

ТАВРИЧЕСКИЙ
ВЕСТНИК
ИНФОРМАТИКИ И
МАТЕМАТИКИ

№2 (21) ' 2012

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 26.05.2010 р. № 1-05/4 журнал „Таврійський вісник інформатики та математики” внесено до переліку фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата фізико-математичних наук (01.01 – математика, 01.05 – інформатика і кібернетика).

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА

В. И. ДОНСКОЙ,	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Е. П. БЕЛАН,	доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЁВ,	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
М. А. МУРАТОВ,	доктор физико-математических наук
И. В. ОРЛОВ,	доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
С. К. ПОЛУМИЕНКО,	доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ,	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
Ю. С. САМОЙЛЕНКО,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО,	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ,	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. ЧИКРИЙ,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
О. А. ЩЕРБИНА,	доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:

к. ф.-м. н., доцент **А. С. АНАФИЕВ** — ученый секретарь,
к. ф.-м. н. **В. Ф. БЛЫЩИК**, к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА**

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский научный центр Национальной Академии наук
и Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины
пр-т Вернадского, 2, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Факультет математики и информатики ТНУ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

Тел. гл. редактора: (0652) 63-75-42
Тел. редакции: (0652) 602-466
e-mail (гл. редактор): donskey@tnu.crimea.ua
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Математические модели и методы прогнозирования
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Машинное обучение и извлечение закономерностей
Нелинейный анализ и его применение	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Вычислительная математика
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов

Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ НАН и Министерства образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Протокол №6 от 10 декабря 2012 г.

© КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Донской В. И. Колмогоровская сложность и ее применение в машинном обучении	4
Емец Е. М., Олексийчук Ю. Ф. NP-трудность комбинаторной задачи нахождения максимального потока	36
Лукьянова Е. А. О способах построения и использовании компонентной сети Петри с ингибиторными дугами для анализа её исходной детальной модели Петри	45
Марценюк В. П., Гандзюк Н. М. Про експоненціальну оцінку розв'язку лінійної стаціонарної системи із записанням, як розв'язок різницевого рівняння	55
Мічута О. Р., Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію засолених ґрунтів в тривимірному випадку	64
Порунов А. Н. Герменевтика непараметрического критерия Ансари-Брэдли средствами Mathcad	73
Пришляк А. О., Вятчанинова Е. Н. Гомотопическая эквивалентность m -функций без внутренних критических точек на трёхмерных телах	84
Теймуров Р. А. Исследование одного класса задач оптимального управления подвижными источниками	92
Tereshchenko V. M., Taran D. S. An approach for computing the Delaunay Triangulation and the Voronoi Diagram in E^d	102
Рефераты	115
Список авторов номера	120
К сведению авторов	122

КОЛМОГОРОВСКАЯ СЛОЖНОСТЬ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В МАШИННОМ ОБУЧЕНИИ

© В. И. Донской

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: donskoy@tnu.crimea.ua

Abstract. The materials represented in this article carry, mainly, surveying character. The aim of the paper is complete enough presentation of possibilities of mathematical apparatus of algorithmic complexity and probability for application in machine learning. Nevertheless, some new results are presented: theorems about exact compressors and decompressors, approach to determination of the moment of stopping of learning procedure on the basis of complexity analogue of the Bayes rule et al.

ВВЕДЕНИЕ

Машинное обучение — важнейшее из направлений теоретических исследований и создания приложений в современной информатике. Сложность решения задач в этой области для математиков определяется прежде всего неполнотой начальной информации и неоднозначностью получаемых решений. Это объясняет появление множества подходов и попыток не только к построению теории машинного обучения и соответствующих алгоритмов, но и даже к самому определению обучаемости [5].

Хорошо обоснованные и приемлемые для практического использования математические результаты в этой области получаются не всегда. Но замечательной особенностью развития машинного обучения является то, что практика зачастую опережает теорию, и появляются успешно работающие обученные программы и автоматы.

Использование колмогоровской сложности и алгоритмической случайности [9, 10] в теории машинного обучения позволяет синтезировать алгоритмы обучения, основываясь на идеях отождествления эмпирического обобщения данных с их максимальным сжатием [18, 21].

Представляемые в данной статье материалы носят, главным образом, обзорный характер. *Целью работы* работы является достаточно полное представление возможностей математического аппарата алгоритмической сложности и случайности для применения в машинном обучении. Тем не менее, в статье содержатся и *новые результаты*: теремы о точных компрессорах и декомпрессорах, подход к определению момента останова процедуры обучения на основе сложностного аналога правила Байеса и другие.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КОЛМОГОРОВСКОЙ СЛОЖНОСТИ

Определение 1. [10] Колмогоровская сложность слова x при заданном способе описания — вычислимой функции (декомпрессоре) D есть

$$KS_D(x) = \min\{l(p) \mid D(p) = x\},$$

если существует хотя бы одно двоичное слово p такое, что $D(p) = x$. Иначе полагается, что значение сложности не ограничено. Будем говорить, что в таком случае колмогоровская сложность не определена.

Здесь и далее $l(p)$ обозначает длину слова p в битах.

Определение 2. Условная колмогоровская сложность слова x при заданном слове y есть

$$KS_D(x|y) = \min\{l(p) \mid D(p, y) = x\};$$

если y — пустое слово, то $KS_D(x|y) = KS_D(x)$

Определение 3. Говорят, что декомпрессор D_1 (слова x) не хуже декомпрессора D_2 , если $KS_{D_1}(x|y) \leq KS_{D_2}(x|y) + O(1)$. Декомпрессор называют оптимальным, если он не хуже любого другого декомпрессора.

Теорема 1. (Соломонова-Колмогорова) [10]. *Существуют оптимальные декомпрессоры.*

Доказательство. Покажем, что найдется такая частично рекурсивная функция-декомпрессор A , что для любой другой частично рекурсивной функции-декомпрессора $D = D(p, y)$ будет выполнено неравенство

$$KS_A(x|y) \leq KS_D(x|y) + c_D.$$

Здесь c_D — константа, не зависящая от x и y . Используя универсальную частично рекурсивную функцию U с подходящим номером n , для любого декомпрессора D можно записать равенство

$$D(p, y) = U(n, (p, y)) = x.$$

Колмогоровская сложность относительно декомпрессора D есть

$$KS_D(x|y) = l(p).$$

Далее, осуществляя группировку аргументов, можно определить функцию A следующим образом:

$$A((n, p), y) = U(n, (p, y)) = x.$$

Здесь пара слов (n, p) рассматривается как их конкатенация, длина которой есть $l(np) = l(p) + l(n)$. Тогда $A((n, p), y) = D(p, y) = x$ для любого допустимого декомпрессора D . Поэтому для любого номера функции n , определяющего декомпрессор D , найдется константа $c_D \geq l(n)$, зависящая только от выбора этого декомпрессора, такая, что

$$KS_A(x|y) = l(np) \leq l(n) + l(p) + \delta = KS_D(x|y) + c_D,$$

где константа δ определяет дополнительное число бит, которое может потребоваться для того, чтобы входящий в конкатенацию np номер используемой универсальной функции n мог быть отделен от аргумента p . Это можно сделать разными способами независимо от слова p , например, при помощи специального так называемого самоограничивающего кодирования. Подробнее это будет показано ниже при разборе определения колмогоровской сложности, данного Витаньи и Ли [25]. \square

Замечание. Конкатенация xy двух строк x и y не может рассматриваться как пара (xy) , поскольку в конкатенации, вообще говоря, не содержится информация о нужном разделении строки xy на две подстроки. Поэтому конкатенация дополняется информацией, обеспечивающей её правильное разделение.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется перечислимой сверху, если существуют вычислимая функция $F(x, k)$, определенная для всех слов x и всех натуральных чисел k , для которой $F(x, 0) \geq F(x, 1) \geq F(x, 2) \geq \dots$ и $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x, k)$ для каждого значения x . При любом k значение $F(x, k)$ является верхней оценкой для $f(x)$. Функция $f(x)$ называется перечислимой снизу, если существует аналогичная нижняя оценка $L(x, k)$.

Теорема 2. Функция KS перечислима сверху, причём $|\{x : KS(x) < n\}| < 2^n$ для всех n .

Доказательство. Покажем, что множество пар $\{(n, x) : KS(x) < n\}$, где n — натуральное число, а x — двоичное слово, перечислимо. Если $KS(x) < n$, то существует фигурирующая в определении KS вычислимая функция — декомпрессор D . Используя установленный стандартный порядок двоичных слов, можно организовать вычисления, начиная с $k = 0$, в соответствии с этим порядком. Т. е. перебирать слова p по мере роста их длины, соблюдая условие $KS(x) < n$. Будут перебираться все слова, длина которых не превышает n . Как только окажется, что $D(p) = x$, перечисляющий алгоритм будет выдавать пару $\langle l(p) + k, x \rangle$ и увеличивать k на единицу. Если первая выдача будет парой $\langle l(p) + 0, x \rangle$, то выдаваемая перечисляющая последовательность будет иметь вид $\langle l(p) + 0, x \rangle, \langle l(p) + 1, x \rangle, \langle l(p) + 2, x \rangle \dots$. Поскольку перебираются все слова длины не больше n , то сумма этих длин $\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i} = 2^n - 1 < 2^n$. Поэтому

$|\{x : KS(x) < n\}| < 2^n$. Определим функцию $F(x, k) = l(p) + n - k$ как последовательность оценок сверху сложности $KS(x)$, полагая $F(k, x) = \infty$ при $k > n$. Тогда $F(x, 0) \geq F(x, 1) \geq F(x, 2) \geq \dots$ и $KS(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(x, k)$, поскольку это предельное соотношение соответствует неравенству $k > n$ для любого заданного n . \square

Лемма 1. Для любой вычислимой функции $f(x)$ имеет место неравенство $KS(f(x)) \leq KS(x) + O(1)$ для всех тех значений x , когда $f(x)$ определена.

Доказательство. Пусть D — оптимальный декомпрессор в определении $KS(x) = KS_D(x) = \min\{l(p) : D(p) = x\}$. Возьмем в качестве другого декомпрессора композицию вычислимых функций $f \circ D$ и рассмотрим

$$KS_{f \circ D}(f(x)) = \min\{l(p) : f(D(p)) = f(x)\} = \min\{l(p) : D(p) = x\} = KS(x).$$

$$KS(f(x)) \leq KS_{f \circ D}(f(x)) + O(1).$$

\square

Теорема 3. Любая частично рекурсивная (вычислимая) функция $L(x)$ такая, что $L(x) \leq KS(x)$ в тех точках, в которых $L(x)$ определена, ограничена некоторой константой C , то есть $L(x) \leq C$ для всех x .

Доказательство. Предположим, что существует вычислимая функция $L(x)$, являющаяся оценкой снизу колмогоровской сложности: $L(x) \leq KS(x)$. Определим функцию $A(n)$, которая ставит в соответствие натуральному числу n минимальное в порядке перечисления значение x такое, что $L(x) \geq n$. Функция $A(n)$ будет вычислимой в силу предположения, что $L(x)$ вычислима. Тогда $L(A(n)) \leq KS(A(n))$ по сделанному предположению, что $L(x) \leq KS(x)$. Согласно определению функции $A(n)$, имеет место неравенство $L(A(n)) \geq n$. Согласно лемме 1, $KS(A(n)) \leq KS(n) + c_1$. Получается цепочка неравенств:

$$n \leq L(A(n)) \leq KS(A(n)) \leq KS(n) + c_1 \leq \log n + c_2,$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы. Но следующее из этой цепочки неравенство $n \leq \log n + c_2$ не выполняется для всех n , больших некоторого значения n_0 . Полученное противоречие доказывает теорему. \square

Замечание. Теорема 3 доказывает несуществование именно функции — нижней оценки колмогоровской сложности для произвольного x .

Теорема 4. Колмогоровская сложность KS не является вычислимой функцией.

Доказательство. Предположив, что KS вычислима, получим, что вычислима функция $f(x) = KS(x) - 1$, и тогда $f(x) \leq KS(x)$ для всех непустых строк x . Но такой нижней оценки для колмогоровской сложности не существует согласно теореме 3. \square

Теорема 5. *Колмогоровская сложность $KS_D(x) = \min\{l(p) | D(p) = x\}$ конечной строки x определена тогда и только тогда, когда существует машина Тьюринга T_C (компрессор) такая, что $T_C(x) = p$.*

Доказательство. Действительно, если существует машина Тьюринга D такая, что $D(p) = x$, то существует система подстановок Маркова M_D , алгоритмически эквивалентная МТ D (реализующая тот же самый алфавитный оператор). Применение M_D к слову p даст $x = M_D(p)$. Зафиксируем выполненную при этом последовательность марковских подстановок:

$$\tilde{S}(M_D, y, x) = \{s_1, \dots, s_j, \dots, s_\mu : s_j = \lambda_j \rightarrow \rho_j\},$$

где λ_j — левая часть подстановки (замещаемое подслово), а ρ_j — правая часть подстановки (замещающее подслово), вместе с последовательностью $k_1, \dots, k_j, \dots, k_\mu$ номеров символов текущего обрабатываемого слова, начиная с которых реализуются подстановки. Тогда компрессор T_C может быть композицией машин Тьюринга двух типов: подвода головки к символу с номером k_j (обозначим эти машины T_j^1) и заменой подслова ρ_j на подслово λ_j (обозначим их T_j^2). Применение к слову x последовательно машин $T_\mu^1, T_\mu^2, \dots, T_j^1, T_j^2, \dots, T_1^1, T_1^2$ даёт композицию T_C такую, что $T_C(x) = p$ (машина T_1^2 должна быть снабжена заключительным состоянием). Аналогично доказывается, что если для строки x существует машина Тьюринга T_C (компрессор) такая, что $T_C(x) = p$, где p — некоторая строка, то можно указать соответствующую ей машину-декомпрессор D_{T_C} такую, что $D_{T_C}(p) = x$, и тогда колмогоровская сложность $KS_D(x) = \min\{l(p) | D(p) = x\}$ будет определена. \square

Определение 5. Назовем точной колмогоровской сложностью строки x

$$KC(x) = \min_{\{D | D(p)=x\}} \min\{l(p) | D(p) = x\}.$$

Как видно из последнего определения, точная колмогоровская сложность определяется наилучшим декомпрессором.

Теорема 6. *Точная колмогоровская сложность не является вычислимой функцией.*

Доказательство. Если бы KC была вычислима, то она была бы нижней оценкой колмогоровской сложности KS : $KC(x) \leq KS(x)$. Но таковой оценки не существует по теореме 3. \square

Определение 6. Пусть x — конечная строка, и множество её компрессоров $\mathfrak{T}_C(x) = \{T_C | T_C(x) = p\}$ не является пустым. Назовем

$$K_T(x) = \min_{T_C \in \mathfrak{T}_C} \{l(p) | T_C(x) = p\}$$

сжатием строки наилучшим компрессором.

Очевидно, для конечной строки x сжатие удовлетворяет двойному неравенству $0 \leq K_T(x) \leq l(x)$. Значение 0 соответствует пустой строке.

Теорема 7. Если $l(x) < \infty$, то $KS(x) = K_T(x)$.

Доказательство. Предположим, что $KS(x) < K_T(x)$. Зафиксируем наилучший декомпрессор D^* , соответствующий значению $KS(x) = l(p^*)$ на слове p^* . Зафиксируем это слово p^* — кратчайшее описание строки x . Используя марковское представление декомпрессора D^* , построим, как это было сделано при доказательстве теоремы 5, алгоритм-компрессор T_{D^*} такой, что $T_{D^*}(x) = p^*$. Но тогда $K_T(x) \leq KS(x)$. Точно также, предположив, что $K_T(x) < KS(x)$, используем наилучший компрессор для построения соответствующего декомпрессора, и получим $K_T(x) \geq KS(x)$. \square

В работах [25, 26] исходная колмогоровская сложность $KS(x)$ определяется, на первый взгляд, иначе (и обозначается $C(x)$). Используется понятие *самоограничивающего кода* \bar{x} заданной бинарной строки $x_1x_2\dots x_n$, который определяется соотношением $\bar{x} = x_1x_1x_2x_2\dots x_{n-1}x_{n-1}x_n\neg x_n$. В правой части этого соотношения содержится префиксный код, в котором каждая пара символов, кроме последней, одинакова, а последний символ является инверсией предпоследнего. Действительно, пусть x и y — две бинарных строки такие, что x является префиксом строки y , то есть $y = x\tau$ при непустом окончании τ . Обозначим длины этих строк $l(x) = n$ и $l(y) = m$. Убедимся, что код \bar{x} не будет префиксом кода \bar{y} :

$$x = x_1x_2\dots x_n;$$

$$y = x_1x_2\dots x_ny_{n+1}\dots y_m;$$

$$\bar{x} = x_1x_1x_2x_2\dots x_{n-1}x_{n-1}x_n\neg x_n;$$

$$\bar{y} = x_1x_1x_2x_2\dots x_{n-1}x_{n-1}x_nx_ny_{n+1}y_{n+1}\dots y_m\neg y_m.$$

Используя такой префиксный код, определяют *стандартный самоограничивающий код* x' для любой строки x согласно соотношению $x' = \overline{l(x)}x$. Это соотношение определяет, что к исходной строке приписывается префикс, являющийся самоограничивающим кодом ее длины, и $l(x') = n + 2 \lceil \log n \rceil$, где $n = l(x)$.

Определение 7. [26] Пусть $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ — стандартное перечисление машин Тьюринга, а $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_i, \dots$ — перечисление соответствующих этим машинам частично рекурсивных функций. Колмогоровская сложность строки x по заданной строке y определяется выражением

$$C(x|y) = \min_{p,i} \{l(i'p) : \phi_i(p, y) = x, p \in \{0, 1\}^*, i \in \mathbf{N}\}; \quad C(x) = C(x|\lambda).$$

В этом определении Витаньи и Ли сложность слова x определяется длиной конкатенации номера i' машины-декомпрессора D_i , представленного в самоограничивающемся коде, и кода слова x . Пусть

$$(p^*, i^*) = \arg \min_{p,i} \{l(i'p) : \phi_i(p, y) = x, p \in \{0, 1\}^*, i \in \mathbf{N}\}$$

По слову i' , представленному в самоограниченном коде, можно определить описание декомпрессора (машины) i и отделить его от слова p . Затем можно выполнить программу i (промоделировать её) на любом другом допустимом декомпрессоре — машине D . Тогда

$$C(x|y) \leq C_D(x|y) + l(i'),$$

откуда следует, что $C(x|y) = KS(x|y)$ — колмогоровская сложность относительно некоторого оптимального способа описания D_{i^*} .

Теорема 8. (О сложности конкатенации строк). Пусть xy — конкатенация строк x и y . Тогда выполняется неравенство

$$KS(xy) \leq KS(x) + 2 \log KS(x) + KS(y) + c, \quad (1)$$

где c — некоторая константа.

Доказательство. Пусть p и q — такие слова, что $KS(x) = l(p)$ и $KS(y) = l(q)$. Пусть D' — произвольный декомпрессор. Предположим, что имеет место равенство $D'(pq) = xy = D(p)D(q)$. Но $D'(pq)$ не может быть определено однозначно, поскольку разные разбиения слова pq на части $p_1q_1 = p_2q_2 = pq$ могут давать различные результаты декомпрессии. Чтобы разделение конкатенации pq было корректным, можно применить самоограничивающийся код $\overline{l(p)}pq$, чем обеспечивается выполнение условия $D'(\overline{l(p)}pq) = D(p)D(q) = xy$. Тогда

$$KS_{D'}(xy) = 2 \log l(p) + l(p) + l(q);$$

$$KS_{D'}(xy) = KS(x) + 2 \log KS(x) + KS(y).$$

Переходя от декомпрессора D' к оптимальной машине, согласно теореме Соломонова-Колмогорова получаем неравенство (1) с константой c , не зависящей от x и y . \square

Теорема 9. (Колмогорова-Левина о декомпозиции сложности пары строк) [9].

$$KS(x, y) = KS(x) + KS(y|x) + O(\log KS(x, y)).$$

2. ПРЕФИКСНАЯ СЛОЖНОСТЬ

Префиксная сложность является модификацией простой колмогоровской сложности, приспособленной для построения универсальной вероятностной меры на множестве последовательностей. Если S — некоторое множество строк, в котором любая пара строк удовлетворяет условию: одна из них не является префиксом другой, то множество S называют беспрефиксным. Вычислимая функция $U(p, y)$ двух переменных называется *префиксно-корректной* по первому аргументу, если для любого y множество строк p , на которых эта функция определена, является беспрефиксным. Иногда такую функцию называют самоограниченным декомпрессором. Определение распространяется на случай пустой строки λ : $U(p, \lambda) = U(p)$. Если $U(p) = x$ для некоторой строки x , то множество $\{p : U(p) = x\}$ является беспрефиксным. И тогда компрессор T_C (см. ниже теорему 11) порождает для всех допустимых конечных строк x беспрефиксное множество.

Определение 8. Пусть U — произвольная вычислимая префиксно-корректная функция. Условная префиксная колмогоровская сложность строки x при условии y есть

$$KP_U(x|y) = \begin{cases} \min\{l(p) | U(p, y) = x\}, & \exists p \ U(p, y) = x, \\ \infty, & \forall p \ U(p, y) \neq x \end{cases}$$

Теорема 10. Существует такая (универсальная) префиксно-корректная функция $A = A(p, y)$, что для любой вычислимой префиксно-корректной функции $U = U(p, y)$ и для всех x и y имеет место неравенство

$$KP_A(x|y) \leq KP_U(p, y) + O(1).$$

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы Соломонова-Колмогорова для сложности KS . □

Определение 9. Условной префиксной сложностью $KP(x|y)$ называют условную префиксную сложность $KP_A(x|y)$ по любой зафиксированной универсальной префиксно-корректной функции A .

Определение 10. Назовем точной условной префиксной сложностью

$$KPC(x|y) = \min_{\{U | U(p, y) = x\}} \min\{l(p) | U(p, y) = x\},$$

если множество префиксно-корректных функций $\{U : U(p, y) = x\}$ не пусто, иначе будем говорить, что точная префиксная сложность не определена, и полагать, что $KPC(x|y) = \infty$.

Если точная префиксная сложность определена, то для любой универсальной вычислимой префиксно-корректной функции U и для любой универсальной префиксно-корректной функции A

$$KPC(x|y) \leq KP_A(x|y) \leq KP_U(p, y) + O(1),$$

$$KPC(x|y) \leq KP(x|y).$$

Поэтому точную префиксную сложность $KPC(x|y)$ можно считать условной префиксной сложностью $KP(x|y)$ (по некоторой наилучшей универсальной вычислимой префиксно-корректной функции U_*). Это позволяет освободиться от латентной константы.

В определении префиксной сложности можно использовать в качестве функции U так называемую префиксную машину Тьюринга. Это приводит к эквивалентному понятию и оказывается полезным для дальнейшего изложения.

Префиксной называют машину Тьюринга T , описываемую, например, следующим образом [12]. Предполагается, что у такой машины помимо рабочей ленты есть входная лента, на которой имеется односторонняя читающая головка. Крайняя левая клетка ленты содержит специальный маркер, справа от которого может быть записана любая последовательность нулей и единиц. Изначально читающая головка находится у левого края входной ленты под специальным маркером. Шаги вычислений машины Тьюринга определяются как символом, который «видит» читающая головка, так и символом, который «видит» головка на рабочей ленте. В зависимости от этих символов и текущего состояния машина предпринимает то или иное действие. Это действие состоит в изменении внутреннего состояния, записи нового символа на рабочей ленте, а также может включать в себя сдвиг и влево, и вправо на рабочей ленте и сдвиг только вправо читающей головки входной ленты. Результат работы машины обычным образом записывается на рабочей ленте, которая изначально является пустой. Когда машина останавливается, читающая головка входной ленты находится в точности над первым пробелом, следующим за заданным на входной ленте словом.

Теорема 11. *Областью определения префиксной машины является беспрефиксное множество.*

Доказательство. Пусть S – множество строк, для которых результат работы префиксной машины T определен. Если $x \in S$, то машина T останавливается при условии, что выполнены все необходимые вычисления, на рабочую ленту выдано результирующее слово $z = T(x)$ и на входной ленте прочитаны в точности все символы строки x , но не более. Последнее условие соответствует нахождению входной головки на символе, следующем за последним символом строки x . Рассмотрим две строки: $x \in S$ и $y \in S$. Предположим, что x является префиксом строки y , то есть $y = x\tau$ при непустом окончании τ . Но тогда, начав работу над словом y , машина T сначала произведёт в точности такие же действия, как при работе над словом x , и затем она остановится, не продолжая просмотр окончания τ слова y . Но тогда результат работы машины на слове y не может быть определен. Это противоречие доказывает, что область определения префиксной машины T – беспрефиксное множество. \square

В литературе встречаются другие, эквивалентные определения префиксной машины. В работе [19] префиксная машина Тьюринга T определяется так. Эта машина снабжена тремя лентами: однонаправленной входной лентой (только для чтения), однонаправленной выходной лентой (только для записи) и двунаправленной рабочей лентой. Вдоль однонаправленных лент головка перемещается только слева направо. Все ленты – двоичные, пустой символ не используется. Рабочая лента инициализируется нулями. Машина T останавливается на входе p , выдавая $z = T(p)$, если p находится слева от входной головки, и z находится слева от выходной головки. Множество таких слов p образуют префиксный код. Такие коды называют самоограничивающимися программами. Префиксная машина всегда предполагает существование способа, позволяющего указать, где именно на ленте ограничивается входное слово.

Теорема 12. *Для любой префиксной MT можно указать эквивалентную ей обычную MT .*

Доказательство. Пусть T – произвольная префиксная машина, заданная своей таблицей команд, а x – произвольная входная строка. Рассмотрим подпрограмму-функцию $Input(x, k)$, возвращающую k -й символ входной строки x . Подпрограмма реализуется подтаблицей с конечным множеством дополнительных состояний. Чтобы получить обычную машину Тьюринга T_1 , эквивалентную префиксной машине T , достаточно реализовать указанную подпрограмму внутри последовательности вычислений одноленточной машины. Машина T_1 начинает работу, положив $k = 0$, и пропускает (пройдя до конца вправо) входное слово. Эти действия имитируют подготовку входной ленты префиксной машины. Далее она выполняет шаги, логически эквивалентные последовательности вычислений машины T , вне зоны записи любого

входного слова. Аналогом обращения к выделенной входной ленте префиксной машины T будет обращение к подпрограмме $Input(x, k)$. При таком обращении будет происходить следующее:

- вычисление $k := k + 1$;
- запоминание при помощи специального маркера ячейки ленты, на которой прерываются вычисления;
- переход в начальное состояние подтаблицы-подпрограммы;
- считывание символа $x[k]$;
- подвод к ячейке ленты, соответствующей точке возврата;
- возврат в следующее по логике обработки машины T состояние.

□

Замечание. МТ, суммирующая любой начальный отрезок произвольной конечной двоичной последовательности x , применима к любому её префиксу. Но такой сумматор не реализуем на префиксной МТ. Поэтому

Следствие 1. *Префиксные МТ образуют специфический собственный подкласс машин Тьюринга.*

Следствие 2. *Любая префиксно-корректная вычислимая функция вычислима на МТ без маркера конца входа.*

В справедливости последнего следствия можно убедиться иным способом [3].

Для префиксной сложности KP справедлива такая же теорема о несуществовании нетривиальной вычислимой оценки снизу, как и для колмогоровской сложности KS . Из этой теоремы следует, что префиксная сложность не является вычислимой. Её доказательство [11], такое же, как и доказательство аналогичной теоремы для колмогоровской сложности KS .

Лемма 2.

$$KPC(x, y) \leq KPC(x) + KPC(y).$$

Доказательство. Пусть слово x восстанавливается по кратчайшему слову p наилучшей машиной T_1 , соответствующей точной префиксной сложности $KPC(x)$, а слово y восстанавливается по кратчайшему слову q наилучшей машиной T_2 , соответствующей точной префиксной сложности $KPC(y)$. По следствию 2 обе эти машины могут не использовать маркер конца входа. Тогда $T_1 \circ T_2(pq) = xy$, где $T_1 \circ T_2$ — композиция

машин Тьюринга. Сначала машина T_1 применяется к слову p и выдаёт x . После её работы головка машины T_2 будет обозревать первый символ слова q . Следовательно,

$$KP_{T_1 \circ T_2}(xy) = KPC(x) + KPC(y) = |p| + |q|.$$

Тогда для любой наилучшей машины $KPC(x, y) \leq KP_{T_1 \circ T_2}(x, y)$. \square

Приведем без доказательства еще несколько полезных теорем.

Теорема 13. Любая частично рекурсивная (вычислимая) функция $L(x)$ такая, что $L(x) \leq KP(x)$ в тех точках, в которых $L(x)$ определена, ограничена некоторой константой C , то есть $L(x) \leq C$ для всех x .

Теорема 14. Префиксная сложность не является вычислимой.

Теорема 15. Обычная и префиксная сложности связаны неравенством $\forall x KS(x) \leq KP(x) + O(1)$, причем разность $KP(x) - KS(x)$ стремится к бесконечности с ростом длины строки x [11].

Теорема 16. [11]. Существует всюду определённая вычислимая функция f , оценивающая сверху KS и на бесконечном множестве равная KS .

Теорема 17. [11] Существует всюду определённая вычислимая функция f , оценивающая сверху KP и на бесконечном множестве равная KP .

3. УНИВЕРСАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Определение 11. Вещественнозначная функция $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ называется перечислимой, если существует МТ, вычисляющая рекурсивную функцию φ такую, что $\varphi(\langle x, t \rangle) = \langle p, q \rangle$, где $\frac{p}{q}$ есть t -е рациональное приближение значение $f(x)$. В этом смысле функцию f , допускающую указанную аппроксимацию, называют рекурсивной.

Определение 12. Будем называть функцию $P : \mathbf{N} \rightarrow [0, 1]$ вероятностным распределением, если $\sum_{x \in \mathbf{N}} P(x) \leq 1$. Неравенство вводится для удобства, и полагается, что недостающая вероятность $\varepsilon = 1 - \sum_{x \in \mathbf{N}} P(x)$ сосредоточена на неопределённом элементе $u \notin \mathbf{N}$. В этом случае P называют полумерой.

Определение 13. Рассмотрим семейство полумер (вероятностных распределений) P_ε на \mathbf{N} (эквивалентно – на $\{0, 1\}^*$). Назовем перечислимую снизу полумеру $\mathbf{m} \in P_\varepsilon$ максимальной, если для любой другой перечислимой снизу полумеры μ для некоторой константы c и для всех x выполнено неравенство $\mu(x) \leq \mathbf{m}(x)$.

Можно сказать, что максимальная полумера \mathbf{m} «выделяет» так много вероятности каждому объекту, как любое другое распределение семейства \mathbf{P}_ε с точностью до мультипликативного множителя. В этом смысле она является *универсальной относительно априорной неопределенности*. В некоторых случаях использование полумеры \mathbf{m} в пространстве $\{0, 1\}^\infty$ приводит к тем же результатам, которые даёт использование истинного неизвестного априорного распределения.

Теорема 18. Семейство \mathbf{P}_ε содержит элемент \mathbf{m} , который мультипликативно доминирует все элементы из \mathbf{P}_ε . Иначе говоря, для любой полумеры $P \in \mathbf{P}_\varepsilon$ существует константа c такая, что $c\mathbf{m}(x) > P(x)$ для всех $x \in \mathbf{N}$.

Доказательство. Можно найти в работах [3, 21, 12]. □

Назовем максимальной в указанном смысле перечислимую снизу полумеру *универсальным распределением*.

Теорема 19.

$$-\log \mathbf{m}(x) = KP(x) + O(1).$$

Доказательство. Сначала докажем неравенство $-\log \mathbf{m}(x) \leq KP(x) + O(1)$. Перепишем неравенство в эквивалентной форме $2^{-KP(x)} \leq c\mathbf{m}(x)$, где $c \neq 0$ – некоторая константа. В силу максимальной полумеры $\mathbf{m}(x)$ достаточно показать, что функция $2^{-KP(x)}$ является а) *перечислимой снизу* б) *полумерой*. Убедимся в справедливости б). Неравенство $\sum_x 2^{-KP(x)} \leq 1$ для полумеры действительно выполняется, так как префиксная сложность $KP(x) = l(x)$ – минимальная длина слова – определена для совокупности слов x , образующий префиксный код. А для префиксного кода справедливо неравенство Крафта $\sum_x 2^{-l(x)} \leq 1$.

Убедимся в справедливости а). Известно, что функция префиксной сложности $KP(x)$ перечислима сверху: существует вычислимая функция F такая, что $KP(x) < F(x, k)$ для любого натурального k . Тогда $2^{-KP(x)} > L(x, k) = 2^{-F(x, k)}$, следовательно, $2^{-KP(x)}$ перечислима снизу.

Теперь докажем обратное неравенство: $-\log \mathbf{m}(x) \geq KP(x) + O(1)$. Как уже было показано, функция $2^{-KP(x)} = \mu(x) > 0$ является полумерой; $\mathbf{m}(x) > 0$, поскольку $c\mathbf{m}(x) \geq \mu(x) > 0$. Обозначим

$$\eta = \sup_x |\mathbf{m}(x) - \mu(x)| < 1; \quad \delta = \inf_x \mathbf{m}(x) > 0.$$

Тогда $\mu(x) \geq \mathbf{m}(x) - \eta \geq c_1 \mathbf{m}(x)$ для любой константы c_1 такой, что $c_1 \leq 1 - \eta / \mathbf{m}(x)$. В качестве $c - 1$ можно взять $1 - \eta / \delta$, получая $\mu(x) \geq (1 - \eta / \delta) \mathbf{m}(x)$ или $2^{-KP(x)} \geq (1 - \eta / \delta) \mathbf{m}(x)$, и тогда $-KP(x) \geq \log \mathbf{m}(x) + O(1)$ или $-\log \mathbf{m}(x) \geq KP(x) + O(1)$. □

Следствие 3. $-\log \mathbf{m}(x) = KPC(x) + O(1)$.

4. СЖАТИЕ И ОЦЕНКИ ОБУЧАЕМОСТИ

Определение 14. [13] Алгоритмом Оккама с параметрами $\alpha \geq 1$ и $\beta : 0 \leq \beta < 1$ над классом (целевых) гипотез G , в котором сложность любой гипотезы (длина её бинарного описания) не превышает n , называется алгоритм обучения, который:

- (i) выполняется за полиномиальное время от длины выборки и
- (ii) в результате обучения выдаёт гипотезу, имеющую сложность, не превышающую $n^\alpha l^\beta$.

В определении 14 не оговаривается, является ли полученная гипотеза согласованной с обучающей выборкой; кроме этого, выбранная гипотеза может даже не принадлежать классу G .

Теорема 20. [13] Для алгоритма Оккама над классом (целевых) гипотез G , в котором сложность любой гипотезы не превышает n , независимо от распределения вероятностей на признаковом пространстве (ε, δ) -обучаемость [5] имеет место при длине выборки l , оцениваемой как

$$l = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta} + (n^\alpha / \varepsilon)^{1/(1-\beta)}\right),$$

где $\alpha \geq 1$ и $\beta : 0 \leq \beta < 1$.

В случае согласованности алгоритма Оккама с обучающей выборкой $\beta = 0$, и тогда

$$l = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \left(n^\alpha + \ln \frac{1}{\delta}\right)\right).$$

Теорема 21. (Осват's Razor теорема) [13]. Пусть G и H — классы концептов. Пусть $g \in G$ — целевой концепт и $n(g)$ — длина его бинарного представления $s(g)$. Пусть A — алгоритм обучения и даны константы $\alpha \geq 1$ и $\beta : 0 \leq \beta < 1$. Предположим, что алгоритм A , используя выборку X_l длины l , извлеченную из признакового пространства в соответствии с вероятностным распределением на нём, выдаёт гипотезу $h \in H$, согласованную как минимум с $(1 - \frac{\varepsilon}{2})l$ примерами из X_l , и её строчное бинарное описание $s(h)$ имеет длину, не большую чем $n(g)^{\alpha\beta}$. Тогда, если

$$l = O\left(\max\left(\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{1}{\delta}, \left(\frac{(n(g)^\alpha)^{1/(1-\beta)}}{\varepsilon}\right)\right)\right),$$

или, при $\beta = 0$,

$$l = O\left(\frac{n(g)^\alpha}{\varepsilon}\right),$$

то полиномиальная обучаемость [5] имеет место.

Оценка длины выборки, которая требуется для РАС обучаемости в сложностной версии *Occam's Razor* теоремы, основанной на длине описания $s(h) \leq n(g)^{\alpha l^\beta}$ выбираемого при обучении концепта h , может быть уточнена [20]:

$$l = \max \left(\frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{2}{\delta}, \left(\frac{2 \ln 2 \cdot n(g)^\alpha}{\varepsilon} \right)^{1/(1-\beta)} \right).$$

Константы α и β , фигурирующие в *Occam's Razor* теореме можно интерпретировать следующим образом. Бинарное описание выбранной гипотезы должно иметь длину, не превышающую $n(g)^{\alpha l^\beta}$, где α – степень расширения описания целевого концепта, а β – степень сжатия описания выборки.

Попытки уточнения *Occam's Razor* теоремы привели к следующей формуле для длины выборки, необходимой для (ε, δ) -обучаемости и определяемой сжатием описания выбираемого при обучении концепта h [20]:

$$l = \max \left(\frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta}, \left(\frac{2 \ln 2 \cdot p(n, s, \delta/2)}{\varepsilon} \right)^{1/(1-\beta)} \right),$$

где $p(n, s, \delta/2)$ – характеризующая сжатие описания концепта оценочная функция такая, что $KP(h) < p(n, s, \delta/2)l^\beta$; n – размерность признакового пространства, s – верхняя граница возможных длин описаний по допустимым классам концептов. Если можно указать оценку сверху M_h такую, что $p(n, s, \delta/2)l^\beta \leq M_h$ для всех допустимых значений параметров функции p , то требуемая длина выборки будет определяться как

$$l = \max \left(\frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{2}{\delta}, \left(\frac{2 \ln 2 \cdot M_h}{\varepsilon} \right)^{1/(1-\beta)} \right),$$

и при полном сжатии выборки ($\beta = 0$) как

$$l = \max \left(\frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{2}{\delta}, \left(\frac{2 \ln 2 \cdot M_h}{\varepsilon} \right) \right).$$

Оценка M_h может быть получена $pVCD$ методом [4, 15].

Версия *Occam's Razor* теоремы, основанной на вапниковской ёмкости $VCD(H)$ семейства концептов H , из которого извлекается концепт h , определяет следующую оценку выборки, требуемую для РАС обучаемости [20, 13, 16]:

$$\max \left(\frac{VCD(H) - 1}{32\varepsilon}, \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta} \right) < l(H, \delta, \varepsilon) \leq \frac{4}{\varepsilon} \left(VCD(h) \log \frac{12}{\varepsilon} + \log \frac{2}{\delta} \right).$$

Из приведенных оценок видно, что колмогоровская сложность $KP(h)$ выбранной гипотезы $h \in H$ и $VCD(H)$ при их использовании для оценивания результатов машинного обучения дают близкие результаты. Действительно, выбор семейства гипотез наименьшей ёмкости влечёт минимизацию колмогоровской сложности этого семейства, что согласуется с установленным в [4, 15] неравенством для колмогоровской сложности $K_l(H)$ произвольного конечного семейства гипотез H (семейства рекурсивных функций H):

$$VCD(H) < K_l(H) \leq VCD(H) \log l.$$

В случае конечного семейства гипотез H оценка длины выборки, обеспечивающей обучаемость для любого согласованного с выборкой концепта $h \in H$, имеет вид:

$$l(H, \delta, \varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{|H|}{\delta}.$$

Это неравенство, как и многие другие фундаментальные результаты, связанные с обучаемостью, были получены В. Н. Вапником еще в начале 1970-х годов [1, 2].

Связь между сжатием обучающей выборки, обучаемостью и VCD была изучена в работе Флойда и Вармута [17] на основе следующих понятий. Для любого $Y \subset X$ (X — признаковое пространство) и произвольного класса концептов C вводится обозначение $C|Y = \{c \cap Y : c \in C\}$ — ограничение концепта по области (множеству) Y .

Схема сжатия выборки размера не более k для класса концептов C описывается функцией сжатия, функцией реконструкции и их применением следующим образом. Используя конечную обучающую выборку, согласованную с классом концептов C , функция сжатия K отбирает из неё так называемое *множество сжатия* A , состоящее из не более k помеченных обучающих примеров. Функция реконструкции φ использует это множество сжатия для построения концепта-гипотезы $c_A = \varphi(A)$ — результата обучения. При этом гипотеза c_A , вообще говоря, может не содержаться в классе C , но должна быть согласованной со всеми примерами исходной обучающей выборки.

Пример. Рассмотрим класс C_{L^0} однородных линейных концептов в \mathbf{R}^n и согласованную выборку D длины $l > n$, состоящую из точек $\tilde{x} = x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющих уравнению $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$. Неизвестные коэффициенты $\tilde{a} = a_1, \dots, a_n$ определяют один из концептов $c_{\tilde{a}} \in C_{L^0}$. Пусть множество сжатия A_L состоит из любых $k = n$ попарно различных примеров обучающей выборки. Тогда, используя эти k примеров, функция реконструкции φ , определяемая алгоритмом решения системы однородных линейных уравнений, однозначно восстанавливает $\varphi(A_L) = c_{\tilde{a}}$. Заметим,

что $VCD(C_{L^0}) = n$. Если $l < n$, то функции реконструкции, обеспечивающей безошибочное нахождение неизвестного целевого концепта, для этого примера не существует, так как по $l < n$ точкам невозможно однозначное восстановление линейного концепта.

Для класса неоднородных линейных концептов C_L , соответствующих уравнениям $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = a_0$, параметр сжатия k должен быть не меньше $d = VCD(C_L) = n+1$.

□

Класс концептов называется *максимальным*, если добавление любого концепта к этому классу увеличивает его VCD . Класс концептов C , имеющий $VCD(C) = d$, называется *классом-максимумом*, если для каждого конечного подмножества $Y \subseteq C$, при $|Y| = m > d$, семейство $C|Y$ содержит $\Phi_d(|Y|) = \sum_{i=0}^d C_{|Y|}^i$ концептов.

Теорема 22. [17]. Пусть класс концептов $C \subseteq 2^X$ является классом-максимумом, $VCD(C) = d$, обучающая выборка X_l имеет длину $l \geq d$. Тогда для любого концепта $s \in C$ найдётся множество сжатия A , состоящее ровно из d примеров, и функция реконструкции такие, что $s_A = s$.

Теорема 23. Пусть класс концептов $C \subseteq 2^X$ является классом-максимумом, $VCD(C) = d$, и выборочное пространство может быть бесконечным. Тогда для класса концептов C при длине обучающей выборки l существует схема сжатия размера k , удовлетворяющего неравенству $d < k \leq d \log l$.

Теорема 24. Пусть $C \subseteq 2^X$ класс концептов со схемой компрессии размером не более $d = VCD(C)$. Тогда для любых ε, δ таких, что $0 < \varepsilon, \delta < 1$, использование обучающего алгоритма, соответствующего этой схеме компрессии, обеспечит (ε, δ) обучаемость при длине выборки, удовлетворяющей неравенству

$$l \geq \frac{1}{1-\beta} \left(\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta} + VCD(C) + \frac{VCD(C)}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\beta\varepsilon} \right)$$

для любого $\beta : 0 < \beta < 1$.

Нужно подчеркнуть, что сжатие в последних теоремах характеризуется относительно длины выборки, а не длиной бинарной строки. Но, тем не менее, в указанных условиях возможно сжатие информации о семействе концептов ёмкости d до бинарной строки, длина которой не будет превышать $O(d \log l)$ [4]. Теоретически колмогоровская сложность произвольного класса вычислимых функций может быть равной его ёмкости d , в силу чего, с учетом перечислимости колмогоровской сложности сверху, возможно сжатие информации о таком классе до строки длины d .

В работе [24] схема компрессии размера k уточняется следующим образом. Функция сжатия K ставит в соответствие каждой обучающей выборке X_l длины l единственную её подвыборку $V = V(X_l)$ длины k , называемую *ядром сжатия*. Функция K в схеме k -сжатия полагается зафиксированной. Функция реконструкции $\varphi = \varphi(V, \tilde{x})$ тоже зафиксирована и ставит в соответствие паре ядро-точка значение 1 или 0. Таким образом определяется решающее правило и некоторый концепт $c_V = c_\varphi(K, \varphi, \tilde{x})$. Этот концепт c_V , вообще говоря, может не принадлежать классу концептов C . Но для любого целевого концепта семейства C и для любой заданной выборки длины l функция реконструкции согласована со всеми точками этой выборки.

Ядерным размером называется минимальная мощность ядра сжатия по всем возможным схемам сжатия (варьируются функции сжатия, реконструкции и выборки длины l).

Если зафиксировать любую схему компрессии с ядерным размером k и использовать определяемую ею функцию реконструкции φ^* , то в соответствии с данными выше определениями, применение этой функции к произвольным точкам признакового пространства, вообще говоря, может давать ошибки. Нужно убедиться, что использование функции φ^* обеспечивает обучаемость.

Характеризация сжатия ядерным размером позволяет считать произвольным признаковое пространство, поскольку речь идёт о числе примеров в ядре, а не о битовой строке, кодирующей сложность.

Будем полагать, что концепты класса C и функция реконструкции измеримы по Борелю. Из этого следует измеримость множеств, определённых ниже при доказательстве теоремы, и правомочность использования теоремы Фубини.

Теорема 25. [24]. *Для любой схемы компрессии с ядерным размером k при длине выборки $l > k$, ошибка Err функции реконструкции как решающего правила, определяющего принадлежность произвольной точки x целевому концепту G , может быть оценена неравенством*

$$P(Err > \varepsilon) < C_l^k (1 - \varepsilon)^{l-k}.$$

Доказательство. Пусть \mathbf{X}^l — множество любых выборок длины l ; $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l) = X_l$ — произвольная выборка длины l из \mathbf{X}^l ; P^l — вероятностная мера на множестве \mathbf{X}^l выборок длины l (по этой мере оценивается вероятность события $Err > \varepsilon$). Будем обозначать A^* — ядро сжатия произвольной схемы компрессии с ядерным размером k ; $\varphi^*(A^*, \tilde{x})$ — результат применения функции реконструкции φ^* , определяющий, возможно с ошибкой, принадлежность точки \tilde{x} концепту c ; $c(\tilde{x})$ — истинное значение

этой принадлежности. Обозначим $E = \{X_l \in \mathbf{X}_l : \mathbf{Pr}(\tilde{x} \in X_l \wedge \varphi^*(A^*, \tilde{x}) \neq c(\tilde{x})) > \varepsilon\}$ — множество всевозможных выборок длины l , точки которых классифицируются функцией φ^* с вероятностью ошибки, превышающей ε . Эквивалентное определение — $E = \{X_l \in \mathbf{X}_l : \mathbf{Pr}(\tilde{x} \in X_l \wedge \varphi^*(A^*, \tilde{x}) = c(\tilde{x})) < 1 - \varepsilon\}$.

Пусть T — множество всех C_l^k подпоследовательностей номеров любых k точек выборки; $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_k) \in T$. Набор \tilde{t} определяет подпоследовательность выборки $\tilde{x}_{t_1}, \dots, \tilde{x}_{t_k}$. Введём следующие обозначения.

$A_{\tilde{t}}$ — множество всех выборок длины l , для которых по каждой выборке $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l$ функция сжатия K выделяет ядро, состоящее из точек $\tilde{x}_{t_1}, \dots, \tilde{x}_{t_k}$ этой выборки. Очевидно, $\bigcup_{\tilde{t} \in T} A_{\tilde{t}} = X_l$.

$E_{\tilde{t}} \subseteq A_{\tilde{t}}$ — такое подмножество выборок, на котором применение функции реконструкции φ^* даёт правильное решение с вероятностью, меньшей $1 - \varepsilon$. То есть, $E_{\tilde{t}}$ — это все выборки, для которых функция сжатия K выделяет ядро, состоящее из точек этих выборок с номерами t_1, \dots, t_k , а функция реконструкции даёт правильное решение с вероятностью, меньшей $1 - \varepsilon$.

По определению соответствующих подмножеств, $E_{\tilde{t}} = E \cap A_{\tilde{t}}$, откуда с учётом равенства $\bigcup_{\tilde{t} \in T} A_{\tilde{t}} = X_l$ следует $E = \bigcup_{\tilde{t} \in T} E_{\tilde{t}}$.

Обозначим далее:

$U_{\tilde{t}}$ — множество всех выборок длины l , для которых вероятность правильной классификации при помощи функции реконструкции φ^* с выделяемым функцией компрессии K ядром $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_k}\}$ ограничена величиной $1 - \varepsilon$. Тогда $E_{\tilde{t}} = U_{\tilde{t}} \cap A_{\tilde{t}}$.

$B_{\tilde{t}}$ — множество всех выборок длины l таких, что входящие в них точки с номерами вне множества $\{t_1, \dots, t_k\}$ правильно классифицируются функцией реконструкции.

Если выборка принадлежит множеству $A_{\tilde{t}}$, то функция сжатия K выделяет из выборок этого множества ядро, состоящее из точек x_{t_1}, \dots, x_{t_k} этой выборки. По определению схемы компрессии, все остальные точки этой выборки с номерами вне множества $\{t_1, \dots, t_k\}$ должны классифицироваться правильно. Поэтому $A_{\tilde{t}} \subset B_{\tilde{t}}$. Вместе с равенством $E_{\tilde{t}} = U_{\tilde{t}} \cap A_{\tilde{t}}$ это даёт

$$P^l(E_{\tilde{t}}) = P^l(A_{\tilde{t}} \cap U_{\tilde{t}}) \leq P^l(B_{\tilde{t}} \cap U_{\tilde{t}}).$$

Пусть $\pi_{\tilde{t}}$ такая перестановка координат точек выборки $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_i, \dots, \tilde{x}_l$, что $t_i \mapsto i$, $i = 1, \dots, k$; $\pi_{\tilde{t}} : X_l \rightarrow X_l$. Тогда $\pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}})$ — множество всех выборок длины l , для которых вероятность правильной классификации входящих в них точек при помощи функции реконструкции φ^* с ядром $\{x_1, \dots, x_k\}$ ограничена величиной $1 - \varepsilon$. Перестановка вводится для удобства дальнейших рассуждений: без потери общности

применяется замена (переименование) $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_k}\} \mapsto \{x_1, \dots, x_k\}$.

$$P^l(E_{\tilde{t}}) \leq P^l(B_{\tilde{t}} \cap U_{\tilde{t}}) = P^l(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}}) \cap \pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}})).$$

$$P^l(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}}) \cap \pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}})) = \int_{\pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}})} I(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}})) dP^l,$$

где $I(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}}))$ — характеристическая функция множества $\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}})$, которая выделяет из всех выборок длины l такие выборки, что входящие в них точки с номерами вне множества $\{t_1, \dots, t_k\}$ правильно классифицируются функцией реконструкции, т. е. правильно классифицируются $l - k$ точек.

Интегрирование производится по множеству $\pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}})$ выборок таких, что вероятность правильной классификации входящих в них точек при помощи функции реконструкции φ^* с ядром $\{x_1, \dots, x_k\}$ ограничена величиной $1 - \varepsilon$.

Ядра компрессии извлекаются из выборок, поэтому существует некоторое множество $V_{\tilde{t}}$ ядер размера k такое, что $\pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}}) = V_{\tilde{t}} \times X^{l-k}$.

По теореме Фубини

$$\int_{\pi_{\tilde{t}}(U_{\tilde{t}})} I(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}})) dP^l = \int_{V_{\tilde{t}}} dP^k \int_{X^{l-k}} I(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}})) dP^{l-k}.$$

Обозначим W_{x_1, \dots, x_k} — множество точек выборки X_l , правильно классифицируемое функцией реконструкции φ^* с ядром x_1, \dots, x_k . Тогда

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_k) \times X^{l-k} \cap \pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}}) &= (x_1, \dots, x_k) \times W_{x_1, \dots, x_k}^{l-k}. \\ P^l(E_{\tilde{t}}) &< \int_{X^{l-k}} I(\pi_{\tilde{t}}(B_{\tilde{t}})) dP^{l-k} = \int_{W_{x_1, \dots, x_k}^{l-k}} dP^{l-k} < (1 - \varepsilon)^{l-k}. \\ P^l(E_{\tilde{t}}) &< (1 - \varepsilon)^{l-k}. \end{aligned}$$

Число различных подпоследовательностей длины k последовательности $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_l$ равно C_l^k . Поэтому

$$P^l(E) = P^l\left(\bigcup_{\tilde{t} \in T} E_{\tilde{t}}\right) < \sum_{\tilde{t} \in T} P^l(E_{\tilde{t}}) = |T|(1 - \varepsilon)^{l-k} = C_l^k(1 - \varepsilon)^{l-k}.$$

□

Теорема 26. [24]. Для любой схемы компрессии, имеющей ядерный размер k , (ε, δ) -обучаемость имеет место при длине выборки l , определяемой неравенством

$$l \geq \max\left\{\frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta}, \frac{2k}{\varepsilon} \ln \frac{4k}{\varepsilon} + 2k\right\}.$$

Доказательство. Преобразуем неравенство $C_l^k(1 - \varepsilon)^{l-k} < \delta$ (см. предыдущую теорему) в эквивалентное неравенство

$$l \geq \frac{\ln \frac{1}{\delta} + \ln C_l^k}{-\ln(1 - \varepsilon)} + k,$$

которое выполняется при условии $l \geq \frac{1}{\varepsilon}(\ln \frac{1}{\delta} + k \ln l) + k = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta} + k(\frac{1}{\varepsilon} \ln l + 1)$, поскольку $l^k > C_l^k$, и для малых ε выполняется: $-\ln(1 - \varepsilon) > \varepsilon$. В оценку входят два слагаемых. Поэтому неравенство будет иметь место, если одновременно каждое слагаемое будет не больше величины $l/2$, что приводит к системе из двух неравенств:

$$\begin{cases} \frac{l}{2} \geq \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta}, \\ \frac{l}{2} \geq k \left(\frac{1}{\varepsilon} \ln l + 1 \right). \end{cases} \quad (2)$$

Второе из этих двух неравенств путём подстановки в правую часть оценки для l можно преобразовать следующим образом:

$$l \geq 2k \left(\frac{1}{\varepsilon} \ln(2k(\frac{1}{\varepsilon} \ln l + 1)) + 1 \right); \quad l \geq 2k \left(\frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{4k}{\varepsilon} + 1 \right); \quad l \geq 2k \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{4k}{\varepsilon} + 2k.$$

Из полученной системы неравенств

$$\begin{cases} l \geq \frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta}, \\ l \geq \frac{2k}{\varepsilon} \ln \frac{4k}{\varepsilon} + 2k. \end{cases} \quad (3)$$

получается оценка

$$l \geq \max \left\{ \frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\delta}, \quad \frac{2k}{\varepsilon} \ln \frac{4k}{\varepsilon} + 2k \right\}.$$

□

Сравнивая эту оценку длины выборки, требуемой для обучаемости с параметром размера сжатия k , с аналогичной оценкой обучаемости Блумера и Литтлстоуна [14], полученной на основе размерности Вапника-Червоненкиса $d = VCD(\mathfrak{F})$ класса функций \mathfrak{F} , используемого для обучения, –

$$l \geq \max \left\{ \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{2}{\delta}, \quad \frac{8d}{\varepsilon} \ln \frac{8d}{\varepsilon} \right\},$$

можно заметить, что эти оценки достаточно близки.

Литтлстоном и Вармутом [24] также получены аналогичные результаты для схемы сжатия размера k с дополнительной информацией, обозначаемой Q – некоторым множеством, добавляемым отображением сжатия к ядру выборки. Это отображение ставит в соответствие любой выборке пару: множество Q и ядро размера k . Так что сжатие оценивается числом элементов в Q и размером ядра k .

Теорема 27. [24]. Для любой схемы компрессии с ядерным размером k и дополнительной информацией Q при длине выборки $l > k$, ошибка Err функции реконструкции как решающего правила, определяющего принадлежность произвольной точки \tilde{x} целевому концепту G , может быть оценена неравенством

$$P(Err > \varepsilon) < |Q|C_l^k(1 - \varepsilon)^{l-k}.$$

Если схему компрессии ослабить так, что классификация выборки, по которой найдено ядро, при помощи функции реконструкции допускает ошибку в $s < l - k$ её точках, то будет иметь место следующий результат:

Теорема 28. [24]. Для любой схемы компрессии с ядерным размером k , допускающей не более s ошибок при длине выборки $l > k$, ошибка Err функции реконструкции как решающего правила, определяющего принадлежность произвольной точки целевому концепту G , может быть оценена неравенством

$$P(Err > \varepsilon) < C_{k+s}^k C_l^k (1 - \varepsilon)^{l-k}.$$

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ НЕИЗВЕСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для понимания следующей теоремы нужно учесть, что полиномиальная (ε, δ) обучаемость является частным случаем (ε, δ) обучаемости и влечёт последнюю [5].

Теорема 29. [21, 22] Полиномиальная обучаемость над универсальным распределением \mathbf{m} имеет место тогда и только тогда, когда имеет место обучаемость над любым простым распределением P при условии, что выборка извлекается в соответствии с распределением \mathbf{m} .

Доказательство. Пусть P — любое простое распределение: найдется константа $c_P > 0$ такая, что $c_P \mathbf{m}(x) \geq P(x)$. Предположим, что имеет место обучаемость над распределением \mathbf{m} с ошибкой ε / c_P , и имеется соответствующий определению полиномиальной обучаемости алгоритм A полиномиальной сложности. Зафиксируем его. Пусть Err — множество объектов, на которых обученный концепт даёт ошибку. Тогда с вероятностью не меньшей $1 - \delta$ $\sum_{x \in Err} \mathbf{m}(x) \leq \varepsilon / c_P$ и $\sum_{x \in Err} P(x) \leq c_P \sum_{x \in Err} \mathbf{m}(x) \leq \varepsilon$.

Поскольку алгоритм A извлекает обучающую выборку всегда в соответствии с распределением \mathbf{m} , то его точное выполнение в условиях распределения P должно давать в качестве результата тот же самый концепт, определяющий множество Err . Следовательно, из полиномиальной обучаемости над универсальным распределением \mathbf{m} следует полиномиальная обучаемость над любым простым распределением P .

Пусть теперь имеет место полиномиальная обучаемость над любым простым распределением P , вероятность ошибки не больше ε , и обученный алгоритм даёт ошибку только на множестве Err . Но по условию теоремы, извлечение выборки происходит в соответствии с распределением \mathbf{m} , поэтому $\sum_{x \in Err} \mathbf{m}(x) \leq \varepsilon$, что доказывает полиномиальную обучаемость над \mathbf{m} . \square

Замечания, касающиеся теоремы. Параметр обучаемости ε/c_P требует знания константы $c_P = KP(P)$ – префиксной сложности неизвестного простого распределения P (см. ниже теорему об этом равенстве). При решении задач обучения приходится иметь дело с некоторыми подмножествами признакового пространства, и для таких подмножеств D использовать условные распределения $\mathbf{m}(\cdot|D)$. В связи с этим Ли и Витаньи получили более тонкий критерий обучаемости, который будет приведен ниже без доказательства.

Определение 15. [22]. Вероятностное распределение $P : S \rightarrow \mathbf{R}$, где $s = \mathbf{N} \cup u$, $\sum_{x \in \mathbf{N}} P(x) \leq 1$, $\sum_{x \in S} P(x) = 1$, u – некоторый неопределенный элемент, называется *перечислимым*, если множество точек $\{(x, y) : x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{Q}, P(x) > y\}$ рекурсивно перечислимо.

Определение 16. [22] Распределение P называется *простым*, если существует перечислимое распределение Q такое, что $\exists c : \forall x (cQ(x) \geq P(x))$, где $c \leq 2^{KP(Q)+O(1)}$ – константа. Говорят, что P доминируется перечислимым распределением Q .

Теорема 30. [21] Если распределение $P(x|y)$ перечислимо, то для всех допустимых x, y имеет место неравенство

$$2^{KP(P)} \mathbf{m}(x|y) \geq P(x|y).$$

Теорема 31. [22] Пусть H – класс концептов, $D \subseteq \mathbf{N}$ – выборочное пространство, $\mu = \min\{l(s(g)) : g \in G\}$ и c – константа. Класс H полиномиально обучаем над универсальным распределением \mathbf{m} тогда и только тогда, когда он полиномиально обучаем над любым простым распределением P таким, что существует перечислимое распределение Q , доминирующее P , которое удовлетворяет условию $KP(Q) \leq c \log \mu + O(1)$, и кроме этого, выполняется одно из следующих условий:

- (i) выборка извлекается согласно условному распределению $\mathbf{m}(\cdot|D)$;
- (ii) $KP(D) \leq c \log \mu + O(1)$ и выборка формируется так, что полиномиальное число примеров извлекаются в соответствии с безусловным распределением $\mathbf{m}(\cdot)$, причем степень полинома не превышает константы c .

6. БАЙЕСОВСКИЙ ПОДХОД К ОБУЧЕНИЮ И MDL

Правило Байеса определяет наиболее вероятную гипотезу h при заданном обучающем множестве D согласно соотношению

$$\Pr\{h|D\} = \frac{\Pr\{D|h\}\Pr\{h\}}{\Pr\{D\}},$$

которое может быть представлено в эквивалентной форме:

$$-\log \Pr\{h|D\} = -\log \Pr\{D|h\} - \log \Pr\{h\} + \log \Pr\{D\}.$$

Наиболее вероятная гипотеза h при заданном обучающем множестве D должна минимизировать $-\log \Pr\{h|D\}$. Поскольку $\Pr\{D\}$ не меняется при выборе гипотез, байесовское правило выбора гипотезы из семейства может быть представлено в виде:

$$h^* = \arg \min_{h \in H} (-\log \Pr\{D|h\} - \log \Pr\{h\}).$$

Использование универсального распределения приводит к соотношению

$$\hat{h}^* = \arg \min_{h \in H} (-\log \mathbf{m}\{D|h\} - \log \mathbf{m}\{h\})$$

и далее, с учетом соотношения $-\log \mathbf{m}(x) = KP(x) + O(1)$, к правилу

$$\hat{h}^* = \arg \min_{h \in H} (KP(D|h) + KP(h)).$$

Последнее соотношение является выражением принципа MDL (*Minimum Description Length*), который является одной из формализаций «бритвы Оккама»: *наилучшая гипотеза для данного набора данных та, которая минимизирует сумму длины описания кода гипотезы (также называемой моделью) и длины описания множества данных относительно этой гипотезы* [25].

Базирующаяся на строгом математическом обосновании, применении колмогоровской сложности и универсальной меры \mathbf{m} , уточнённая версия MDL называется *идеальным MDL*. Применение и обоснование идеального MDL проиллюстрировано выше на байесовской схеме выбора гипотезы [25]. Имеет место фундаментальное неравенство [26]:

$$KP(D|h) + KP(h) - \alpha(P, h) \leq -\log \Pr\{D|h\} - \log \Pr(h) \leq KP(D|h) + KP(h),$$

где $\alpha(P, h) = KP(P(D|h)) + KP(h)$. При малом значении $\alpha(P, h)$ левая и правая оценки становятся приблизительно равными друг другу, и тогда $KP(D|h) + KP(h) \approx -\log \Pr\{D|h\} - \log \Pr(h)$. Это рассуждение лежит в основе доказательства следующего утверждения.

Теорема 32. [26], с.359. Байесовское правило и идеальный MDL при извлечении решения из допустимого класса гипотез H выбирают одну и ту же гипотезу: $h^* = \hat{h}^*$ при условии, что величина $\alpha(P, h)$ является достаточно малой.

Таким образом, минимизация суммы $KP(D|h) + KP(h)$ обеспечивает выбор гипотезы \hat{h}^* в соответствии с правилом Байеса, которое, как известно, является оптимальным: обеспечивает минимум среднего риска.

Казалось бы, если правило Байеса является оптимальным, то его и нужно применять, не изобретая новых способов выбора решений. Но непосредственное использование байесовского правила требует знания априорных распределений вероятностей, а они, как правило, неизвестны: в задачах машинного обучения в качестве начальной информации представляется обучающая выборка, по которой приходится аппроксимировать неизвестные распределения. Идеальный MDL позволяет *обойтись без информации об истинных априорных распределениях*. Но возникают другие трудности: и префиксная сложность $KP(x)$, и универсальное распределение $\mathbf{m}(x) = 2^{-KP(x)-O(1)}$ не являются вычислимыми. Поэтому нужно рассчитывать на *использование вычислимых оценок колмогоровской сложности*.

Рассмотрим условную сложность $KP(D|h)$, входящую в минимизируемую сумму $KP(D|h) + KP(h)$. По определению префиксной колмогоровской сложности, $KP(D|h) = \min\{l(p) : U(p, h) = D\}$ для некоторого оптимального декомпрессора U . Здесь декомпрессор U – префиксная машина Тьюринга, которая принимает вход в виде пары строк (p – сжатого описания и h – применяемой гипотезы) и в результате выдает описание обучающей информации в виде строки D . Если $KP(D|h) = 0$, то $U(\lambda, h) = D$, где λ – пустое слово. В таком случае будем говорить, что гипотеза h полностью описывает данные D . Действительно, декомпрессор U точно восстанавливает данные D , используя при этом в качестве входа только описание гипотезы h . В противном случае будем использовать запись $KP(D|h) = KP(D \setminus \hat{D})$, где \hat{D} – часть обучающих данных, которые правильно описываются гипотезой h . Обозначим $D \setminus \hat{D} = \bar{D}(h)$ – выделенную подпоследовательность последовательности-строки D и будем говорить, что $\bar{D}(h)$ – неописанный гипотезой h остаток данных. Тогда принцип MDL принимает эквивалентный вид

$$\hat{h}^* = \arg \min_{h \in H} (KP\{\bar{D}(h)\} + KP\{h\})$$

и формулируется так: *наилучшая гипотеза для данного набора данных та, которая минимизирует сумму длины описания кода гипотезы (также называемой моделью) и длины описания множества данных, не описываемых (не объясняемых) этой гипотезой*.

Для согласованных с данными D гипотез это правило будет выглядеть так:

$$\hat{h}^* = \arg \min_{h \in H_c(D)} KP\{h\},$$

где $H_c(D)$ – класс гипотез, согласованных с данными D .

Обучающая выборка D является совокупностью примеров $(\tilde{x}_j, \alpha_j)_{j=1}^l$. Будем использовать для отдельного примера выборки обозначение $ex_j = (\tilde{x}_j, \alpha_j)$. Тогда $D = \bigcup_{j=1}^l ex_j$. Будем считать независимыми вероятности $\mathbf{Pr}\{ex_j|h\}$ и полагать, что

$$\Pr\{D|h\} = \mathbf{Pr}\{ex_1|h\} \dots \mathbf{Pr}\{ex_j|h\} \dots \mathbf{Pr}\{ex_l|h\}$$

Тогда по правилу Байеса наиболее вероятная гипотеза h при заданном обучающем множестве D определяется соотношениями

$$\mathbf{Pr}\{h|D\} = \frac{\mathbf{Pr}\{h\} \prod_{j=1}^l \mathbf{Pr}\{ex_j|h\}}{\mathbf{Pr}\{D\}},$$

$$-\log \mathbf{Pr}\{h|D\} = -\log \mathbf{Pr}\{h\} - \sum_{j=1}^l \log \mathbf{Pr}\{ex_j|h\} + \log \mathbf{Pr}\{D\}.$$

Байесовское правило выбора гипотезы может быть представлено в виде:

$$h^* = \arg \min_{h \in H} (-\log \mathbf{Pr}\{h\} - \sum_{j=1}^l \log \mathbf{Pr}\{ex_j|h\}).$$

Переходя к универсальному распределению и далее – к префиксной сложности, получаем

$$\hat{h}^* = \arg \min_{h \in H} (-\log \mathbf{m}\{h\} - \sum_{j=1}^l \log \mathbf{m}\{ex_j|h\}),$$

$$\hat{h}^* = \arg \min_{h \in H} (KP(h) + \sum_{j=1}^l KP(ex_j|h)).$$

Напомним, что правило Байеса предполагает заданным обучающее множество D , которое можно представить как таблицу, содержащую l строк и $n + 1$ столбцов, где n – размерность признакового пространства.

Префиксная сложность гипотезы $KP(h)$ – это кратчайшее описание гипотезы h : кратчайшее двоичное слово p , позволяющее получить $\tilde{h} = U(p)$ при помощи некоторого декомпрессора U . По этому слову p при помощи алгоритма-декомпрессора U можно корректно восстановить гипотезу h по её описанию \tilde{h} с учетом того, что $Dom(h) \subseteq \mathbf{X}$, и h является функцией из множества \mathbf{X} в $\{0, 1\}$.

Оценим условную префиксную сложность $KP(ex_j|h)$ одного примера обучающей выборки. $KP(ex_j|h)$ — это наименьшая длина такой бинарной строки p , что найдётся декомпрессор U , который по двоичному слову p и представленной корректным описанием гипотезе h определяет строку, «описывающую» пример ex_j в следующем смысле. Слово p определяет соответствие между признаковым описанием примера \tilde{x}_j и значением целевой гипотезы α_j в обучающей таблице D при условии использования гипотезы h . Если $h(\tilde{x}_j) = \alpha_j$, то гипотеза h полностью описывает пример. В этом случае никакое слово p не требуется, и оно полагается пустым, т. е. $KP(ex_j|h) = 0$. В противном случае гипотеза h не описывает пример, но его описание может быть получено из заданной для обучения таблицы D . Для этого требуется указать декомпрессору в слове p номер нужной строки в таблице. Поскольку в таблице D имеется ровно l строк, для указания на нужную строку потребуется $\lceil \log l \rceil$ бит. Извлечение целевого значения α_j потребует задания размерности n , чтобы отделить это значение от описания признаков примера. Для этого потребуется $\lceil \log n \rceil$ бит. Применяя стандартный самоограничивающийся код, окончательно получаем: $KP(ex_j|h) = 0$, если гипотеза правильно описывает пример ex_j , и $KP(ex_j|h) \leq 2 \lceil \log \log n \rceil \lceil \log n \rceil \lceil \log l \rceil$, если пример ex_j противоречит гипотезе h . Объединяя эти случаи, получаем

$$KP(D|h) = \sum_{j=1}^l KP(ex_j|h) \leq \mathbf{k} (2 \lceil \log \log n \rceil \lceil \log n \rceil \lceil \log l \rceil),$$

где \mathbf{k} — число примеров из l , неправильно классифицируемых гипотезой h , или

$$KP(D|h) \leq \nu_{emp} \cdot l \cdot (2 \lceil \log \log n \rceil \lceil \log n \rceil \lceil \log l \rceil),$$

где ν_{emp} — эмпирическая частота ошибок гипотезы h на выборке D длины l . Учитывая, что согласно теореме Соломонова-Колмогорова сложность определяется лишь с точностью до аддитивной константы, условную префиксную сложность *данной обучающей выборки D при данной гипотезе h* можно приближенно оценить следующим образом:

$$KP(D|h) \approx \nu_{emp} l (2 \log \log n + \log(nl)).$$

ПРАВИЛО БАЙЕСА И ОПТИМАЛЬНАЯ ОСТАНОВКА ПРИ ОБУЧЕНИИ

Обучение отличается от настройки на обучающую выборку или её прямой аппроксимации тем, что предполагает организацию последовательного процесса усложнения решающего правила (гипотезы) с целью достижения его способности к эмпирическому обобщению. По отношению к самой выборке, способность к обобщению проявляется в том, что часть её примеров, не использованных на некотором

этапе обучения, правильно классифицируется сформированным на этом этапе решающим правилом. В этом смысле показательна обучающая процедура линейной коррекции Розенблатта-Новикова, в которой вектор коэффициентов решающего правила — линейного отделителя — корректируется только при ошибочной классификации очередного обучающего примера. Коррекция происходит путём использования этого примера — добавления его с регулирующим скоростью сходимости коэффициентом к вектору линейного отделителя.

Процесс обучения можно представить как последовательный подбор решающего правила, при котором его сложность постепенно увеличивается, а обобщающая способность оценивается на каждом шаге t . Обозначая решающее правило, полученное на шаге t , как h_t , получаем последовательность $h_0, h_1, \dots, h_t, \dots, h_s$, где s — номер шага остановки. При этом сложность пошагово синтезируемого решающего правила не убывает:

$$KP(h_0) \leq KP(h_1) \leq \dots \leq KP(h_t) \leq \dots \leq KP(h_s).$$

По мере обучения все большее число примеров классифицируется правильно, поэтому условная сложность $KP(D|h_t)$ не возрастает:

$$KP(D|h_0) \geq KP(D|h_1) \geq \dots \geq KP(D|h_t) \geq \dots \geq KP(D|h_s).$$

В соответствии с байесовским подходом, необходимо рассматривать последовательность суммарных сложностей $KP(D|h_t) + KP(h_t)$; и следует остановиться на том шаге t_{opt} , когда указанная суммарная сложность в процессе обучения перестанет убывать. Учитывая, что

$$KP(D|h_t) - KP(D|h_{t-1}) \leq 0, \quad \text{а} \quad KP(h_t) - KP(h_{t-1}) \geq 0,$$

условие остановки можно определить следующим образом:

$$t_{opt} = t : KP(h_t) - KP(h_{t-1}) - (KP(D|h_{t-1}) - KP(D|h_t)) \geq 0.$$

Проиллюстрируем этот подход на примере последовательного обучения для случая, когда решающее правило отыскивается в классе бинарных решающих деревьев (БРД). Процесс коррекции представляет собой увеличение числа внутренних вершин бинарного дерева на единицу, что влечёт увеличение числа решающих вершин-листьев μ также на единицу: $\mu_t = \mu_{t-1} + 1$. Используя $pVCD$ метод [4, 6, 7, 15], можно получить следующую оценку сложности БРД с μ листьями:

$$KS(h_\mu) < (\mu - 1) (\lceil \log(n + 1) \rceil + \lceil \log \mu \rceil).$$

Программирование слова p для декомпрессии любого БРД с μ листьями с целью получения оценки сложности $KS(h_\mu)$ основано на представлении каждой из $\mu - 1$ вершин ветвления словом-атомом, состоящим из двух частей (конкатенации префикса и окончания атома):

Код номера переменной или значение решающей функции (0 или 1)

Номер следующего атома в конкатенации или значение решающей функции (0 или 1)

Префикс атома может иметь $n + 1$ значение, если 0 и 1 резервируются для значений классифицирующей функции, а значениями $2, 3, \dots, n + 1$ кодируются номера признаков $1, 2, \dots, n$. Окончание атома может иметь μ значений: 0 и 1 резервируются как в префиксе. Остальные $\mu - 2$ значений соответствуют направленным рёбрам дерева, являющимися указателями на решающие вершины дерева (атомы списка). Указатель на одну (начальную вершину дерева) не требуется: нужны указатели только на $\mu - 2$ внутренних вершин. Всего получается μ значений для окончания атома.

Использование стандартного самоограничивающего кода позволяет получить оценку

$$KP(h_\mu) < 2(\lceil \log \log n \rceil + \lceil \log \log \mu \rceil) + (\mu - 1)(\lceil \log(n + 1) \rceil + \lceil \log \mu \rceil),$$

$$KP(h_\mu) \approx 2(\log \log n + \log \log \mu) + (\mu - 1)(\log(n + 1) + \log \mu).$$

Усложнение БРД при добавлении ровно одной условной вершины приводит к увеличению сложности $KP(h_\mu)$ на длину одного атома, приблизительно равную

$$\log(n + 1) + \log \mu.$$

Если при этом число ошибочно классифицируемых примеров выборки уменьшится на единицу, то сложность $KP(h_\mu)$ уменьшится на величину $\log l$. Оптимальная остановка ветвления (синтез БРД) определяется неравенством

$$\log(n + 1) + \log \mu > \log l,$$

позволяющим определить оптимальное число листьев синтезируемого дерева. При больших n для оценки наибольшего числа листьев μ , после достижения которого должна следовать остановка синтеза БРД, можно применять неравенство

$$\log(n\mu) > \log l.$$

Тогда условие остановки синтеза определяется соотношением $\mu > l/n$.

Так, если в обучающей выборке содержится $l = 300$ примеров, а число признаков $n = 20$, то увеличивать сложность БРД ради правильной классификации ещё только

одного примера не следует при $\mu > 15$. Но нужно учесть, что при увеличении эмпирической точности классификации (на одном шаге усложнения БРД) на два и более примера, это ограничение снимается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение математического аппарата теории колмогоровской алгоритмической сложности и случайности в машинном обучении позволило получить следующие важные результаты.

1. Удалось строго обосновать подход к синтезу решающих правил (гипотез), основанный на принципе их кратчайшего представления (описания).
2. Реализовать на основе теории универсального распределения байесовский подход к синтезу решающих правил, не требующий традиционной оценки вероятностных распределений.
3. Обосновать критерий останова процедуры синтеза решающего правила на основе оценивания минимума суммарной сложности (данных и самого правила).
4. Построить ряд моделей сжатия информации и получить для них оценки обучаемости, в частности, в РАС модели [5] и в (ε, δ) модели обучения.
5. Обнаружить связь между размерностью Вапника-Червоненкиса $VCD(\mathbf{Im}(A))$ подкласса гипотез $\mathbf{Im}(A)$, из которого извлекается решение алгоритмом обучения (алгоритмическим отображением) A , и минимальным возможным сжатием описания любой гипотезы из этого класса: $VCD(\mathbf{Im}(A))$ является оценкой сложности выбранной гипотезы снизу.

Направление дальнейших исследований связано с повышением точности выводов на основе префиксной колмогоровской сложности за счет улучшения качества её оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным / В. Н. Вапник. — М.: Наука, 1979. — 448 с.
2. Вапник В. Н. Теория распознавания образов / В. Н. Вапник, А. Я. Червоненкис. — М.: Наука, 1974. — 416 с.
3. Вьюгин В. В. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность / В. В. Вьюгин. — М.: МФТИ, 2012. — 131 с.
4. Донской В. И. Колмогоровская сложность классов общерекурсивных функций с ограниченной ёмкостью / В. И. Донской // Таврический вестник математики и информатики, 2005. — № 1. — С. 25–34.

5. Донской В. И. Машинное обучение и обучаемость: сравнительный обзор / В. И. Донской // Intellectual Archive. — 2012. — № 933 — 19 с.
<http://www.sciteclibrary.ru/texsts/rus/stat/st4820.pdf>
6. Донской В. И. Оценки ёмкости основных классов алгоритмов эмпирического обобщения, полученные рVCD методом / В. И. Донской // Ученые записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия „Физико-математические науки”, 2010. — Т. 23 (62). — № 2. — С. 56–65.
7. Донской В. И. Сложность семейств алгоритмов обучения и оценивание неслучайности извлечения эмпирических закономерностей / В. И. Донской // Кибернетика и системный анализ, 2012. — № 2. — С. 86–96.
8. Донской В. И. Эмпирическое обобщение и распознавание: классы задач, классы математических моделей и применимость теорий. Часть I; Часть II / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики, 2011. — № 1. — С. 15–26; — № 2. — С. 31–42.
9. Звонкин А. К. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов / А. К. Звонкин, Л. А. Левин // Успехи математических наук, 1970. — Т. 25:6 (156). — С. 85–127.
10. Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов // А. Н. Колмогоров. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
11. Мучник А. А. Гиперпростые множества, возникающие при вычислимой аппроксимации сверху префиксной сложности / А. А. Мучник, А. Л. Семенов. — М.: ВЦ РАН, Отделение кибернетики, 2002. — 9 с.
<http://alexander.shen.free.fr/muchnik/publications/hh-simple.pdf>
12. Успенский В. А. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность / В. А. Успенский, Н. К. Верецагин, А. Шень. — М.: МЦНМО, 2010. — 556 с.
13. Blumer A. Occam’s Razor / A. Blumer, A. Ehrenfeucht, D. Haussler, M. Warmuth // Information Processing Letters, 1987. — Vol. 24 (6). — P. 377–380.
14. Blumer A. Learning faster than promise by the Vapnik-Chervonenkis dimension / Anselm Blumer, Nick Littlestone // Discrete Applied Mathematics, 1989. — Vol. 24. — Iss. 1–3. — P. 47–63.
15. Donskoy V. I. The Estimations Based on the Kolmogorov Complexity and Machine Learning from Examples / V. I. Donskoy // Proceedings of the Fifth International Conference "Neural Networks and Artificial Intelligence" (ICNNAI’2008). — Minsk: INNS. — 2008. — P. 292–297.
16. Ehrenfeucht A. A general lower bound on the number of examples needed for learning / A. Ehrenfeucht, D. Haussler, M. Kearns, L. Valiant // Inform. Computations, 1989. — 82. — P. 247 — 261.
17. Floyd S. Sample Compression, learnability, and the Vapnik-Chervonenkis dimension / Sally Floyd, Manfred Warmuth // J. Machine Learning, 1995. — Vol. 21. — Iss. 3. — P. 269–304.
18. Gammernan A. Kolmogorov complexity: Sources, theory and applications / Alexander Gammernan, Vladimir Vovk // Computer Journal, 1999. — Vol. 42. — No. 4. — p. 252–255.
19. Hutter M. Algorithmic complexity // Scholarpedia. — 2008. — 3 (1):2573.
[http://www.scholarpedia.org/article/Algorithmic complexity.Prefix Turing machine](http://www.scholarpedia.org/article/Algorithmic%20complexity.Prefix%20Turing%20machine)
20. Li M. Sharpening Occam’s Razor / Ming Li, John Tromb, Paul M. B. Vitanyi. — Research Rep. CT-94-03. — Amsterdam: ILLC, 1994. — 13 p.
<http://www.illc.uva.nl/Research/Reports/CT-1994-03.text.pdf>

21. Li M. An introduction to Kolmogorov complexity and its applications / Ming Li, Paul M. B. Vitanyi. — New York: Springer-Verlag, 1997. — 637 p.
22. Li M. Learning Simple Concepts under Simple Distributions / Ming Li, Paul M. B. Vitanyi // SIAM J. Comput. — Vol. 20. — Iss. 5. — P. 911–935.
23. Li M. Theories of Learning / Ming Li, Paul M. B. Vitanyi // In Proc. Int. Conf. Of Young Computer Scientists. — Beijing, China. — 1993. — 8 P.
24. Littlestone L. Relating Data Compression and Learnability / Nick Littlestone, Manfred K. Warmuth. — Technical Report. — Santa-Cruz: University of California, 1986. — 13 p.
<http://users.soe.ucsc.edu/~manfred/pubs/T1.pdf>
25. Vitanyi P. Ideal MDL and Its Relation to Bayesianism Bayesianism / Paul M. B. Vitanyi, Ming Li // In Proc. ISIS: Information, Statistic and Induction in Science. — Singapore: World Scientific, 1996. — P. 282–291.
26. Vitanyi P. Minimum description length induction, Bayesianism, and Kolmogorov complexity / Paul M. B. Vitanyi, Ming Li // IEEE Transactions on Information Theory, 2000 — Vol. 46. — N2. — P. 446–464.

Статья поступила в редакцию 24.11.2012

NP-ТРУДНОСТЬ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

© Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук

ПОЛТАВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И ТОРГОВЛИ

ул. Ковалю, 3, г. Полтава, 36014, Украина

E-MAIL: yemetsli@mail.ru, olexijchuk@gmail.com

Abstract. In article is proposed the maximum flow problem with additional combinatorial restrictions. This problem is generalization of the classical maximum flow problem. In article NP-hard of a problem is proved.

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями и анализируется ее сложность.

Задача нахождения максимального потока хорошо известна [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] и является полиномиальной, для ее решения, в частности, используются методы Форда и Фалкерсона [1], Эдмондса и Карпа [4], Диница [5], Карзанова [6] и др. Рассматриваемая задача является обобщением задачи нахождения максимального потока и впервые была рассмотрена в [8]. Задачу можно свести к евклидовой комбинаторной задаче оптимизации на размещениях [9], для решения которой известны неполиномиальные алгоритмы. Поэтому вопрос о сложности задачи нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями является актуальным.

В работе доказана NP-трудность рассматриваемой задачи и NP-полнота в сильном смысле соответственной задачи распознавания.

1. ЗАДАЧИ ЕВКЛИДОВОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим основные понятия евклидовой комбинаторной оптимизации [9]. Под мультимножеством будем понимать совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Всякое мультимножество $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ можно представить его основой $S(G) = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, то есть кортежем всех его разных элементов, и первичной спецификацией $[G] = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, где η_i — кратность соответственного элемента основы e_i в мультимножестве. Множество $A_{\eta}^k(G)$, элементами которого являются разные упорядоченные наборы k элементов из мультимножества G , называют евклидовым комбинаторным множеством размещений.

Евклидовые комбинаторные множества допускают погружение в арифметическое евклидовое пространство, то есть рассмотрение элементов $A_{\eta}^k(G)$ как точек

k -мерного пространства [9]. Погруженное евклидово комбинаторное множество размещений обозначают $E_{\eta n}^k$.

Линейной задачей евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях называют [10, 9] следующую задачу: найти упорядоченную пару $\langle y^*, f(y^*) \rangle$,

$$f(y^*) = \max_{x \in E_{\eta n}^k} f(y); \quad y^* = \arg \max_{x \in E_{\eta n}^k} f(y), \quad (1)$$

где $y = (x_1, x_2, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $f(y)$ — линейная функция, при линейных ограничениях:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \leq a_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (2)$$

При $m = k$ задачу (2)-(3) называют полностью комбинаторной, при $m > k$ — частично комбинаторной.

Разработке методов решения задач комбинаторной оптимизации, исследованию свойств выпуклых оболочек комбинаторных множеств посвящено много работ (см., в частности, [9, 11, 10, 12]). Методы решения комбинаторных задач на размещениях предложены, например, в [10] и [12]; все они являются неполиномиальными. Заметим, что при $\eta = k$ множество размещений $E_{\eta n}^k$ является множеством перестановок.

2. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ КОМБИНАТОРНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Пусть дан ориентированный граф $\Gamma = (V, U)$, где V — множество вершин, U — множество дуг. Дугу, соединяющую вершины v_i и v_j , обозначим u_{ij} . Граф может иметь кратные дуги. В таком случае будем обозначать дуги $u_{ij(1)}, u_{ij(2)}, \dots, u_{ij(p)}$, где p — количество дуг, соединяющих вершины v_i и v_j .

Определение 1. [7] Транспортной сетью называют ориентированный граф $\Gamma = (V, U)$, в котором каждой из дуг $u_{ij(l)}$ присвоено неотрицательное число $b_{ij(l)} \geq 0$, которое называют пропускной способностью дуги. Хотя бы одна из вершин имеет только исходящие дуги. Такую вершину называют источником и обозначают v_s . Вершину, имеющую только входящие дуги, называют стоком и обозначают v_t .

Дальше будем рассматривать транспортные сети с одним источником и одним стоком. Все остальные вершины лежат на пути из v_s в v_t .

Определение 2. [7] Потокom называют функцию $w : U \rightarrow R$ со следующими свойствами:

1. Значение функции w на дуге $u_{ij(l)}$ не может превышать пропускную способность дуги, то есть $w(u_{ij(l)}) \leq b_{ij(l)}$.

2. Сохранение баланса во всех вершинах, кроме стока и источника, то есть $\sum_{u_{iz(l)} \in U} w(u_{iz(l)}) = \sum_{u_{zj(t)} \in U} w(u_{zj(t)}) \quad \forall z, z \neq s, z \neq t$.

Определение 3. Величиною потока $|w|$ будем называть сумму значений функции w по исходящим из источника дугам:

$$\sum_{u_{si(l)} \in U} w(u_{si(l)}) = |w|.$$

Величина потока $|w|$ также равна сумме значений функции w по входящим в сток дугам.

Задача нахождения максимального потока формулируется так: найти поток w , для которого величина потока $|w|$ является максимальной.

Потоком по дуге $u_{ij(l)}$ будем называть $w(u_{ij(l)})$.

Наложим дополнительные ограничения. Пусть поток по дугам $u_{ij(l)} \in U' \subseteq U$ может принимать значения, которые не превышают число $x_{ij(l)} = g_l \in G$, то есть $w(u_{ij(l)}) \leq x_{ij(l)}$, где $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$; причем вектор из $x_{ij(l)}$ является размещением элементов из G , то есть $x = (x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_kj_k}) \in E_{\eta n}^k(G)$. Будем называть данную задачу комбинаторной задачей нахождения максимального потока.

Рассмотрим математическую модель задачи. Пусть поток по дуге $u_{ij(l)}$, равен $y_{ij(l)}$, то есть $y_{ij(l)} = w(u_{ij(l)})$.

Задача состоит в отыскании максимального значения функции $f(y)$ и соответствующих значений $x_{ij(l)}$, $y_{ij(l)}$:

$$f(y) = \sum_{u_{jt(l)} \in U} y_{jt(l)} \rightarrow \max, \quad (3)$$

при выполнении следующих условий:

сохранение баланса в вершинах

$$\sum_{u_{iz(l)} \in U} y_{iz(l)} = \sum_{u_{zj(t)} \in U} y_{zj(t)}, \quad z \neq t, z \neq s, \quad (4)$$

ограничения на пропускную способность дуг

$$0 \leq y_{ij(l)} \leq b_{ij(l)} \quad \forall u_{ij(l)} \in U, \quad (5)$$

дополнительные комбинаторные ограничения

$$y_{ij(l)} \leq x_{ij(l)} \quad \forall u_{ij(l)} \in U, \quad (6)$$

$$x = (x_{i_1j_1}, x_{i_2j_2}, \dots, x_{i_kj_k}) \in E_{\eta n}^k(G). \quad (7)$$

Задача (4)-(8) является частным случаем линейной задачи евклидовой частично комбинаторной оптимизации на размещениях (2)-(3).

Пример 1. Система трубопроводов задана графом (рис. 1). Каждая из труб (дуга графа) имеет ограниченную пропускную способность (число возле дуги). На каждой из труб необходимо построить насосную станцию. В распоряжение имеются материалы для создания шести насосных станций с пропускной способностью 4, 4, 5, 5, 7, 7 единиц соответственно. Задача состоит в том, что бы найти такое размещение насосных станций, которое позволит максимизировать величину потока из V_s в V_t , и найти этот максимальный поток.

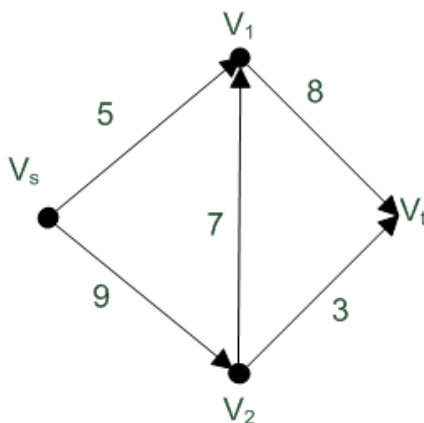


Рис. 1. Транспортная сеть

Построим математическую модель задачи:

$$f(y) = y_{1t} + y_{2t} \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} y_{s1} + y_{21} &= y_{1t}, \\ y_{s2} &= y_{21} + y_{2t}, \\ 0 &\leq y_{s1} \leq 5, \\ 0 &\leq y_{s2} \leq 9, \\ 0 &\leq y_{21} \leq 7, \\ 0 &\leq y_{1t} \leq 8, \\ 0 &\leq y_{2t} \leq 3, \end{aligned}$$

$$y_{s1} \leq x_{s1}, y_{s2} \leq x_{s2}, y_{21} \leq x_{21}, y_{1t} \leq x_{1t}, y_{2t} \leq x_{2t},$$

где $x = (x_{s1}, x_{s2}, x_{21}, x_{1t}, x_{2t}) \in E_{63}^5(G)$, $G = \{4^2, 5^2, 7^2\}$.

Отметим, что задача (4)–(6) при отсутствии кратных дуг является моделью классической задачи нахождения максимального потока. В случае кратных дуг, их можно заменить одной, при этом пропускная способность будет равна $b_{ij} = \sum_{l=1}^p b_{ij(l)}$.

Аналогично можно наложить комбинаторные ограничения и на другие потоковые задачи. Присвоим каждой дуге $u_{ij(l)}$ стоимость пересылки единицы потока $c_{ij(l)}$ и рассмотрим задачу нахождения потока минимальной стоимости, величина которого не меньше заданного числа W , $W > 0$. Тогда целевой функцией будет

$$f(y) = \sum_{u_{ij(l)} \in U} c_{ij(l)} y_{ij(l)} \rightarrow \min, \quad (8)$$

ограничение на величину потока:

$$f(y) = \sum_{u_{ij(l)} \in U} y_{ij(l)} \geq W, W > 0. \quad (9)$$

В [13] рассматривается задача оптимального размещения производства, моделью которой является задача (5)–(10).

В [14] рассматривается комбинаторная транспортная задача на перестановках. Отличие от классической транспортной задачи в том, что вектор количеств перевезенных ресурсов может быть только перестановкой или размещением элементов из некоторого мультимножества G . С помощью ввода фиктивных источника и стока, которые соединены со всеми пунктами отправления и потребления соответственно, задача может быть сведена к задаче нахождения потока заданной величины минимальной стоимости.

Задача (5)–(10) является обобщением задачи нахождения потока минимальной стоимости [2].

3. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ

Перейдем от задачи оптимизации к задаче распознавания [15], заменив условие (4) следующим: найти значения функции $f(y)$ и соответственных значений $x_{ij(l)}$, $y_{ij(l)}$, для которых выполняется условие (10).

То есть, задача состоит в том, чтобы отыскать поток не меньше указанной величины.

Напомним вспомогательную NP-полную в сильном смысле задачу «3-разбиение» [15].

Задача 3-разбиение. Условие. Заданы множество A , состоящее из $3m$ элементов, граница $B \in Z^+$ и «размеры» $s(a) \in Z^+$ всех элементов $a \in A$, причем $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$ и $\sum_{a \in A} s(a) = mB$.

Вопрос. Можно ли A так разбить на m непересекающихся подмножеств S_1, S_2, \dots, S_m , что для $1 \leq i \leq m$ выполняется $\sum_{a \in S_i} s(a) = B$.

Теорема 1. Задача (10), (5)–(8) нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-полной в сильном смысле.

Доказательство. Задача, очевидно, принадлежит классу NP.

Рассмотрим частный случай задачи. Пусть транспортная сеть задана графом следующей структуры (рис. 2): имеется $m + 1$ вершина (учитывая источник и сток), поочередно соединена дугами кратности 3 (всего $3m$ дуг).

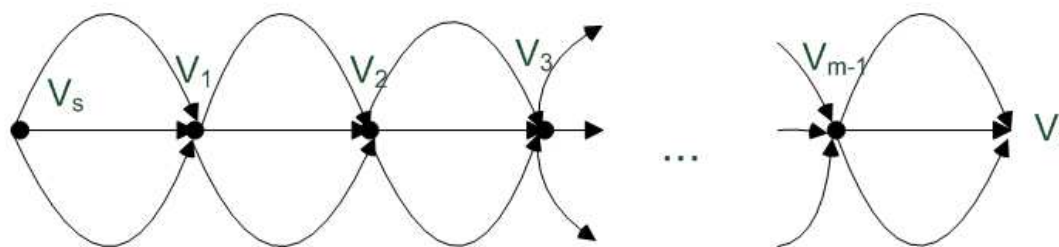


Рис. 2. Структура графа

Пусть пропускная способность каждой из дуг неограниченна, $b_{ij(l)} = \infty$ (или достаточно взять $b_{ij(l)} \geq \max(s(a)), \forall i, j, l$), то есть в задаче будут учитываться только дополнительные комбинаторные ограничения. А мультимножество $G = \{s(a_1), s(a_2), \dots, s(a_{3m})\}$, причем $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$. Таким образом, на значение потока по каждой из дуг будет наложено ограничение $w(u_{ij(k)}) \leq x_{ij(l)}$, причем вектор $x = (x_{s1(1)}, x_{s1(2)}, \dots, x_{ij(k)}, \dots, x_{m-1,t(3)}) \in E_{3m}(G)$, где $E_{3m}(G)$ — множество перестановок из $3m$ элементов [9] (частный случай множества размещений при $k = \eta$). Пусть нужно найти поток, величина которого не меньше $W = B$.

Величина потока не может превышать пропускную способность минимального разреза [1]. Граф имеет m разных разрезов. Очевидно, что максимальное значение мощности минимального разреза достигается в случае равенности мощностей всех разрезов и равно $\frac{mB}{m} = B$. То есть максимальное значение величины потока не может превышать B .

Если решение задачи будет найдено, то легко получить решение задачи 3-разбиение. Тогда $S_1 = \{x_{s1(1)}, x_{s1(2)}, x_{s1(3)}\}$, $S_2 = \{x_{12(1)}, x_{12(2)}, x_{12(3)}\}$, \dots , $S_i = \{x_{i-1,i(1)}, x_{i-1,i(2)}, x_{i-1,i(3)}\}$, \dots , $S_m = \{x_{m-1,t(1)}, x_{m-1,t(2)}, x_{m-1,t(3)}\}$. Не трудно

убедиться, что сведение задачи 3-разбиение к рассматриваемой задаче осуществляется за полиномиальное время.

Таким образом, задача нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-полной.

NP-полнота задачи в сильном смысле следует из того, что NP-полная в сильном смысле задача 3-разбиение была сведена к частному случаю задачи: с ограниченными числовыми значениями и графом особой структуры. \square

Замечание 1. Условие допустимости кратных дуг, которое использовалось при доказательстве, на самом деле не является обязательным. Каждую из дуг графа (рис. 2) можно разбить новой вершиной на две. В результате получим граф с $4m+1$ вершиной и $6m$ дугами (рис. 3). Дополнительные комбинаторные условия следует наложить в каждой паре на одну из двух полученных дуг. Все остальные рассуждения остаются без изменений.

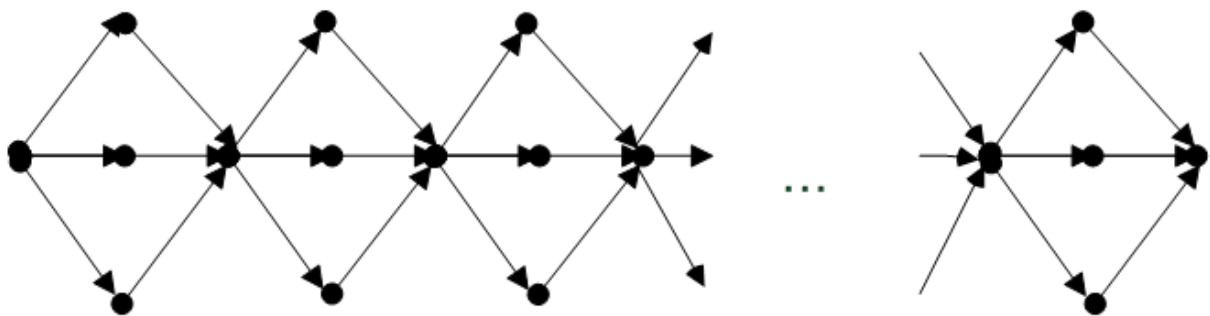


Рис. 3. Структура графа без кратных дуг

Следствие 1. Задача (4)–(8) нахождения потока максимальной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-трудной.

Доказательство. Решив оптимизационную задачу, можно получить решение задачи распознавания. Если величина максимального потока не меньше W , то это решение и будет решением задачи нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными ограничениями; иначе задача не имеет решения.

Таким образом, оптимизационная задача не проще задачи распознавания. Из этого можно сделать вывод, что задача нахождения потока максимальной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-трудной. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача нахождения потока максимальной величины с дополнительными комбинаторными условиями. Доказана NP-трудность задачи и NP-полнота в сильном смысле задачи нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными условиями. Сложность задачи подтверждает применимость методов решения ее, как задачи комбинаторной оптимизации на размещениях. Актуальной остается задача выделения полиномиальных случаев и разработка соответствующих методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Форд Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. — М.: Мир, 1966. — 277 с.
2. Ху Т. Ч. Комбинаторные алгоритмы / Т. Ч. Ху, М. Т. Шинг. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, 2004. — 330 с.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. — М.: «Мир», 1974. — 519 с.
4. Edmonds J. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems / Edmonds J., Karp R. M. // J. ACM. — 1972. — Vol. 19, №2. — P. 248–264.
5. Диниц Е. А. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой / У. А. Диниц // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 194, №4. — С. 754–757.
6. Карзанов А. А. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков / А. А. Карзанов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т.215, №1. — С. 49–53.
7. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 1296 с.
8. Ємець О. О. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — №1. — С. 43–50.
9. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К.: ІСДО, 1993. — 188 с.
<http://dSPACE.UCCU.ORG.UA/handle/123456789/487>
10. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
<http://dSPACE.UCCU.ORG.UA/handle/123456789/473>
11. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
<http://dSPACE.UCCU.ORG.UA/handle/123456789/376>

12. Ємець О. О. Прямий метод відсікання для задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2011, №1. — С. 36–43.
13. Ємець О. О. Задача оптимального розміщення виробництва / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Інформатика та системні науки (ІСН-2012): Матеріали ІІІ Всеукраїн. наук.-практ. конф. (1-3 березня 2012, Полтава). — Полтава: РВВ ПУЕТ. — С. 80–83.
14. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Кибернетика и систем. анализ. — 2010. — №6. — С. 106–112.
15. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон — М.: Мир, 1982. — 416 с.

Статья поступила в редакцию 10.11.2012

О СПОСОБАХ ПОСТРОЕНИЯ И ИСПОЛЬЗОВАНИИ КОМПОНЕНТНОЙ СЕТИ ПЕТРИ С ИНГИБИТОРНЫМИ ДУГАМИ ДЛЯ АНАЛИЗА ЕЕ ИСХОДНОЙ ДЕТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПЕТРИ

© Е. А. Лукьянова

КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Т. Г. ШЕВЧЕНКО,

г. КИЕВ

E-MAIL: lukyanovaea@mail.ru

Abstract. The algorithm of creation of a component Petri net with inhibitor arcs (CN_I -nets) is resulted. Possible methods of creation CN_I -nets are considered on examples. An established fact of usage of the component analysis of CN_I -nets for research of properties of detailed model of researched system.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование процессов и систем любой сложности эффективно проводить путем построения и изучения свойств их моделей. С самого начала для выполнения такого подхода необходимо построить качественную модель исследуемой системы. Такой моделью может быть избрана компонентная модель Петри (CN -сеть) [1], [2], являющаяся оптимальным расширением сетей Петри для построения моделей систем с параллелизмом, характеризующихся большим количеством взаимодействующих процессов и их значительной размерностью. Построение компонентной сети Петри позволяет перейти от исходной детальной модели к упрощенному описанию, гарантирующему надёжность выводов о свойствах детальной модели исследуемой системы [3] и получить важную информацию о структуре и динамическом поведении моделируемой системы.

Применение ингибиторных дуг при моделировании систем сетями Петри, предложенное в [4, 5] и рассмотренное в [6], позволило отмечать срабатыванием перехода факт изменения разметки с ненулевой на нулевую, что обеспечило возможность проверки места сети на отсутствие фишки. Такие сети называются ингибиторными сетями. Ингибиторная сеть представляет собой сеть Петри, дополненную специальной функцией инцидентности $F_I : P \times T \rightarrow \{0, 1\}$, которая вводит ингибиторные дуги для тех пар (p, t) , для которых $F_I(p, t) = 1$. Переход t ингибиторной сети может сработать, если каждое его входное место p , соединённое с t дугой кратности $W(p, t)$, содержит не менее $W(p, t)$ фишек, а каждое входное место, соединённое с t ингибиторной дугой, имеет нулевую разметку.

Использование ингибиторных дуг при построении CN -модели может значительно сократить размеры модели системы за счёт использования самой ингибиторной дуги, как дуги-условия, и получения дополнительной возможности выделения составных компонент в CN -сети.

Целью данной работы является обоснование использования ингибиторных дуг при моделировании распределённых параллельных систем CN -сетями, описание этапов построения компонентной сети Петри с ингибиторными дугами, демонстрация на простых, но содержательных моделях, возможных способов построения компонентной сети Петри с ингибиторными дугами. Формулировка условий проверки свойств детальной модели Петри с помощью её более компактной модели — компонентной сети Петри с ингибиторными дугами (CN_I -сети).

1. ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПОНЕНТНОЙ СЕТИ ПЕТРИ С ИНГИБИТОРНЫМИ ДУГАМИ

Компонентная сеть Петри с ингибиторными дугами (CN_I -сеть) — ориентированный граф, описываемый множеством:

$$CN_I = (P, T, F, F_I, W, W_I, M_0),$$

где P — конечное множество мест, T — конечное множество переходов, понимаемые в терминах компонентных сетей Петри ($P = P_1 \cup P_2$, $T = T_1 \cup T_2$, где P_1 и T_1 соответственно конечные множества компонент-мест и компонент-переходов, P_2 и T_2 — соответственно конечные множества мест и переходов, понимаемые в обычном смысле мест и переходов сетей Петри, оставшиеся после выделения компонент-мест и компонент-переходов, $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ — отношение инцидентности между местами и переходами, $F_I = P \times T$ — отношение инцидентности между местами и переходами (множество дуг вида (p_i, t_j)), которые являются ингибиторными, $W : F \rightarrow N \setminus \{0\}$, $W_I : F_I \rightarrow 1$ — функции кратности дуг, M_0 — начальная разметка сети.

На основе отношений инцидентности F и F_I , функций кратности дуг W и W_I , для CN_I -сети введём функцию инцидентности $I : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow N$, которую определим следующим образом:

$$I(x, y) = \begin{cases} n, & \text{если } (x, y) \in F \wedge W(x, y) = n; \\ 0, & \text{если } (x, y) \in F_I, x \in P, y \in T \wedge W_I(x, y) = 1; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin F, (x, y) \notin F_I. \end{cases}$$

Функция $I(p_i, t_j)$ при наличии ингибиторной связи принимает значение 0, т.к. в этом случае срабатывание перехода происходит без движения фишек.

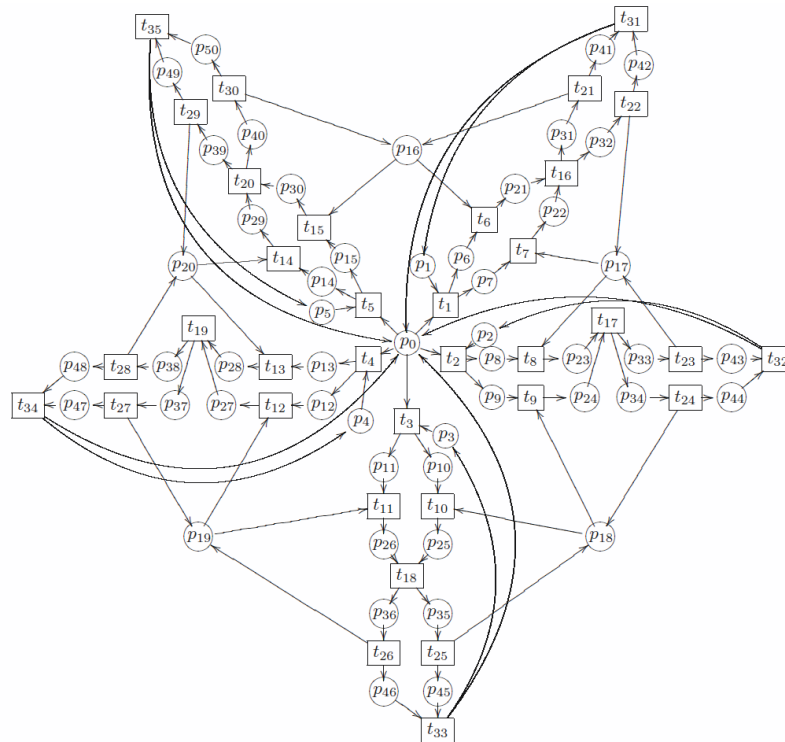


Рис. 1. Детальная модель Петри, моделирующая задачу о пяти философсах

Введение функции инцидентности позволяет задать CN_I -сеть с помощью её матрицы инцидентности $A = (a_{ij})$, целочисленные значения a_{ij} которой фиксируют изменения в CN_I -сети и вычисляются равенством: $a_{ij} = I(t_j, p_i) - I(p_i, t_j)$. При этом уравнение $A \cdot x = d$, где $d = M_k - M_0$, M_0, M_k — соответственно начальная и конечная разметки CN_I -сети, обеспечивает структурный анализ CN_I -сети [7].

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ CN_I -СЕТИ

Возможны следующие способы построения CN_I -сети: 1) от детальной (подробной) ингибиторной сети путем выделения составных компонент перейти к CN_I -сети; 2) от детальной (подробной) модели перейти к CN_I -сети через построение CN -сети.

Эффективность применения нужного способа построения CN_I -сети зависит от моделируемой задачи. Поэтому выбор способа построения CN_I -сети осуществляется ещё на этапе проектирования детальной модели. Проектируемая детальная модель исследуется на возможность использования условия проверки на 0 и выделения составных компонент (компонент-мест C_p и компонент-переходов C_t). Если оба условия в указанном порядке выполнимы и построение ингибиторной сети Петри значительно улучшает детальную модель (уменьшает её размеры), позволяя затем выделять

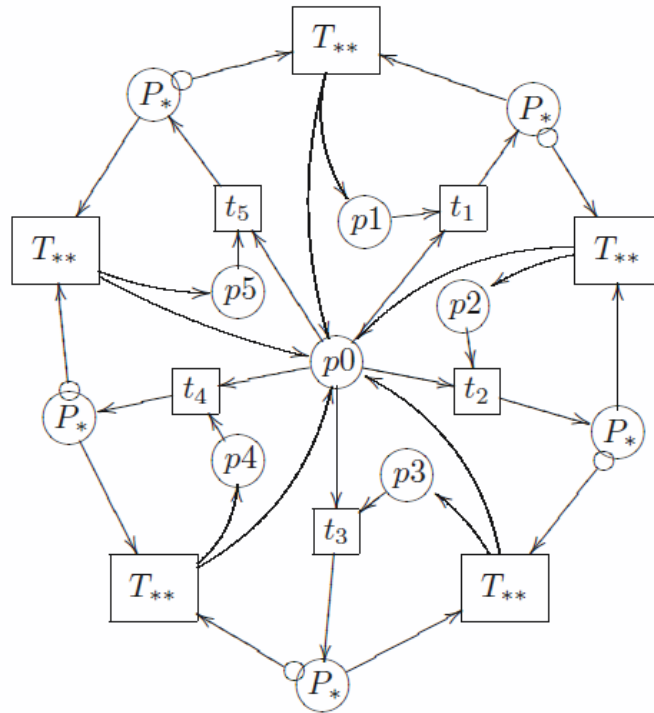


Рис. 3. CN_I -модель с составными компонентами P^* и T^{**} , показанными соответственно на Рис. 4, 5

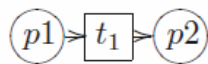


Рис. 4. CN_I -модель с составными компонентами P^* и T^{**} , показанными соответственно на Рис. 4, 5

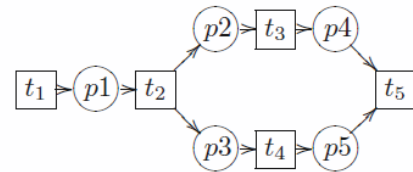


Рис. 5. Компонента-переход T^{**} в CN_I модели задачи о пяти философях с Рис. 3

философях в виде ингибиторной сети Петри. В этой сети условием проверки на 0 является условие взятия вилки левым соседом.

В полученной ингибиторной сети возможно выделение следующих составных компонент: пяти одинаковых компонент-мест P_* , представленных на Рис. 4 и пяти

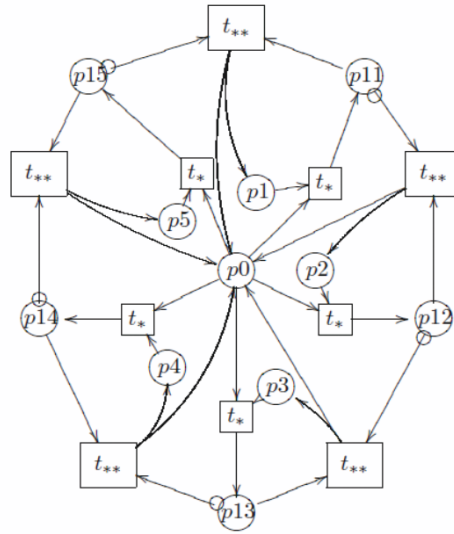


Рис. 6. CN_I -модель задачи о пяти философах с компонентами-переходами t^* и t^{**} (показанными соответственно на Рис. 7, 8)

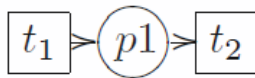


Рис. 7. Компонента-переход t^* в CN_I модели задачи о пяти философах с Рис. 6.

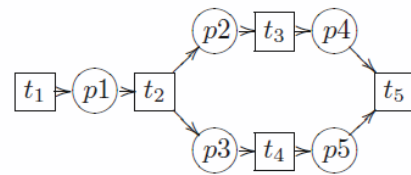


Рис. 8. Компонента-переход t^{**} в CN_I модели задачи о пяти философах с Рис. 6.

одинаковых компонент-переходов T_{**} , представленных на Рис. 5. Выделяя указанные компоненты в ингибиторной сети (Рис. 2) легко перейти к CN_I -модели задачи о пяти философах, которая показана на Рис. 3.

В рассматриваемой ингибиторной сети (Рис. 2) возможно выделение других составных компонент — пяти компонент-переходов t_* и пяти компонент-переходов t_{**} , показанных соответственно на Рис. 7, 8. При выделении компонент-переходов t_* и t_{**} ингибиторная сеть (Рис. 2) представляется CN_I -сетью, показанной на Рис. 6.

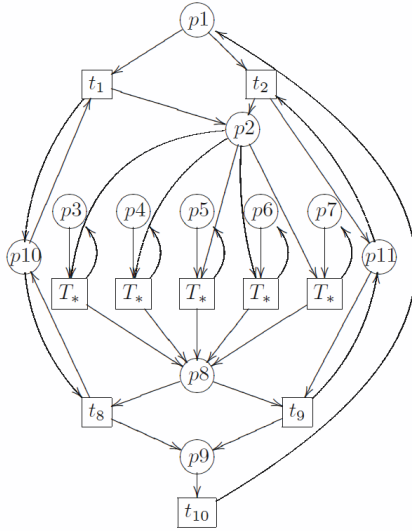


Рис. 9. CN -модель ЖДС

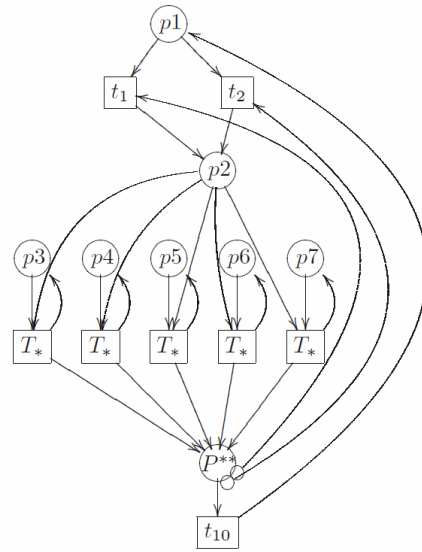


Рис. 10. CN_I -модель ЖДС

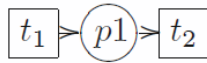


Рис. 11. Компонента-переход T^* в CN -модели ЖДС

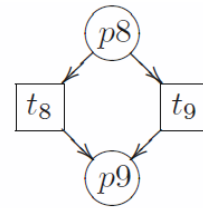


Рис. 12. Компонента-место P^* в CN_I -модели ЖДС

Второй способ конструирования CN_I -сети продемонстрируем при построении модели тупиковой железнодорожной станции (ЖДС) с двумя входными колеями и пятью внутренними путями. На рис. 9 показана CN -модель рассматриваемой ЖДС, в которой места p_1, p_8 — условия наличия поездов для входа и выхода со станции, места p_{10}, p_{11} — условия обеспечивающие исключение конкуренции для поездов на входе и выходе со станции, переходы t_1 и t_8 (t_2 и t_9) — события, отражающие вход и выход поездов со станции по одной из колеи. Рассматриваемая CN -модель получена из соответствующей модели Петри выделением пяти одинаковых компонент-переходов T_* (Рис. 11). Компонента T_* моделирует процесс прибытия и отправления поезда с i -го пути станции и вместе с местом p_i ($i = 3 - 7$) реализует в модели параллельные процессы системы — функционирование одной колеи ЖДС.

В представленной CN -модели ЖДС использование ингибиторных дуг возможно. Пусть ингибиторная дуга — дуга-условие обеспечивает условие приоритета на

выход поезда со станции (переходы t_1 и t_2 сработают при условии отсутствия фишек (поездов) в месте p_8), а значит не позволяет зайти на тушиковую станцию поездам пока есть хотя бы один поезд на выход. Тогда участок CN -модели ЖДС, показанный на Рис. 12, представится компонентой-местом P_{**} , а условия, определяемые в сети местами p_{10} и p_{11} , обеспечатся применением соответствующих ингибиторных дуг. Тем самым переход от CN -модели ЖДС к CN_I -модели ЖДС (Рис. 10) будет осуществлён.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ CN_I -МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ИСХОДНОЙ ДЕТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ПЕТРИ

Основные характеристики, устанавливаемые для исследуемой системы, отражаются структурными свойствами её модели Петри. Это живость, достижимость, ограниченность, непротиворечивость, повторяемость, консервативность. Так, для ингибиторной сети Петри, компонентная сеть которой CN_I -сеть, задача, установления структурных свойств, решается согласно подходу, предложенному в [1, 3] и имеет место утверждение.

Утверждение. *Наличие у ингибиторной сети Петри структурных свойств можно определить ограничившись только компонентным анализом её CN_I -сети.*

Доказательство данного утверждения основано на правилах и теоремах [1], [3], устанавливающих структурные свойства детальной модели с помощью анализа компонентной сети Петри и её C_p и C_t компонент. Тогда, инвариантность CN_I -сети, при соблюдении условия живости для C_t компонент и совместности систем линейных неоднородных диофантовых уравнений отвечающих C_p компонентам, есть достаточное условие инвариантности исходной ингибиторной сети Петри.

Более того, введение ингибиторных дуг, являющихся дугами-условиями, в модель системы (если это в модели возможно), не нарушает динамику модели, не изменяет параллельных последовательностей выполнений и вычислений, а представляет конструктивное улучшение сети. Так, используя фундаментальное уравнение сети [8] и технику TSS -алгоритма [9, 10], для моделей задачи о пяти философах (Рис. 1, Рис. 2, Рис. 3) найдём инварианты, соответствующие числу срабатывания переходов сети Петри, сохраняющих разметку. Это T -инварианты. По T -инвариантам устанавливаются такие структурные свойства сети, как, например, непротиворечивость, повторяемость, живость. Количество T -инвариантов для всех рассматриваемых моделей задачи о пяти философах равно пяти.

Таким образом, использование ингибиторных дуг позволяет получить более наглядные и компактные модели: ингибиторную сеть Петри для исходной детальной

модели или CN_I -сеть для CN -сети, которые являются адекватными моделями исходной исследуемой системы. Имеет место теорема.

Теорема 1. *Сеть Петри, являющаяся детальной моделью параллельной распределённой системы, инвариантна, если для её CN_I -модели выполняются следующие условия: CN_I -модель инвариантна, C_t компоненты живы, а системы линейных неоднородных диофантовых уравнений, отвечающие C_p компонентам совместны.*

ВЫВОДЫ

При анализе модели, основанного на матричных методах, использующих фундаментальное уравнение сети Петри, решение которого даёт сетевые инварианты, являющиеся мощным инструментом исследования структурных свойств сетей Петри, приходится сталкиваться со сложностью решения фундаментального уравнения. Сложность, которого в общем случае экспоненциальна. Это делает анализ модели практически неосуществимым.

Применение ингибиторных дуг в моделях систем с параллелизмом явилось эффективным инструментом, позволяющим получить модели меньших размеров, в результате возможного многократного использования ингибиторных дуг, обусловленного параллельностью протекающих в таких системах процессов. Поэтому, применение CN_I -сети в качестве модели системы позволяет значительно сократить модель системы, во-первых, за счёт использования ингибиторных дуг, во-вторых, в результате выделения составных компонент, которые в свою очередь могут быть дополнительно выделены или укрупнены благодаря применению ингибиторных дуг. При этом компонентный анализ CN_I -сети даёт достаточное условие для установления инвариантности исходной детальной модели, а предложенный алгоритм построения CN_I -сети предоставляет возможность построить CN_I -сеть для любой параллельной распределённой системы, если условие проверки на ноль для её возможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лукьянова Е. А. О компонентном анализе параллельных распределённых систем / Е. А. Лукьянова // ТВИМ, — 2011. — № 2. — С. 71-81.
2. Лукьянова Е. А. О структурных элементах компонентной сети Петри / Е. А. Лукьянова // Проблеми програмування, — 2012. — №2-3. — С. 25-32.
3. Лукьянова Е. А. Исследование однотипных структурных элементов CN -сети в процессе компонентного моделирования и анализа сложной системы с параллелизмом / Е. А. Лукьянова, А. В. Дереза // Кибернетика и системный анализ, 2012. — №6. — С. 20-29.
4. Agerwala T. A complete model for representing the coordination of asynchronous processes / T. Agerwala // In: Hopkins Computer Research. Report 32. Baltimore, — 1974.

5. Agerwala T. Comments on capabilities, limitations and “correctness” of Petri nets / T. Agerwala, M. Flynn // In: Proc. Of First Annual Symposium on Computer Architecture. New York. — 1973. — P. 81–86.
6. Котов В. Е. Сети Петри / В. Е. Котов. — М.: Наука, 1984.
7. Лук'янова О. О. Про прискорення обчислень знаходження структурних інваріантів при компонентному аналізу CN_I -мереж / О. О. Лук'янова // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. — 2012. — №2. — С. 155–160.
8. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения / Т. Мурата // ТИИЭР. — 1989. — т.77, №4. — С. 41–85.
9. Кривый С. Л. О некоторых методах решения и критериях совместности линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел / С. Л. Кривый // Кибернетика и системный анализ. — 1999. — №4. — С. 12–36.
10. Кривый С. Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях / С. Л. Кривый // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — №2. — С. 3–17.

Статья поступила в редакцию 01.12.2012

**ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ОЦІНКУ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ
СТАЦІОНАРНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ, ЯК РОЗВ'ЯЗОК
РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ**

© В. П. Марценюк, Н. М. Гандзюк

ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ МЕДИЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ І. Я. ГОРБАЧЕВСЬКОГО
КАФЕДРА МЕДИЧНОЇ ІНФОРМАТИКИ
ВУЛ. ЧЕХОВА, 3, М. ТЕРНОПІЛЬ, 46000, УКРАЇНА
E-MAIL: *gandzyuk@tdmu.edu.te.ua*

Abstract. This article describes definition of exponential estimation of linear stationary system with delay solution by functional Liapunova-Krasovskogo.

ВСТУП

Для розв'язку $x(t)$ асимптотично стійких лінійних стаціонарних систем диференціальних рівнянь без запізнення

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t), t \geq 0$$

з постійною матрицею A справедлива наступна двостороння нерівність Важевського [1, 2]

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} |x(0)| \exp \left\{ -\frac{\lambda_{\max}(C)t}{2\lambda_{\min}(H)} \right\} \leq |x(t)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x(0)| \exp \left\{ -\frac{\lambda_{\min}(C)t}{2\lambda_{\max}(H)} \right\} \quad (1)$$

Тут $|x(t)|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2(t)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ найбільші і найменші числа власних матриць, H — додатньо визначена матриця, що є розв'язком матричного рівняння Ляпунова

$$A^T(H) + HA = -C.$$

В роботах [3, 4, 6] отримано аналогічні оцінки для систем із запізненням. Розглядаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bx(t - \tau), t \geq 0 \\ x(t) = \varphi_{\text{поч}}(t), t \in [\sigma - \tau, 0]. \end{cases} \quad (2)$$

Матриці A і B — сталі, запізнення $\tau > 0$. Нехай власні значення матриці A мають від'ємні частини. В роботах [3, 4] дослідження проводилось за допомогою функцій Ляпунова квадратичного вигляду з використанням умови Разуміхіна. У роботі [6] дослідження проводилося за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського

квадратичного типу:

$$V(\varphi) = \varphi^T(0)H\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)G\varphi(\theta)d\theta, \quad (3)$$

де симетрична матриця H така, що: $H > 0$ і $A^T(H) + HA = -D < 0$. Зауважимо, що в роботі [6] оцінка була побудована на основі розв'язку скалярного диференціального рівняння із запізненням. Уданій роботі розглядається побудова експоненціальної оцінки на основі розв'язку значно практичнішої порівняно із [6] різницевої нерівності.

1. ОСНОВНА ТЕОРЕМА

Якщо G — додатньо визначена матриця, то можна вказати деякі додатні константи ν і κ , що:

$$\nu|\varphi(0)|^2 \leq V(\varphi) \leq \kappa|\varphi|^2. \quad (4)$$

$$\frac{dV(\varphi)}{dt} = -\varphi^T(0)D\varphi(0) + 2\varphi^T(0)HB\varphi(-\tau) + \varphi^T(0)G\varphi(0) - \varphi^T(-\tau)G\varphi(-\tau)$$

Тобто $\frac{dV(\varphi)}{dt}$ є квадратичною формою відносно $2n$ -вимірного вектору $(\varphi(0), \varphi(-\tau))$.

Введемо $2n \times 2n$ матрицю

$$\begin{bmatrix} D - G & (HB)^T \\ -HB & G \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Тоді можна записати $\frac{dV(\varphi)}{dt} = \frac{dV(\varphi(0), \varphi(-\tau))}{dt} = -(\varphi(0), \varphi(-\tau))C(\varphi(0), \varphi(-\tau))^T$. Потрібно вибрати матриці D, B, H, G так, щоб симетрична матриця C була додатно визначеною. Така задача при зроблених вище обмеженнях для D, H, G зводиться до знаходження оцінок для матриці B . Для випадку додатньо визначеної матриці C можна записати:

$$\frac{dV(\varphi)}{dt} \leq \lambda_{\min}(C)|\varphi(0), \varphi(-\tau)|^2, \quad (6)$$

де $|\varphi(0), \varphi(-\tau)|$ — евклідова норма вектора $(\varphi(0), \varphi(-\tau))$ у просторі E^{2n}

Теорема 1. Нехай система (2) і функціонал Ляпунова-Красовського (3) такі, що матриця C :

$C = \begin{bmatrix} D - G & (HB)^T \\ -HB & G \end{bmatrix}$ додатньо визначена. Тоді існують константи $\nu > 0$ і $N > 1$ такі, що:

$$V(\varphi) \leq V(\varphi_{\text{поч}})Ne^{-\nu(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \geq \sigma + 3\tau. \quad (7)$$

Тут сталі N і ν визначаються залежно від величини запізнення τ . Позначимо

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}{(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G))^{1/2}} \frac{\sqrt{c_0}}{\|A\| + \|B\|} = \tau_0(\tau) \quad (8)$$

Тоді у випадку, коли $\tau \leq \tau_0$, то

$$\nu = -\ln \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_{\min}(C)\tau}{4(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\min}(G))}} \right)}{2\tau}, \quad (9)$$

$$N = 1 + \frac{\lambda_{\min}(C)\tau}{4(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\min}(G))}.$$

Якщо $\tau > \tau_0$, то

$$\nu = -\frac{\ln c_0}{2\tau}, \quad N = \frac{1}{c_0}, \quad (10)$$

де $c_0(\tau) = c_0$ — додатній розв'язок рівняння

$$\frac{\lambda_{\min}(C)}{4(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G))^{3/2}(\|A\| + \|B\|)} c_0^{3/2} + c_0 - 1 = 0. \quad (11)$$

Зауваження 1. Функціонал $V(\varphi)$ для конкретного розв'язку $x(t)$ рівняння (2) є функцією моменту часу, яку позначатимемо $V[t]$. Отже нерівність (7) можна переписати у вигляді

$$V[t] \leq V[t_0]Ne^{-\nu(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \geq \sigma + 3\tau. \quad (12)$$

Лема 1. Для будь-якого $t \geq \sigma + \tau$ існує $s \in [t - \tau, t]$: що $|x(s)| \geq M(t)$, де

$$M(t) = \left(\frac{V[t]}{\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G)} \right)^{1/2}$$

Доведення. Припустимо протилежне. Тобто нехай існує момент $t \geq \sigma + \tau$, що для всіх $s \in [t - \tau, t]$

$$|x(s)| < \left(\frac{V[t]}{\lambda_{\max}(H) + \tau \lambda_{\max}(G)} \right)^{1/2}, \quad s \in [t - \tau, t].$$

Звідси випливає заперечення:

$$\begin{aligned} V[t] &= \varphi^T(0)H\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(\theta)G\varphi(\theta)d\theta \leq \lambda_{\max}(H)|\varphi(0)|^2 + \\ &+ \lambda_{\max}(G) \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^2 d\theta < \lambda_{\max}(H) \frac{V[t]}{\lambda_{\max}(H) + \tau \lambda_{\max}(G)} + \\ &+ \lambda_{\max}(G) \frac{V[t]}{\lambda_{\max}(H) + \tau \lambda_{\max}(G)} \tau = V[t]. \end{aligned}$$

□

Зауваження 2. Матриця C є додатньо визначеною тоді і тільки тоді, коли буде додатньо визначеною матриця Q [5].

Лема 2. Якщо $\frac{dV}{dt} \leq 0$ для всіх $t \geq 0$ то: $\left| \frac{dx}{dt} \right| \leq L(t)$, де $t \geq \sigma + \tau$ і $L(t) = (\|A\| + \|B\|) \left(\frac{V[t - \tau]}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1/2}$.

Доведення. Оскільки $\frac{dV}{dt} \leq 0$ для всіх $t \geq 0$ то $V[t] \leq V[t - \tau]$, $t \geq \sigma + \tau$. Із (3) випливає, що:

$$\lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 \leq V[t]\lambda_{\min}(H)|x(t - \tau)|^2 \leq V[t - \tau].$$

Тобто

$$|x(t)|^2 \leq \frac{V[t]}{\lambda_{\min}(H)} |x(t - \tau)|^2 \leq \frac{V[t - \tau]}{\lambda_{\min}(H)}.$$

Застосувавши ці відношення у систему (2) отримаємо:

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx}{dt} \right| &\leq \|A\||x(t)| + \|B\||x(t - \tau)| \leq \\ &\leq \|A\| \left(\left(\frac{V[t]}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1/2} + \|B\| \left(\frac{V[t - \tau]}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1/2} \right) \leq \frac{\|A\| + \|B\|}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}} (V[t - \tau])^{1/2}. \end{aligned}$$

□

Використавши леми 1 і 2, доведемо:

Лема 3. Для будь-якого $t \geq \sigma + 2\tau$ існує $s \in [t - \tau, t]$ таке, що відношення $|x(\omega)| \geq \frac{M(t)}{2}$ має місце для будь-якого $\omega \in I = \left[s - \frac{M(t)}{2L_1(t)}; s + \frac{M(t)}{2L_1(t)} \right] \cap [t - \tau, t]$, якщо $V[t - 2\tau] > 0$. Тут $M(t)$ як і в лемі 1, а $L_1(t) = (a + b) \left(\frac{V[t-2\tau]}{\lambda_{\min}(H)} \right)^{1/2}$.

Доведення. Знайдемо $s \in [t - \tau, t]$ таке як і в лемі 1, тоді $|x(s)| \geq M(t)$.

Запишемо тотожність

$$x(s) = x(\omega) - \int_s^\omega \frac{dx(u)}{dt} du. \tag{13}$$

Тоді використавши (13) отримаємо

$$M(t) \leq |x(s)| \leq |x(\omega)| + \left| \int_s^\omega \frac{dx(u)}{dt} du \right|. \tag{14}$$

Оскільки $L(t) \leq L_1(t)$ або $(L[t - \tau] \leq L_1[t - 2\tau])$, то із леми 2 $\frac{1}{dx} dt \leq L_1(t)$.

Тому продовжуючи (14):

$$M(t) \leq |x(\omega)| + L_1(t) \frac{M(t)}{2L_1(t)} = |x(\omega)| + \frac{M(t)}{2},$$

де $\omega \in I$. Звідси випливає що $|x(\omega)| \geq \frac{M(t)}{2}$. □

Введемо константи ρ, f, d

$$\rho = \frac{1}{(\lambda_{\min}(H) + \tau \lambda_{\max}(G))^{1/2} \|A\| + \|B\|} \sqrt{\lambda_{\min}(H)},$$

$$f = \frac{\lambda_{\min}(C)}{8(\lambda_{\max}(H) + \tau \lambda_{\max}(G))} \rho;$$

$$d = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{f}{\rho}}, & \tau \leq \tau_0 c_0, \tau < \tau_0, \end{cases}$$

де c_0 — додатній розв'язок рівняння $f c_0^{3/2} + c_0 - 1 = 0$ і $\tau_0 = \rho \sqrt{c_0}$. Використавши лему 3 доведемо:

Лема 4. Для будь-якого $t \geq \sigma + 3\tau$, $V[t] \leq V[t - 2\tau]d$.

Доведення. Якщо $V[t - 2\tau] = 0$ для деяких t , то в силу монотонного спадання $V[t] = 0$, і твердження справедливе для цього t . Якщо $V[t - 2\tau] > 0$ то доведення здійснимо методом від супротивного. Нехай для цього t , $V[t] > V[t - 2\tau]d$. Враховуючи цю нерівність, побудуємо оцінку для $\frac{M(t)}{L_1(t)}$:

$$\begin{aligned} \frac{M(t)}{L_1(t)} &= \left(\frac{V[t]}{V[t - 2\tau]} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}{(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G))^{1/2}(\|A\| + \|B\|)} > \\ &> \frac{1}{(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G))^{1/2}(\|A\| + \|B\|)} \sqrt{\lambda_{\min}(H)} d^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

Проінтегруємо нерівність (6) на проміжку $[t - \tau, t]$. Отримаємо

$$V[t] \leq V[t - \tau] - \lambda_{\min}(C) \int_{t-\tau}^t |x(\omega), x(\omega - \tau)|^2 d\omega =$$

$$= V[t - \tau] - \lambda_{\min}(C) \int_{t-\tau}^t |x(\omega)|^2 d\omega - \lambda_{\min}(C) \int_{t-2\tau}^{t-\tau} |x(\omega)|^2 d\omega.$$

Для оцінки інтегралів $\int_{t-\tau}^t |x(\omega)|^2 d\omega$ і $\int_{t-2\tau}^{t-\tau} |x(\omega)|^2 d\omega$ врахуємо лему 3, яка говорить, що для будь-якого $t \geq \sigma + 2\tau$ можна вибрати момент $s \in [t - \tau, t]$ такий, що $|x(\omega)| \geq \frac{M(t)}{2}$ при $\omega \in I \subset [t - \tau, t]$. Вибравши такий момент s і використавши вище записану нерівність, отримаємо:

$$\begin{aligned} V[t] &\leq V[t - \tau] - \lambda_{\min}(C) \left(\frac{M(t)}{2} \right)^2 \min \left(\frac{r}{2}, \frac{M(t)}{2L_1(t)} \right) - \\ &\quad - \lambda_{\min}(C) \left(\frac{M(t - \tau)}{2} \right)^2 \min \left(\frac{r}{2}, \frac{M(t - \tau)}{2L_1(t - \tau)} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Тут використано той факт, що довжина проміжку $I = I(s)$ буде завжди більшою за $\min \left(\frac{r}{2}, \frac{M(t)}{2L_1(t)} \right)$. Якщо ж використати оцінку (15), то вона завжди буде більшою за $\min \left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2} \right)$. Про функцію $M(t)$ можна сказати, що вона монотонно спадає (як і $V[t]$). Тому $M(t - \tau) \geq M(t)$. Отже можна переписати нерівність (16):

$$V[t] \leq V[t-\tau] - \lambda_{\min}(C) \left(\frac{M(t)}{2}\right)^2 \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) - \lambda_{\min}(C) \left(\frac{M(t)}{2}\right)^2 \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) = \\ V[t-\tau] - \lambda_{\min}(C) \frac{(M(t))^2}{4} \min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) \quad (17)$$

Далі розглянемо два випадки.

Нехай $\tau_0 < \tau$. Тоді справедлива нерівність $\frac{\rho\sqrt{d}}{2} = \frac{\rho\sqrt{c_0}}{2} = \frac{\tau_0}{2} < \frac{\tau}{2}$. Отже $\min\left(\frac{r}{2}, \frac{\rho\sqrt{d}}{2}\right) = \frac{\rho\sqrt{d}}{2} = \frac{\rho\sqrt{c_0}}{2}$. Враховуючи (17) отримаємо

$$V[t] \leq V[t-\tau] - \lambda_{\min}(C) \frac{1}{4} \frac{V[t]}{\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G)} \frac{\rho\sqrt{c_0}}{2} = \\ = V[t-\tau] - \frac{\lambda_{\min}(C)}{8(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G))} \rho\sqrt{c_0} V[t]. \quad (18)$$

Тобто $V[t] \leq V[t-\tau] - f\sqrt{c_0}V[t]$.

Звідси

$$V[t] \leq V[t-\tau] \frac{1}{1 + f c_0^{1/2}} = V[t-\tau] c_0, \quad (19)$$

оскільки $f c_0^{3/2} + c_0 - 1 \iff \frac{1}{1 + f c_0^{1/2}} = c_0$.

Нерівність (19) є запереченням нашого припущення про те, що $V[t] > V[t-2\tau]d$.

Нехай $\tau_0 \leq \tau$. Тоді справедливий ряд нерівностей

$$\tau \leq \tau_0 = \rho\sqrt{c_0} = \rho \frac{1}{\sqrt{1 + f c_0^{1/2}}} = \rho \frac{1}{\sqrt{1 + f \frac{\tau_0}{\rho}}} < \rho \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f}{\rho} \tau}} = \rho\sqrt{d}.$$

Тобто (19) можна записати наступним чином:

$$V[t] \leq V[t-\tau] - \lambda_{\min}(C) \left(\frac{M(t)}{2}\right)^2 \frac{r}{2} = V[t-\tau] - \lambda_{\min}(C) \frac{1}{4} \frac{V[t]}{\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G)} \frac{r}{2} = \\ = v[t-\tau] - \frac{\lambda_{\min}(C)}{8(\lambda_{\max}(H) + \tau\lambda_{\max}(G))} \tau V[t] = V[t-\tau] - \frac{f}{\rho} \tau V[t]. \quad (20)$$

З (19) випливає, що

$$V[t] \leq V[t - \tau] \frac{1}{1 + \frac{f}{\rho}\tau} = V[t - \tau]d. \quad (21)$$

Нерівність (20) є запереченням нашого припущення. Отже, в двох випадках $\tau \leq \tau_0$ і $\tau_0 < \tau$ ми прийшли до суперечності. Тобто припущення не вірне. □

Доведення теореми. Виберемо числа ν і N таким чином:

$$\nu = -\frac{\ln d}{2\tau}, N = \frac{1}{d}.$$

Нехай $t \geq t_0 \geq \sigma + 3\tau$ — будь-який момент часу і k — додатньо ціле або ж нуль таке, що:

$$t \in [t_0 + 2k\tau; t_0 + 2(k + 1)\tau]$$

Тоді використавши нерівність із леми 4, отримаємо:

$$\begin{aligned} V[t] &< V[t - 2\tau]d \leq V[t - 4\tau]d^2 \leq \dots \leq V[t - 2k\tau]d^k \leq \\ &\leq V[t_0] \frac{1}{d} d^{k+1} \leq V[t_0] N e^{-\nu 2\tau(k+1)} \leq V[t_0] N e^{-\nu(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (22)$$

Теорему доведено. □

ВИСНОВКИ

В даній статті отримано експоненціальну оцінку розв'язку лінійної стаціонарної системи із запізненням за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського. Оцінка, залежна від величини запізнення, шукається в результаті розв'язку різницевої нерівності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Валеев Б. Н. Построение функций Ляпунова / Б. Н. Валеев, А. П. Финин. — К.: Наукова думка, 1978.
2. Меркин Л. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Л. Р. Меркин. — М.: Наука, 1971.
3. Хусаинов Д. Я. Об одном методе построения функционалов Ляпунова-Красовского для линейных систем с запаздывающим аргументом / Д. Я. Хусаинов // Украинский математический журнал, Т.41, №3, 1989.
4. Хусаинов Д. Я. Оценки решений линейных систем с запаздыванием / Д. Я. Хусаинов // Сибирский математический журнал, Т.32, №5, 1991.
5. Хусаинов Д. Я. Оптимизационный метод исследования устойчивости линейных систем с запаздыванием / Д. Я. Хусаинов, В. П. Марценюк // Кибернетика и системный анализ, №4, 1996.
6. Хусаинов Д. Я. Двухсторонние оценки решений линейных систем с запаздыванием / Д. Я. Хусаинов, В. П. Марценюк // Доклады НАН Украины, №8, 1996.

Статья поступила в редакцию 23.04.2012

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ХІМІЧНОЇ СУФОЗІЇ НА ФІЛЬТРАЦІЙНУ КОНСОЛІДАЦІЮ ЗАСОЛЕНИХ ГРУНТІВ В ТРИВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

© О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВОДНОГО ГОСПОДАРСТВА ТА ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВаниХ СИСТЕМ
ВУЛ. СОВОРНА 11, М. РІВНЕ, 33028, УКРАЇНА
E-MAIL: *michuta@ukr.net*

Abstract. Mathematical model of consolidation of soil has been improved taking into account their salinity and chemical erosion. Numerical solution of the corresponding three-dimensional boundary value problem has been found by the radial basis functions method.

Вступ

Актуальність дослідження процесів фільтраційної консолідації ґрунтів, у зв'язку з розвитком будівельної галузі, не зменшується. Їх (процесів) класичні математичні моделі наведено в роботі [5]. Разом з цим при зростанні впливу техногенних факторів на ґрунтові основи цивільних та промислових об'єктів виникає необхідність в удосконаленні відповідних математичних моделей. Математичні моделі фільтраційної консолідації з урахуванням впливу тепло-масопереносу побудовано в роботах [2, 3]. Однак, явищ хімічної суфозії в цих роботах враховано не було.

Інтенсивний розвиток промисловості та енергетики призводить до забруднення ґрунтів і ґрунтових вод різними хімічними речовинами. З часом ці речовини розчиняють хімічні сполуки ґрунту і дані розчинені сполуки в процесі фільтрації виносяться з пористого середовища. Цей процес називається хімічною суфозією. Процес хімічної суфозії здійснює значний негативний вплив на міцнісні характеристики ґрунту, а це може призвести до деформації споруд і аварійних ситуацій внаслідок просідання ґрунту [7, 9]. Метою даної статті є вдосконалення математичної моделі консолідації ґрунтів з урахуванням їх засоленості. В даному випадку просідання ґрунту зумовлюється не лише розсіюванням надлишкових напорів в поровій рідині, але і розчиненням твердих частинок скелету ґрунту — хімічної суфозії. Цей факт також має відобразитись в побудованій математичній моделі.

Іншим важливим питанням є відшукання розв'язків відповідних крайових задач, якими описуються побудовані математичні моделі. В роботі [2] для відшукання чисельних розв'язків використано методи скінченних різниць та скінченних елементів.

Вони відносяться до класу так званих сіткових методів. Для їх застосування розрахункову область потрібно покрити геометричною сіткою – множиною вузлів із наперед визначеними взаємозв'язками між ними. Інколи із всіх ресурсів, затрачених на розв'язання задачі, 70% займає саме підзадача побудови геометричної сітки. Ще більше вказана проблема ускладнюється, якщо розглядати просторові задачі. В роботі [3] до даного класу задач запропоновано застосувати безсіткові методи, зокрема, метод радіальних базисних функцій [10]. Саме це і обумовлює вибір чисельного методу в даній статті.

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву засоленого ґрунту в області Ω з межею Γ під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю $q(x, y)$. Математичну модель вказаної задачі з урахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах можна описати наступною крайовою задачею [2, 3]:

$$\frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h - \mathbf{K}_c(\mathbf{c}) \nabla c - \mathbf{K}_T \nabla T)] + \quad (1)$$

$$+ \frac{\varepsilon(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_s a} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c) = n \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_m (C_m - c) N^\alpha, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h + \mathbf{K}_c(\mathbf{c}) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D} \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u}T - \lambda \nabla T, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, 0) &= H_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \\ T(\mathbf{X}, 0) &= T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_u} = 0, \quad h|_{\Gamma_h} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_h, \quad (9)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_c} = 0, \quad c|_{\Gamma_c} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_c, \quad (10)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_T} = 0, \quad T|_{\Gamma_T} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_T, \quad (11)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(t)}^{\varphi(x,y)} \frac{1}{(\rho_s - (1+e)N)(1+e)} \left(\frac{3\gamma\rho_c a}{1+2\xi} \frac{\partial h(x,y,\zeta,t)}{\partial t} - \right. \quad (12)$$

$$\left. - \gamma_m (1+e) (C_m - c(x,y,\zeta,t)) N^\alpha(x,y,\zeta,t) \right) d\zeta,$$

де $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_h = \Gamma_q^c \cup \Gamma_c = \Gamma_q^T \cup \Gamma_T$, $\Gamma_u \cap \Gamma_h = \emptyset$, $\Gamma_q^c \cap \Gamma_c = \emptyset$, $\Gamma_q^T \cap \Gamma_T = \emptyset$, $t \in (0; t_0]$; c – концентрація солей в рідкій фазі; h – надлишковий напір; N – концентрація солей у твердій фазі; T – температура; n – пористість ґрунту; e – коефіцієнт пористості; ρ_s – густина солей у твердій фазі; c_p – питома теплоємність порового розчину; C_m – концентрація граничного насичення в рідкій фазі; γ_m – коефіцієнт швидкості масообміну; $\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) = \{k_{hij}(c, T, N)\}$, $\mathbf{K}_c(c) = \{k_{cij}(c)\}$, $\mathbf{K}_T = \{k_{Tij}\}$, $\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$, $\mathbf{D}_T = \{(D_T)_{ij}\}$, $\lambda = \{\lambda_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, 3}$, – коефіцієнти (тензори) фільтрації, хімічного осмосу, термічного осмосу, дифузії, термодифузії, теплопровідності відповідно; $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ – вектор швидкості фільтрації сольового розчину; \mathbf{n} – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; α – коефіцієнт, що залежить від характеру засолення твердої фази [1]. Параметр ε набуває значення 0, якщо наявність солей не враховується і 1, якщо наявність солей враховується.

Оскільки швидкість руху твердих частинок ґрунту значно менша за швидкість фільтрації, то в узагальненому законі Дарсі-Герсеванова (5) знехтувана швидкість руху твердої фази ґрунту.

Умова (12) є кінематичною граничною умовою на верхній рухомій межі ґрунту, який консолидується. Однак в ній, на відміну від аналогічної умови [2], враховано просідання за рахунок масообмінних процесів між рідкою та твердою фазами ґрунту. Функція $z = l(x(t), y(t), t)$ описує положення точок верхньої рухомої межі масиву ґрунту, а $z = \varphi(x, y)$ – положення точок нижньої нерухомої межі масиву ґрунту. Також відмітимо, що (12) виведено лише при урахуванні вертикальних зміщень ґрунту.

2. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Чисельний розв'язок крайової задачі (1)–(12) знайдено методом радіальних базисних функцій [3, 10]. Для цього покрито замикання $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ області Ω вузловими точками (x_j, y_j, z_j) , $j = \overline{1, m}$. Наближені розв'язки крайової задачі (1)–(12) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_C), \\ T(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), N(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_N), \end{aligned} \quad (13)$$

де $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_C > 0$, $\varepsilon_T > 0$, $\varepsilon_N > 0$ – параметри форми; $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$ – радіальні базисні функції; $h_j(t)$, $c_j(t)$, $N_j(t)$, $T_j(t)$ – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу,

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Покриємо замикання $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ області Ω колокаційними точками (x_i, y_i, z_i) , $i = \overline{1, s}$, $s \geq m$, де s^Ω — множина номерів колокаційних точок, які лежать в області Ω , s^Γ — множини номерів колокаційних точок, які лежать на відповідних частинах межі Γ . Наприклад, s^{Γ_u} — множина номерів колокаційних точок, які лежать на межі Γ_u . Тобто, $s = s^\Omega \cup s^{\Gamma_u} \cup s^{\Gamma_h} = s^\Omega \cup s^{\Gamma_q} \cup s^{\Gamma_c} = s^\Omega \cup s^{\Gamma_q^T} \cup s^{\Gamma_T}$. Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, s}, \quad s \geq m.$$

Підставляючи (13) в рівняння (1)–(4), початкові умови (8) та граничні умови (9)–(11), і використовуючи метод колокації в точці [10], отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$, $\mathbf{C}(t) = \{c_j(t)\}_{j=1}^m$, $\mathbf{N}(t) = \{N_j(t)\}_{j=1}^m$, $\mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \mathbf{H} = \\ & = \mathbf{K}^{(1)} \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{S}^{(1)} \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{S}'^{(1)} \mathbf{C} + \mathbf{R}^{(1)} \mathbf{T} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \mathbf{C} = \mathbf{K}^{(2)} \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{R}^{(2)} \mathbf{T} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (15)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}, \mathbf{T}) \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (16)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\alpha), \quad (17)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \mathbf{H}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \mathbf{C}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \mathbf{T}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \mathbf{N}_0 = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad (18)$$

де

$$\mathbf{M}^{(k)} = \left\{ m_{ij}^{(k)} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \left\{ \tilde{m}_{ij}^{(k)} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{ \tilde{f}_i^{(k)} \right\}_{i=1}^s,$$

$$\mathbf{L}^{(k)} = \left\{ l_{ij}^{(k)} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad k = \overline{1, 4}; \quad \mathbf{S}'^{(1)} = \left\{ s'_{ij} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m},$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = \left\{ s_{ij}^{(1)} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m}; \quad \mathbf{S}^{(k)} = \left\{ r_{ij}^{(k)} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m},$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \left\{ k_{ij}^{(k)} \right\}_{i=1, j=1}^{s, m}, \quad k = 1, 2; \quad \mathbf{F}^{(k)} = \left\{ f_i^{(k)} \right\}_{i=1}^s, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Елементи системи рівнянь (14)–(17) визначаються однотипно, але досить громіздко. Тому наведемо їх лише для (16), що відповідає рівнянню теплопровідності:

$$m_{ij}^{(3)} = -c_T \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \quad i \in s^\Omega;$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) - c_\rho(\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in s^\Omega; \\ \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in s^{\Gamma_T}; \\ (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in s^{\Gamma_q^T}. \end{cases}$$

Елементи матриць третьої із СЛАР (18) визначаються, як

$$\tilde{m}_{ij}^3 = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(x_i, y_i, z_i), \quad i = \overline{1, s}, j = \overline{1, m}.$$

Для дискретизації нелінійних рівнянь (14)–(16) по часу з кроком τ використаємо повністю неявну різницеву схему, лінійну відносно шуканих функцій [2, 3, 8]. Для системи (16) вона має вигляд

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{\mathbf{T}^{(k+1)} - \mathbf{T}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(3)}(t_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Для дискретизації нелінійного диференціального рівняння (17) в часі використаємо метод Ньютона [8]

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} = \alpha \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{\alpha-1}(t_k)) (\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}) +$$

$$+ \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^\alpha(t_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Отриману після дискретизації задачі Коші (14)–(18) СЛАР розв'язували методом найменших квадратів [6]. В процесі консолідації та хімічної суфозії розміри області Ω змінюються. Тому на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (12), згідно якої маємо

$$\frac{z^{(k+1)} - z^{(k)}}{\tau} = - \int_{z^{(k)}}^{\varphi(x,y)} \mathbf{F}(\mathbf{C}^{(k+1)}, \mathbf{N}^{(k+1)}, \mathbf{h}^{(k+1)}) d\zeta,$$

де $(x, y, z^{(k)})$ — координати деякої точки області консолідації при $t = t^{(k)}$, $(x, y, z^{(k+1)})$ — координати даної точки на наступному часовому шарі. Змінна інтегрування ζ пробігає вертикальний відрізок від початкового положення точки $z^{(k)}$ до нижньої нерухої межі $z = \varphi(x, y)$ масиву ґрунту. Підінтегральна функція визначається згідно (12).

3. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНИХ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву засоленого ізотропного за своїми характеристиками глинистого ґрунту форми прямокутного паралелепіеда з довжиною ребер 22 м, 22 м, 11 м (рис. 1). Межу ABCD позначимо як Γ_1 , $A_1B_1C_1D_1$ — Γ_3 , ABC_1D_1 і CDC_1D_1 — Γ_4 , ADA_1D_1 та BCB_1C_1 — Γ_5 , область KLMN — Γ_2 . Граничні умови в чисельних експериментах візьмемо наступними:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_3} &= 0, \quad h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = 0, \quad t > 0, \\ \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{\Gamma_4} &= \frac{\partial h}{\partial y} \Big|_{\Gamma_5} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{\Gamma_5} = \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad t > 0, \\ c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} &= C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\Gamma_3} = \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\Gamma_5} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad t > 0, \\ T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} &= T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1, \quad T(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = 30^0 C, \quad t > 0. \end{aligned}$$

В області KLMN ґрунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q=20 \cdot 10^4$ кг/м² доба. Область KLMN — квадрат зі сторонами, паралельними відповідним осям координат при $x \in [6, 16]$ та $y \in [6, 16]$.

Значення коефіцієнтів та відомих функцій приймаються наступними:

$$\begin{aligned} e &= 0.7, \alpha = 0.5, a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}, \rho_s = 2000 \text{ кг}/\text{м}^3, C_m = 350 \text{ г}/\text{л}, \\ \lambda_{ii} &= 108 \text{ кДж} (m \cdot ^0 C \cdot \text{доба}), C_p = 4, 2 \text{ кДж} (kg \cdot ^0 C), T_2(t) = 50^0 C, \\ D_{ii} &= 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}, D_{Tii} = 0.002 \text{ м}^2/\text{доба}, i = \overline{1, 3}, \\ C_1(t) &= C_m, \gamma_m = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}, C_0(x) = 8 \text{ г}/\text{л}, C_T = 2137 \text{ кДж} (m^3 \cdot ^0 C), \\ K_{cii} &= 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5 / (kg \cdot \text{доба}), K_{Tii} = 2, 8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot ^0 C), i = \overline{1, 3}, \\ T_1(t) &= 17 + 13 \cos \left(\frac{\pi t}{180} \right), N_0(x, y, z) = 240 \left(- \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40, \\ C_0(x, y, z) &= \begin{cases} C_m, & z = 0, \\ C_0, & z \neq 0; \end{cases} \quad T_0(x, y, z) = \begin{cases} 30^0 C, & z = 0, \\ 4^0 C, & z \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей у твердій та рідкій фазах і температури визначили згідно формули [2, 4] $K_h(c, N, T) = k_0(c, T) e^{-\gamma_1 \frac{N}{N_{max} - N}}$. Коефіцієнт фільтрації чистої води покладалася рівним $0,002 \text{ м}/\text{доба}$. Для апроксимації залежності $k_0(c, T)$ використовувався метод РБФ з експериментальними даними, взятими із монографії [2]. Згідно [5] початковий розподіл напорів $h_0(\mathbf{X}) = \Theta(\mathbf{X})/3\gamma$, де $\Theta(\mathbf{X})$ — сума головних напружень у точці \mathbf{X} , що визначається, як [5] $\Theta(\mathbf{X}) = \iint_{\Phi} \frac{q(\xi, \eta, 0)}{\pi} (1 - \nu) \frac{z}{r^3} d\xi d\eta$, де

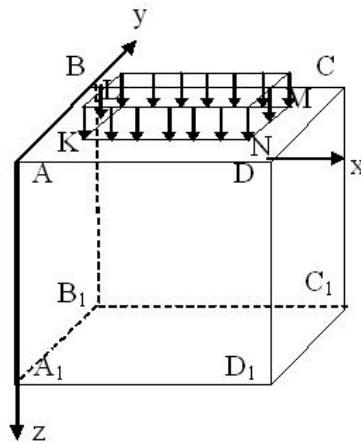


Рис. 1. Фільтраційна консолідація засоленого масиву ґрунту у чисельних експериментах

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$; ν – коефіцієнт Пуассона; Φ – область прикладення навантаження у площині $z=0$.

Кількість вузлових точок покладалася рівною 216, а колокаційних – 1728. Крок по часу $\tau = 30$ діб. Кількість часових проміжків 36. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

При наведених даних у площині $x = 10$ м паралельній YOZ при $t = 270$ діб були знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадратичної РБФ $\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ і побудовані відповідні графіки (два з них наведено на рис. 2, 3). В таблиці наведено максимальне просідання точок верхньої межі ґрунту за 3 роки.

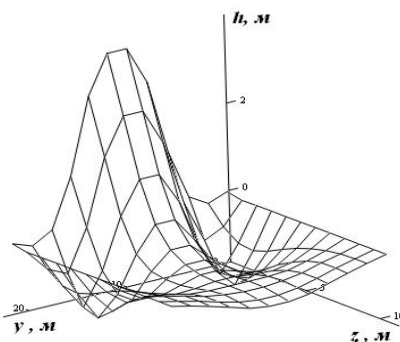


Рис. 2. Розподіл надлишкових напорів

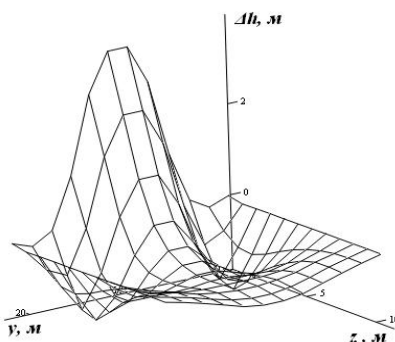


Рис. 3. Різниця розподілів надлишкових напорів засоленого і незасоленого ґрунту при врахуванні просідання

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні таких факторів, як просідання та засоленість ґрунту бачимо, що напори розсіюються повільніше у випадку засоленого ґрунту в області прикладання навантаження (рис. 3). А в області, де немає навантаження навпаки — швидше. Це пояснюється залежністю $K_h(c, N, T)$. Концентрація солей у рідкій фазі $c(x, y, z, t)$ стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Таблиця 1. Максимальна величина просідань верхньої межі ґрунту.

Параметри	Величина просідань ґрунту			
	$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
	I	II	III	
$\varepsilon = 1$	35,4 см	16,5 см	18,9 см	36,3 см
$\varepsilon = 0$	20,4 см	20,4 см	-	20,4 см

В таблиці: I — загальне просідання; II — просідання за рахунок зміни напорів; III — просідання за рахунок хімічної суфозії.

Величина просідань збільшується при врахуванні фактору засоленості ґрунту, як при $K_h(c, N, T)$ (див. наприклад табл., експерименти №1 та 2, де величини просідань становлять 35,4 та 20,4 см відповідно), так і при $K_h = const$ (див. ті ж експерименти, де величини просідань складають 36,3 см та 20,4 см відповідно). Як видно з експерименту №1, просідання за рахунок хімічної суфозії (53,4 % від загальної величини просідання) є більшим, ніж просідання за рахунок зміни надлишкових напорів (46,6% від загальної величини просідання). Отже, просідання за рахунок впливу хімічних факторів на засолених ґрунтах є значним і нехтувати їм не можна.

ВИСНОВКИ

В статті сформульовано математичну модель просторової задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту. При цьому враховано можливість хімічної суфозії. При проведенні і аналізі чисельних експериментів виявлено, що у випадку просторової задачі просідання за рахунок хімічної суфозії виявляється більшим за просідання при розсіюванні надлишкових напорів.

Наступним етапом роботи авторів в даному напрямку стане дослідження точності отриманих наближених роз'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Веригин Н. Н. О кинематике растворения солей при фильтрации воды в грунтах / Н. Н. Веригин // Растворение и выщелачивание горных пород. — Москва: Госстройиздат, 1957. — С. 84–113.
2. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк П. М. Мартинюк. — Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. — 416 с.
3. Власюк А. П. Фильтрационная консолидация трехфазных грунтов с учетом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизо термическом режиме / А. П. Власюк П. М. Мартинюк // Математическое моделирование. — 2010. — Т.22, №4. — С. 32–56.
4. Добронравов О. О. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматациї / О. О. Добронравов, В. С. Кремез // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідраліки. — 2006. — Вип. 7. — С. 141–146.
5. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов. — М.: Высшая школа, 1991. — 447 с.
6. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / И. Н. Молчанов. — Киев: Наук. думка, 1987. — 288 с.
7. Петрухин В. П. Расчёт суффозионных деформаций оснований в засоленных грунтах / В. П. Петрухин // Основания, фундаменты и механика грунтов. — 1995. — №5. — С. 11–13.
8. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Научный мир, 2003. — 316 с.
9. Хоменко В. П. Закономерности и прогноз суффозионных процессов / В. П. Хоменко. — М.: ГЕОС, 2003. — 216 с.
10. Least-squares collocation meshless method / [Xiong Zhang, Xiao-Hu Liu, Kang-Zu Song, Ming-Wan Lu] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2001. — Vol. 51. — Pp. 1089–1100.

Статья поступила в редакцию 8.11.2012

УДК 681.5(075.8)

ГЕРМЕНЕВТИКА НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ АНСАРИ-БРЭДЛИ СРЕДСТВАМИ MATHCAD

© А. Н. Порунов

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, ФИЛИАЛ В Г. СЫЗРАНИ
УЛ. СОВЕТСКАЯ, 45, Г. СЫЗРАНЬ, РОССИЯ
E-MAIL: rameno@rambler.ru

Abstract. Procedure is shown hermeneutics nonparametric Ansari-Bradley test by facilities of Mathcad. Hermeneutics procedure is built on the analysis of typical methodical errors of calculation of criterion. The similar technique of penetration in essence of statistical criterion is in an equal degree useful as for beginners so for more experience researchers.

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня, перефразируя Кевина Аэрна [1], в эпоху «карнавала» статистических пакетов, от пользователя требуется наличие профессиональных навыков и высокой квалификации, широкого первоначального статистического образования. Эти неотъемлемые условия получения корректных, надежных статистических оценок в любом исследовании предполагают глубокое проникновение в суть статистических методов. В прежние времена, «глубокое проникновение» достигалось с помощью обычного учебника, ручки и листа бумаги. Появление мощных математических пакетов, позволяющих не только решать статистические задачи, но и детально изучать, «препарировать» методы ее решения привело к резкому повышению качества и эффективности образовательного процесса. В области статистики сегодня они определяют «дидактический мейнстрим». Речь идет, прежде всего, о таких универсальных математических программных продуктах, как Maple, Mathcad, Mathematica, MATLAB и специализированных типа STATISTICA, SPSS, STATGRAPHICS. Каждый из них по своему хорош, но, практика показывает, что для образовательных и самообразовательных целей в области статистики наибольшее распространение получил Mathcad, поскольку обладает двумя весьма ценными с точки зрения освоения статистических методов характеристиками, — универсальностью и большей наглядностью. Как отмечают многие специалисты главное преимущество Mathcad в отличие от аналогичных программных средств, состоит в том, что здесь математические выражения представляются в общепринятой математической нотации. Запись на языке, очень близком к стандартному языку математических расчетов, упрощает постановку и решение многих задач и делает этот продукт наиболее востребованным в самых различных сферах деятельности [2].

Представленная статья иллюстрирует «герменевтику» непараметрического критерия Ансари-Брэдли (АВ) средствами Mathcad. Герменевтическая процедура построена на разборе типичных методических ошибок исчисления критерия. Представляется, что подобная техника проникновения в суть статистического критерия в равной степени полезна как для начинающих исследователей так и для более опытных, но еще не знающих, в отличие от А. Лимера, «обратную сторону» таких оценок.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ОБЩЕМ ВИДЕ

Пусть имеются (здесь и далее автор придерживается синтаксиса принятого в среде Mathcad) две независимые случайные выборки:

$$X_1, X_2, \dots, X_m \in F(t) \quad \text{и} \quad Y_1, Y_2, \dots, Y_n \in F(t/\Delta).$$

Решаемые задачи: проверка гипотезы о том, что:

- $H_0 : \Delta = 1$ (дисперсии выборок равны);
- $H_1 : \Delta < 1$ (дисперсия второй выборки больше чем первой);
- $H_2 : \Delta > 1$ (дисперсия первой выборки больше чем второй);
- $H_3 : \Delta \neq 1$ (дисперсии не равны).

Предположения:

- 1) выборки X и Y должны быть независимы;
- 2) распределение $F(t)$ — непрерывное, параметры распределения неизвестны;
- 3) медианы выборок должны быть равны, т.е.:

$\mu_1 := \text{median}(X) \cong \mu_2 := \text{median}(Y)$, если $\mu_1 \neq \mu_2$ следует рассмотреть новые выборки \tilde{X} и \tilde{Y} такие что:

$$\tilde{X}, \tilde{Y} := \begin{cases} X - \mu_1 \\ Y - \mu_2 \end{cases}.$$

2. МЕТОДИКА И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОШИБКИ

Оставаясь в среде Mathcad, рассмотрим на конкретном примере методику и типичные методические ошибки расчета АВ-критерия.

В качестве входных данных примера используются результаты исследований компании, оценивающей релевантность показателей отечественных информационно поисковых систем (ИПС). В частности, сравнивались значения двадцати пар измерений F -меры (меры Ван Ризбергена) двух ИПС Rambler и Yandex в случайно выбранные дни марта 2012 года. Эти показатели были получены на основе анализа запроса на слово “cat” и по тому, как много релевантных ссылок выдаёт поисковик

на 100 первых ответов [3]. Основная и альтернативная гипотезы формулировались следующим образом:

H_0 : дисперсии F -меры одинаковы ($\Delta = 1$),

H_1 : дисперсии F -меры не равны ($\Delta \neq 1$).

Таким образом, имеем две выборки значений F -меры, одну выборку назовем “Rambler”, другую “Yandex”. Данные 40 испытаний по оценке релевантности поисковых систем приведены в табл. 1.

Таблица 1. Значения показателя F -мера выборок “Rambler” и “Yandex”

i	Rambler	Yandex	i	Rambler	Yandex
1	0.854	0.808	11	0.777	0.877
2	0.823	0.792	12	0.738	0.877
3	0.769	0.846	13	0.746	0.869
4	0.762	0.808	14	0.785	0.831
5	0.785	0.800	15	0.823	0.815
6	0.815	0.769	16	0.869	0.877
7	0.838	0.738	17	0.892	0.869
8	0.831	0.831	18	0.869	0.831
9	0.800	0.792	19	0.846	0.815
10	0.762	0.800	20	0.754	0.762

В векторном виде:

$$Rambler^T := (0.845 \ 0.823 \ 0.769 \ 0.762 \ 0.785 \ 0.815 \ 0.838 \ 0.831 \ 0.800 \ 0.762 \\ 0.777 \ 0.738 \ 0.746 \ 0.785 \ 0.823 \ 0.869 \ 0.892 \ 0.869 \ 0.846 \ 0.754)$$

Вектор *Rambler* состоит из $n := rows(Rambler) = 20$ наблюдений, с номерами $i := 0..last(Rambler)$.

$$Yandex^T := (0.808 \ 0.792 \ 0.846 \ 0.808 \ 0.800 \ 0.769 \ 0.738 \ 0.831 \ 0.792 \ 0.800 \ 0.877 \\ 0.877 \ 0.869 \ 0.831 \ 0.815 \ 0.877 \ 0.869 \ 0.831 \ 0.815 \ 0.762).$$

Вектор *Yandex* состоит из $m := rows(Yandex) = 20$ наблюдений с номерами $j := 0..last(Yandex)$.

Медианы выборок Rambler и Yandex соответственно равны:

$$\mu_1 := median(Rambler) = 0.807 \quad \text{и} \quad \mu_2 := median(Yandex) = 0.815.$$

Первая ошибка чаще всего связана с игнорированием требования к медианам выборок. Равенство медиан является необходимым условием АВ-критерия это известно еще со времен Л. Э. Мозеса [4], показавшего насколько требовательны ранговые критерии к равенству медиан или знанию их величин. Тем не менее, даже в учебной литературе, иногда встречаются попытки принизить значимость этого требования [5]. Поскольку в нашем случае медианы не равны, воспользуемся приемом, который был предложен А. Р. Ансари и Р. А. Брэдли несколько позже того как они представили миру одноименный критерий.

Переопределим выборки:

$$Rambler := Rambler - median(Rambler) \quad (1)$$

и

$$Yandex := Yandex - median(Yandex). \quad (2)$$

Графики распределения преобразованных наблюдений в выборках показаны на рис. 1.

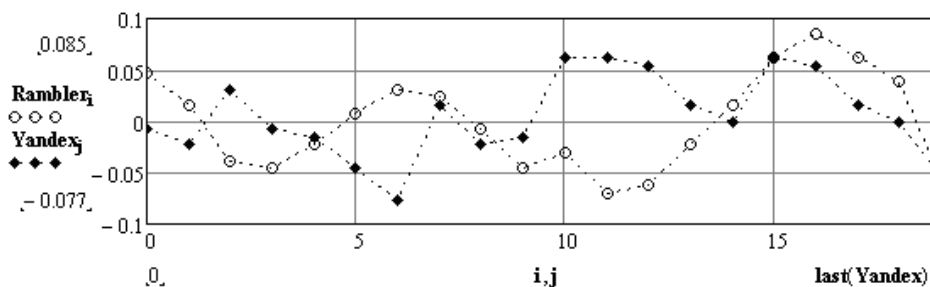


Рис. 1. Распределения F-меры в исходных выборках Rambler и Yandex.

Для проверки основной (нулевой) гипотезы H_0 необходимо:

Этап 1. Объединение выборок и ранжирование наблюдений в порядке возрастания. С этой целью определим вектор RY суть которого — объединенные и отсортированные элементы векторов Rambler и Yandex (рис. 2):

$$RY := sort(stack(submatrix(Rambler, 0, last(Rambler), 0, 0), Yandex)) \quad (3)$$

Этап 2. Присвоение рангов наблюдениям ранжированной объединенной выборки RY производится с концов совокупности по направлению к её медиане так, что

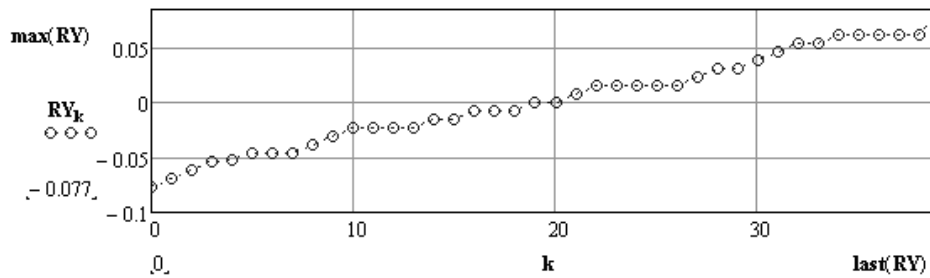


Рис. 2. Распределение F-меры в объединенной выборке RY

образуется симметричный ряд вида:

$$0, 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}, \frac{N-1}{2}, \dots, 2, 1, 0 \quad \text{если } N \text{ нечетно,} \quad (4)$$

или

$$0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2}, \frac{N}{2}, \dots, 2, 1, 0 \quad \text{если } N \text{ четно.} \quad (5)$$

Казалось бы очевидный алгоритм, тем не менее, и на этом этапе нередко ошибки. Связаны они, по-видимому, с «трудностями перевода» статистической литературы. Например, в одной из самых авторитетных и наиболее часто цитируемых работ, находим:

«Наименьшему и наибольшему из наблюдений в объединенной выборке присвоить ранг 1, следующим среди наименьших и наибольших присвоить ранг 2 и продолжать ранжирование тем же способом.» [6, с. 102].

Такая, не самая удачная версия перевода создает у начинающего исследователя иллюзию симметричности распределения рангов. Возникает соблазн использовать (зеркально отразить) ранги наблюдений левой, от медианы, половины объединенной выборки, для построения рангов её правой половины или наоборот. Как следствие, — неверное распределение рангов. Между тем, как и в первом [7] так и во втором [8] оригинальных изданиях этой книги речь идет о независимом присвоении рангов наблюдениям правой и левой половинам вариационного ряда.

Требования второго этапа в Mathcad можно реализовать следующим образом:

а) разделить вектор RY на две составляющие RY1 и RY2 (равные, если N чётно):

$$RY1 := submatrix \left(RY, floor \left(\frac{last(RY)}{2}, 0, 0 \right) \right) \quad (6)$$

$$RY2 := submatrix \left(RY, ceil \left(\frac{last(RY)}{2}, last(RY), 0, 0 \right) \right) \quad (7)$$

б) введем новую ранжированную переменную $h := RY_0, \dots, RY_{last(RY)}$ и, в программном модуле (8), используя mathcad-функцию $Rank(v)$, определим симметричную (относительно медианы вектора RY) функцию средних рангов $rr(h)$. Значения этой функции, аргументами которой являются элементы переопределенного вектора Rambler, приведены в табл. 2.

$$rr(h) := \begin{cases} \text{for } e \in 0..last(RY2) \\ \quad d \leftarrow Rank(-RY2)_e \quad \text{if } h = RY2_e \\ \text{for } e \in 0..last(RY1) \\ \quad d \leftarrow Rank(RY1)_e \quad \text{if } h = RY1_e \end{cases} \quad (8)$$

Таблица 2. Переопределенные значения и средние ранги элементов вектора Rambler.

i	Rambler_i	rr(Rambler_i)	i	Rambler_i	rr(Rambler_i)
0	0.046	9	10	-0.03	10
1	0.015	17.5	11	-0.07	2
2	-0.038	9	12	-0.062	3
3	-0.045	7.5	13	-0.022	13.5
4	-0.022	13.5	14	0.015	17.5
5	0.007	19	15	0.062	5.5
6	0.03	12	16	0.085	1
7	0.023	13	17	0.062	5.5
8	-0.007	17	18	0.038	10
9	-0.045	7.5	19	-0.054	4

Статистика АВ-критерия, — сумма средних рангов элементов вектора Rambler, равна:

$$W_{ab} := \sum_{i=0}^{last(Rambler)} rr(Rambler_i) = 197. \quad (9)$$

Этап 3. Большая выборка. Центрирование и нормирование АВ-статистики.

Поскольку таблицы квантилей распределения W_{ab} -статистики доступны только для случаев, когда $m, n < 10$, то при больших выборках (как в нашем случае), с целью приближения распределения W_{ab} -статистики к стандартному, нормальному распределению обычно производят операции её трансформации (центрирования и

нормирования) по известной схеме:

$$M(W) := \begin{cases} M(W) \leftarrow \frac{m \cdot (m+n+1)^2}{4 \cdot (m+n)} \\ D(W) \leftarrow \frac{m \cdot n \cdot (m+n+1) \cdot [3 + (m+n)]}{4 \cdot (m+n)} \\ \frac{W_{ab} - M(W)}{\sqrt{D(W)}} \quad \text{if } \text{mod}(N, 2) \neq 0 \\ \text{otherwise} \\ \left| \begin{cases} M(W) \leftarrow \frac{m \cdot (m+n+2)^2}{4} \\ D(W) \leftarrow \frac{m \cdot n \cdot (m+n+2) \cdot (m+n+2)}{48 \cdot (m+n-1)^2} \\ \frac{W_{ab} - M(W)}{\sqrt{D(W)}} \end{cases} \right. \end{cases} \quad (10)$$

где: $M(W)$ и $D(W)$ — соответственно, математическое ожидание и дисперсия W_{ab} -статистики. Одна из часто встречающихся ошибок на данном этапе расчета АВ-критерия, — не учёт поправки на связанные ранги к дисперсии $D(W)$. Подобная практика отчасти объясняется тем, что выходящие сегодня в «свет» отечественные учебники и справочники по прикладной математической статистике, например [9], часто не дают на сей счёт никаких разъяснений. Между тем в данном случае, функция $rr(Rambler_i)$ (табл. 1) имеет дробные значения рангов, что говорит о необходимости расчета дисперсии W_{ab} -статистики с учетом поправки на связи.

Этап 4. Определение связей и числа ранговых групп. Типичная ошибка для этой части расчета АВ -критерия, - неправильное определение числа ранговых групп наблюдений в ранжированной объединенной выборке. Ошибка возникает по причине того, что в состав ранговых групп включают только группы связанных рангов, группы же несвязанных рангов остаются без внимания.

Используя определенную нами ранее (8) функцию $rr(h)$, возвращающую усредненное положение каждого элемента в объединенной выборке-векторе RY , определим число ранговых групп g среди $N = 40$ наблюдений, объём t_g g -й ранговой группы и средний ранг наблюдений r_g в g -й группе с помощью программы:

$$\begin{pmatrix} g \\ t \\ r \end{pmatrix} := \begin{array}{l} a \leftarrow 0 \\ g \leftarrow 0 \\ t_g \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..last(RY) \\ \quad \begin{array}{l} a \leftarrow a + 1 \quad \text{if } i > 0 \wedge rr(RY_i = rr(RY_{i-1})) \\ \text{if } i > 0 \wedge rr(RY_i \neq rr(RY_{i-1})) \\ \quad \begin{array}{l} t_g \leftarrow a + 1 \\ g \leftarrow g + 1 \\ a \leftarrow 0 \end{array} \\ r_g \leftarrow rr(RY_i) \\ t_g \leftarrow a + 1 \end{array} \\ \end{array} \end{array} \quad (11)$$

В данном случае число ранговых групп составило $g + 1 = 27$ (с учетом того, что отсчёт ведется от 0, а не от 1). Значения векторов объема t и среднего ранга наблюдений r в каждой g -й ранговой группе показаны в табл. 3 Среди значений вектора t можно видеть присутствие 1 (единиц), — признаков наличия несвязанных ранговых групп.

Таблица 3: Значения основных характеристик ранговых групп.

Ранговая группа, g	Средний ранг наблюдений, r_g	r_g^2	Объем группы, t_g
0	1	1	1
1	2	4	1
2	3	9	1
3	4	16	1
4	5	25	1
5	6	36	1
6	7.5	56.25	2
7	9	81	1
8	10	100	1

Продолжение таблицы 2

Ранговая группа, g	Средний ранг наблюдений, r_g	r_g^2	Объем группы, t_g
9	11.5	132.25	2
10	13.5	182.25	2
11	15.5	240.25	2
12	17	289	1
13	18.5	342.25	2
14	20	400	2
15	19	361	1
16	17.5	306.25	2
17	15	225	3
18	13	169	1
19	12	144	1
20	11	121	1
21	10	100	1
22	9	81	1
23	7.5	56.25	2
24	5.5	30.25	2
25	3	9	3
26	1	1	1

Этап 5. Преобразование W_{ab} -статистики с учетом связанных рангов. При наличии связанных рангов дисперсия АВ-статистики рассчитывается по формуле:

$$D(W) = \begin{cases} I \leftarrow \sum_{j=0}^g [t_j \cdot (r_j)^2] \\ \frac{m \cdot n \cdot [16 \cdot (m+n) \cdot I - (m+n+1)^4]}{16 \cdot (m+n)^2 \cdot (m+n-1)} & \text{if } \text{mod}(N, 2) \neq 0 \\ \frac{m \cdot n \cdot [16 \cdot I - (m+n) \cdot (m+n+2)^2]}{16 \cdot (m+n) \cdot (m+n-1)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

С учетом (12) преобразованная к стандартному, нормальному распределению АВ-статистика W_{abn} равна:

$$W_{abn} = \begin{cases} \left. \begin{array}{l} M(W) \leftarrow \frac{m \cdot (m+n+1)^2}{4 \cdot (m+n)} \\ \frac{W_{ab} - M(W)}{\sqrt{D(W)}} \quad \text{if } \text{mod}(N, 2) \neq 0 \end{array} \right\} \\ \text{otherwise} \\ \left. \begin{array}{l} M(W) \leftarrow \frac{m \cdot (m+n+2)}{4} \\ \frac{W_{ab} - M(W)}{\sqrt{D(W)}} \end{array} \right\} \end{cases} \quad (13)$$

В итоге имеем $W_{abn} = -0.706$.

В рассматриваемом случае, для двустороннего критерия H_0 против альтернативы вида $\Delta \neq 1$ на уровне значимости $\alpha = 0.05$ надо принять H_0 , если:

$$qnorm\left(\frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) < W_{abn} < qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right) \quad (14)$$

где $qnorm\left(\frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$ и $qnorm\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 0, 1\right)$ mathcad-функции граничных квантилей стандартного нормального распределения уровней значимости соответственно α и $1 - \alpha$.

Условие (14) выполняется, так как $-1.96 < -0.706 < 1.96$, из чего следует, что данные из объединенной выборки не противоречат гипотезе H_0 на уровне доверия 0.95, иными словами поисковые системы Rambler и Yandex на момент исследования имели равную релевантность.

Формулировка итога статистического исследования в таком виде сегодня встречается не так часто. Для абсолютного большинства работ, характерно более безапелляционное, вроде: «...следует принять гипотезу H_0 ». Между тем, как известно, «поставка» ещё одного нового статистического наблюдения может в корне перевернуть сложившееся представление (в данном случае о паритете поисковых систем).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В литературе, посвященной статистическим вычислениям, можно обнаружить такие рекомендации:

«Вообще, подход к статистическим критериям в анализе данных должен быть прагматическим и не отягощен лишними теоретическими рассуждениями. Имея в своем распоряжении компьютер с системой

«STATISTICA», вы легко примените к своим данным несколько критериев. Зная о некоторых подводных камнях методов, вы путем экспериментирования выберете верное решение.» [10].

Нам же представляется, что только внедрение, новых, в том числе герменевтических технологий в образовательный процесс позволит увеличить интенсивность и качество усвоения статистических знаний, даст возможность специалистам грамотно применять статистический инструментарий и выбирать действительно верное решение, не прибегая к слепому экспериментированию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kevin Athern's Professional Page [Электронный ресурс]. — Режим доступа к ресурсу: <http://www.davinihress.com/professional.html>
2. Бородина А. И. Специализированные пакеты для математической обработки данных / А. И. Бородина, Л. И. Крошинская, О. Л. Сапун — Минск: НО ООО «БИП-С», 2003. — Режим доступа к ресурсу: <http://bip-ip.com/spetsializirovannyye-paketyi-dlya-matem/>
3. Показатели качества информационно-поисковых систем. Полнота и точность выдачи [Электронный ресурс] — Режим доступа к ресурсу: <http://koriolan404.narod.ru/tipis/27.htm>
4. Moses L. E. Rank tests of dispersion / L. E. Moses // Ann. Main. Statist. — 1963 — №34. — P. 973–983.
5. Сорокин О. Д. Прикладная статистика на компьютере. 2-е изд / О. Д. Сорокин. — Краснообск: ГУП РПО СО РАСХН, 2009. — 222 с.
6. Холлендер М. Непараметрические методы статистики / Холлендер М., Вульф Д. А. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 520 с.
7. Hollander M. Non-parametric Statistical Methods / Hollander M., Wolfe D. A. — New York: John Wiley & Sons, 1973. — P. 503.
8. Hollander M. Non-parametric Statistical Methods, 2nd edition / Hollander M., Wolfe D. A. — New York: Wiley, 1999. — P. 515.
9. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 816 с.
10. Боровиков В. STATISTICA — искусство анализа данных на компьютере / В. Боровиков [Электронный ресурс]. — Режим доступа к ресурсу: <http://www.statosphere.ru/books-arch/bor-kat/50-13-.html>

Статья поступила в редакцию 30.06.2012

ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ m -ФУНКЦИЙ БЕЗ ВНУТРЕННИХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК НА ТРЕХМЕРНЫХ ТЕЛАХ

© А. О. Пришляк, Е. Н. Вятчанинова

КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧАНКО
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ПР-Т АКАДЕМИКА ГЛУШКОВА 2, КОРПУС 7, Г. КИЕВ, 03127, УКРАИНА
E-MAIL: *prishlyak@yahoo.com*

Abstract. Canonical m -handle decomposition of three-dimensional handlebody was constructed for m -functions. It is obtained a criterion on homotopy equivalence of m -functions without internal critical points on handlebody in terms of the generators of the fundamental group of the surface.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть M — трёхмерное тело, т.е. замкнутая ограниченная область в трёхмерном евклидовом пространстве, границей которой является гладкая замкнутая поверхность $F = \partial M$. В данной работе мы рассматриваем m -функции без внутренних критических точек на M . Для таких функций ограничение на край является функцией Морса. Для критических точек функции Морса определен индекс — индекс квадратической формы Гессе (матрица Гессе этой формы состоит из вторых частных производных в критической точке). Кроме того, направление поля градиента задает знак ($\epsilon = \pm 1$) в критической точке. Индекс критической точки m -функции — это пара: (индекс ограничения на край, число ϵ). $\epsilon = -1$, если поле градиента направлено внутрь многообразия и $\epsilon = +1$, если оно направлено наружу. Заметим, что, аналогично функциям Морса на замкнутом многообразии, m -функции существуют и образуют открытое множество в пространстве всех функций.

В. Шарком [1] и С. Максименком [2] было доказано, что две функции Морса можно соединить путем в пространстве функций Морса на замкнутом двумерном многообразии тогда и только тогда, когда функции имеют одинаковое число критических точек каждого индекса.

Топологические свойства m -функций и разложений на m -ручки исследовались в работах [3–8]. В [9] используя m -ручки дан критерий существования пути между двумя m -функциями на трехмерном теле без внутренних критических точек.

Цель работы — построение канонического разложения трехмерного тела на m -ручки по данной m -функции и получение критерия гомотопической эквивалентности функций в терминах образующих фундаментальной группы поверхности.

1. РАЗЛОЖЕНИЯ НА М-РУЧКИ

Начнем с разложения на ручки замкнутой поверхности F . Ручкой индекса λ называется произведение $H^\lambda = D^\lambda \times D^{2-\lambda}$. Кривую $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda}$ будем называть кривой приклеивания, а $D^\lambda \times \partial D^{2-\lambda}$ — внутренней кривой. Таким образом, у ручки индекса 0 кривая приклеивания это \emptyset , у ручки индекса 1 — пара отрезков, а у ручки индекса 2 — окружность. Из теории Морса известно, что если у функции $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ на отрезке $[y, z]$ имеется одно критическое значение во внутренней точке отрезка и только одна критическая точка индекса λ принимает это значение, то $g^{-1}(z) \cong g^{-1}(y) \cup_\varphi H^\lambda$ получено из $g^{-1}(y)$ с помощью приклейки ручки индекса λ по некоторому вложению $\varphi : \partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \rightarrow \partial g^{-1}(y)$.

m -ручки могут быть получены из обычных, умножением их на отрезок $[0, 1]$. Будем обозначать их H_+^λ или H_-^λ . Таким образом, $H_+^\lambda \cong H_-^\lambda \cong D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times [0, 1]$.

Граница ∂H_-^λ ручки индекса $(\lambda, -1)$ разбивается на три части:

1. внешняя область $D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 0$,
2. область приклеивания $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times [0, 1]$,
3. внутренняя область $D^\lambda \times \partial D^{2-\lambda} \times [0, 1] \cup D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 1$.

Граница ∂H_+^λ ручки индекса $(\lambda, +1)$ разбивается на две части:

1. внешняя область $D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 1$,
2. область приклеивания $\partial(D^\lambda \times D^{2-\lambda}) \times [0, 1] \cup D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 0$.

После приклеивания m -ручек край будет состоять из внутренних и внешних областей. Их общая граница называется углом многообразия. Область приклеивания последующих ручек вкладывается во внутреннюю область. При этом для ручек индекса $(\lambda, -1)$ в угол вкладывается $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 0$, а для ручек индекса $(\lambda, +1)$ в угол вкладывается $\partial D^\lambda \times D^{2-\lambda} \times 1$. Таким образом, внешние области m -ручек задают разложения на обычные ручки поверхности F . Кроме того, объединение областей приклеивания равно объединению внутренних областей.

Аналогично обычным разложения на ручки, с m -ручками можно осуществлять следующие операции:

1. перестановка ручек — если две ручки не пересекаются их можно приклеивать в произвольном порядке;
2. изотопия приклеивающего отображения ручки, при этом если одна $(1, \pm 1)$ -ручка скользит по другой $(1, \pm 1)$ -ручке, то говорят, что она складывается с этой ручкой.
3. сокращение пар дополнительных ручек — если ручка индекса $(1, -1)$ пересекает $(0, -1)$ или $(2, -1)$ -ручку по двумерному диску, то такую пару ручек

можно сократить (построить другое разложение на ручки без этих двух ручек). Аналогично сокращается пара, состоящая из $(1, +1)$ -ручки и $(0, +1)$ или $(2, +1)$ -ручки, которые пересекаются по отрезку. Обратная операция к сокращению — введение пар дополнительных ручек.

Заметим, что m -ручки будут дополнительными, если у них одинаковый знак числа ϵ и дополнительными ручками будут их ограничения на край.

В [9] доказан критерий гомотопической эквивалентности функций:

Теорема 1. *Две функции на трехмерном теле будут гомотопически эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые числа ручек для каждого индекса и из разложения на m -ручки одной можно получить разложение другой при помощи изотопии, перестановок, добавлений, сокращений и введения пар дополнительных ручек*

Нашей последующей задачей будет по произвольному разложению на ручки с помощью операций 1)–3) построить каноническое разложение на ручки и исследовать его топологические свойства.

Разложение на ручки, не содержащее пар дополнительных ручек или пар, которые могут быть сделаны дополнительными после изотопии, будем называть минимальным. Из связности трехмерного тела и края следует, что разложение на ручки будет минимальным тогда и только тогда, когда в нем содержится по одной $(0, -1)$ - и $(2, +1)$ -ручке и нет $(0, +1)$ - и $(2, -1)$ -ручек.

2. КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ НА РУЧКИ

Разложение на ручки, не содержащее пар дополнительных ручек или пар, которые могут быть сделаны дополнительными после изотопии, будем называть минимальным. Из связности трехмерного тела и края следует, что разложение на ручки будет минимальным тогда и только тогда, когда в нем содержится по одной $(0, -1)$ - и $(2, +1)$ -ручке и нет $(0, +1)$ - и $(2, -1)$ -ручек.

Вначале опишем каноническое разложение на ручки, а затем покажем, что каждое минимальное разложение на ручки может быть приведено к каноническому.

Рассмотрим минимальное разложение на ручки. В каноническом разложении на ручки будет одинаковое число $(1, -1)$ - и $(1, +1)$ -ручек. Для $(1, -1)$ -ручки пару точек $\partial D^1 \times 0 \times 0$, а для $(1, +1)$ -ручки пару точек $\partial D^1 \times 0 \times 1$ будем называть точками приклеивания. Все $(1, \pm 1)$ -ручки не пересекаются. Угол $(0, -1)$ -ручки будет окружностью, которая есть границей внутренней области — двухмерного диска. Отметим на ней $4n$ различных точек и занумеруем их, обходя по окружности. Эти точки будут точками приклеивания $(1, \pm 1)$ -ручек. $(1, -1)$ -ручка, с точностью до изотопии

определяется точками приклеивания. $(1, +1)$ -ручка задается своей областью приклеивания, которая определяется как регулярная окрестность хорды, с концами в точках приклеивания. В каноническом разложении на ручки точками приклеиваниями $(1, -1)$ -ручек будут такие пары: $(1, 3), (5, 7), \dots, (4n - 3, 4n - 1)$, а точками приклеиваниями $(1, +1)$ -ручек будут такие пары: $(2, 4), (6, 8), \dots, (4n - 2, 4n)$ (см. рис. 1).

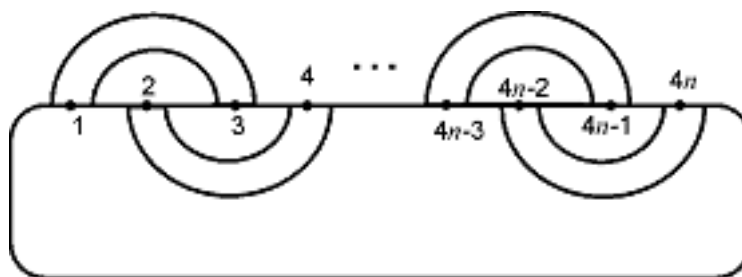


Рис. 1

Здесь изображены «тонкие» ручки, m -ручки получаются из них умножением на $[0, 1]$.

Здесь и далее, мы будем задавать разложение на ручки с помощью поверхности G , которая есть внешней областью, полученной после приклейки $(0, -1)$ -ручки и всех $(1, -1)$ -ручек. Внешние области $(1, -1)$ -ручки будут изображаться вне от 2-диска — внешней области $(0, -1)$ -ручки. $(1, -1)$ -ручки будем называть внешними. Приклеивающие области $(1, +1)$ -ручек будем изображать внутри 2-диска и $(1, -1)$ -ручки будем называть внутренними.

Пара ручек индексов $(1, -1)$ и $(1, +1)$ называется сопряженной, если существует скольжение $(1, +1)$ -ручки такое, что: 1) в результате скольжения приклеивающая область $(1, +1)$ -ручки совпадет с внешней областью $(1, -1)$ -ручки; 2) при скольжении $(1, +1)$ -ручка не пересекает других $(1, \pm 1)$ -ручек. На рис. 1 пары ручек с концами $(4k - 3, 4k - 1)$ и $(4k - 2, 4k)$, $k = 1, \dots, n$, будут сопряженными.

Разложение на m -ручки будем называть полуканоническим, если все $(1, \pm 1)$ -ручки разбиты на пары сопряженных ручек.

Теорема 2. *С помощью скольжений (скольжений) ручек минимальное разложение на ручки может быть приведено к каноническому.*

Доказательство. С помощью скольжений $(1, -1)$ -ручек сделаем так, чтобы они не пересекались. На поверхности G имеется два разложения на ручки: в первом 1-ручки

есть внутренние области $(1, -1)$ -ручек, во втором 1-ручки будут областями приклеивания $(1, +1)$ -ручек. Заклеим компоненты края поверхности G 2-дисками, которые будем рассматривать как ручки индекса 2. Поскольку на замкнутой поверхности две функции Морса гомотопически эквивалентны, когда они имеют одинаковое число ручек каждого индекса [1], то для построенных разложений на ручки одно из другого получается с помощью операций изотопий приклеивающих отображений ручек (сложения ручек). Это означает, что с помощью сложений $(1, +1)$ -ручек их можно сделать сопряженными с $(1, -1)$ -ручками.

Рассмотрим первую пару сопряженных ручек. Пусть их точки приклеивания пронумерованы числами 1–4 как на рис. 1. С помощью скольжения $(1, -1)$ -ручек, как для обычного разложения поверхности на ручки, сделаем, чтобы их точки приклеивания были вне дуги, соединяющей точки 1–4 и содержащей точки 2, 3. При этом внутренние ручки могут скользить обоими концами по своей сопряженной ручке.

Далее рассмотрим вторую пару сопряженных ручек. Сделаем с оставшимися ручками то же самое, что и для первой пары. Продолжая этот процесс получим каноническое разложение на ручки. \square

3. СХЕМА m -ФУНКЦИЙ

Будем обозначать внешние ручки a_1, \dots, a_n , а внутренние — b_1, \dots, b_n . Они соответствуют образующим фундаментальной группы поверхности. Пусть фиксированной точкой есть внутренняя точка (центр) $(0, -1)$ -ручки на поверхности. Петля образуется путем от фиксированной точки до первой точки приклеивания (точки с наименьшим номером) далее средним диском ручки от первой до второй точки приклеивания и далее дугой от второй точки приклеивания до фиксированной точки.

При этом соотношение между образующими задается обходом границы внутренней области $(0, -1)$ -ручки и выписывании букв соответствующих точек приклеивания ручек. Начало ручки будем выписывать с положительной степенью, а конец с отрицательной. Для канонического разложения на ручки получим слово $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$.

Так построенный набор образующих фундаментальной группы поверхности и соотношение будем называть схемой функции.

Рассмотрим теперь процесс сложения ручек. Складываться могут только соседние ручки. В соотношении им отвечают соседние буквы (первая и последняя буквы тоже считаются соседними). Если буква a_k складывается с a_m (или b_m), стоящей от нее справа, то вместо образующей a_k будет новая образующая $\tilde{a}_k = a_m a_k$ ($\tilde{a}_k = b_m a_k$).

При этом в соотношении a_k^{-1} заменится на \tilde{a}_k^{-1} , а a_k будет вытерто и вставлено \tilde{a}_k после a_m^{-1} (b_m^{-1}). Если бы a_k было бы справа от a_m , то при сложении было бы все тоже самое, кроме того, что \tilde{a}_k вставлялось бы перед a_m^{-1} (b_m^{-1}). Если складываем не букву a_k , а a_k^{-1} , то новая образующая имеет вид $\tilde{a}_k = a_k a_m$ ($\tilde{a}_k = a_k b_m$), а остальное как и выше.

В отличие от внешних ручек, внутренние ручки могут складываться только с внутренними. При этом правило будет те же, что и выше с заменой a_k на b_k . Если внутренняя ручка сложилась с внешней (проскользила одним концом по ней), то в результате эти ручки будут пересекаться и чтобы избавиться от таких пересечений нужно проскользить этим же концом в обратном направлении или вторым концом внутренней ручки в том же направлении. Последнее возможно, если ручка дополнительная, а первое приводит к обратному скольжению либо несколькими скольжениями по внутренним ручкам и дополнительным ручкам по своим внешним. Дополнительная ручка в слове задается одним из четырех фрагментов $b_m a_k b_m^{-1}$, $b_m^{-1} a_k b_m$, $b_m^{-1} a_k^{-1} b_m$, $b_m a_k^{-1} b_m^{-1}$. Для первого из них $\tilde{b}_m = a_k^{-1} b_m^{-1} a_k$. При этом в слове $b_m a_k b_m^{-1}$ заменяется на a_k , а a_k^{-1} на $\tilde{b}_m a_k^{-1} \tilde{b}_m^{-1}$.

Описанные выше преобразования, а также замены букв на обратные и перенумерация букв, будем называть допустимыми преобразованиями схемы.

Из построения схемы и теоремы 1 следует

Теорема 3. *Две функции на трехмерном теле будут гомотопически эквивалентными тогда и только тогда, когда из схемы одной функции можно получить схему другой допустимыми преобразованиями.*

Поскольку в каноническом разложении дополнительные внутренние ручки полностью задаются внешними, то необходимо лишь следить, чтобы из внешних образующих одной функции допустимыми преобразованиями можно было получить внешние образующие другой.

Заметим, что внешние образующие являются также полной системой образующих трехмерного тела.

Теорема 4. *Если две функции на трехмерном теле имеют одинаковые числа критических точек каждого индекса, то в фундаментальной группе трехмерного тела образующие заданные первой функцией могут быть получены из образующих второй функции допустимыми преобразованиями.*

Доказательство. Пусть у двух функций одинаковое число критических точек каждого индекса. Построим по ним канонические разложения на m -ручки. Средние диски внутренних ручек после стягивания 0-ручки в точку будут образующими фундаментальной группы тела $\pi_1(M)$. Преобразованиями Нильсена 1)–3) из одной системы образующих можно получить другую. Рассмотрим эти преобразования.

1. Поменять местами образующие. Это означает поменять местами ручки. Покажем как поменять две соседние ручки. Пускай их номера будут первая и вторая. Как на рис. 1. Точки приклеивания первой ручки 1 и 3, а второй 5 и 7. Для этого сделаем следующие скольжения: а) точкой 5 по сопряженной к первой ручке, б) обеими концами 2 и 4 по первой ручке, в) точкой 5 по сопряженной к первой ручке (теперь она слева), г) обеими концами 2 и 4 по первой ручке в обратном направлении, д) обеими концами 6 и 8 по второй ручке, е) движения а)–д) для точки 7.

Поочередно меняя соседние ручки можно поменять местами любые две ручки.

2. Замена образующего на обратный. Соответствует замене ориентации среднего диска ручки.
3. Замена образующего на его произведение с другим образующим. Это соответствует сложению двух внешних ручек, например n -той и k -той. При этом точка приклеивания n -той ручки как в 1) перемещается к k -той ручке, а потом скользит по k -той ручке.

□

Пример. Пусть $n = 2$, $b_1 = a$, $b_2 = b$, $a_1 = c$, $a_2 = d$. Рассмотрим две образующие $c^{-1}c^{-1}a^{-1}b^{-1}cb$ и $dc^{-1}bacbacbc^{-1}$. Вычеркивая из этих слов все буквы a и b , мы видим, что эти образующие в трехмерном теле гомотопны c и d . Однако они не могут быть получены из стандартной системы образующих поскольку первая из них должна быть получена скольжением ручки c либо сама по себе (что невозможно) либо по сопряженным ее к b или $a^{-1}b^{-1}$. Но эти две ручки не есть двойственными к c и поэтому к ним не допустимо сопряжение ручкой c .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для разложения трехмерного тела на m -ручки построено каноническое разложение. Доказано, что гомотопическая эквивалентность функций равносильна возможности получения из одной канонической системы образующих фундаментальной группы края одной функции такую же систему другой функции путем допустимых преобразований.

Авторы надеются, что полученные критерии гомотопической эквивалентности смогут быть использованы для построения гомотопических инвариантов m -функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шарко В. В. Функции на поверхностях I / В. В. Шарко // Некоторые вопросы совр. математики. Праці ін-ту математики НАНУ. — 1998. — Т.25. — С. 408–434.
2. Максименко С. І. Еквівалентність m -функцій на поверхнях / С. І. Максименко // Некоторые вопр. совр. математики. Ин-т математики НАНУ. — 1998. — Т.25. — С. 128–134.
3. Ikegami Kazuichi. Cobordism group of Morse functions on manifolds / Kazuichi Ikegami // Hiroshima Math. J. — 2004. — Vol. 34, No. 2. — P. 211–230.
4. Jankowski A. Functions with non-degenerated critical points on manifolds with boundary / A. Jankowski, R. Rubinstein // Comm. Math. — 1972. — Vol. XVI. — P. 99–112.
5. Prishlyak A. O. Equivalence of Morse function on 3-manifolds / A. O. Prishlyak // Methods of Func. Ann. and Topology. — 1999. — Vol. 5, No.3. — P. 49–53.
6. Лукова-Чуйко Н. В. Пошарова еквівалентність m -функцій загального положення на 3-многовидах з межею / Н. В. Лукова-Чуйко, О. О. Пришляк // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — No.3. — С. 114–123.
7. Пришляк А. О. Эквивалентность m -функций на трёхмерных многообразиях с углами / А. О. Пришляк // Доповіді НАНУ. — 2000. — No.6. — С. 22–26.
8. Пришляк О. О. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, О. Н. Вятчанинлва // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — No.2. — С. 113–119.
9. Пришляк О. О. Гомотопічна класифікація некритичних m -функцій на тривимірному диску / О. О. Пришляк, К. О. Пришляк, О. Н. Вятчанинова // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — No.4. — С. 113–119.

Статья поступила в редакцию 01.12.2012

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

© Р. А. Теймуров

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ НАН АЗЕРБАЙДЖАНА
УЛ. Ф. АГАЕВА 9, Г. БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА
E-MAIL: *rafiqt@mail.ru, rafig.teymurov@gmail.com*

Abstract. The problem of optimal control of processes described by a parabolic type equation with moving sources is investigated in the paper. A theorem on existence and uniqueness of the solution is solved for the optimal control problem. Sufficient conditions of Frechet differentiability of quality test and an expression for its gradient are obtained, necessary conditions of optimality in the form of point wise and integral maximum principles are established for an optimal control problem.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время, ввиду сложности решения задачи оптимального управления подвижными источниками, состояния которого описывается дифференциальным уравнением с частными производными, изучены недостаточно [1, 5]. Для некоторых классов линейных и нелинейных краевых задач, в которых участвуют импульсные функции, исследованы вопросы существования и единственности обобщенного решения.

В исследуемой работе рассматривается задача оптимального управления процессами, описываемыми уравнением параболического типа с управлениями подвижных источников. Для этой задачи доказаны теоремы существования и единственности решения, найдены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала и получены выражение для его градиента, установлено необходимые условия оптимальности в виде точечного и интегрального принципов максимума.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$, $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. В дальнейшем также понадобятся следующие функциональные пространства $V_2^{1,0}(\Omega)$, $W_2^{1,0}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$, которые введены, например, в [3].

Рассмотрим управляемый процесс, состояние которого определяется функцией $u(x, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_t = a^2 u_{xx} + \sum_{k=1}^n p_k(t) \delta(x - s_k(t)), (x, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=l} = 0, 0 < t \leq T, \quad (2)$$

и начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где $a, l, T > 0$ — заданные числа; $\varphi(x) \in L_2(0, l)$ — заданная функция; $\delta(\cdot)$ — функция Дирака; $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)) \in L_2^n(0, T)$, $s(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_n(t)) \in L_2^n(0, T)$ — управляющие функции.

Пару функций $\vartheta = (p(t), s(t))$ будем называть управлением. Для краткости обозначим $H = L_2^n(0, T) \times L_2^n(0, T)$ — гильбертово пространство пар $\vartheta = (p(t), s(t))$ со скалярным произведением

$$\langle \vartheta^1, \vartheta^2 \rangle_H = \int_0^T [p^1(t)p^2(t) + s^1(t)s^2(t)] dt$$

и с нормой $\|\bar{\vartheta}\|_H = \sqrt{\langle \bar{\vartheta}, \bar{\vartheta} \rangle_H} = \sqrt{(\|p\|_{L_2}^2 + \|\vartheta\|_{L_2}^2)}$, где $\vartheta^k = (p^k, s^k)$, $k = 1, 2$.

Положим

$$V = \{(p, s) \in H : 0 \leq p_i \leq A_i, 0 \leq s_i \leq B_i \leq l, i = \overline{1, n}\}, \quad (4)$$

где $A_i > 0, B_i > 0, i = \overline{1, n}$ — заданные числа и рассмотрим функционал

$$J(\vartheta) = \int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx + \sum_{k=1}^n \left\{ \alpha_1 \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 dt + \alpha_2 \int_0^T [s_k(t) - \tilde{s}_k(t)]^2 dt \right\}, \quad (5)$$

где $\vartheta = (p(t), s(t)) \in H$; $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 > 0$ — заданные параметры; $y(x) \in L_2(0, l)$, $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{s}(t)) \in H$, $\tilde{p}(t) = (\tilde{p}_1(t), \tilde{p}_2(t), \dots, \tilde{p}_n(t)) \in L_2^n(0, T)$, $\tilde{s}(t) = (\tilde{s}_1(t), \tilde{s}_2(t), \dots, \tilde{s}_n(t)) \in L_2^n(0, T)$ — заданные функции.

Требуется найти такое управление $\vartheta = (p(t), s(t))$ из множества V и функцию $u(x, t)$, чтобы функционал (5) принимал наименьшее возможное значение при ограничениях (1)–(3).

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Определение 1. Задачу о нахождении функцию $u(x, t) = u(x, t; \vartheta)$ из условий (1)–(3) при заданном управлении $\vartheta \in V$ назовем редуцированной задачей. Под решением редуцированной задачи (1)–(3), соответствующей управлению

$\vartheta = (p(t), s(t)) \in V$, понимается функция $u(x, t) \in V_2^{1,0}(\Omega)$, где функция $u = u(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [-u\eta_t + a^2 u_x \eta_x] dx dt = \int_0^l \varphi(x) \eta(x, 0) dx + \sum_{k=1}^n \int_0^T p_k(t) \eta(s_k(t), t) dt, \quad (6)$$

для $\forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta(x, T) = 0$.

Из результатов работ [2, 4] следует, что при каждом фиксированном $\vartheta \in V$ редуцированная задача (1)–(3) имеет единственное решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$. Пусть выполнены все условия, принятые при постановке задачи (1)–(5). Тогда задача (1)–(5) имеет хотя бы одно решение. Следует отметить, что задача (1)–(5) при $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, 2}$ некорректна в классическом смысле [8]. Однако имеет место

Теорема 1. *Существует плотное подмножество K пространства H такое, что для любого $\omega \in K$ при $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$, задача (1)–(5) имеет единственное решение.*

Доказательства теорем приведены в приложении.

3. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Пусть $\psi = \psi(x, t)$ — решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ сопряженной задачи

$$\psi_t + a^2 \psi_{xx} = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (7)$$

$$\psi_x|_{x=0} = 0, \quad \psi_x|_{x=l} = 0, \quad 0 \leq t < T, \quad (8)$$

$$\psi(x, T) = 2[u(x, T) - y(x)], \quad 0 \leq x \leq l, \quad (9)$$

где $u(x, T)$ — значение при $t = T$ решение редуцированной задачи (1)–(5).

Интегрируя по частям тождество

$$\int_{\Omega_T} (\psi_t + a^2 \psi_{xx}) \eta_1(x, t) d\Omega_T = 0$$

получим, что функция $\psi = \psi(x, t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [\psi \eta_{1t} + a^2 \psi_x \eta_{1x}] dx dt = 2 \int_0^l [u(x, T) - y(x)] \eta_1(x, T) dx, \quad (10)$$

для $\forall \eta_1 = \eta_1(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x, 0) = 0$.

Сопряженная задача (7)–(9) является смешанной задачей для линейного параболического уравнения. Поэтому из фактов, установленных для задачи (1)–(3), следует, что для каждого заданного $\vartheta = (p(t), s(t)) \in V$ задача (7)–(9) имеет единственное решение из $V_2^{1,0}(\Omega)$ [3, 5].

Функцию

$$H(t, \psi, \vartheta) = - \sum_{k=1}^n \{ \psi(s_k(t), t) p_k(t) + \alpha_1 [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)]^2 + \alpha_2 [s_k(t) - \tilde{s}_k(t)]^2 \} \quad (11)$$

назовем функцией Гамильтона-Понтрягина задачи (1)–(5).

Теорема 2. Если $\psi(x, t)$ — решение сопряженной задачи (7)–(9), то функционал (5) дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедливо соотношение

$$J'(\vartheta) = \left(\frac{\partial J(\vartheta)}{\partial p}, \frac{\partial J(\vartheta)}{\partial s} \right) = \left(-\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial s} \right), \quad (12)$$

где

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right), \quad \frac{\partial H}{\partial s} = \left(\frac{\partial H}{\partial s_1}, \frac{\partial H}{\partial s_2}, \dots, \frac{\partial H}{\partial s_n} \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = -\psi(s_k(t), t) - 2\alpha_1 (p_k(t) - \tilde{p}_k(t)),$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_k} = -\psi_x(s_k(t), t) p_k(t) - 2\alpha_2 (s_k(t) - \tilde{s}_k(t)), \quad k = \overline{1, n}.$$

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 2 и $u^*(x, t)$, $\psi^*(x, t)$ — соответственно решения задачи (1)–(4) и (7)–(9) при $\vartheta = \vartheta^* \in V$. Тогда для оптимальности управления ϑ^* необходимо выполнение условия

$$H(t, \psi^*, \vartheta^*) = \max_{\vartheta \in V} H(t, \psi^*, \vartheta), \quad \forall (x, t) \in \Omega. \quad (13)$$

Теорема 4. Для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), s^*(t)) \in V$ необходимо выполнение условия

$$\begin{aligned} \langle J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* \rangle_H &= \sum_{k=1}^n \int_0^T \{ [\psi^*(s_k^*(t), t) + 2\alpha_1 (p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t))] (p_k(t) - p_k^*(t)) + \\ &+ [\psi_x^*(s_k^*(t), t) p_k^*(t) + 2\alpha_2 (s_k^*(t) - \tilde{s}_k(t))] (s_k(t) - s_k^*(t)) \} dt \geq 0, \quad \forall \vartheta \in V, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\psi^*(x, t)$ — решение сопряженной задачи (7)–(9) при $\vartheta = \vartheta^* = (p^*(t), s^*(t))$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе решена задача оптимального управления подвижными источниками, описываемыми уравнением параболического типа. Найдены необходимые условия оптимальности и достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала. Получены формулы для градиента функционала по управляемым параметрам, которые дают возможность применения эффективных методов оптимизации первого порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Докажем непрерывность функционала

$$J_0(\vartheta) = \|u(x, T) - y(x)\|_{L_2[0, l]}^2.$$

Пусть $\Delta\vartheta = (\Delta p, \Delta s) \in V$ приращение управления на элементе $\vartheta = (p, s) \in V$ такое, что $\vartheta + \Delta\vartheta \in V$. Обозначим

$$\Delta u \equiv \Delta u(x, t) = u(x, t; \vartheta + \Delta\vartheta) - u(x, t; \vartheta), \Delta s_k \equiv \Delta s_k(t).$$

Из (1)–(3) следует, что $\Delta u(x, t)$ является обобщенным решением краевой задачи

$$\Delta u_t = a^2 \Delta u_{xx} + \sum_{k=1}^n [(p_k + \Delta p_k) \delta(x - (s_k + \Delta s_k)) - p_k \delta(x - s_k)], \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (\text{П.1})$$

$$\Delta u_x|_{x=0} = \Delta u_x|_{x=l} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (\text{П.2})$$

$$\Delta u|_{t=0} = 0, \quad x \in [0, l], \quad (\text{П.3})$$

Докажем, что для функции $\Delta u(x, t)$ имеет место оценка

$$\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \leq c_1 \|\Delta\vartheta\|_H, \quad (\text{П.4})$$

где $c_1 \geq 0$ — некоторая постоянная.

Домножая обе части уравнения (П.1) на $\eta = \eta(x, t)$ и интегрируя по частям полученной равенство, получим соотношение:

$$\int_0^l \int_0^T [\Delta u_t \eta + a^2 \Delta u_x \eta_x] dx dt = \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k + \Delta p_k] \eta(s_k + \Delta s_k, t) - p_k \eta(s_k, t) dt. \quad (\text{П.5})$$

Пусть $t_1, t_2 \in [0, T]$ такие, что $t_1 \leq t_2$. В тождестве (П.5) положим

$$\eta(x, t) = \begin{cases} \Delta u(x, t), & t \in (t_1, t_2], \\ 0, & t \in [0, t_1] \cup (t_2, T], \end{cases}$$

и применяя формулы конечных приращений для функции $\Delta u(s_k(t) + \Delta s_k, t)$ в виде

$$\Delta u(s_k + \Delta s_k, t) = \Delta u(s_k, t) + \Delta u_{s_k}(\bar{s}_k, t) \cdot \Delta s_k, \quad \bar{s}_k = s_k + \theta \Delta s_k, \quad \theta \in [0, 1],$$

получим уравнение энергетического баланса для задачи (П.1)-(П.3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \sum_{k=1}^n \int_{t_1}^{t_2} [(p_k + \Delta p_k) \Delta s_k \times \\ \times \Delta u_x(\bar{s}_k, t) + \Delta p_k \Delta u(s_k, t)] dt, \quad 345 \quad \bar{s}_k = s_k + \theta \Delta s_k, \quad \theta \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского к правой части уравнения (П.6), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} \leq \\ \sum_{k=1}^n \left[\left(\|p_k\|_{L_2(t_1,t_2)} + \|\Delta p_k\|_{L_2(t_1,t_2)} \right) \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\Delta s_k(t)| \|\Delta u_{s_k}(\bar{s}_k, t)\|_{L_2(t_1,t_2)} + \right. \\ \left. + \|\Delta p_k\|_{L_2(t_1,t_2)} \|\Delta u(s_k, t)\|_{L_2(t_1,t_2)} \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Несложно показать, что верны неравенства:

$$\|\Delta u(s_k, t)\|_{L_2(t_1,t_2)} \leq c_2 \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}, \quad \|\Delta u_x(\bar{s}_k, t)\|_{L_2(t_1,t_2)} \leq c_3 \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

где $c_2 \geq 0, c_3 \geq 0$ -некоторые постоянные.

Но, тогда правую часть неравенства (П.7) можно ограничить сверху следующим образом

$$\frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} \leq c_4 \|\Delta \vartheta\|_{L_2(t_1,t_2)} \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)}, \quad (\text{П.8})$$

при $\|\Delta \bar{\vartheta}\|_{L_2(t_1,t_2)} \rightarrow 0$, где $c_4 > 0$ -некоторая константа. Как и в работе [4, стр.166–168], для произвольного $t \in [0, T]$ разобьем отрезок $[0, t]$ на конечное число подотрезков, на каждом из которых выполняется неравенство (П.8). Затем, сложив полученные неравенства для каждого подотрезка, получим

$$\frac{1}{2} \|\Delta u(x, t)\|_{L_2(0,l)}^2 + a^2 \|\Delta u_x(x, t)\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq c_4 \|\Delta \vartheta\|_H \|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)},$$

откуда вытекает неравенство (П.4). Тогда $\|\Delta u\|_{V_2^{1,0}(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \vartheta\|_H \rightarrow 0$. Отсюда и из теоремы о следах [6] получим, что $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0,l)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \vartheta\|_H \rightarrow 0$.

Приращение функционала $J_0(\vartheta)$ представимо в виде

$$J_0(\vartheta + \Delta \vartheta) - J_0(\vartheta) = 2 \int_0^T [u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0,l)}^2.$$

Отсюда и из того, что $\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0,l)} \rightarrow 0$ при $\|\Delta \vartheta\|_H \rightarrow 0$, следует непрерывность функционала $J_0(\vartheta)$.

Функционал $J_0(\vartheta)$ снизу ограничен и в силу доказанного является непрерывным в V . Кроме того, H — равномерно выпуклое и рефлексивно банахово пространство [7].

Тогда из теоремы Бидо, приведенной в работе [9], следует существование плотного подмножества K пространства H такого, что для любого $\omega = (\tilde{p}(t), \tilde{s}(t)) \in H$ при $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1, 2}$ задача (1)–(5) имеет единственное решение. Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим приращение функционала

$$\begin{aligned} \Delta J \equiv J(\vartheta + \Delta\vartheta) - J(\vartheta) = & 2 \int_0^T [u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx + \int_0^T |\Delta u(x, T)|^2 dx + \\ & + \sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T [p_k(t) - \tilde{p}_k(t)] \Delta p_k(t) dt + \alpha_1 \int_0^T |\Delta p_k|^2 dt + \right. \\ & \left. + 2\alpha_2 \int_0^T [s_k(t) - \tilde{s}_k(t)] \cdot \Delta s_k(t) dt + \alpha_2 \int_0^T |\Delta s_k|^2 dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

где $\vartheta = (p, s) \in V$, $\vartheta + \Delta\vartheta \in V$, $\Delta u(x, T) \equiv u(x, T; \vartheta + \Delta\vartheta) - u(x, T; \vartheta)$, $u \equiv u(x, T; \vartheta)$.

Если в (10) положим $\eta_1 = \Delta u(x, t)$, в (П.5) положим $\eta = \psi(x, t)$ и вычтем полученные соотношения, то имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell 2[u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \\ & = \sum_{k=1}^n \int_0^T [(p_k + \Delta p_k) \psi(s_k + \Delta s_k, t) - p_k \psi(s_k, t)] dt. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Ясно, что при сделанных выше предположениях по формуле Тейлора справедливо разложение:

$$\psi(s_k + \Delta s_k, t) = \psi(s_k, t) + \psi_x(s_k, t) \Delta s_k + o(\Delta s_k).$$

Учитывая это, из (П.10) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell 2[u(x, T) - y(x)] \Delta u(x, T) dx = \\ & = \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k(t) \psi_x(s_k(t), t) \Delta s_k + \psi(s_k(t), t) \Delta p_k(t)] dt + R_1, \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

где $R_1 = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^T \psi_x(s_k(t), t) \Delta p_k(t) \Delta s_k(t) dt + o(\Delta s_k) \right)$.

Ясно, что $R_1 = o(\|\Delta\vartheta\|_H)$. С другой стороны из оценки (П.4) следует, что

$$\|\Delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} = O(\|\Delta\vartheta\|_H).$$

Подставляя полученные соотношения в (П.9) имеем:

$$\Delta J = \sum_{k=1}^n (J_1(k) + J_2(k)) + o(\|\Delta\vartheta\|_H),$$

где

$$J_1(k) = \int_0^T [\psi(s_k(t), t) + 2\alpha_1 (p_k(t) - \tilde{p}_k(t))] \Delta p_k(t) dt,$$

$$J_2(k) = \int_0^T [\psi_x(s_k(t), t) p_k(t) + 2\alpha_2 (s_k(t) - \tilde{s}_k(t))] \Delta s_k(t) dt.$$

Отсюда с учетом выражения функции Гамильтона-Понтрягина получим

$$\Delta J = \left(-\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \Delta\vartheta \right)_H + o(\|\Delta\vartheta\|_H),$$

что показывает дифференцируемость по Фреше функционала (1) и справедливость формулы (12). Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем внутри области Ω точку Лебега (σ, θ) всех функций, входящих в условие задач (1)–(3) и (7)–(9). Пусть $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число и $\varepsilon \equiv \left\{ (x, t) : \sigma - \frac{\varepsilon}{2} < x < \sigma + \frac{\varepsilon}{2}, \theta - \frac{\varepsilon}{2} < t < \theta + \frac{\varepsilon}{2} \right\} \subset \Omega$.

Построим импульсную вариацию управления

$$\vartheta^\varepsilon \equiv (p^\varepsilon, s^\varepsilon) = \begin{cases} \vartheta, & 5A; 8 \quad (x, t) \in \varepsilon, \\ \vartheta^*, & 5A; 8 \quad (x, t) \notin \varepsilon. \end{cases}$$

где ϑ — некоторый постоянный вектор. Обозначим $\Delta u_\varepsilon \equiv u_\varepsilon(x, t) - u^*(x, t)$, где $u_\varepsilon(x, t) = u(x, t; \vartheta^\varepsilon)$. Тогда функция Δu_ε удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \int_0^T [-\Delta u_\varepsilon \eta_t + a^2 \Delta u_{\varepsilon x} \eta_x] dx dt =$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_0^T [p_k^\varepsilon + \Delta p_k^\varepsilon] \eta(s_k^\varepsilon + \Delta s_k^\varepsilon, t) - p_k^\varepsilon \eta(s_k^\varepsilon, t) dt, \quad (\text{П.12})$$

для $\forall \eta = \eta(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta(x, T) = 0$.

Рассуждая аналогично тому, как доказана оценка (П.4), устанавливаем, что для функции $\Delta u_\varepsilon(x, t)$ имеет место оценка

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{V_2^{1,0}(\Omega_T)} \leq c_6 \|\Delta \vartheta^\varepsilon\|_{L_2(\varepsilon)},$$

где $c_6 > 0$ — некоторая константа. Отсюда и из того, что $(\sigma, \theta) \in \Omega$ является точкой Лебега, получим сходимость Δu_ε в $V_2^{1,0}(\Omega)$ к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x, t) \in V_2^{1,0}(\Omega)$ является решением следующего интегрального тождества

$$\int_0^l \int_0^T [\psi_\varepsilon \eta_{1t} + a^2 \psi_{\varepsilon x} \eta_{1x}] dx dt = 2 \int_0^l \left[u_\varepsilon(x, T) - y(x) + \frac{1}{2} \Delta u_\varepsilon(x, T) \right] \eta_1(x, T) dx, \quad (\text{П.13})$$

для $\forall \eta_1 = \eta_1(x, t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ и $\eta_1(x, T) = 0$. Разность $\psi_\varepsilon - \psi^*$ удовлетворяет интегральному тождеству, аналогичному (П.13). Отсюда и из того, что $\Delta u_\varepsilon \rightarrow 0$ в $V_2^{1,0}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим $\psi_\varepsilon \rightarrow \psi^*$ в $V_2^{1,0}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Вычислим приращение функционала (5):

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta^*) \equiv J(\vartheta^\varepsilon) - J(\vartheta^*) &= 2 \int_0^T \left[u^*(x, T) - y(x) + \frac{1}{2} \Delta u_\varepsilon(x, T) \right] \Delta u_\varepsilon(x, T) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T [p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)] [p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)] dt + \alpha_1 \int_0^T [p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)]^2 dt + \right. \\ &\left. + 2\alpha_2 \int_0^T [s_k^*(t) - \tilde{s}_k^*(t)] [s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)] dt + \alpha_2 \int_0^T [s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)]^2 dt \right\}. \quad (\text{П.14}) \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично тому, как доказано соотношение (П.11), и используя тождество (П.13), получим

$$\begin{aligned} &2 \int_0^T \left[u^*(x, T) - y(x) + \frac{1}{2} \Delta u_\varepsilon(x, T) \right] \Delta u_\varepsilon(x, T) dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \int_\varepsilon \left[\psi_{\varepsilon x}(s_k^\varepsilon(t), t) p_k^\varepsilon(t) \Delta s_k^\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(s_k^\varepsilon, t) \Delta p_k^\varepsilon \right] dt. \end{aligned}$$

Учитывая это соотношение в (П.14), имеем

$$\begin{aligned} \Delta J(\vartheta^*) \equiv J(\vartheta^\varepsilon) - J(\vartheta^*) &= \sum_{k=1}^n \int_\varepsilon [\psi_{\varepsilon x}(s_k^\varepsilon(t), t) p_k^\varepsilon(t) \Delta s_k^\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(s_k^\varepsilon, t) \Delta p_k^\varepsilon] dt + \\ &+ \sum_{k=1}^n \left\{ 2\alpha_1 \int_0^T [p_k^*(t) - \tilde{p}_k(t)] [p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)] dt + \alpha_1 \int_0^T [p_k^\varepsilon(t) - p_k^*(t)]^2 dt + \right. \\ &\left. + 2\alpha_2 \int_0^T [s_k^*(t) - \tilde{s}_k^*(t)] [s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)] dt + \alpha_2 \int_0^T [s_k^\varepsilon(t) - s_k^*(t)]^2 dt \right\}. \end{aligned}$$

Тогда из вида функции Гамильтона-Понтрягина (11) имеем

$$\Delta J(\vartheta^*) = - \int_{\varepsilon} [H(t, \psi_{\varepsilon}, \vartheta^{\varepsilon}) - H(t, \psi_{\varepsilon}, \vartheta^*)] dt.$$

В силу того, что $\psi_{\varepsilon} \rightarrow \psi^*$ в $V_2^{1,0}(\Omega)$, отсюда получим формулу для вариации функционала (5):

$$\delta J(\vartheta^*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta J(\vartheta^*)}{\varepsilon} = - [H(\theta, \psi^*, \vartheta) - H(\theta, \psi^*, \vartheta^*)].$$

Из оптимальности управления $\vartheta \in V$ следует, что $\delta J(\vartheta^*) \geq 0$. Отсюда и из плотности всюду в Ω точек Лебега имеем справедливость соотношения (13). Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 4. В силу известной теоремы [2, с. 28] для оптимальности управления $\vartheta^* = (p^*(t), s^*(t)) \in V$ необходимо выполнение неравенства:

$$\langle J'(\vartheta^*), \vartheta - \vartheta^* \rangle_H \geq 0, \forall \vartheta \in V. \quad (\text{П.15})$$

Используя выражение (12) градиента функционала, поставим его в (П.15), получим неравенство (14). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А. Г. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский, Л. М. Пустыльников. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
2. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 400 с.
3. Ладыженская О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1976. — 736 с.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж. Л. Лионс. М.: Мир, 1972. — 416 с.
6. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
7. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 406 с.
8. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин — М.: Наука, 1974. — 286 с.
9. Goebel M. On existence of optimal control / M. Goebel. — Math. Nachr., 1979. — Vol. 93. — P. 67–93.

Статья поступила в редакцию 28.09.2012

AN APPROACH FOR COMPUTING THE DELAUNAY
TRIANGULATION AND THE VORONOI DIAGRAM IN E^d

© V. M. Tereshchenko, D. S. Taran

NATIONAL TARAS SHEVCHENKO UNIVERSITY OF KIEV
FACULTY OF CYBERNETICS
64, VOLODIMIRSKA STR., KYIV, 01601, UKRAINE
E-MAIL: vtereshch@gmail.com, eqis.mail@gmail.com

Abstract. In this paper we propose a new approach to constructing the Delaunay Triangulation for the case of multidimensional spaces ($d > 2$). Analysing the modern state, it is possible to draw a conclusion, that the ideas for the existing effective algorithms developed for the case of $d \leq 2$ are not simple to generalize on a multidimensional case, without the loss of efficiency. We offer for the solving this problem an effective algorithm that satisfies all the given requirements.

INTRODUCTION

The problem of the effective algorithm construction for the Delaunay triangulation has been actual for a long time already. Therefore, many approaches were offered for her solving [1-10]. In the case of a plane the task is completely done as there is the *Worst-Case Optimal* algorithm (the Fortune algorithm [11]).

In [16] authors present theoretic deterministic algorithm for computing the convex hull of n points in E^d in optimal $O(n \log(n) + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ time. Considering direct connection between a convex hull and Voronoi Diagram, they obtain an algorithm for computing the Voronoi Diagram (Delaunay Triangulation) of n points in optimal $O(n \log(n) + n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ time. In particular, one of the most rapid algorithm of construction the convex hull is considered *Quick Hull* [12]. Also there exists efficient practical randomized realizations [17, 18].

However, except theoretical complication there is need in the generalization of the practical estimations of time of algorithms' work. For solving the given task there are several general methods and all known algorithms work in accordance with one of them, in particular: divide-and-conquer, based on a sweep plane (or space), successive points addition (random incremental method) and the direct algorithms.

Sweep Method. The idea of sweep line method consists in a moving imaginary line on a plane, stopped on certain points. Thus, passing the way on the points of events, a sweep line solves the set problem. This approach gives the good results of the Delaunay triangulation construction on a plane (Fortune's Algorithm[11]), however for obvious reasons this algorithm can't be adapted for a spatial case. In multidimensional spaces this algorithm has the type of a motion of a certain surface (more often of a hyperplane).

To support the front hyperplane with the sweep line it is necessary to deal with $(d - 1)$ — dimensional structures. That is why all operations for such structures acquire high calculable complexity and have a high complexity of implication.

Random Incremental Method. The basis of this approach consists in adding the set points one by one and fixing of triangulation [4, 5]. The operation of fixing consists in consideration of “suspicious” pairs of nearby simplexes and so-called “flipping” operation for improper pairs.

The problem of this method is that in multidimensional spaces the flip operation is very complex and consists of many different cases. Another problem is that it is difficult to assess the algorithm complexity, because in different cases the amount of flips may be starting with several ones and ending with a complete change of previously constructed simplexes. Also the number of simplexes formed at a certain step can far exceed the number of resulting simplexes, that will increase radically the working time of the algorithm. This algorithm “ungovernability” can somehow be compensated choosing the order of points bypassing. The order would be ideal when only the resulting simplexes of triangulation are added each time. It would turn this algorithm into the direct one.

Direct algorithms. Direct algorithms build the final result step by step. In this case, the direct algorithm discovers another simplex of resulting triangulation at each step. In general, the algorithm consists of the following steps:

1. To find the original edge and add it to the line.
2. To get the next edge out of the turn.
3. To find a simplex of triangulation based on this edge.
4. If there is a simplex, add all other edges of the simplex to the turn.
5. To go to Step 2.

Unobviously here there are only steps 1 and 3. But step 1 is done once for the entire algorithm, that’s why its optimization does not cause much concern. As for step 3, there is an obvious approach to its interpretation. It consists in reviewing the entire set of points and selecting the necessary one (this point forms the simplex of a minimum radius). This approach to doing this task gives us the slowest algorithm. There is a time estimate $O(mn)$ where m is number of resulting simplexes. So even on a plane this algorithm is quadratic. But unlike all other approaches the direct algorithm is exactly Output-Sensitive. There are several optimizations of finding the next simplex. The main is the grid method (the hash space points) and the method of bubble inflating. But these optimizations are unstable and in some cases may work for an indefinite time.

Divide-and-Conquer Method. Divide-and-conquer is a general and universal approach for solving wide class of tasks. So, in [19], we offer a new conception — “the common

algorithmic space” for solving a set of interrelated geometrical problems of multitask modeling of complex dynamic processes. Basis of the concept is a parallel-and-recursive algorithm “divide-and-conquer”, which uses common algorithmic tools for all complex of tasks: data structures and a set of merge procedures for corresponding problems.

The main problem, which can limit the application of the “divide-and-conquer” technique for solving problems of computational geometry is nonlinearity of the merge stage and linear inseparability of the set of points [13]. For removing the first restriction, in [20], have been offered the data structures, which use simultaneous orderliness on x and y co-ordinates for each point. It allows you to find a median in the list of points on the dividing stage, using only the information about their quantity, and does not depend on their arrangement. At the same time, using the weighted concatenable queue and efficient parallel procedures at the merging stage of algorithm also solves the second problem. It allows for the n points to get $O(\log n)$ time for the dividing stage and $O(\log^2 n)$ time for the merge stage, using “weighted concatenable queue” as data structures [20].

Using data structures, presented in [20], allows to get the efficient solving for all complex of considered problems (including the Delaunay Triangulation and the Voronoi Diagram) in a sequential implementation case. In this case we will get: $O(n \log n)$ – processing stage; $O(\log n)$ – dividing stage and $O(n)$ -merge stage.

It is necessary to notice, that the stage of preliminary processing and the dividing stage are common for all set of problems, and the algorithm has the same efficiency for case $3D$. In particular, the concatenable queue in $3D$ we can illustrate on an example of truncated pyramid which can simulate using the Voronoi Diagram for an orthogonal point set on a plane, fig. 1, 2.

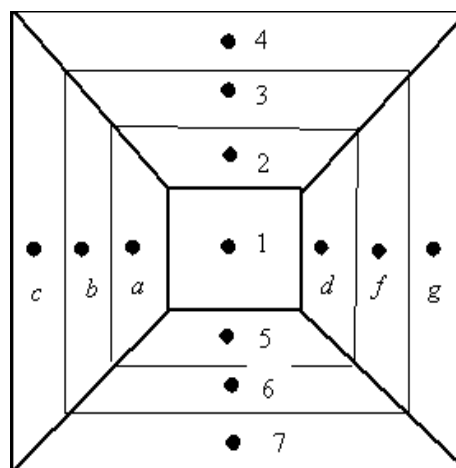


Fig. 1. Example of the concatenable queue in 3D (3d object)

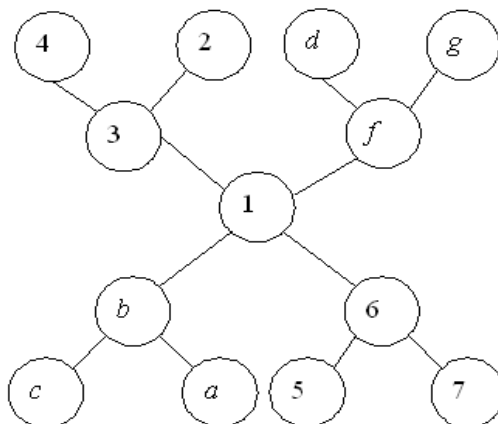


Fig. 2. Example of the concatenable queue in 3D (date structures)

1. THE RESEARCH AIM

As it is seen from the previous review of the existing algorithms for doing the sums, all the algorithms have some drawbacks and in certain situations their work time can be very high. Let's formulate what exactly we would like to receive from the new algorithm:

- 1) the optimal work time;
- 2) stability of work on any sets of points;
- 3) and the universality of multidimensional spaces.

As for these demands, a direct algorithm has high expectations, because it meets quite simply the 2) and 3) requirements. Although the first requirement is the most important, but the direct algorithm leaves much space for optimization. The proposed algorithm in this paper is the achievement of the optimum working speed of direct algorithms. An appropriate implementation of the algorithm and the analysis of its working time were done.

2. ALGORITHM

2.1. **The general idea.** As it was mentioned earlier, the offered algorithm is a direct one. This means that its general steps correspond to the steps of the direct algorithm. But each step is optimized to get the optimal working speed. The step of searching the next simplex underwent the major changes, as this step is the weakest point of the direct algorithm. There is an open edge at this point for which the top is to be found, forming together with the edge the resulting simplex of triangulation. The idea is to reject the review of failed points. Let's have at some stage a nominee for a successful point and consider the location of points that fit better, figure 3.

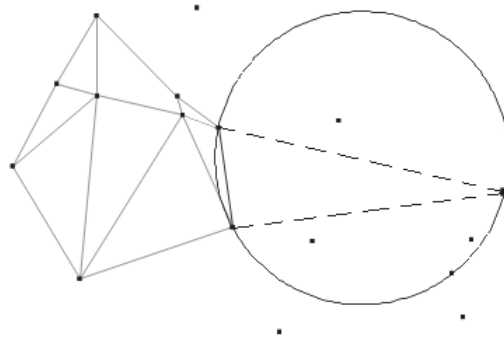


Fig. 3. A successful point and the bettered location of points.

The more optimal points are to be found inside the circle (sphere) circumscedgeing the considered simplex. Then having found a point inside we'll narrow the area of further search. Continuing in this way we will find the point which has no other points inside the descdeged circle. By the Delaunay triangulation definition this is the point that forms a triangle of triangulation. It is easy to notice that this method of search is not limited by the case of a plane. It is also suitable for multidimensional spaces.

2.2. Searching for the initial edge. The first step is to find the initial edge, where the first simplex will be built. The edge is called a face of simplex. In d -dimensional space simplex seems to be $d + 1$ point. The edges of this simplex are all subsets of points that are of d size. Obviously, all faces of the convex hull of the set of points belong to certain simplexes of triangulation of these points. Therefore, the initial edge can be any face of a convex hull. So to find the initial face we can use the same algorithm search Gift Wrapping [13, 14]. The idea is to find consistent hyperplanes, each of which has one point of the convex hull more than the previous one. First find the point of the least first coordinate. This point clearly belongs to the convex hull. Fix the hyperplane perpendicular to the first axis coordinate. The normal of the plane $n = (1, 0, \dots, 0)$. This will be the initial hyperplane F (figure 4 (from book [13] page 162 fig. 3.25 (b))).

Then one after another the next points are searched by the resulting face. Such a point is chosen which forms the largest angle built by the hyperplane on this step. Let's consider how to find the angle between the point and the hyperplane, figure 4.

Vector \mathbf{a} is a perpendicular to the edge $(p_1 p_2)$, which lies in the hyperplane. Vector \mathbf{n} is a normal to the hyperplane. \mathbf{v}_k — is a vector from the new vertex to one of the edge's vertexes. The cotangent of an angle can be computed using the following formula:

$$ctg(\varphi) = pr_{\mathbf{a}\mathbf{v}_k} / pr_{\mathbf{n}\mathbf{v}_k}$$

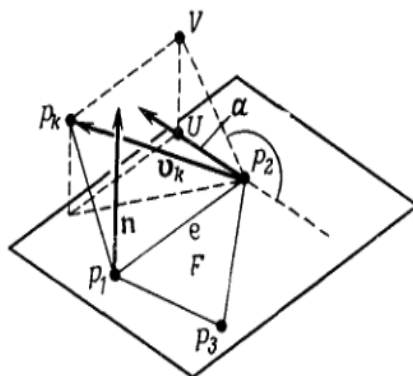


Fig. 4. Finding the angle between the point and the hyperplane.

The projection of vector \mathbf{a} on vector \mathbf{b} is computed as follows:

$$pr_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})/|\mathbf{b}|$$

With cotangents of angles, the largest angle can be found, minimizing the value of the cotangent. Now let's consider in detail how to build vectors \mathbf{a} and \mathbf{n} . At some stage we have hyperplane F_{j-1} built on the $j-1$ points. There is also its normal n . Vector \mathbf{a} must be a perpendicular to vector \mathbf{n} , vectors $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_i$ ($j-2$ vectors) and the axes of coordinates $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_d$. These $d-1$ correlations set the system of linear equations, which having been done we obtain vector \mathbf{a} . With vectors n and a the cotangents of all angles can be found, then find the next point v_j . Now, with the hyperplane F_j , it is necessary to recalculate normal \mathbf{n} . The normal is to be perpendicular to vectors $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_i$ ($j-1$ vector) and the axes of coordinates $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_d$. Having done the corresponding system of linear equations we get normal \mathbf{n} to the new hyperplane p_j . Thus for $d-1$ approaching we get the face of the convex hull.

The Gauss method is used for solving systems of linear equations. It is comfortable to implement and this is its main advantage. Not really the optimal time of its work in our case is not critical. So let's have a system of linear equations:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

The first part of the algorithm results matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ into a triangular form. For this the line with a nonzero coefficient is selected first for this. The place of this line is to be changed with the first one, and then divide all the coefficients on a_{11} . Thus we obtain a unit as the first coefficient of the first line. Reset then all the coefficients of the first column with the help of the first line. For this subtract the first row multiplied at a_{i1} from each line with number i ($i \geq 2$). Then similarly with the second line “destroy” all the other lines. As a result we get the following system:

$$\begin{aligned}x_1 + 0 + \dots + 0 &= b'_1 \\0 + x_2 + \dots + 0 &= b'_2 \\&\dots \\0 + 0 + \dots + x_n &= b'_n\end{aligned}$$

Solving this system is found in an understandable way:

$$x^* = (b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$$

It should be noted that this algorithm is general and we considered the square case for convenience. If there are less equations than variable ones (let them $m < n$), we will get half triangled matrix as result transformations. In this case all the variables x_{m+1}, \dots, x_n are independent. Assign them all the value 1, and then calculate all other variables considering this. Also, sometimes during the transformation a zero column can be obtained. This also means that the variable that corresponds to this column is independent. We can also choose 1 for its meaning.

2.3. Hashing edges. At each step of finding a new simplex, it is necessary to perform certain operations on the edges: add edges to the list of “open”, to check the presence of edges in this list. As these operations are repeated many times, it is necessary to ensure their optimality. All marks on the open edges must be stored in hashes. Thus we get the speed of doing all the operations for time $O(1)$ we need. A edge is a list of d points that are stored by their numbers. Let us solve the task for N points. Then you can choose the hash function of the following form:

$$\text{hash}(e) = (N^0 e.v_1 + N^1 e.v_2 + N^2 e.v_3 + \dots N^{d-1} e.v_d) \text{mod} P$$

Here P is some large prime number, which is caused by memory size, which we are ready to make a hash. With hashing function, edges can be recorded in the corresponding cells array size P . Searching for a particular edge one should simply check the corresponding cell on the presence of this edge. It should be noted that for avoiding

differences it is necessary to sort the list of the edge's vertexes. Otherwise, for different permutations of the same vertexes different hashes will be received.

2.4. Search for the next simplex. The subtask is to find the vertex for an open edge, which together with that edge forms simplex of resulting triangulation. Modification is that, instead of searching all vertexes, find the desired vertex using modified *KD-tree*.

The search starts from an infinite search region $[-\infty; +\infty]^d$. So first let's find any point that can form a simplex with this edge. Now we can narrow the search region, since all the "better" points for the given one are inside the hypersphere fixed around the current simplex (formed by the edge and point-challenger). The hypersphere (which is the region of the next search) is approximated to the hypercube. The larger dimensionality of space d is, the rougher this approximation is. Therefore, with increasing of dimension space the efficiency of the algorithm is lost. The search ends when no single point is found within the gotten region. This means that the chosen point is the vertex of simplex triangulation. The situation is possible when no point was found in the search process. This means that the edge is the face of the convex hull. In this case, this edge closes without adding the simplex. If the point was found, then the corresponding simplex is constructed and recorded into the resulting list of triangulation simplexes. In addition, d new edges simplex are attached to all open edges. When adding a new edge it is possible that this edge is in the queue already. In this case, it must be removed from the queue and marked as "complete". Hash is used for quick checking of the edge's availability as descended in the previous section.

KD-tree [13, 15] is a structure used for fast search the points belonging to the query range. Query ranges are rectangles (parallelepipeds) with the sides parallel to axes of coordinates. It uses $O(n)$ memory. It is built for the time $O(n \log n)$. Each query is done on average for $O(\log n)$, in the worst case, for $O(n^{1-1/d})$. In our case the search region should be narrowed in finding the point. The new region is considered as approximation of circumscribed sphere around the simplex-applicant to hypercube. Supposing, for finding the next point, we have a hypersphere centered at the point $c = (c_1, c_2, \dots, c_d)$ and radius R . The query range will be parallelepiped, parallel to the axes of coordinates. For each coordinate $k = 1, 2, \dots, d$ limited by numbers $c_k - R, c_k + R$. Using KD-tree without changes does not provide with a pure logarithmic search time. In many cases, the time is linear, which makes the algorithm a simple direct algorithm (which is the slowest of all). But the next two optimizations will return the algorithm the desired speed.

2.4.1. The first optimization. Sometimes the search procedure does not result scienter. An example is the convex hull faces, for which there is no simplex, that closes the open edge.

In this case, the search should review all the points and this will increase the working time of the algorithm significantly. But in some cases we can cut off the large search region without a detailed verification. It should be noted that there is 1 or 2 simplexes for every edge of triangulation. Open edges are the edges one of the simplexes of which has already been found, and the other one is to be found. Therefore every open edge actually has a direction — the points search is only in one half-space. That's why the search on regions that lie completely in the other semispace can be immediately discarded. Checking whether a parallelepiped belongs completely to a certain half-space is simple. To do this, check each of the vertexes belonging to this half-space. If they all belong to it — then the whole parallelepiped belongs to this half-space.

2.4.2. *The second optimization.* In the original KD-tree it does not matter from which subset to start the search if it should be continued on both. This is due to the fact that the query range is fixed, that's why the search must check both subsets. In our case, checking one of the subsets, the region may be narrowed and there will be no need in checking the other one. So you need to start the search with a more reliable subset. If the edge is wholly belongs to one of the subsets, it is advantageous to start the search from it. This is due to the fact that the best points in general are closer to the edge than others.

2.4.3. *The update of the query range.* When finding a new vertex-pretender the query range must be updated. The hypersphere circumscedgeing the simplex must be found. The simplex is given with $d + 1$ point. Let's write the system of equations for finding the center of the circumscedgeed hypersphere. This is the point, the distance from which to all points of simplex is the same:

$$(c_1 - p_{11})^2 + (c_2 - p_{12})^2 + \dots + (c_d - p_{1d})^2 = (c_1 - p_{i1})^2 + (c_2 - p_{i2})^2 + \dots + (c_d - p_{id})^2, \\ (2 \leq i \leq d + 1)$$

Reordering the variables we obtain the following equality:

$$c_1(2p_{11} - 2p_{i1}) + \dots + c_d(2p_{1d} - 2p_{id}) = (p_{11}^2 - p_{i1}^2) + \dots + (p_{1d}^2 - p_{id}^2)$$

Thus, we have a system with d ($2 \leq i \leq d + 1$) linear equations for variables $c = (c_1, c_2, \dots, c_d)$. Solving it by the Gauss method, we obtain the solution — the center of circumscedgeed hypersphere. With the center the distance to one of the points of simplex can be calculated, the radius is obtained.

2.5. **The final processing.** Each time, getting a new simplex, it is necessary to write it into the resulting list simplex. It is also necessary to maintain the structure of the neighborhood. For this each of the open edges is put an according simplex, for which this

edge is recorded in the line and hash. After finding the simplex, a closing edge, a mark on the neighbouring resulting simplex and the simplex responding to this edge is made. Also, adding a edge there may be a situation when it is already in the queue. It is necessary to make a mark on the neighbouring simplexes, that generated these edges, and the very edges should be removed from the line. Parallely the Voronoi diagram of these points may be built. The vertexes of the diagram are the centers of the hyperspheres circumscedgeed around simplexes. They were computed in the search simplex process. The edges are the segments between the centers of neighbouring simplexes, figure 5.

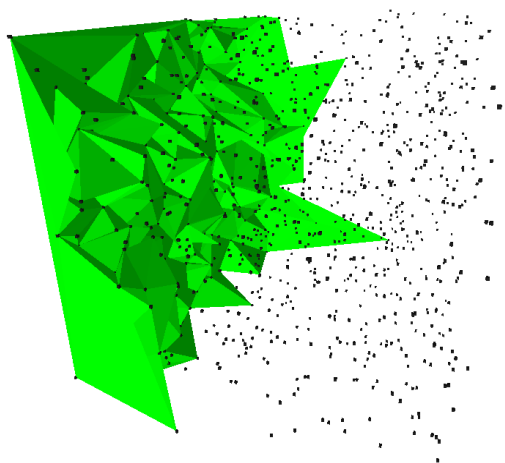


Fig. 5. Constructing the Delaunay Triangulation.

3. ESTIMATION OF THE ALGORITHM COMPLEXITY

First of all, it should be considered the amount of memory used by the algorithm. Let's consider all the structures necessary for the work:

1. The set of all points is stored in the KD-Tree — $O(n)$.
2. Hash operations with the edges — $O(P)$.
3. The list the resulting simplex — $O(m)$.

So the memory evaluation required for the algorithm is $O(n + m + P)$.

Let's consider a sequence of basic operations needed to perform each step of the algorithm:

1. Searching for the initial edge (d repetitions).
 - 1.1. The Gauss method for finding vector \mathbf{a} — $O(d^3)$.
 - 1.2. Finding the point with a maximum angle — $O(dn)$.
 - 1.3. The Gauss method for finding a normal — $O(d^3)$.

2. Finding the next simplex (m repetitions):
 - 2.1. Get the next edge out of the line — $O(1)$.
 - 2.2. Finding the desired point — $O(n^{1-1/d})$ (on average $O(\log n)$).
 - 2.3. Adding the simplex into resulting list — $O(1)$.
 - 2.4. The hash of new edges — $O(1)$.

Hence there is an estimate of the algorithm complexity in the worst case $O(2d^4 + d^2n + mn^{1-1/d})$. But the complicated case is practically unattainable, and such assessment is due only to the complexity to estimate it less roughly. In practice, the expected complexity of the algorithm is more important. It leads to the following estimation of the algorithm complexity $O(2d^4 + d^2n + m \log n)$. Assuming a constant space dimension, we obtain a more concise evaluation of the expected complexity $O(m \log n)$.

Comparing work time is given in Table 1. For reference let's take the fastest algorithm in the plane. For this the implementation of the Fortune algorithm [11]. Both algorithms are to be tested on one computer (usually a laptop with usual characteristics) under the same conditions.

Table 1. Comparing work time of algorithms

Number of points	D-Range	Fortune	Calls	K
100000	2788	1413	27,52	1,973107
200000	5782	3110	29,04	1,859164
300000	8803	4708	29,4	1,869796
400000	12248	6777	30,91	1,807289
500000	14988	8472	30,35	1,769122
600000	18539	10831	32,46	1,711661
700000	21882	12545	32,4	1,744281
800000	24739	15466	31,91	1,599573
900000	28388	17602	32,69	1,612771
1000000	32512	20428	33,92	1,591541

In the first column the number of points for which the tests were conducted is specified. In the second and the third ones the specific time of both algorithms (in milliseconds) is given. The fourth column shows the average number of calls searching for the optimal point of building a new simplex. Coefficient K indicates how many times the proposed algorithm is slower than the Fortune algorithm.

Despite expectations, both algorithms are close to linear time work. Paying attention to coefficient K it is evident that it monotonously decreases with increasing number of points. Some of the D-Range algorithm slowness is connected with the cost of time on the preprocessing (KD-tree and the search of the initial edge). But, unlike offered algorithm (D-Range algorithm) the Fortune algorithm is to work on the plane and is not adapted in a multidimensional space.

CONCLUSION

The result of this work is a new efficient algorithm that is applicable to the cases of multidimensional problem solving of Delaunay triangulation or the Voronoi diagram construction. Its practical implementation is confirmed. Also, paying attention to set requirements, you can specify the stability of the algorithm work and a low dependence on any specific sampling points. The algorithm behaves identically on any sets. Although the algorithm is not theoretically optimal, it is optimal in terms of the expected speed.

REFERENCES

1. *J.E. Goodman and J. O'Rourke, eds.* Handbook of Discrete and Computational Geometry. Second Edition, Chapman and Hall/CRC Press, 2004.
2. *P. Cignoni, C. Montani, R. Scopigno.* DeWall: A Fast Divide and Conquer Delaunay Triangulation Algorithm in E^d . Computer-Aided Design Vol. 30 (5):333-341, 1998.
3. *M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars.* Computational Geometry: Algorithms and Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2008.
4. *L. Guibas, D. Knuth, M. Sharir.* Randomized incremental construction of Delaunay and Voronoi diagrams. Algorithmica 7:381-413,1992.
5. *H. Edelsbrunner, S. Nimish.* Incremental Topological Flipping Works for Regular Triangulations. Algorithmica 15 (3): 223-241,1996.
6. *M. Caroli, M. Teillaud.* Delaunay triangulations of point sets in closed euclidean d-manifolds. In Proc. of the 27th annual ACM symposium on Computational geometry, pages 274-282, 2011.
7. *M. Hoffmann., Y. Okamoto.* The minimum weight triangulation problem with few inner points. Computational Geometry. 34 (3):149-158, 2006.
8. *J. Gudmundsson, H. Haverkort, and M. van Kreveld.* Constrained higher order Delaunay triangulations. Comput.Geom. Theory Appl., 30:271-277, 2005.
9. *R.I. Silveira, M. van Kreveld.* Towards a Definition of Higher Order Constrained Delaunay Triangulations. In proc. 19th Canadian Conference on Computational Geometry, pages 322-337, 2007.
10. *T. de Kok, M. van Kreveld and M. Löffler.* Generating realistic terrains with higher-order Delaunay triangulations. Comput. Geom. Theory Appl., 36:52-65,2007.
11. *S. Fortune.* A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. Algorithmica, 2:153-174,1987.
12. *C.B. Barber, D.P. Dobkin, and H.T. Huhdanpaa.* The Quickhull algorithm for convex hulls. ACM Trans. on Mathematical Software, 22(4):469-483, 1996.

13. *F. Preparata and M.I. Shamos.* Computational Geometry: An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
14. *D. R. Chand and S. S. Kapur.* An algorithm for convex polytopes. JASM 17(1): 78-86, 1970.
15. *J. L. Bentley.* Multidimensional binary search trees used for associative searching. Communications of the ACM 18: 509-517, 1975.
16. *B. Chazelle.* An optimal convex hull algorithm in any fixed dimension. Discrete Comput. Geom., 10:377-409, 1993.
17. *K. L. Clarkson and P. W. Shor.* Applications of randomnessampling in computational geometry. Discrete Comput. Geom.,4:387-421, 1989.
18. *O. Devillers.* The Delaunay hierarchy. Internat. J. Found. Comput. Sci., 13:163-180, 2002.
19. *V. Tereshchenko and A. Anisimov.* One Conception of Creating Tools for Geometric Modeling. In proc. of 7-th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering, Quebec, Canada, pages:260-265,2010.
20. *V. N. Tereshchenko and A. V. Anisimov.* Recursion and parallel algorithms in geometric modeling problems. Journal: Cybernetics and Systems Analysis 46 (2): 173-184, 2010.

Статья поступила в редакцию 01.06.2012

Донской В. И. Колмогоровская сложность и ее применение в машинном обучении / В. И. Донской // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 4–35.

УДК 519.95

Матеріали, що представляються в даній статті, носять, головним чином, оглядовий характер. Метою роботи є достатньо повне представлення можливостей математичного апарату алгоритмічної складності і випадковості для застосування в машинному навчанні. Проте, в статті містяться і нові результати: терми про точні компресори і декомпресори, підхід до визначення моменту зупинки процедури навчання на основі складностного аналога правила Байеса та інші.

Представляемые в данной статье материалы носят, главным образом, обзорный характер. Целью работы является достаточно полное представление возможностей математического аппарата алгоритмической сложности и случайности для применения в машинном обучении. Тем не менее, в статье содержатся и новые результаты: теоремы о точных компрессорах и декомпрессорах, подход к определению момента остановки процедуры обучения на основе сложностного аналога правила Байеса и другие.

Емец Е. М. NP-трудность комбинаторной задачи нахождения максимального потока / Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексійчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 36–44.

УДК 519.85

В статті розглядається задача знаходження максимального потоку з додатковими комбінаторними обмеженнями, яка є узагальненням класичної задачі знаходження максимального потоку. Доведена NP-важкість задачі.

В статье рассмотрена задача нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями, которая является обобщением классической задачи нахождения максимального потока. Доказана NP-трудность задачи.

Лукьянова Е. А. О способах построения и использовании компонентной сети Петри с ингибиторными дугами для анализа её исходной детальной модели Петри / Е. А. Лукьянова // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 45–54.

УДК 004.021: 004.312.4: 004.421.6: 004.414.2

Наведено алгоритм побудови компонентної мережі Петрі з інгібіторними дугами (CN_I -мережі). Можливі способи побудови CN_I -мережі розібрані на прикладах. Встановлений факт використання компонентного аналізу CN_I -мережі для дослідження властивостей детальної моделі досліджуваної системи.

Приведён алгоритм построения компонентной сети Петри с ингибиторными дугами (CN_I -сети). Возможные способы построения CN_I -сети разобраны на примерах. Установлен факт использования компонентного анализа CN_I -сети для исследования свойств детальной модели исследуемой системы.

Марценюк В. П. Про експоненціальну оцінку розв'язку лінійної стаціонарної системи із запізненням, як розв'язок різницевого рівняння / В. П. Марценюк, Н. М. Гандзюк // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 55–63.

УДК 371.68

В даній статті описано визначення експоненціальної оцінки розв'язку лінійної стаціонарної системи із запізненням за допомогою функціоналу Ляпунова-Красовського.

В данной статье описано определение экспоненциальной оценки решения линейной стационарной системы с запаздыванием с помощью функционалу Ляпунова-Красовского.

Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію засолених ґрунтів в тривимірному випадку / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 64–72.

УДК 627.324.2/3:532.72

Вдосконалено математичну модель консолідації ґрунтів з урахуванням їх засоленості та хімічної суфозії. Чисельний розв'язок відповідної тривимірної крайової задачі знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій. Проведено ряд чисельних експериментів.

Усовершенствована математическая модель консолидации грунтов с учетом их засоленности и химической суффозии. Численное решение соответствующей трехмерной краевой задачи найдено безсеточным методом радиальных базисных функций. Проведен ряд численных экспериментов.

Порунов А. Н. Герменевтика непараметрического критерия Ансари-Бредли средствами Mathcad / А. Н. Порунов // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 73–83.

УДК 681.5(075.8)

Показана герменевтика непараметричного критерію Ансари-Бредлі засобами Mathcad. Герменевтична процедура побудована на розборі типових методичних помилок обчислення критерію. Подібна техніка проникнення в суть статистичного критерію в рівній мірі корисна як для початківців так і для більш досвідчених дослідників.

Показана герменевтика непараметрического критерия Ансари-Бредли средствами Mathcad. Герменевтическая процедура построена на разборе типичных методических ошибок исчисления критерия. Подобная техника проникновения в суть статистического критерия в равной степени полезна как для начинающих так и для более опытных исследователей.

Пришляк А. О. Гомотопическая эквивалентность m -функций без внутренних критических точек на трёхмерных телах / А. О. Пришляк, Е. Н. Вятчанинова // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 84–91.

УДК 515.1

Для m -функцій будеться канонічний розклад тривимірного тіла на m -ручки. Отримано критерій гомотопічної еквівалентності m -функцій без внутрішніх критичних точок на тривимірному тілі в термінах твірних фундаментальної групи поверхні.

Для m -функцій строится канонического разложения трехмерного тела на m -ручки. Получен критерий гомотопической эквивалентности m -функций без внутренних критических точек на трехмерном теле в терминах образующих фундаментальной группы поверхности.

Теймуров Р. А. Исследование одного класса задач оптимального управления подвижными источниками / А. О. Пришляк, Е. Н. Вятчанинова // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 92–101.

УДК 517.977

Для розв'язання задачі оптимального керування рухомими джерелами, стан яких описується сукупністю рівнянь параболічного типу і системами звичайних диференціальних рівнянь, доведені теореми існування і єдиності, встановлені достатні умови диференційовності по Фреше цільового функціоналу, знайдено вираження для його градієнту, отримано необхідну умову оптимальності у вигляді інтегрального принципу максимуму.

Для решения задачи оптимального управления подвижными источниками, состояние которых описывается совокупностью уравнений параболического типа и системами обыкновенных дифференциальных уравнений, доказаны теоремы существования и единственности, установлены достаточные условия дифференцируемости по Фреше целевого функционала, найдено выражение для его градиента, получено необходимое условие оптимальности в виде интегрального принципа максимума.

Tereshchenko V. M. An approach for computing the Delaunay Triangulation and the Voronoi Diagram in E^d / V. M. Tereshchenko, D. S. Taran // Таврический вестник информатики и математики. — 2012. — №2 (21). — С. 102–114.

УДК 004.925.8, 004.272.2

В роботі пропонується новий підхід до вирішення задачі побудови триангуляції Делоне для випадку багатовимірних просторів ($d \geq 2$). Аналізуючи сучасний стан, можна зробити висновок, що едеї існуючих ефективних алгоритмів, розроблених для випадку $d \leq 2$ не просто узагальнити на багатовимірний випадок, не втрачаючи при цьому ефективності. Ми пропонуємо один із способів вирішення цього питання, розробивши ефективний алгоритм, який задовольняє всім названим вимогам.

В работе предлагается новый подход к решению задачи построения триангуляции Делоне для случая многомерных пространств ($d > 2$). Анализируя современное состояние, можно сделать вывод, что идеи существующих эффективных алгоритмов, разработанных для случая $d \leq 2$ не просто обобщить на многомерный случай, не теряя при этом эффективности. Мы предлагаем один из способов решения этого вопроса, разработав эффективный алгоритм, который удовлетворяет всем указанным требованиям.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

- Власюк Анатолий Павлович* д. т. н., профессор, заведующий кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и компьютерно-интегрированных систем Национального университета водного хозяйства и природопользования, г. Ровно
- Вятчанинова Елена Николаевна* аспирантка Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
- Гандзюк Надежда Михайловна* ассистент кафедры медицинской информатики с физикой Тернопольского государственного медицинского университета им. И. Я. Горбачевского, г. Тернополь
e-mail: nadiagan84@gmail.com
- Донской Владимир Иосифович* д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, главный редактор журнала ТВИМ
e-mail: donskey@tnu.crimea.ua
- Емец Елизавета Михайловна* к. ф.-м. н., доцент, профессоркафедры мат. экономической кибернетики Полтавского университета экономики и торговли
e-mail: yemetsli@mail.ru
- Лукьянова Елена Александровна* к. ф.-м. н., докторант Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
e-mail: lukyanovaea@mail.ru
- Мартынюк Петр Михайлович* к. ф.-м. н., доцент кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и компьютерно-интегрированных систем Национального университета водного хозяйства и природопользования, г. Ровно
- Марценюк Василий Петрович* д. т. н., профессор, зав. кафедры медицинской информатики с физикой Тернопольского государственного медицинского университета им. И. Я. Горбачевского, г. Тернополь

-
- Мичута Ольга Романовна** аспирант кафедры прикладной математики факультета прикладной математики и компьютерно-интегрированных систем Национального университета водного хозяйства и природопользования, г. Ровно
e-mail: michuta@ukr.net
- Олексійчук Юрій Федорович** старший преподаватель кафедры математического моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли
e-mail: olexijchuk@gmail.com
- Порунов Аркадий Николаевич** к. э. н., доцент кафедры общеэкономических дисциплин филиала Самарского государственного университета в г. Сызрани, Российская Федерация
e-mail: rameno@rambler.ru
- Пришляк Александр Олегович** д. ф.-м. н., профессор кафедры геометрии Киевского национального университета им. Тараса Шевченко
e-mail: mailto:prishlyak@yahoo.com
- Таран Дмитрий Сергеевич** аспирант кафедры математической информатики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Киев
e-mail: eqis.mail@gmail.com
- Теймуров Рафиг Агаджан оглы** старший научный сотрудник Института Математики и Механики НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджанская республика
e-mail: rafiq.teymurov@gmail.com
- Терещенко Василий Николаевич** д. ф.-м. н., доцент кафедры математической информатики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Киев
e-mail: v_ter@ukr.net

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі «Таврійський вісник інформатики і математики» приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Падати заявку на сайті журналу www.tvim.info.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. **Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

У *вступі* необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

- *Постановка проблеми* у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями
- *Аналіз останніх досліджень і публікацій*, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор
- *Невирішені* раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття
- *Формулювання цілей статті (постановка задачі)*

У *висновку* з даного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом) *результати* дослідження та *перспективи подальших розвідок у цьому напрямку*.

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або аббревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2008, № 3.
6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету `twim.sty`, який можна отримати за адресою **www.tvim.info**. Файли статті у форматі TeX і PDF (плюс графічні файли, якщо потрібні) необхідно прикріпити до заявки на публікацію статті на сайті журналу.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надіслати за допомогою сайту **www.tvim.info**, а також у вигляді «твердої» копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м. Симферопіль, Крим, Україна, 95007**.
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

**ПОСТАНОВА
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ
від 15.01.2003 р. №7-05/1**

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України

В.В.Скопенко

Вчений секретар

Л.М.Артюшин

Подписано к печати 10.12.2012. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 13,2 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.

Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, 95007, Украина