯМ МНОЖИНИ

Розглянемо систему вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), \quad (1)$$

$$B_k : \mathbb{R}^m \rightarrow comp(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

де $x \in \mathbb{R}^m$, $f_k : D \rightarrow D \subset \mathbb{R}^m$ — неперервне в області D багатозначне відображення. Система (1), (2) називається дискретною множинною системою, при цьому (1) називається динамічною складовою, яка має форму дискретного включення, відображення (2) — множинною складовою множинної дискретної системи (1), (2) [4]. Позначимо $x(k, x_0)$ — розв'язок системи (1), який задовольняє початковій умові $x(0) = x_0$, $k \in [0, N]$. Множиною досяжності $X(k, x_0)$ дискретного включення (1) для $x(0) = x_0$ в момент $k \in [0, N]$ називається сукупність точок $x \in \mathbb{R}^m$ таких, що знайдеться розв'язок $x(k, x_0)$ дискретного включення (1), що $x(k) = x(k, x_0)$ [5].

Розв'язком (1), (2) називається багатозначне відображення

$$F : [0, N] \times D \rightarrow comp(\mathbb{R}^n)$$

таке, що його значення визначаються за правилом

$$F(k, x_0) = B_k(X(k, x_0)).$$

Тут $x(k) = x(k, x_0)$ — розв'язок системи (1), $k \in [0, N]$, $x_0 \in D$.

Нехай $G_0 \subset D$ — множина допустимих початкових станів, $\Phi(k) \in comp(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(k) \subset D$ — множина фазових обмежень, $B_k(0) \subset \Phi(k)$, $k \in [0, N]$, $f_k(0) = 0$, $k \in [0, N-1]$.

Припустимо, що для системи (1), (2) виконується така умова: існують такі $r > 0$ і $k \in [1, N]$, що справджується співвідношення

$$B_k(X(k, K_r(0))) / \Phi(k) \neq 0.$$

Означення 1. Система (1), (2) називається $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ -сильно стійкою, якщо $B_k(x(k, x_0)) \subset \Phi(k)$ для всіх розв'язків $x(k, x_0)$ включення (1), $x_0 \in G_0$, $k \in [0, N]$.

Означення 2. Говорять, що сукупність $G_* \subset \Phi(0)$ є максимальною за включенням множиною практичної стійкості системи (1), (2) при фазових обмеженнях $\Phi(k)$ на інтервалі $[0, N]$, якщо система (1), (2) є $\{G_*, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкою і $G_0 \subseteq G_*$ для всіх множин $G_0 \subseteq \Phi(0)$, для яких має місце $\{G_0, \Phi(k), 0, N\}$ -стійкість системи (1), (2).

Теорема 1. Множина G_* — компакт.

Доведення. Множина G_* — обмежена, оскільки $G_* \subset K_r(0)$. Покажемо замкненість G_* . Для цього зафіксуємо довільну послідовність $\{x_p\} \in G_*$, $\lim_{p \rightarrow \infty} x_p = x_0$. Покажемо, що $x_0 \in G_*$. Для всіх розв'язків $x(k, x_0)$ включення (1), $k \in [0, N]$ має місце $B_k(X(k, x_p)) \subseteq \Phi(k)$, $p = 1, 2, \dots$, $k \in [0, N]$.

Зафіксуємо $k \in [0, N]$. Відображення $B_k(x)$ — неперервне. Оскільки має місце неперервна залежність розв'язків (1) від початкових умов, тому за теоремою про суперпозицію [2, 5] відображення $z \mapsto B_k(X(k, z))$ є неперервним, $z \in D$. Зафіксуємо $k \in [0, N]$. З неперервності відображення $z \mapsto B_k(X(k, z))$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер p_0 такий, що для всіх $p > p_0$ має місце включення

$$B_k(X(k, x_0)) \subseteq K_\varepsilon(B_k(X(k, x_p))) \subseteq K_\varepsilon(\Phi(k)).$$

Звідси

$$B_k(X(k, x_0)) \subseteq \bigcap_{\varepsilon > 0} K_\varepsilon(\Phi(k)) = \Phi(k).$$

Отже, $x_0 \in G_*$. Теорему доведено. □

Теорема 2. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то існує такий розв'язок $x(\bar{k}, x_0)$ включення (1) і $\bar{k} \in [0, N]$, для якого $\partial B_{\bar{k}}(X(\bar{k}, x_0)) \cap \partial \Phi(\bar{k}) \neq \emptyset$, при цьому для будь-якого розв'язку $x(k) = x(k, x_0)$ і $k \in [0, N]$ виконується $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$.

Доведення. Нехай $\partial B_k(X(k, x_0)) \cap \partial \Phi(k) = \emptyset$ для довільного $k \in [0, N]$ і справджується $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$. Це означає, що знайдеться $\varepsilon_i > 0$ для всіх $i = 0, 1, \dots, N$ таке, що $B_i(X(i, x_0))^{\varepsilon_i} \subset \text{int} \Phi(i)$. З неперервності відображення $z \mapsto B_k(X(k, z))$, $z \in D$ випливає, що знайдеться $\delta > 0$ таке, що при $z_0 \in K_\delta(x_0)$ справджується

$$B_i(X(i, z_0)) \subset (B_i(X(i, x_0)))^{\varepsilon_0},$$

де $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$ $i = 0, 1, \dots, N$. Тому $B_i(X(i, z_0)) \subset \Phi(i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, $z_0 \in K_\delta(x_0)$. Отже, $K_\delta(x_0) \subset G_*$. Це означає, що $x_0 \in \text{int} G_*$. А це суперечить умові теореми. Теорему доведено. □

Означення 3. Відображення $f_k : D \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ називається відкритим, якщо з того, що $U \subseteq D$ — відкрита множина, випливає, що множина $f(U) = \bigcup_{x \in U} f(x)$ — відкрита.

Теорема 3. Нехай f_k, B_k — відкриті відображення, виконується включення $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1) та існує таке $\bar{k} \in [0, N]$ і знайдеться такий розв'язок $x(\bar{k}, x_0)$, що $\partial B_{\bar{k}}(X(\bar{k}, x_0)) \cap \partial \Phi(\bar{k}) \neq \emptyset$. Тоді $x_0 \in \partial G_*$.

Доведення. З умови теореми випливає, що $x_0 \in G_*$. Припустимо, що $x_0 \in \text{int}G_*$. Тоді існує таке $\delta > 0$, для якого $K_\delta(x_0) \subset G_*$. Оскільки f_k і B_k – відкриті відображення, то при деякому $\varepsilon_k > 0$ для $z_0 \in K_\delta(x_0)$ справедливе таке співвідношення

$$B_k(X(k, z_0)) \subset (B_k(X(k, x_0)))^{\varepsilon_k} \subset \Phi(k),$$

$k = 0, 1, \dots, N$. Це означає $\partial B_k(X(k, x_0)) \cap \partial \Phi(k) = \emptyset$, $k \in [0, N]$. Прийшли до суперечності. Теорему доведено. \square

Наслідок 1. Нехай f_k і B_k – відкриті відображення. Для того, щоб $x_0 \in \partial G_*$ необхідно і достатньо, щоб для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1) $B_k(X(k, x_0)) \subseteq \Phi(k)$, $k \in [0, N]$ та існував такий розв'язок $x(k, x_0)$, $k \in [0, N]$, що $\partial B_k(X(k, x_0)) \cap \partial \Phi(k) \neq \emptyset$.

Наслідок 2. Нехай f_k і B_k – відкриті відображення. Точка $x_0 \in \text{int}G_*$ тоді і тільки тоді, коли $B_k(X(k, x_0)) \subset \text{int}\Phi(k)$ для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ включення (1), $k \in [0, N]$.

2. Випадок лінійної динамічної складової

Розглянемо лінійну однорідну дискретну множинну систему

$$x(k+1) \in A(k)x(k) + U(k), \quad (3)$$

$$B_k : \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n), \quad (4)$$

де $A(k)$ – невироджена матриця розмірності $n \times n$, $U(k) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, $0 \in \text{int}U(k)$, $k \in [0, N-1]$. Нехай $\Phi(k) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ множина фазових обмежень, $k \in [0, N]$. Запишемо множину досяжності системи (3) у вигляді

$$X(k, x_0) = \Theta(k)x_0 + \Omega(k), \quad k \in [1, N],$$

де $\Theta(k) = A_{k-1} \dots A_0$ – невироджена матриця, $\Theta(i, k) = A_{i-1} \dots A_k$, $\Omega(k) = \sum_{i=1}^k \Theta(i, k)U(i-1)$, $k \in [1, N]$. Припустимо, що мають місце такі співвідношення

$$B_k(x) = \Xi(k)x + V(k),$$

де $\Xi(k)$ – матриця розмірності $m \times n$, $k \in [0, N]$, $V(k) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$. Тоді

$$B_k(X(k, x_0)) = \Xi(k)\Theta(k)x_0 + \Xi(k)\Omega(k) + V(k)$$

Опорна функція

$$c(B_k(X(k, x_0)), \psi) = \langle x_0, \Theta^*(k)\Xi^*(k)\psi \rangle + \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k)\Xi^*(k)\psi) + c(V(k), \psi).$$

Має місце теорема.

Теорема 4. Якщо $\Phi(k) \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, то $G_* \in \text{conv}(\mathbb{R}^n)$.

Доведення. Виберемо довільні точки $x_0, y_0 \in G_*$. Тоді

$$\begin{aligned} (\Xi(k) \Theta(k) x_0 + \Xi(k) \Omega(k) + V(k)) &\subset \Phi(k), \\ (\Xi(k) \Theta(k) y_0 + \Xi(k) \Omega(k) + V(k)) &\subset \Phi(k), \quad k \in [0, N]. \end{aligned}$$

Оскільки множини $\Omega(k), V(k)$ є опуклими, то при $\lambda \in [0, 1]$ виконується

$$\begin{aligned} \lambda(\Xi(k) \Theta(k) x_0 + \Xi(k) \Omega(k) + V(k)) + (1 - \lambda)(\Xi(k) \Theta(k) y_0 + \Xi(k) \Omega(k) + V(k)) &= \\ = \lambda(\Xi(k) \Theta(k) x_0) + (1 - \lambda)(\Xi(k) \Theta(k) y_0) + & \\ + \lambda(\Xi(k) \Omega(k) + V(k)) + (1 - \lambda)(\Xi(k) \Omega(k) + V(k)) &= \\ = \Xi(k) \Theta(k) (\lambda x_0 + (1 - \lambda) y_0) + \Xi(k) \Omega(k) + V(k) &\subset \Phi(k), \quad k \in [0, N]. \end{aligned}$$

Отже, точка $\lambda x_0 + (1 - \lambda) y_0 \in G_*$. Теорему доведено. \square

Теорема 5. Для того, щоб $x_0 \in \partial G_*$ необхідно і достатньо, щоб

$$\max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)} = 1$$

за умови $c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi) > 0$. Тут $\psi \in S$, $k \in [0, N]$.

Доведення. Якщо $x_0 \in \partial G_*$, то $c(B_k(X(k, x_0)), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$ для довільних $\psi \in S$, $k \in [0, N]$. Використовуючи наслідок 1 теореми 3, одержуємо, що існує $\xi \in S$, $\bar{k} \in [0, N]$, для яких $c(B_{\bar{k}}(X(\bar{k}, x_0)), \xi) = c(\Phi(\bar{k}), \xi)$. Враховуючи властивості опорної функції [2], отримуємо, що при $\psi \in S$, $k \in [0, N]$ має місце нерівність

$$\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle + \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) + c(V(k), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi),$$

в якій досягається рівність при $\xi \in S$, $\bar{k} \in [0, N]$. Оскільки

$$c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi) > 0, \quad \psi \in S, \quad k \in [0, N],$$

то звідси маємо

$$\frac{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)} \leq 1, \quad \psi \in S, \quad k \in [0, N].$$

Крім того,

$$\frac{\langle \xi_0, \Theta^*(\bar{k}) \Xi^*(\bar{k}) \psi \rangle}{c(\Phi(\bar{k}), \psi) - \sum_{i=1}^{\bar{k}} c(U(i-1), \Theta^*(i, \bar{k}) \Xi^*(\bar{k}) \psi) - c(V(\bar{k}), \psi)} = 1, \xi \in S, \bar{k} \in [0, N].$$

Достатність випливає з того, що при доведенні необхідності використовувались твердження, що мають необхідний і достатній характер. Теорему доведено. \square

Теорема 6. Функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$m_*(x_0) = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)}, \quad (5)$$

де $c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi) > 0, \psi \in S, k \in [0, N]$.

Доведення. За означенням функція Мінковського

$$m_*(x_0) = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x_0}{\lambda} \in G_* \right\}, x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Якщо $\frac{x_0}{\lambda} \in G_*$, то $X(k, \frac{x_0}{\lambda}) = \Theta(k) \frac{x_0}{\lambda} + \Omega(k)$ для всіх $k \in [0, N]$. З властивостей опорних функцій випливає

$$\frac{1}{\lambda} \langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle + \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) + c(V(k), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$$

для всіх $\psi \in S$ та $k \in [0, N]$. Тоді

$$\lambda \geq \frac{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)}$$

для довільних $\psi \in S, k \in [0, N]$. Звідси за означенням функції Мінковського

$$m_*(x_0) = \max_{k \in [0, N]} \max_{\psi \in S} \frac{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)}.$$

Теорему доведено. \square

За властивостями функції Мінковського

$$G_* = \{x \in \mathbb{R}^m : m_*(x) \leq 1\}.$$

Теорема 7. Обернена функція Мінковського множини G_* має вигляд

$$d_*(x_0) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)}{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle} \quad (6)$$

за умови $\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle > 0, \psi \in S, k \in [0, N]$.

Доведення. За означенням оберненої функції Мінковського

$$d_*(x_0) = \sup \{ \lambda > 0 : \lambda x_0 \in G_* \}, x_0 \in \mathbb{R}^m.$$

Використовуючи доведення попередньої теореми та властивості опорних функцій маємо

$$\lambda \langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle + \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) + c(V(k), \psi) \leq c(\Phi(k), \psi)$$

для всіх $\psi \in S$ та $k \in [0, N]$. Звідси

$$\lambda \leq \frac{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)}{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle},$$

при умові $\langle g_k(\psi), \Theta(k) x_0 \rangle > 0, \psi \in S, k \in [0, N]$. Остаточно отримуємо

$$d_*(x_0) = \min_{k \in [0, N]} \min_{\psi \in S} \frac{c(\Phi(k), \psi) - \sum_{i=1}^k c(U(i-1), \Theta^*(i, k) \Xi^*(k) \psi) - c(V(k), \psi)}{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}.$$

Теорему доведено. □

За властивостями оберненої функції Мінковського

$$G_* = \bigcup_{e \in S} \{x = ke : k \in [0, d_*(e)]\}.$$

Розглянемо приклад. Знайдемо функцію Мінковського, обернену функцію Мінковського множини G_* для задачі практичної стійкості множинної дискретної системи вигляду

$$x(k+1) \in A(k)x(k) + K_{m(k)}(0),$$

$$B_k(x) = K_{p(k)}(x),$$

за умови, що фазові обмеження

$$\Phi(k) = K_{r(k)}(0), r(k) > 0, k \in [0, N].$$

З співвідношення (6) випливає, що у цьому випадку функція Мінковського має вигляд

$$m_*(x_0) = \max_{k \in [0, N], \psi \in S} \frac{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}{r(k) - \sum_{i=1}^k m(i-1) \|\Theta^*(k, i) \Xi^*(k) \psi\| - n(k)}.$$

Обернена функція Мінковського згідно співвідношення (6) може бути записана так

$$d_*(x_0) = \min_{k \in [0, N], \psi \in S} \frac{r(k) - \sum_{i=1}^k m(i-1) \|\Theta^*(k, i) \Xi^*(k) \psi\| - n(k)}{\langle x_0, \Theta^*(k) \Xi^*(k) \psi \rangle}.$$

ВИСНОВКИ

В статті обґрунтовано компактність та властивості границі максимальної за включенням множини практичної стійкості дискретних включень. Для лінійної дискретної множинної системи доведено опуклість оптимальної множини початкових умов, одержано її функцію Мінковського та обернену функцію Мінковського.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Башняков А. Н. О максимальном множестве начальных условий в задачах практической устойчивости дискретной системы / А. Н. Башняков, В. В. Пичкур, И. В. Хитько // Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 2. — С. 5–11.
2. Благодатских В. И. Теория дифференциальных включений / В. И. Благодатских. — М.: Изд-во МГУ, 1979. — 88 с.
3. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. — К.: Наукова думка, 1985. — 304 с.
4. Королік Р. П. Про практичну стійкість дискретних множинних систем / Р. П. Королік, В. В. Пічкур // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. — 2012. — Вип. 1. — С. 185–188.
5. Пічкур В. В. Про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов / В. В. Пічкур, М. С. Сасонкіна // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — № 1. — С. 73–80.
6. Плотников В. А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы / В. А. Плотников, А. В. Плотников, А. Н. Витюк — Одесса: АстроПринт, 1999. — 354 с.
7. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М.: Мир, 1971. — 309 с.
8. Dontchev A. Difference Methods for Differential Inclusions: A Survey / A. Dontchev, F. Lempio // SIAM Review. — 1992. — Vol. 34, No. 2. — P. 263–294.
9. Galor O. Discrete Dynamical Systems / O. Galor. — Berlin: Springer, 2007. — 158 p.
10. Martynyuk A. A. Stability analysis of discrete systems / A. A. Martynyuk // International Applied Mechanics. — 2000. — Vol. 36, No. 7. — P. 3–34.
11. Michel A. Stability of dynamical systems / A. Michel, L. Hou, D. Liu. — Boston: Birkhäuser, 2008. — 515 p.

Статья поступила в редакцию 15.05.2013

СТАЦИОНАРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПОТЕРЯМИ И НЕНАДЕЖНЫМ ПРИБОРОМ

© А. И. Песчанский, А. И. Коваленко

СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
ул. Университетская, 33, г. Севастополь, 99053, Украина
E-MAIL: annushka199@bk.ru

Abstract. Semi-Markov model of operation of a single-server queue system with losses and unreliable server has been built. All the random values appearing in the problem definition are supposed to have general distribution functions. An explicit form of system stationary characteristics has been defined.

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании систем обслуживания естественным с практической точки зрения является предположение о наличии случайных отказов элементов систем. Впервые на необходимость учета возможности отказа и восстановления обслуживающих приборов указал Б. В. Гнеденко [1]. Его учеником Т. П. Марьяновичем была рассмотрена однолинейная система с бесконечной очередью и ненадежным прибором [2]. Дальнейшие исследования как однолинейных, так и многоканальных ненадежных систем содержатся, например, в [3]–[6]. Однако фигурирующие в рассмотренных задачах случайные величины (в частности, времена между моментами поступления заявок), как правило, распределены по экспоненциальным законам. Отличием данной работы является предположение об общем законе распределения случайных величин, в терминах которых описывается функционирование системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему обслуживания $GI/G/1/0$ (в классификации Д. Кендалла) с потерями и ненадежным обслуживающим прибором. Поступающий в систему рекуррентный поток заявок порождается случайной величиной (СВ) β с произвольной функцией распределения (ФР) $G(t) = P\{\beta \leq t\}$. Если прибор свободен, то поступившая в систему заявка начинает обслуживаться, в противном случае заявка теряется. Длительность обслуживания заявки — СВ α с произвольной ФР $F(t) = P\{\alpha \leq t\}$. После достижения прибором суммарной наработки, реализуемой как СВ γ с ФР $\Phi(t) = P\{\gamma \leq t\}$ общего вида, происходит его отказ, и

сразу же начинается восстановление прибора. При этом обслуживаемая заявка теряется. Длительность проведения восстановления прибора — СВ σ с произвольной ФР $\Psi(t) = P\{\sigma \leq t\}$. После окончания восстановительной работы прибор переходит в режим ожидания заявки. Заявки, поступающие в систему во время восстановления прибора, теряются. Предполагается, что СВ α , β , γ и σ независимы, имеют плотности распределения вероятностей $f(t)$, $g(t)$, $\phi(t)$, $\psi(t)$ и конечные математические ожидания $M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$ и $M\sigma$ соответственно.

Целью работы является построение полумарковской модели функционирования описанной выше системы обслуживания и нахождение ее стационарных характеристик: финальных вероятностей и средних времен пребывания в состояниях ожидания и обслуживания заявки, а также восстановления обслуживаемого прибора.

2. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУМАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ

Функционирование системы опишем полумарковским процессом $\xi(t)$ с дискретно-непрерывным фазовым пространством состояний [7]. Обслуживающий прибор может находиться в следующих физических состояниях:

- 0 — прибор в работоспособном состоянии и ожидает заявку;
- 1 — прибор в работоспособном состоянии и обслуживает заявку;
- 2 — прибор восстанавливается.

Расширим фазовое пространство физических состояний системы до фазового пространства полумарковских состояний, добавляя к кодам физических состояний координаты, обеспечивающие марковское свойство фазовых состояний в моменты их изменений. В итоге фазовое пространство полумарковских состояний системы имеет вид:

$$E = \{21, 210u, 21xu, 22x0, 32x, 10x0, 10xu; x > 0, u > 0\}.$$

Расшифруем коды состояний системы:

21 — в систему поступила заявка, начинается ее обслуживание; наработка прибора отсутствует;

210u — поступившая в систему заявка начала обслуживаться; величина наработки прибора до отказа равна u;

21xu — поступившая в систему заявка теряется, так как прибор занят обслуживанием, до конца которого осталось время x; величина наработки прибора до отказа равна u;

22x0 — поступившая в систему заявка теряется по причине восстановления прибора, до окончания которого осталось время x;

$32x$ — наработка прибора достигла критического уровня, произошел отказ прибора, и началось его восстановление; до поступления следующей заявки осталось время x ;

$10x0$ — восстановление прибора закончено; до поступления следующей заявки осталось время x ;

$10xu$ — обслуживание заявки закончено, до поступления следующей заявки осталось время x ; величина наработки прибора до отказа равна u .

Временная диаграмма функционирования системы изображена на рис. 1, а граф ее переходов — на рис. 2.

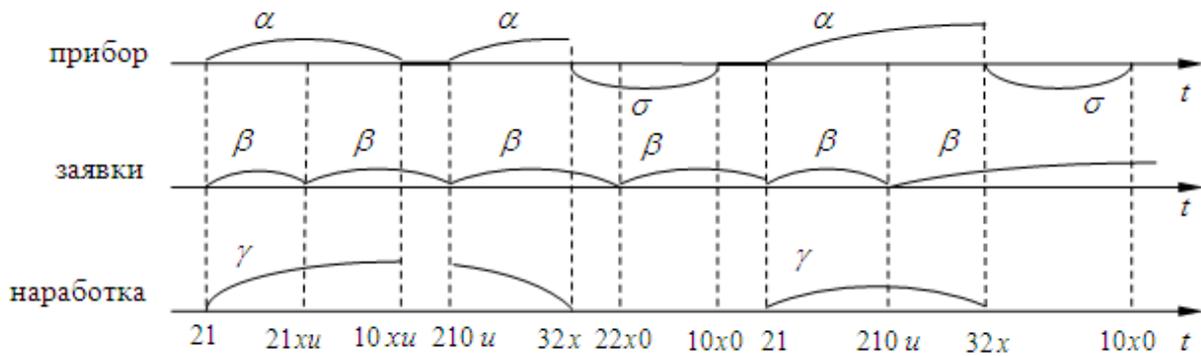


Рис. 1. Временная диаграмма функционирования системы.

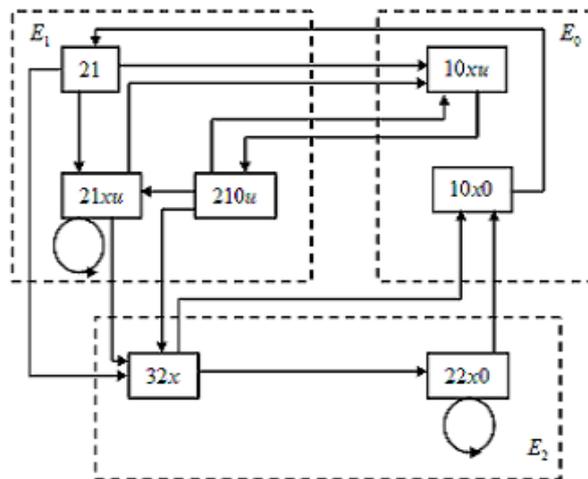


Рис. 2. Граф переходов системы.

Времена пребывания системы в соответствующих состояниях определяются формулами

$$\begin{aligned}\theta_{21} &= \alpha \wedge \beta \wedge \gamma, \quad \theta_{210u} = \alpha \wedge \beta \wedge u, \quad \theta_{21xu} = \beta \wedge x \wedge u, \quad \theta_{22x0} = \beta \wedge x, \\ \theta_{32x} &= \sigma \wedge x, \quad \theta_{10x0} = \theta_{10x0} = x,\end{aligned}$$

где \wedge — знак минимума.

Опишем случайные события переходов. События переходов из состояния $210u$ иллюстрируются на рис. 3:

$$\begin{aligned}\{210u \rightarrow 10, \beta - \alpha, u - \alpha\} &= \{\alpha < \beta \wedge u\}, \\ \{210u \rightarrow 21, \alpha - \beta, u - \beta\} &= \{\beta < \alpha \wedge u\}, \\ \{210u \rightarrow 32, \beta - u\} &= \{u < \alpha \wedge \beta\}.\end{aligned}\tag{1}$$

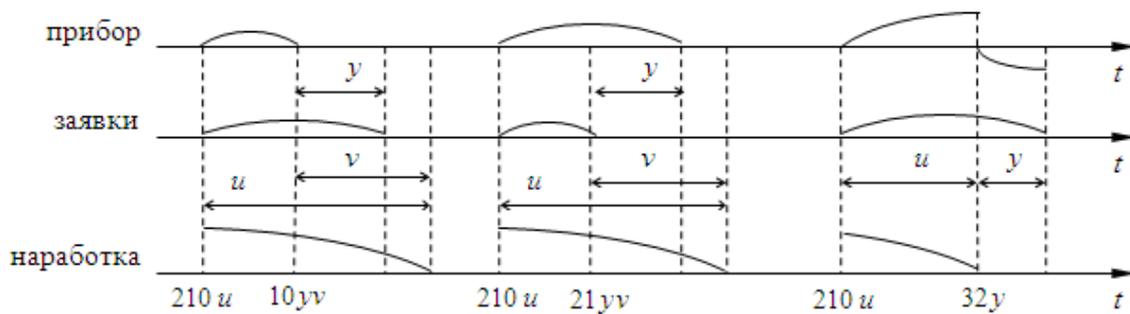


Рис. 3. События переходов из состояния $210u$

Из соотношений (1) определяем плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова из состояния $210u$:

$$p_{210u}^{10dydv} = P\{\beta - \alpha \in dy, u - \alpha \in dv\} = f(u - \nu)g(u - \nu + y)dydv, \quad 0 < \nu < u, \quad y > 0;$$

$$p_{210u}^{21dydv} = P\{\alpha - \beta \in dy, u - \beta \in dv\} = g(u - \nu)f(u - \nu + y)dydv, \quad 0 < \nu < u, \quad y > 0;$$

$$p_{210u}^{32dy} = P\{\beta - u \in dy, u < \alpha\} = g(u + y)\bar{F}(u)dy, \quad y > 0.$$

Аналогично вычисляются вероятности и плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова из других состояний системы:

$$p_{21}^{21dxdu} = P\{\alpha - \beta \in dx, \gamma - \beta \in du\} = \int_0^{\infty} g(t)f(t+x)\phi(t+u)dt dx du, \quad x > 0, \quad u > 0;$$

$$\begin{aligned}
 p_{21}^{10dxdu} &= P\{\beta - \alpha \in dx, \gamma - \alpha \in du\} = \int_0^\infty f(t)g(t+x)\phi(t+u) dt dx du, \quad x > 0, \quad u > 0; \\
 p_{21}^{32dx} &= P\{\beta - \gamma \in dx, \alpha > \gamma\} = \int_0^\infty \phi(t)\bar{F}(t)g(t+x) dt dx, \quad x > 0; \\
 p_{21xu}^{21dy, u-x+dy} &= P\{x - \beta \in dy\} = g(x-y)dy, \quad 0 < y < x, \quad x < u; \\
 p_{21xu}^{21x-u+dv, dv} &= P\{u - \beta \in dv\} = g(u-\nu)d\nu, \quad 0 < \nu < u, \quad u < x; \\
 p_{21xu}^{10dy, u-x} &= P\{\beta - x \in dy\} = g(x+y)dy, \quad y > 0, \quad < u; \\
 p_{21xu}^{32dy} &= P\{\beta - u \in dy\} = g(u+y)dy, \quad y > 0, \quad u < x; \quad P_{10x0}^{21} = 1; \quad P_{10xu}^{210u} = 1; \\
 p_{22x0}^{22dy, 0} &= P\{x - \beta \in dy\} = g(x-y)dy, \quad 0 < y < x; \\
 p_{22x0}^{10dy, 0} &= P\{\beta - x \in dy\} = g(x+y)dy, \quad y > 0; \\
 p_{32x}^{22dy, 0} &= P\{\sigma - x \in dy\} = \psi(x+y)dy, \quad y > 0; \\
 p_{32x}^{10dy, 0} &= P\{x - \sigma \in dy\} = \psi(x-y)dy, \quad 0 < y < x.
 \end{aligned}$$

3. НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Обозначим через ρ_{21} значение стационарного распределения для состояния 21, а $\rho(210u), \rho(21xu), \rho(32x), \rho(22x0), \rho(10x0)$ и $\rho(10xu)$ — плотности стационарного распределения вложенной цепи Маркова для состояний 210u, 21xu, 32x, 22x0, 10x0 и 10xu соответственно. Используя плотности вероятностей переходов вложенной цепи Маркова, составим для них систему интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \rho(21xu) &= \int_0^\infty g(t)\rho(21, t+x, t+u)dt + \int_0^\infty g(t)f(t+x)\rho(210, t+u)dt + \rho_{21} \int_0^\infty g(t)f(t+x)\phi(t+u)dt, \\
 \rho(10xu) &= \int_0^\infty g(t+x)\rho(21t, t+u)dt + \int_0^\infty f(t)g(t+x)\rho(210, t+u)dt + \rho_{21} \int_0^\infty g(t+x)f(t)\phi(t+u)dt, \\
 \rho(210u) &= \int_0^\infty \rho(10tu) dt, \\
 \rho(32x) &= \int_0^\infty g(t+x) dt \int_t^\infty \rho(21st) ds + \int_0^\infty \bar{F}(t)g(t+x)\rho(210t) dt + \rho_{21} \int_0^\infty \bar{F}(t)g(t+x)\phi(t) dt, \\
 \rho(22x0) &= \int_0^\infty g(t)\rho(22, t+x, 0) dt + \int_0^\infty \psi(t+x)\rho(32t) dt, \\
 \rho(10x0) &= \int_0^\infty g(t+x)\rho(22t0) dt + \int_0^\infty \psi(t)\rho(32, t+x) dt, \\
 \rho_{21} &= \int_0^\infty \rho(10t0) dt, \\
 \rho_{21} + \int_0^\infty \int_0^\infty [\rho(21xu) + \rho(10xu)] dudx + \int_0^\infty [\rho(22x0) + \rho(32x) + \rho(10x0)] dx + \int_0^\infty \rho(210u) du &= 1.
 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Пусть $L_1^1(R_+^2)$ и $L_1^1(R_+)$ — весовые пространства функций с конечными нормами

$$\|\varphi(x, u)\|_{L_1^1(R_+^2)} = \int_0^\infty \int_0^\infty (1+x)(1+u)|\phi(x, u)| du dx; \quad \|\varphi(x)\|_{L_1^1(R_+)} = \int_0^\infty (1+x)|\phi(x)| dx.$$

Решение системы уравнений будем искать в пространствах: $\rho(21xu), \rho(10xu) \in L_1^1(R_+^2)$, $\rho(32x), \rho(22x0), \rho(10x0) \in L_1^1(R_+)$. Нам понадобятся следующие понятия теории восстановления [8]:

- $h_g(t) = \sum_{n=1}^\infty g^{*(n)}(t)$ и $h_f(t) = \sum_{n=1}^\infty f^{*(n)}(t)$ — плотности функций восстановления $H_g(t)$ и $H_f(t)$ рекуррентных потоков, порожденных СВ β и α соответственно;
- $v_g(t, x) = g(t+x) + \int_0^t g(t+x-s)h_g(s) ds$ — плотность прямого остаточного времени процесса восстановления, порожденного СВ β ;
- плотность распределения вероятностей $\kappa(x)$ СВ — времени между началом восстановления прибора и моментом поступления ближайшей заявки в систему, определяемая соотношением

$$\kappa(x) = \int_0^\infty \bar{F}(t)v_g(t, x)\phi(t) dt + \int_0^\infty h_f(t) dt \int_0^\infty \bar{F}(y)v_g(y, x)\phi(t+y) dy;$$

- $H_g^k(t)$ — запаздывающий процесс восстановления, порожденный функциями $K(t) = \int_0^t \kappa(x) dx$ и $G(t)$; $h_g^k = \kappa(t) + \int_0^t h_g(t-s)\kappa(s) ds$ — плотность этого процесса восстановления.

Теорема. Если время обслуживания заявки α имеет конечные математическое ожидание $M\alpha$ и дисперсию $D\alpha$, то стационарное распределение вложенной цепи Маркова определяется плотностью вероятностей

$$\rho(210u) = \rho_{21} \int_0^\infty h_f(t)\phi(t+u) dt,$$

$$\rho(21xu) = \rho_{21} \int_0^\infty h_g(t)f(t+x)\phi(t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty h_g(t)f(t+x) dt \int_0^\infty h_f(s)\phi(s+t+u) ds,$$

$$\rho(32x) = \rho_{21}\kappa(x), \quad \rho(22x0) = \rho_{21} \int_0^\infty h_g^k(t)\psi(t+x) dt,$$

$$\rho(10xu) = \rho_{21} \int_0^\infty f(t)v_g(t, x)\phi(t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty h_f(t) dt \int_0^\infty f(y)v_g(y, x)\phi(y+t+u) dy,$$

$$\rho(10x0) = \rho_{21} \int_0^\infty \psi(t)\kappa(t+x) dt + \rho_{21} \int_0^\infty v_g(t, x) dt \int_0^\infty \psi(t+y)\kappa(y) dy,$$

где

$$\rho_{21} = [2 \int_0^\infty \phi(t) \hat{H}_f(t) dt + \int_0^\infty \psi(t) \hat{H}_g^\kappa dt + \int_0^\infty h_g(t) \bar{F}(t) dt \int_0^\infty \phi(s+t) \hat{H}_f(s) ds]^{-1},$$

$$\hat{H}_f(t) = 1 + H_f(t), \quad \hat{H}_g^\kappa(t) = 1 + H_g^\kappa(t).$$

Доказательство. Исключая из первых трех уравнений системы (2) функцию $\rho(10xu)$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \rho(21xu) = \int_0^\infty g(t) \rho(21, t+x, t+u) dt + \int_0^\infty g(t) f(t+x) \rho(210, t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty g(t) f(t+x) \phi(t+u) dt, \\ \rho(210u) = \int_0^\infty \bar{G}(t) \rho(21t, t+u) dt + \int_0^\infty f(t) \bar{G}(t) \rho(210, t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty \bar{G}(t) f(t) \phi(t+u) dt. \end{cases} \quad (3)$$

Разрешим первое уравнение последней системы относительно функции $\rho(21xu)$. Для этого проитерируем уравнение n раз и в полученном равенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$ по норме пространства $L_1^1(R_+^2)$. Используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем соотношение

$$\rho(21xu) = \int_0^\infty h_g(t) f(t+x) \rho(210, t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty h_g(t) f(t+x) \phi(t+u) dt.$$

Подставим полученное выражение для функции $\rho(21xu)$ во второе уравнение системы (3); после упрощения оно принимает вид

$$\rho(210u) = \int_0^\infty f(t) \rho(210, t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty f(t) \phi(t+u) dt.$$

Из последнего уравнения находим $\rho(210u)$ [9]

$$\rho(210u) = \rho_{21} \int_0^\infty h_f(t) \phi(t+u) dt, \quad (4)$$

тогда

$$\rho(21xu) = \rho_{21} \int_0^\infty h_g(t) f(t+x) \phi(t+u) dt + \rho_{21} \int_0^\infty h_g(t) f(t+x) dt \int_0^\infty h_f(s) \phi(s+t+u) dt. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в уравнения системы (3), нетрудно убедиться в справедливости утверждения теоремы. Постоянная ρ_{21} находится из условия нормировки. \square

4. НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМЫ

Разобьем фазовое пространство состояний E на непересекающиеся подмножества состояний, соответствующие различным физическим состояниям прибора: $E_0 = \{10x0, 10xu\}$ — прибор находится в состоянии ожидания заявки; $E_1 = \{21, 210u, 21xu\}$ — прибором проводится обслуживание заявок;

$E_2 = \{32x, 22x0\}$ — проводится восстановление обслуживающего прибора. Обозначим переходные вероятности полумарковского процесса $\xi(t)$ следующим образом:

$$\Phi(t, e, E_i) = P\{\xi(t) \in E_i / \xi(0) = e\}, \quad e \in E, \quad i = \overline{0, 2}.$$

Известно, что предельные переходные вероятности определяются соотношениями из [7]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_i) = \int_{E_i} m(e) \rho(de) \left[\int_E m(e) \rho(de) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 2}, \quad (6)$$

где $m(e)$ — среднее время пребывания полумарковского процесса $\xi(t)$ в состоянии $e \in E$. Для рассматриваемой системы средние времена пребывания в состояниях определяются формулами:

$$M\theta_{10x0} = x, \quad M\theta_{10xu} = x, \quad M\theta_{32x} = \int_0^x \overline{\Psi}(t) dt, \quad M\theta_{22x0} = \int_0^x \overline{G}(t) dt,$$

$$M\theta_{21} = \int_0^x \overline{F}(t) \overline{G}(t) \overline{\Phi}(t) dt, \quad M\theta_{21xu} = \int_0^{x \wedge u} \overline{G}(t) dt, \quad M\theta_{210u} = \int_0^u \overline{G}(t) \overline{F}(t) dt.$$

С учетом найденного стационарного распределения интегралы в (6) приводятся к виду:

$$\int_{E_0} m(e) \rho(de) = \rho_{21} M\beta \left(\int_0^\infty H_g^\kappa(t) \psi(t) dt + \int_0^\infty \hat{H}_f(t) \phi(t) dt + \int_0^\infty h_g(t) \overline{F}(t) dt \int_0^\infty \hat{H}_f(y) \phi(t+y) dy \right) -$$

$$-\rho_{21} M\gamma - \rho_{21} M\sigma, \quad \int_{E_1} m(e) \rho(de) = \rho_{21} M\gamma, \quad \int_{E_2} m(e) \rho(de) = \rho_{21} M\sigma,$$

$$\int_E m(e) \rho(de) = \rho_{21} M\beta \left(\int_0^\infty H_g^\kappa(t) \psi(t) dt + \int_0^\infty \hat{H}_f(t) \phi(t) dt + \int_0^\infty h_g(t) \overline{F}(t) dt \int_0^\infty \hat{H}_f(y) \phi(t+y) dy \right).$$

Выясним вероятностный смысл слагаемых в правых частях последних соотношений. Для этого заметим, что полумарковский процесс, описывающий функционирование рассматриваемой системы, является регенерирующим. Моментами регенерации, в частности, являются моменты поступления заявки в свободную систему (состояние 21). Несложно показать, что $M\zeta = \int_0^\infty H_g^\kappa(t) \psi(t) dt$ — среднее число потерянных заявок за период регенерации по причине ремонта обслуживающего прибора; $M\nu = \int_0^\infty \hat{H}_f(t) \phi(t) dt$ — среднее число заявок, принятых к обслуживанию за период регенерации; $M\delta = \int_0^\infty h_g(t) \overline{F}(t) dt \int_0^\infty \hat{H}_f(y) \phi(t+y) dy$ — среднее число потерянных заявок за период регенерации по причине занятости обслуживающего прибора.

В терминах введенных обозначений финальные вероятности пребывания прибора в подмножествах состояний E_0, E_1, E_2 равны соответственно

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_0) = 1 - \frac{M\gamma + M\sigma}{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta)}, \\
 p_1 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_1) = \frac{M\gamma}{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta)}, \\
 p_2 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, e, E_2) = \frac{M\sigma}{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta)}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Стационарные времена $T(E_i)$ пребывания системы в подмножествах состояний E_i определим из соотношений [7]

$$T(E_i) = \int_{E_i} m(e)\rho(de) \left[\int_{E \setminus E_i} \rho(de)P(e, E_i) \right]^{-1}, \quad i = \overline{0, 2}
 \tag{8}$$

Учитывая уравнения системы (2) и вид стационарного распределения, интегралы в знаменателях дробей формул (8) преобразуются к виду:

$$\int_{E \setminus E_0} \rho(de)P(e, E_0) = \int_{E \setminus E_1} \rho(de)P(e, E_1) = \rho_{21} \int_0^\infty \hat{H}_f(t)\phi(t) dt, \quad \int_{E \setminus E_2} \rho(de)P(e, E_2) = \rho_{21}.$$

Следовательно, стационарные времена пребывания системы в подмножествах состояний E_i , $i = \overline{0, 2}$, определяются формулами

$$T(E_0) = \frac{M\beta(M\zeta + M\nu + M\delta) - M\gamma - M\sigma}{M\nu}, \quad T(E_1) = \frac{M\gamma}{M\nu}, \quad T(E_2) = M\sigma.
 \tag{9}$$

Отметим, что в случае абсолютно надежной системы ($M\gamma \rightarrow \infty$) найденные характеристики принимают известный вид [10]. Используя полученные результаты, выпишем стационарные характеристики частных систем обслуживания $M/M/1/0$, $M/G/1/0$ и $GI/M/1/0$.

Система $M/M/1/0$. В случае, если

$$g(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \phi(t) = \eta e^{-\eta t} \quad \psi(t) = \varepsilon e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0,$$

формулы (7), (9) принимают вид

$$\begin{aligned}
 p_0 &= \frac{1 + \frac{\lambda}{\eta}}{1 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad p_1 = \frac{\frac{\mu}{\eta}}{1 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad p_2 = \frac{\frac{\mu}{\varepsilon}}{1 + \frac{\lambda}{\eta} + \frac{\mu}{\eta} + \frac{\mu}{\varepsilon}}, \\
 T(E_0) &= \frac{1}{\mu}, \quad T(E_1) = \frac{1}{\eta + \lambda}, \quad T(E_2) = \frac{1}{\varepsilon},
 \end{aligned}$$

Система $M/G/1/0$. Если $g(t) = \mu e^{-\mu t}$, $t \geq 0$, а СВ α, γ и σ имеют распределения общего вида, то характеристики определяются выражениями:

$$p_0 = 1 - \frac{M\gamma + M\sigma}{M\gamma + M\sigma + \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \hat{H}_f(t)\phi(t) dt}, \quad p_1 = \frac{M\gamma}{M\gamma + M\sigma + \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \hat{H}_f(t)\phi(t) dt},$$

$$p_2 = 1 - \frac{M\sigma}{M\gamma + M\sigma + \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \hat{H}_f(t)\phi(t) dt},$$

$$T(E_0) = \frac{1}{\mu}, \quad T(E_1) = \frac{M\gamma}{\int_0^{\infty} \hat{H}_f(t)\phi(t) dt}, \quad T(E_2) = M\sigma.$$

Система $GI/M/1/0$. Входящий поток заявок порождается СВ β с плотностью $g(t)$ общего вида, а плотности распределений остальных СВ:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad \phi(t) = \eta e^{-\eta t}, \quad \psi(t) = \varepsilon e^{-\varepsilon t}, \quad t \geq 0.$$

Стационарные характеристики системы определяются соотношениями:

$$p_0 = 1 - \frac{(\varepsilon + \eta)(\lambda + \eta - \varepsilon)[1 - \tilde{g}(\varepsilon)][1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)]}{\varepsilon(\lambda + \eta)M\beta[\eta(1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)) + (\lambda - \varepsilon)(1 - \tilde{g}(\varepsilon))]},$$

$$p_1 = \frac{(\lambda + \eta - \varepsilon)[1 - \tilde{g}(\varepsilon)][1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)]}{(\lambda + \eta)M\beta[\eta(1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)) + (\lambda - \varepsilon)(1 - \tilde{g}(\varepsilon))]},$$

$$p_2 = \frac{\eta(\lambda + \eta - \varepsilon)[1 - \tilde{g}(\varepsilon)][1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)]}{\varepsilon(\lambda + \eta)M\beta[\eta(1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)) + (\lambda - \varepsilon)(1 - \tilde{g}(\varepsilon))]},$$

$$T(E_0) = M\beta \frac{\eta(1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)) + (\lambda - \varepsilon)(1 - \tilde{g}(\varepsilon))}{(\lambda + \eta - \varepsilon)[1 - \tilde{g}(\varepsilon)][1 - \tilde{g}(\lambda + \eta)]} - \frac{\eta + \varepsilon}{\varepsilon(\eta + \lambda)},$$

$$T(E_1) = \frac{1}{\lambda + \eta}, \quad T(E_2) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Здесь через $\tilde{g}(\cdot)$ обозначено изображение по Лапласу соответствующей функции-оригинала $g(t)$: $\tilde{g}(z) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-zt} dt$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью аппарата полумарковских процессов с общим фазовым пространством состояний построена математическая модель функционирования однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным обслуживающим прибором в предположении, что все случайные величины, фигурирующие в задаче, имеют распределения общего вида. В явном виде найдены такие стационарные характеристики системы, как финальные вероятности пребывания системы в состояниях ожидания и обслуживания заявок, в состоянии ремонта прибора; а также средние стационарные времена пребывания системы в этих состояниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б. В. Про одне узагальнення формул Ерланга / Б. В. Гнеденко // Докл. АН УССР. — 1959, №4. — С. 347–360.
2. Марьянович Т. П. Однолинейная система массового обслуживания с ненадежным прибором / Т. П. Марьянович // Украинский математический журнал. — Том XIV — №4, С. 417–422.
3. Марьянович Т. П. Обобщение формул Эрланга на случай, когда приборы могут выходить из строя и восстанавливаться / Т. П. Марьянович // Украинский математический журнал. — Том XII — № 3, С. 279–286.
4. W. Gray A Vacation Queueing Model with Service Breakdowns / Gray W., Scott M., Wang P. // Applied Math. Modeling. — 2000. — Vol. 24, P. 391–400.
5. Емельянов Г. В. Системы массового обслуживания с приборами, которые могут выходить из строя и восстанавливаться / Г. В. Емельянов // Проблемы передачи информации. — 1967. — Том 3 — № 3, С. 59–63.
6. Коваленко А. И. Исследование надежности однолинейной системы с потерями требований / А. И. Коваленко, Б. Д. Марьянин, В. П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — № 2, С. 89–101.
7. Королюк В. С. Процессы марковского восстановления в задачах надежности систем / В. С. Королюк, А. Ф. Турбин. — К.: Наук. Думка, 1982. — 236 с.
8. Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франкен. — М.: Радио и связь, 1988. — 392 с.
9. Обжерин Ю. Е. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с одним местом для ожидания / Ю. Е. Обжерин, А. И. Песчанский // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — № 5, С. 51–62.
10. Корлат А. Н. Полумарковские модели восстанавливаемых систем и систем массового обслуживания / А. Н. Корлат, В. Н. Кузнецов, А. Ф. Турбин. — Кишинев: Штиинца, 1991. — 209 с.

Статья поступила в редакцию 23.06.2012

СРЕДНЯЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА НА КЛАССЕ ВСЕХ БЛОЧНО-ДРЕВОВИДНЫХ СТРУКТУР С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© О. А. Щербина

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА

E-MAIL: oshcherbina@gmail.com

Abstract. It is found asymptotical average computational complexity of local algorithm for solving block-tree discrete optimization problems with additional constraints of univariate multiple choice in more general case.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи дискретной оптимизации (ДО), возникающие на практике, обычно имеют специальную структуру, причем матрицы ограничений в задачах большой размерности, как правило, содержат большое количество нулевых элементов (сильно «разрежены»), а ненулевые матричные элементы в большинстве случаев группируются в блоки (чаще всего вдоль главной диагонали). Блочность многих прикладных задач ДО обусловлена слабой связностью подсистем моделируемых реальных сложных систем. Задачи ДО и, в частности, задачи целочисленного программирования (ЦП) с блочной структурой возникают естественным образом во многих приложениях. Перспективными декомпозиционными методами, использующими разреженность матрицы ограничений задач ДО, представляются локальные алгоритмы (ЛА), общая теория которых предложена Ю. И. Журавлевым [3]. ЛА имеют декомпозиционный характер, т.е. сводят решение исходной задачи ДО большой размерности к решению ряда задач меньших размерностей, которые уже можно решить известными методами, т.е. с помощью имеющихся решателей.

Проблема оценки сложности алгоритмов и задач оптимизации в зависимости от размерности задачи представляет большой теоретический и практический интерес и позволяет получить представление о трудоемкости решения задач дискретной оптимизации.

Под *вычислительной сложностью алгоритма* понимают количество условных шагов или операций, необходимых для решения задачи. Важной характеристикой алгоритма является *асимптотическая оценка сложности* — порядок скорости роста сложности алгоритма при увеличении размерности задачи. Асимптотические оценки

вычислительной сложности алгоритмов позволяют судить об их поведении при решении задач большой размерности и определить границы применимости алгоритма, более того, «... именно асимптотическая сложность алгоритма определяет в итоге размер задач, которые можно решить этим алгоритмом» [1], с. 12. Важность изучения асимптотических оценок вычислительной сложности алгоритмов обусловлена также ускоренным ростом быстродействия современной вычислительной техники и необходимостью решения задач большой размерности. Сравнивая алгоритмы по асимптотическим оценкам сложности, следует иметь в виду, что вычислительная сложность алгоритма может характеризоваться большим порядком скорости роста, но характеризоваться меньшей мультипликативной константой, чем другой алгоритм. В этом случае, алгоритм, характеризующийся большой скоростью роста сложности, может оказаться эффективнее других алгоритмов для решения задач небольшой размерности.

Изложенное выше обосновывает необходимость дальнейшего исследования оценки вычислительной сложности локальных алгоритмов, в частности, представляет интерес нахождение асимптотики среднего значения вычислительной сложности, чему и посвящена данная статья.

1. О ЛОКАЛЬНЫХ АЛГОРИТМАХ ДЛЯ РАЗРЕЖЕННЫХ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ОЦЕНКА ИХ СЛОЖНОСТИ

1.1. О локальных алгоритмах для разреженных задач дискретной оптимизации. Рассмотрим задачу Z целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с бинарными переменными:

$$CX = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2)$$

$$x_j = 0, 1, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Рассмотрим решение разреженной дискретной задачи оптимизации (1)–(3). Для решения блочно-древовидных задач ДО может быть использован локальный алгоритм (ЛА) \mathcal{A}_{BT} . В блочно-древовидных задачах ДО возможно выделить систему окрестностей различных переменных такую, что одна переменная может быть общей самое большее лишь для двух окрестностей и граф пересечений этих окрестностей представляет собой дерево. С помощью ЛА \mathcal{A}_{BT} можно решить подобную задачу ДО,

двигаясь от окрестностей, соответствующих листьям дерева, к окрестности, соответствующей корню дерева. Изложим ЛА \mathfrak{A}_{BT} решения БД задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) вида (1)–(3), где матрица A имеет БД структуру, содержащую k блоков, и этой структуре соответствует дерево D инцидентности блоков. Рассмотрим вершину r дерева D и дерево D_r , состоящее из вершины r и всех ее потомков. Введем необходимые обозначения: S_r — множество индексов переменных, принадлежащих блоку B_r ; $S_{rr'}$ — множество индексов переменных, принадлежащих одновременно блокам B_r и $B_{r'}$; если $S = \{j_1, \dots, j_q\}$, то $X_S = (x_{j_1}, \dots, x_{j_q})$; $X_{S_{rr'}}$ — вектор переменных, общих для блоков B_r и $B_{r'}$. Критическим местом ЛА \mathfrak{A}_{BT} является перебор по сепараторам $X_{S_{rr'}}$, так как если сепараторы (граничные кольца) окрестностей содержат большое число переменных, то объем полного перебора по кольцам будет большим и ЛА \mathfrak{A}_{BT} будет работать недостаточно эффективно. Возникает проблема снижения объема перебора по сепараторам $X_{S_{rr'}}$. В частности, если дополнительные ограничения, связывающие переменные из различных окрестностей, являются ограничениями многократного выбора SOS [7], т.е.

$$\sum_{j \in J'_p} x_j \leq 1, \quad p = 1, \dots, N, \quad (4)$$

то перебор по кольцу для таких переменных существенно снижается. В принципе, учет подобных ограничений должен осуществлять селектор ЛА \mathfrak{A} , указывающий подмножества множества переменных кольца, по которым нужно производить перебор.

Таким образом, ЛА решения задач дискретной оптимизации является ЛА, характеризующимся окрестностями с переменными параметрами и индикаторной информацией, и может быть задан следующими параметрами: $\{Z, \mathfrak{M}, \Gamma, \mathfrak{C}\}$, где Z — задача ЦЛП, \mathfrak{M} — система окрестностей переменных, Γ — граф пересечений окрестностей, \mathfrak{C} — селектор.

1.2. Оценки сложности локальных алгоритмов для блочно-древовидных задач дискретной оптимизации. При введении оценок сложности алгоритмов решения комбинаторных задач обычно различают индивидуальную задачу и массовую задачу (или просто задачу), последняя представляет собой множество индивидуальных задач. При этом для оценки трудоемкости алгоритмов используются следующие характеристики: временная вычислительная сложность алгоритма — время, затрачиваемое алгоритмом для решения задачи, емкостная сложность алгоритма — объем памяти, необходимый для реализации алгоритма. Для сглаживания резких различий в поведении алгоритма при переходе от одной индивидуальной задачи к другой, можно рассматривать все индивидуальные задачи одной размерности вместе

и определить сложность алгоритма для этой размерности задачи как число шагов (или условных операций) алгоритма в худшем случае [5], т. е. находится временная вычислительная сложность в предположении, что для данного алгоритма входные данные задачи являются наихудшими из возможных.

Ориентация на худший случай иногда приводит к пессимистическим прогнозам поведения алгоритмов, так, хорошо известный симплекс-алгоритм на практике работает как полиномиальный алгоритм (это же показывает и теоретический анализ его поведения «в среднем» [8]), хотя оценка сложности в худшем случае для него является экспоненциальной [6]. В связи с этим с практической точки зрения часто больший интерес представляет средняя оценка вычислительной сложности [5], позволяющая судить о поведении алгоритма в среднем на некотором классе задач, однако средняя оценка вычислительной сложности тоже не дает полной характеристики эффективности алгоритма, так как возможны задачи, при решении которых сложность алгоритма превысит эту оценку.

Введем оценку сложности алгоритма ДО согласно [2]. Известно, что множество решений задачи p булева программирования образует множество вершин n -мерного единичного куба E^n . Пусть $\varphi_A(p)$ — число просмотренных вершин куба E^n после того, как индивидуальная задача ДО p решена с помощью алгоритма A .

Определение 1. Оценкой эффективности (сложностью) алгоритма A на классе задач P называется величина

$$\varphi_A(P) = \sup_{p \in P} \varphi(p)$$

Таким образом, введенная оценка сложности является оценкой «в худшем случае», в дальнейшем вычислительную временную сложность алгоритмов ДО будем называть *оценкой эффективности* алгоритмов.

Рассмотрим БД структуру, состоящую из k блоков, и содержащую n бинарных переменных и N дополнительных ограничений одновариантного типа (4). Рассмотрим вопрос об оценке эффективности ЛА с селектором $\mathfrak{C}(\tilde{1})$ для решения задач ДО с БД структурой и дополнительными ограничениями одновариантного выбора, здесь в сочетании с ЛА рассматривается лишь алгоритм полного перебора, перебирающий допустимые решения дополнительных ограничений (обозначим этот алгоритм $A_0^S(\tilde{1})$).

Введем необходимые обозначения:

$l_r^{(p)}$ — число переменных, входящих только в окрестность Ω_r и p -е дополнительное ограничение многократного выбора (4);

$l_{r_1 r_2}^{(p)}$ — число переменных, входящих в пересечение окрестностей $\Omega_{r_1} \cap \Omega_{r_2}$ и в p -е дополнительное ограничение вида (4) (здесь $p = 1, \dots, N$). Тогда оценка вычислительной сложности ЛА имеет вид:

$$E_{\mathfrak{A}_{BT}}(n, k, Z, N_l, D, \mathfrak{C}(\tilde{1}), A_o^s(\tilde{1})) = \sum_{r=1}^k \prod_{p=1}^N \left(1 + l_r^{(p)} + \sum_{r' \in J_r} l_{rr'}^{(p)} + l_{p_r r}^{(p)} \right).$$

Для случая, когда число переменных в каждом дополнительном ограничении одно и то же — l , то есть

$$\sum_{r=1}^k l_r^{(p)} + \sum_{(r, r') \in R_D} l_{rr'}^{(p)} = l, \quad p = 1, \dots, N \quad (5)$$

ранее в [4] было доказано, что

$$\overline{E_{\mathfrak{A}_{BT}}} \sim \frac{(2k-2)! \cdot R^*}{d_{r^*}!} \cdot \frac{(1+l)^{N+2k-2-d_{r^*}}}{(N \cdot l)^{2k-2-d_{r^*}}}, \quad N \rightarrow \infty.$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СРЕДНЯЯ ОЦЕНКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЛОКАЛЬНОГО АЛГОРИТМА С СЕЛЕКТОРОМ

Представляет интерес нахождение асимптотики среднего значения в более общем случае, без ограничения (5). Сумма всевозможных значений ОЭ ЛА \mathfrak{A}_{BT} для всех БД структур имеет вид:

$$E_{\Sigma} = \sum_{\substack{\sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^N l_r^{(p)} + \\ \sum_{(r, r') \in R_D} \sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)} = n}} \prod_{r=1}^k \frac{\left(\sum_{p=1}^N l_r^{(p)} \right)!}{\prod_{p=1}^N l_r^{(p)}!} \cdot \prod_{(r, r') \in R_D} \frac{\left(\sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)} \right)!}{\prod_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)}!} \cdot \sum_{r=1}^k \prod_{p=1}^N \left(1 + l_r^{(p)} + \sum_{r' \in J_r} l_{rr'}^{(p)} + l_{p_r r}^{(p)} \right).$$

Для вычисления E_{Σ} достаточно найти величину:

$$E_{\Sigma}^{(r^*)} = \sum_{\substack{\sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^N l_r^{(p)} + \\ \sum_{(r, r') \in R_D} \sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)} = n}} \prod_{r=1}^k \frac{\left(\sum_{p=1}^N l_r^{(p)} \right)!}{\prod_{p=1}^N l_r^{(p)}!} \cdot \prod_{(r, r') \in R_D} \frac{\left(\sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)} \right)!}{\prod_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)}!} \cdot \prod_{p=1}^N \left(1 + l_{r^*}^{(p)} + \sum_{r' \in J_{r^*}} l_{r^* r'}^{(p)} + l_{p_{r^*} r^*}^{(p)} \right).$$

Распишем произведение

$$\prod_{p=1}^N \left(1 + l_{r^*}^{(p)} + \sum_{r' \in J_{r^*}} l_{r^* r'}^{(p)} + l_{p_{r^*} r^*}^{(p)} \right) = \sum_{\substack{t + \sum_{r' \in J_{r^*}} S_{r'} \leq N \\ (p_1, \dots, p_t, \{q_1^{(r^*, r')}, \dots, q_{S_{r'}}^{(r^*, r')} \}_{r' \in \tilde{J}_{r^*}})}} \sum_{r' \in \tilde{J}_{r^*}} l_{r^*}^{(p_1)} \cdot \dots \cdot l_{r^*}^{(p_t)} \cdot \prod_{r' \in \tilde{J}_{r^*}} l_{r^* r'}^{q_1^{(r^*, r')}} \cdot \dots \cdot l_{r^* r'}^{q_{S_{r'}}^{(r^*, r')}} , \quad (6)$$

где суммирование во второй сумме ведется по неупорядоченным наборам $\left(p_1, \dots, p_t, \{q_1^{(r^*, r')}, \dots, q_{S_{r'}}^{(r^*, r')} \}_{r' \in \tilde{J}_{r^*}} \right)$ различных элементов множества $\{1, 2, \dots, N\}$.

Итак,

$$E_{\Sigma}^{(r^*)} = \sum_{\substack{k \\ \sum_{r=1}^k \sum_{p=1}^N l_r^{(p)} + \sum_{(r, r') \in R_D} \sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)} = n}} \prod_{r=1}^k \frac{\left(\sum_{p=1}^N l_r^{(p)} \right)!}{\prod_{p=1}^N l_r^{(p)}!} \cdot \prod_{(r, r') \in R_D} \frac{\left(\sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)} \right)!}{\prod_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)}!} \cdot \sum_{\substack{t + \sum_{r' \in J_{r^*}} S_{r'} \leq N \\ (p_1, \dots, p_t, \{q_1^{(r^*, r')}, \dots, q_{S_{r'}}^{(r^*, r')} \}_{r' \in \tilde{J}_{r^*}})}} \sum_{r' \in \tilde{J}_{r^*}} l_{r^*}^{(p_1)} \cdot \dots \cdot l_{r^*}^{(p_t)} \cdot \prod_{r' \in \tilde{J}_{r^*}} l_{r^* r'}^{q_1^{(r^*, r')}} \cdot \dots \cdot l_{r^* r'}^{q_{S_{r'}}^{(r^*, r')}} .$$

Введем обозначения:

$$L_r = \sum_{p=1}^N l_r^{(p)}, \quad r = 1, \dots, k, \quad L_{rr'} = \sum_{p=1}^N l_{rr'}^{(p)}, \quad (r, r') \in R_D.$$

Имеется $C_N^t \cdot C_{N-t}^{s_1} \cdot C_{N-t-s_1}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{N-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}-1}}^{s_{d_{r^*}}}$ членов вида $l_{r^*}^{(p_1)} \cdot \dots \cdot l_{r^*}^{(p_t)} \cdot \prod_{r' \in \tilde{J}_{r^*}} l_{r^* r'}^{q_1^{(r^*, r')}} \cdot \dots \cdot l_{r^* r'}^{q_{S_{r'}}^{(r^*, r')}}$. Без потери общности можно рассмотреть член суммы (6) вида

$$l_{r^*}^{(1)} \cdot \dots \cdot l_{r^*}^{(t)} \cdot l_{r^* r'}^{(t+1)} \cdot \dots \cdot l_{r^* r'}^{(t+s_1)} \cdot \dots \cdot l_{r^* r_{d_{r^*}}}^{(t+s_1+\dots+s_{d_{r^*}-1}+1)} \cdot \dots \cdot l_{r^* r_{d_{r^*}}}^{(t+s_1+\dots+s_{d_{r^*}})} .$$

Тогда

$$E_{\Sigma}^{(r^*)} = \sum_{\substack{t+s_1+\dots+s_{d_{r^*}} \leq N \\ t, s_j \geq 0}} C_N^t \cdot C_{N-t}^{s_1} \cdot C_{N-t-s_1}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{N-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}-1}}^{s_{d_{r^*}}}$$

Используя полиномиальную формулу

$$\sum_{\substack{n_1+\dots+n_k=n \\ n_i \geq 0}} \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} = k^n, \quad (7)$$

получим

$$\begin{aligned} E_{\Sigma}^{(r^*)} &= \sum_{\substack{t+s_1+\dots+s_{d_{r^*}} \leq N \\ t, s_j \geq 0}} C_N^t \cdot C_{N-t}^{s_1} \cdot C_{N-t-s_1}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{N-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}-1}}^{s_{d_{r^*}}} \\ &\cdot \sum_{\substack{L_{r^*}+L_{r^*r_1}+\dots+L_{r^*r_{d_{r^*}}} \leq n-2k+2+d_{r^*} \\ L_{r^*} \geq t, L_{r^*r_1} \geq s_1, \dots, L_{r^*r_{d_{r^*}}} \geq s_{d_{r^*}}} \sum_{\substack{L_{rr_1}=n-L_{r^*}-L_{r^*r_1}-\dots-L_{r^*r_{d_{r^*}}} \\ r_1 \in J_r}} L_r + \sum_{\substack{r \neq r^* \\ r_1 \in J_r}} L_{rr_1} \\ &\cdot \sum_{\substack{p=1 \\ l_{r^*}^{(p)}=L_{r^*}-t}}^N \frac{(L_{r^*}-t)!}{\prod_{p=1}^t l_{r^*}^{(p)}! \prod_{p=t+1}^N l_{r^*}^{(p)}!} \\ &\cdot \sum_{\substack{L_{r^*}+L_{r^*r_1}+\dots+L_{r^*r_{d_{r^*}}} \leq n-2k+2+d_{r^*} \\ L_{r^*} \geq t, L_{r^*r_1} \geq s_1, \dots, L_{r^*r_{d_{r^*}}} \geq s_{d_{r^*}}} \sum_{\substack{L_{rr_1}=n-L_{r^*}-L_{r^*r_1}-\dots-L_{r^*r_{d_{r^*}}} \\ r_1 \in J_r}} N^{L_{r^*}-t} \\ &\cdot N^{L_{r^*r_1}-s_1} \cdot \dots \cdot N^{L_{r^*r_{d_{r^*}}}-s_{d_{r^*}}} \cdot N^{\sum_{\substack{r \neq r^* \\ r' \in J_r}} L_r + \sum_{\substack{r \neq r^* \\ r' \in J_r}} L_{rr'}} \cdot [(L_{r^*}-t+1) \cdot \dots \cdot L_{r^*}] \\ &\cdot \prod_{j=1}^{d_{r^*}} [(L_{r^*r_j}-s_j+1) \cdot \dots \cdot L_{r^*r_j}] \\ &= \sum_{\substack{t+s_1+\dots+s_{d_{r^*}} \leq N \\ t, s_j \geq 0}} C_N^t \cdot C_{N-t}^{s_1} \cdot C_{N-t-s_1}^{s_2} \cdot \dots \cdot C_{N-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}-1}}^{s_{d_{r^*}}} \sum_{\substack{L_{r^*}+L_{r^*r_1}+\dots+L_{r^*r_{d_{r^*}}} \leq n-2k+2+d_{r^*} \\ L_{r^*} \geq t, L_{r^*r_1} \geq s_1, \dots, L_{r^*r_{d_{r^*}}} \geq s_{d_{r^*}}} \\ &\cdot \sum_{\substack{L_{rr_1}=n-L_{r^*}-L_{r^*r_1}-\dots-L_{r^*r_{d_{r^*}}} \\ r_1 \in J_r}} N^{n-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}}} \cdot [(L_{r^*}-t+1) \cdot \dots \cdot L_{r^*}] \\ &\cdot \sum_{\substack{r \neq r^* \\ r_1 \in J_r}} L_r + \sum_{\substack{r \neq r^* \\ r_1 \in J_r}} L_{rr_1} \\ &\cdot \prod_{j=1}^{d_{r^*}} [(L_{r^*r_j}-s_j+1) \cdot \dots \cdot L_{r^*r_j}] \\ &= \sum_{\substack{t+s_1+\dots+s_{d_{r^*}} \leq N \\ t, s_j \geq 0}} N^{n-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}}} \cdot \frac{N!}{(N-t-s_1-\dots-s_{d_{r^*}})!} \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{\substack{L_{r^*} + L_{r^*r_1} + \dots + L_{r^*r_{d_{r^*}}} \leq n - 2k + 2 + d_{r^*} \\ L_{r^*} \geq t, L_{r^*r_1} \geq s_1, \dots, L_{r^*r_{d_{r^*}}} \geq s_{d_{r^*}}} C_{L_{r^*}}^t \cdot C_{L_{r^*r_1}}^{s_1} \cdot \dots \cdot C_{L_{r^*r_{d_{r^*}}}}^{s_{d_{r^*}}} \\ \cdot \sum_{\substack{L_{r_1} = n - L_{r^*} - L_{r^*r_1} - \dots - L_{r^*r_{d_{r^*}}} \\ r \neq r^* \\ r_1 \in J_r}} 1.$$

Используем подстановку $i_0 + t = L_{r^*}$, $i_j + s_j = L_{r^*r_j}$, $j = 1, \dots, d_{r^*}$ для вычисления суммы

$$S_L = \sum_{\substack{L_{r^*} + L_{r^*r_1} + \dots + L_{r^*r_{d_{r^*}}} \leq n - 2k + 2 + d_{r^*} \\ L_{r^*} \geq t, L_{r^*r_1} \geq s_1, \dots, L_{r^*r_{d_{r^*}}} \geq s_{d_{r^*}}} C_{L_{r^*}}^t \cdot C_{L_{r^*r_1}}^{s_1} \cdot \dots \cdot C_{L_{r^*r_{d_{r^*}}}}^{s_{d_{r^*}}} \cdot C_{n - L_{r^*} - L_{r^*r_1} - \dots - L_{r^*r_{d_{r^*}}} - 1}^{-1}.$$

Используя тождество

$$\sum_{m_1, \dots, m_q} C_{n_1 + m_1}^{m_1} \cdot C_{n_2 + m_2}^{m_2} \cdot \dots \cdot C_{n_q + m_q}^{m_q} = C_{n + m + q - 1}^m, \quad (8)$$

получим

$$S_L = \sum_{m=0}^{n - 2k + 2 + d_{r^*} - t - s_1 - \dots - s_{d_{r^*}}} C_{n - i_0 - i_1 - \dots - i_{d_{r^*}} - t - s_1 - \dots - s_{d_{r^*}} - 1}^{2k - 3 - d_{r^*}} \cdot C_{m + t + s_1 + \dots + s_{d_{r^*}} + d_{r^*}}^{t + s_1 + \dots + s_{d_{r^*}} + d_{r^*}}.$$

Используя формулу

$$\sum_{m=0}^M C_{m + n_1}^{m_1} \cdot C_{M - m + n_2}^{m_2} = C_{n_1 + n_2 + M + 1}^{m_1 + n_2 + 1}, \quad (9)$$

получим

$$S_L = C_{n + d_{r^*} + 1}^{t + s_1 + \dots + s_{d_{r^*}} + d_{r^*} + 2k - 2}.$$

Возвращаясь к ранее записанным суммам, получим

$$E_{\Sigma}^{(r^*)} = \sum_{\substack{t + s_1 + \dots + s_{d_{r^*}} \leq N \\ t, s_j \geq 0}} N^{n - t - s_1 - \dots - s_{d_{r^*}}} \cdot \frac{N!}{(N - t - s_1 - \dots - s_{d_{r^*}})!} \cdot C_{n + d_{r^*} + 1}^{t + s_1 + \dots + s_{d_{r^*}} + d_{r^*} + 2k - 2}.$$

Полагая $\alpha = t + s_1 + \dots + s_{d_{r^*}}$ и учитывая, что $C_{\alpha + d_{r^*}}^{d_{r^*}}$ наборов $t, s_1, \dots, s_{d_{r^*}}$ образуют в сумме α , получим

$$E_{\Sigma}^{(r^*)} = \sum_{\alpha=0}^N \frac{N!}{(N - \alpha)!} \cdot C_{\alpha + d_{r^*}}^{d_{r^*}} \cdot C_{n + d_{r^*} + 1}^{\alpha + 2k - 2} \cdot N^{n - \alpha} = \frac{N^n}{d_{r^*}!} \cdot \sum_{\alpha=0}^N C_N^{\alpha} \cdot (\alpha + d_{r^*})! \cdot C_{n + d_{r^*} + 1}^{\alpha + 2k - 2} \cdot N^{-\alpha}.$$

Поскольку порядок роста последнего выражения возрастает с ростом d_{r^*} , достаточно рассмотреть сумму $E_{\Sigma}^{(r^*)}$, соответствующую $\max d_r$.

Для нахождения числа M таких структур достаточно положить $\alpha = 0$ в последней формуле. Тогда:

$$M = N^n \cdot C_{n+d_{r^*}+1}^{2k-2} = \frac{N^n}{(2k-2)!} \cdot (n+d_{r^*}-2k+4) \cdot \dots \cdot (n+d_{r^*}+1) \sim N^n \frac{N^n}{(2k-2)!} \cdot n^{2k-2}$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, средняя ОЭ ЛА с селектором на множестве всех БД структур с дополнительными ограничениями одновариантного типа удовлетворяет асимптотическому равенству:

$$\overline{E_{\text{ЭЛТ}}} \sim \frac{(2k-2)!}{d_{r^*}!} \cdot \frac{\sum_{\alpha=0}^N C_N^\alpha \cdot (\alpha+d_{r^*})! \cdot C_{n+d_{r^*}+1}^{\alpha+2k-2} \cdot N^{-\alpha}}{n^{2k-2}}, \quad \text{при } n, N \rightarrow \infty.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе найдена асимптотика среднего значения вычислительной сложности локального алгоритма для решения блочно-древовидных задач дискретной оптимизации с дополнительными ограничениями многократного выбора одновариантного типа в более общем случае. *Перспективными направлениями* дальнейших исследований являются построение и анализ эффективных вычислительных схем локальных алгоритмов для разреженных задач дискретной оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахо А. Построение и анализ вычислительных алгоритмов / А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. — М.: Мир, 1975. — 535 с.
2. Гришухин В. П. Алгоритмы ветвей и границ в задачах с булевыми переменными, оценка их эффективности / В. П. Гришухин // Экономика и математические методы. — 1976. — Т. 12, № 4. — С. 757–766.
3. Журавлев Ю. И. Избранные научные труды / Ю. И. Журавлев. — М.: Магистр, 1998. — 420 с.
4. Щербина О. А. Локальные алгоритмы для блочно-древовидных задач дискретного программирования / О. А. Щербина // Журн. вычисл. математики и матем. физики. — 1985. — Т. 25, № 8. — С. 1143–1154.
5. Dempe S. Worst-case and average-case analysis of an algorithm solving a generalized knapsack problem / S. Dempe // Mathematische Operationsforschung und Statistik. — 1983. — V. 14. — P. 551–564.
6. Klee V. How good is the simplex algorithm? / V. Klee, G. J. Minty // Inequalities, III / O. Shisha (ed.). — New York: Academic Press, 1972. — P. 159–175.
7. Nauss R. M. 0-1 knapsack problem with multiple choice constraints / R. M. Nauss // European Journal of Operational Research. — 1978. — V. 2. — P. 125–131.
8. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования / А. Схрейвер. — М.: Мир, 1991. — Т. 1. — 360 с.; — Т. 2. — 342 с.

Статья поступила в редакцию 25.03.2013

УДК 517.95

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ

© Т. К. Юлдашев

СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М. Ф. РЕШЕТНЕВА

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

пр-т Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск, 660014, Россия

E-MAIL: tursunbay@rambler.ru

Abstract. It is consider a nonlinear integro-differential equation with nonlinear hyperbolic operator of the higher order with initial value conditions. It is proposed in this paper a technique based on the characteristics method. This technique allows, moving to a new variable, provide a partial differential equation as an ordinary differential equation describing the change of unknown function along the characteristics. The study of the Cauchy problem reduces to the study of nonlinear Volterra integral equation. By the method of successive approximations it is proved the existence and uniqueness of the solution of this problem.

ВВЕДЕНИЕ

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высших порядков. Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков [1], [2]. Дифференциальные уравнения в частных производных высших порядков решаются и при построении инвариантных решений дифференциальных уравнений с использованием высшей симметрии и законов сохранения [3], [4].

Локальная теория дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, основанная на понятиях производной по направлению и характеристик, началась сформироваться еще в XVIII веке. Характеристики замечательны тем, что выражения в левой части уравнений в частных производных первого порядка представляют собой производную неизвестной функции по направлению вдоль характеристики. Это позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик.

Основная идея, на которой основан развиваемый в данной работе подход, состоит в том, что *выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка*

позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В области $D \equiv D_T \times \mathbb{R}$ рассматривается нелинейное уравнение вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^n u(t, x) = f(t, x, u(t, x)) \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left. \frac{\partial^i u(t, x)}{\partial t^i} \right|_{t=0} = \varphi_{i+1}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, 2n-1}, \quad (2)$$

где $f(t, x, u) \in C(D \times \mathbb{R})$, $\varphi_i(x) \in C(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, 2n}$, $0 < \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x) dx dt < \infty$, $D_T \equiv [0, T]$, $0 < T < \infty$, n — произвольное натуральное число.

Изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [5]–[7]).

Как уже отмечалось выше, дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка локально решаются методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи сведения их к характеристической системе. С физической точки зрения это означает двойственность описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Применение метода характеристик к решению дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка позволяет свести изучение эволюции волн к изучению распространения частиц [8]. В работах [9]–[11] разработана методика для интегрирования нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. По сути, данная методика ближе к методу характеристик и авторы называли её методом дополнительного аргумента.

В настоящей работе рассматривается задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени и при этом используется метод характеристик, обоснованный в [12], [13] для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка.

1. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ (1), (2)

Определение 1. Решением задачи Коши (1), (2) называется функция $u(t, x) \in C^{2n, 2n}(D)$, удовлетворяющая уравнению (1) и начальным условиям (2).

Теорема 1. Задача (1), (2) эквивалентна следующему интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
 u(t, x) = \Theta(t, x; u) \equiv & \sum_{i=1}^n \varphi_i \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \\
 & + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n+j} \left(x + s \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \\
 & + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s, x, u(s, x)) ds,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где x играет роль параметра.

Доказательство. Левую часть уравнения (1) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^n u(t, x) = \\
 & = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \times \\
 & \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u(t, x) = L_2^n [L_1^n [u(t, x)]],
 \end{aligned}$$

где
$$L_2 [L_1^n [u(t, x)]] \equiv (L_1^n [u(t, x)])_t - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds (L_1^n [u(t, x)])_x,$$

а
$$L_1 [u(t, x)] \equiv (u(t, x))_t + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds (u(t, x))_x.$$

Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$L_2^n [L_1^n [u(t, x)]] = f(t, x, u(t, x)). \tag{4}$$

Из (4) видно, что уравнение (1) имеет две n -кратные характеристики:

$$1) x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds = C_1;$$

$$2) x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds = C_2, \text{ где } C_i \text{ — произвольные постоянные, } i = 1, 2.$$

Тогда, интегрируя n раз уравнения (4) вдоль линии первой характеристики, получаем

$$L_2^{n-1} [L_1^n [u(t, x)]] = \Phi_1 \left(x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right) + \int_0^t f(s, x, u(s, x)) ds, \quad (5)$$

$$L_2^{n-2} [L_1^n [u(t, x)]] = \Phi_2 \left(x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right) + \\ + \Phi_1 \left(x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right) t + \int_0^t (t-s) f(s, x, u(s, x)) ds, \quad (6)$$

$$\dots \\ L_1^n [u(t, x)] = \sum_{i=1}^n \Phi_i \left(x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right) \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} + \\ + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x, u(s, x)) ds, \quad (7)$$

где $\Phi_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат дальнейшему определению.

Из (5), в силу начального условия (2), имеем: $\Phi_1(x) = \varphi_{2n}(x)$. Так как вдоль линии первой характеристики справедливы соотношения

$$\frac{dL_1^n [u(t, x)]}{dt} = \frac{\partial L_1^n [u(t, x)]}{\partial t} + \frac{\partial L_1^n [u(t, x)]}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \\ = \left(L_1^n [u(t, x)] \right)_t - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \left(L_1^n [u(t, x)] \right)_x, \\ \dots \\ \frac{d^n L_1^n [u(t, x)]}{dt^n} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n L_1^n [u(t, x)], \quad (8)$$

то, в силу условия (2), из (6) и (7) имеем:

$$\Phi_2(x) = \varphi_{2n-1}(x), \dots, \Phi_n(x) = \varphi_{n+1}(x).$$

Тогда интегро-дифференциальное уравнение (7) приобретает следующий вид

$$L_1^n[u(t, x)] = \sum_{i=1}^n \varphi_{n+i} \left(x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right) \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s, x, u(s, x))ds. \tag{9}$$

Аналогично, интегрируя уравнения (9) n раз вдоль линии второй характеристики, получаем

$$L_1^{n-1}[u(t, x)] = \Phi_{n+1} \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_{n+j} \left(x + s \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y)u(\theta, y)dyd\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!} f(s, x, u(s, x))ds, \tag{10}$$

$$L_1^{n-2}[u(t, x)] = \Phi_{n+2} \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right) + \Phi_{n+1} \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right) t + \sum_{j=1}^n \int_0^t (t-s)\varphi_{n+j} \left(x + s \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y)u(\theta, y)dyd\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{n+1}}{(n+1)!} f(s, x, u(s, x))ds, \tag{11}$$

.....

$$u(t, x) = \sum_{i=n+1}^{2n} \Phi_i \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right) \frac{t^{2n-i}}{(2n-i)!} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi_{n+j} \left(x + s \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta, y) u(\theta, y) dy d\theta \right) \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} ds + \\
& + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s, x, u(s, x)) ds, \tag{12}
\end{aligned}$$

где $\Phi_i(x)$, $i = \overline{n+1, 2n}$ — произвольные непрерывные функции, которые подлежат определению, x играет роль параметра.

Из (12), в силу начального условия (2), имеем: $\Phi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$. Вдоль линии первой характеристики справедливо (8). А вдоль линии второй характеристики имеем

$$\begin{aligned}
\frac{du(t, x)}{dt} &= \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \\
&= \left(u(t, x) \right)_t + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \left(u(t, x) \right)_x, \dots \\
\dots, \frac{d^n u(t, x)}{dt^n} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u(t, x). \tag{13}
\end{aligned}$$

Тогда, в силу (2), из (11) и (12) получаем, что

$$\Phi_{n+2}(x) = \varphi_{n-1}(x), \dots, \Phi_{2n}(x) = \varphi_1(x).$$

Отсюда получаем нелинейное интегральное уравнение (3).

В (3) отметим, что функции $\varphi_i \left(x - t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \right)$, $i = \overline{1, n}$ являются первыми интегралами уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) u(s, y) dy ds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u(t, x) = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль второй характеристики равны нулю и сами эти функции удовлетворяют данному уравнению.

А функции $\varphi_j \left(x + t \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right)$, $j = \overline{n+1, 2n}$ являются первыми интегралами уравнения $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n L_1^n[u(t, x)] = 0$ и они постоянны вдоль решения этого уравнения. Производные этих функций вдоль первой характеристики равны нулю и сами эти функции удовлетворяют данному уравнению.

Исходя из этих соображений, покажем, что интегральное уравнение (3) удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных (1). Путем $2n$ -кратного дифференцирования из (3) получаем

$$\frac{d^{2n}u(t, x)}{dt^{2n}} = f(t, x, u(t, x)), \tag{14}$$

где x играет роль параметра.

Так как вдоль линии первой характеристики справедливо (8) и вдоль линии второй характеристики — (13), то имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n}u(t, x)}{dt^{2n}} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \frac{\partial}{\partial x} \right)^n u(t, x) = \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y)u(s, y)dyds \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^n u(t, x). \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что из обыкновенного дифференциального уравнения (14) следует уравнение в частных производных (1). □

2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ

Для произвольной непрерывной функции $h(t, x)$ норму вводим следующим образом:

$$\|h(t, x)\| = \max_{(t,x) \in D} |h(t, x)|,$$

где x играет роль параметра.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1. $\sum_{i=1}^{2n} \|\varphi_i(x)\| \frac{T^{i-1}}{(i-1)!} + \max_{t \in D_T} \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} \|f(s, x, 0)\| ds \leq \Delta < \infty;$
2. $\varphi_i(x) \in Lip\{L_{i|x}\}, 0 < L_i = const, i = \overline{1, 2n};$
3. $f(t, x, u) \in Lip\{L_0(t)|u\}, 0 < \int_0^t L_0(s) ds < \infty;$
4. $\rho < 1, \rho = \sum_{i=1}^{2n} L_i \frac{T^i}{(i-1)!} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) dy ds + \max_{t \in D_T} \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} L_0(s) ds.$

Тогда существует единственное решение задачи (1), (2) в области D .

Доказательство. Для нелинейного интегрального уравнения (3) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} u_0(t, x) = 0, (t, x) \in D, \\ u_{k+1}(t, x) = \Theta(t, x; u_k), k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

Тогда, в силу условий теоремы, из (15) получаем, что справедливы следующие оценки

$$\|u_1(t, x) - u_0(t, x)\| \leq \sum_{i=1}^{2n} \|\varphi_i(x)\| \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} \|f(s, x, 0)\| ds \leq \Delta, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \|u_{k+1}(t, x) - u_k(t, x)\| \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^{2n} L_i \frac{t^i}{(i-1)!} \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} K(s, y) \|u_k(s, y) - u_{k-1}(s, y)\| dy ds + \\ & + \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} L_0(s) \|u_k(s, x) - u_{k-1}(s, x)\| ds \leq \\ & \leq \rho \|u_k(t, x) - u_{k-1}(t, x)\|. \end{aligned} \quad (17)$$

Из оценок (16) и (17) следует, что оператор в правой части (3) является сжимающим. Следовательно, задача (1), (2) имеет единственное решение в области D . \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит метод характеристик для нелинейного уравнения с гиперболическим оператором высокой степени. Показано, что выражение уравнений в частных производных высокого порядка через суперпозицию дифференциальных операторов в частных производных первого порядка позволяет применять методы решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Получено интегральное уравнение, эквивалентное задаче Коши (1), (2). Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Коши (1), (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров В. М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В. М. Александров, Е. В. Коваленко. — М.: Наука, 1986. — 336 с.
2. Алгазин С. Д. Флаттер пластин и оболочек / С. Д. Алгазин, И. А. Кийко. — М.: Наука, 2006. — 248 с.
3. Киряков П. П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений / Киряков П. П., Сенашов С. И., А. Н. Яхно. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. — 192 с.
4. Сенашов С. И. О законах сохранения уравнений пластичности / С. И. Сенашов // Докл. АН СССР. — 1991. — Том 320-3. — С. 606–608.
5. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева — М.: Наука, 1967. — 736 с.
6. Полянин А. Д. Справочник. Нелинейные уравнения математической физики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. — М.: Наука, 2002. — 432 с.
7. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 336 с.
8. Уравнения с частными производными первого порядка / А. Ю. Горицкий, С. Н. Кружков, Г. А. Чечкин. — М.: Мехмат МГУ, 1999. — 95 с.
9. Иманалиев М. И. О дифференциальном уравнении в частных производных первого порядка с интегральным коэффициентом / М. И. Иманалиев, Ю. А. Ведь // Дифференц. уравнения. — 1989. — Том 23. — № 3. — С. 465–477.
10. Иманалиев М. И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Докл. РАН. — 1992. — Том 323. — № 3. — С. 410–411.
11. Иманалиев М. И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Докл. РАН. — 1992. — Том 325. — № 6. — С. 1111–1115.

12. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник ТомГУ. Математика и Механика. — 2012. — Том 14. — № 2. — С. 56–62.
13. Юлдашев Т. К. Об обратной задаче для системы квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка / Т. К. Юлдашев // Вестник Южно-УралГУ. Математика. Механика. Физика. — 2012. — Вып. 6. — № 11 (270). — С. 35–41.

Статья поступила в редакцию 13.03.2013

Donskoy V. I. Binary Decision Tree Synthesis: Splitting Criteria and the Algorithm LISTBB / V. I. Donskoy // Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics. — 2013. — № 1 (22). — С. 11–34.

UDC 519.95

В даний час інтерес до класу індукторів, заснованих на побудові дерев рішень, не слабшає, особливо в контексті парадигми Data Mining. В той же час найбільш поширені алгоритми ID3 і C4.5, як показано в статті, не є кращими. Тому можна виявити успішні спроби створення нових евристичних критеріїв галуження для алгоритмів синтезу дерев рішень. Порівняльне визначення різних критеріїв галуження, використовуваних для синтезу двійкових дерев рішень — мета справжньої статті. У розгляд включені критерії D , Ω , Z_1 та інші, які були розроблені автором ще в 1979–80 роках. Ці критерії визначають комбінований принцип галуження, який використовується в алгоритмі LISTBB.

В настоящее время интерес к классу индукторов, основанных на построении деревьев решений, не ослабевает, особенно в контексте парадигмы Data Mining. В то же время наиболее распространенные алгоритмы ID3 и C4.5, как показано в статье, не являются лучшими. Поэтому можно обнаружить успешные попытки создания новых эвристических критериев ветвления для алгоритмов синтеза деревьев решений. Сравнительное определение различных критериев ветвления, используемых для синтеза двоичных деревьев решений, — цель настоящей статьи. В рассмотрение включены критерии D , Ω , Z_1 и другие, которые были разработаны автором еще в 1979–80 годах. Эти критерии определяют комбинированный принцип ветвления, который используется в алгоритме LISTBB.

Блыщик В. Ф. Разработка и использование персонального сайта на CMS Drupal в учебно-методическом процессе / В. Ф. Блыщик // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 35–41.

УДК 004.4'2

У статті розглядається створення та налаштування навчально-методичного сайту з використанням системи управління контентом Drupal. Представлені основні елементи структури, наведені приклади сайтів, які розробив автор.

В статье рассматривается установка и настройка учебно-методического сайта с использованием системы управления контентом Drupal. Представлены основные элементы структуры, приведены примеры работающих сайтов, созданных автором.

Ємець О. О. Предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації / О. О. Ємець, О. В. Тур // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 42–52.

УДК 519.8

Введено ізоморфізми множини перестановок без повторень з певною множиною графів. Означена операція заміни затравкою вершини графа, що відповідає перестановці (в т. ч. в термінах підстановок і перестановок).

Введены изоморфизмы множества перестановок без повторений с определённым множеством графов. Определена операция замены затравкой вершины графа, который соответствует перестановке (в т. ч. в терминах подстановок и перестановок).

Коваленко А. И. Система массового обслуживания с ненадежной линией и нетерпеливыми заявками / А. И. Коваленко, Б. Д. Марянин, В. П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 53–60.

УДК 519.872

Аналізується однолінійна СМО типу М/М/1 з нетерплячими заявками. СМО схильна випадковим поломкам, при цьому усі присутні заявки покидають систему, а лінія ремонтується. У роботі отримано імовірнісні характеристики системи у стаціонарному режимі.

Анализируется однолинейная СМО типа М/М/1 с нетерпеливыми заявками. СМО подвержена случайным поломкам, при этом все присутствующие заявки покидают систему, а линия подвергается ремонту. Найдены вероятностные характеристики системы в стационарном режиме.

Королік Р. П. Максимальні за включенням множини практичної стійкості множинних систем з багатозначною динамічною складовою / Р. П. Королік, В. В. Пічкур // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 61–68.

УДК 517.929.4

В роботі аналізуються властивості оптимальних множин початкових умов в задачі практичної стійкості дискретних множинних систем. Одержано опорний функціонал таких множин, функцію Мінковського, функцію деформації у випадку лінійної динамічної складової.

В работе анализируются свойства оптимальных множеств начальных условий в задаче практической устойчивости множественных дискретных систем. Получен опорный функционал для таких множеств, функция Минковского, функция деформации в случае линейной динамической составляющей.

Песчанский А. И. Стационарные характеристики однолинейной системы обслуживания с потерями и ненадежным прибором / А. И. Песчанский, А. И. Коваленко // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 69–79.

УДК 519.873

Побудована напівмарковська модель функціонування однолінійної системи з втратами та ненадійним обслуговуючим приладом. Вважається, що всі випадкові величини, які фігурують у постановці задачі, мають функції розподілу загального вигляду. У явному вигляді визначені стаціонарні характеристики системи.

Построена полумарковская модель функционирования однолинейной системы с потерями и ненадежным обслуживающим прибором. Предполагается, что все случайные величины, фигурирующие в постановке задачи, имеют функции распределения общего вида. В явном виде найдены стационарные характеристики системы.

Щербина О. А. Средняя оценка эффективности локального алгоритма на классе всех блочно-древовидных структур с дополнительными ограничениями / О. А. Щербина // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 80–88.

УДК 519.658

У роботі знайдена асимптотика середнього значення обчислювальної складності локального алгоритму для вирішення блочно-древовидних задач дискретної оптимізації з додатковими обмеженнями багаторазового вибору одноваріантного типу в більш загальному випадку.

В работе найдена асимптотика среднего значения вычислительной сложности локального алгоритма для решения блочно-древовидных задач дискретной оптимизации с дополнительными ограничениями многократного выбора одновариантного типа в более общем случае.

Юлдашев Т. К. Задача Коши для нелинейных уравнений с гиперболическим оператором высокой степени / Т. К. Юлдашев // Таврический вестник информатики и математики. — 2013. — № 1 (22). — С. 89–98.

УДК 517.95

Розглядається нелінійне інтегро-диференціальне рівняння з нелінійним гіперболічним оператором високого порядку з початковими умовами. У даній роботі пропонується методика, заснована на методі характеристик. Це методика дозволяє, перейшовши до нової змінної, представити рівняння в часткових похідних як звичайне диференціальне рівняння, що описує зміну невідомої функції вздовж лінії характеристик. Вивчення задачі Коші зводиться до вивчення нелінійного

інтегрального рівняння Вольтерра. Методом послідовних наближень доводиться теорема про існування та єдиності рішення даної задачі.

Рассматривается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с нелинейным гиперболическим оператором высокого порядка с начальными условиями. В данной работе предлагается методика, основанная на методе характеристик. Это методика позволяет, перейдя к новой переменной, представить уравнение в частных производных как обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение неизвестной функции вдоль линии характеристик. Изучение задачи Коши сводится к изучению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра. Методом последовательных приближений доказывается теорема о существовании и единственности решения данной задачи.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

- Блыщик Владимир Федорович** к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
e-mail: veb@land.ru
- Донской Владимир Иосифович** д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, главный редактор журнала ТВИМ
e-mail: donskey@tnu.crimea.ua
- Емец Олег Алексеевич** д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедры мат. моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли
e-mail: yemetsli@mail.ru
- Коваленко Александр Ильич** к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
- Коваленко Анна Игоревна** выпускница факультета радиоэлектроники Севастопольского национального технического университета
e-mail: annushka199@bk.ru
- Королик Руслан Петрович** аспирант факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
e-mail: korolik@email.ua
- Марянин Борис Давыдович** к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
- Песчанский Алексей Иванович** д. т. н., профессор кафедры высшей математики Севастопольского национального технического университета
e-mail: peschansky_sntu@mail.ru

**Пичкур Владимир
Владимирович**

д. ф.-м. н., доцент кафедры моделирования сложных систем факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
e-mail: vpichkur@gmail.com

**Смолич Владимир
Павлович**

к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
e-mail: svp54@mail.ru

**Тур Елена
Васильевна**

ассистент кафедры мат. моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли
e-mail: tur.poltava@gmail.com

**Щербина Олег
Александрович**

д. ф.-м. н., профессор кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
e-mail: oshcherbina@gmail.com

**Юлдашев Турсун
Камалдинович**

к. ф.-м. н., доцент кафедры высшей математики Сибирского государственного аэрокосмического университета, г. Красноярск, Россия
e-mail: tursunbay@rambler.ru

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі «**Таврійський вісник інформатики і математики**» приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати наступне:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю у форматі PDF.
4. Заявку на сайті журналу **www.tvim.info**.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. **Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

- *Постановка проблеми* у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями
- *Аналіз останніх досліджень і публікацій*, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор
- *Невирішені* раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття
- *Формулювання цілей статті (постановка задачі)*

У висновку з даного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом) *результати* дослідження та *перспективи подальших розвідок у цьому напрямку*.

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або аббревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2008, № 3.
6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету `twim.sty`, який можна отримати за адресою **www.tvim.info**. Файли статті у форматі TeX і PDF (плюс графічні файли, якщо потрібні) необхідно прикріпити до заявки на публікацію статті на сайті журналу.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надавати за допомогою сайту **www.tvim.info**.
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

**ПОСТАНОВА
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ
від 15.01.2003 р. №7-05/1**

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України

В. В. Скопенко

Вчений секретар

Л. М. Артюшин

Подписано к печати 04.06.2013. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 11,5 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.

Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, 95007, Украина