

ТАВРИЧЕСКИЙ
ВЕСТНИК
ИНФОРМАТИКИ И
МАТЕМАТИКИ

№ 1 ' 2011

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 26.05.2010 р. №1-05/4 журнал “Таврійський вісник інформатики та математики” внесено до переліку фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата фізико-математичних наук (01.01 – математика, 01.05 – інформатика і кібернетика).

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА

В. И. ДОНСКОЙ,	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Е. П. БЕЛАН,	доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЁВ,	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
М. А. МУРАТОВ,	доктор физико-математических наук
И. В. ОРЛОВ,	доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
С. К. ПОЛУМИЕНКО,	доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ,	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
Ю. С. САМОЙЛЕНКО,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО,	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ,	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. ЧИКРИЙ,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
О. А. ЩЕРБИНА,	доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:

к. ф.-м. н. **А. С. АНАФИЕВ** — ученый секретарь,
к. ф.-м. н. **В. Ф. БЛЫЩИК**, к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА**

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский научный центр Национальной Академии наук
и Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины
пр-т Вернадского, 2, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Факультет математики и информатики ТНУ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

Тел. гл. редактора: (0652) 63-75-42
Тел. редакции: (0652) 602-466
e-mail (гл. редактор): donskoy@tnu.crimea.ua
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Математические модели и методы прогнозирования
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Машинное обучение и извлечение закономерностей
Нелинейный анализ и его применение	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Вычислительная математика
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов

Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ НАН и Министерства образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Протокол № 3 от 3 июня 2011 г.

© КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Анашкин О. В., Митько О. В. Критические случаи устойчивости в системах с импульсным воздействием	5
Донской В. И., Анафиев А. С., Блыщик В. Ф. Информатика и информационные технологии – различающиеся направления университета образования	15
Наконечный О. Г., Чухрай Л. В. Оптимальні гарантовані оцінки розв'язків параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами	27
Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями	43
Литвин О. М., Нечуйвітер О. П. 2D коефіцієнти Фур'є на класі диференційовних функцій та сплайн-інтерлінація	51
Литвин О. М., Першина Ю. І. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області	63
Пічкур В. В., Сасонкіна М. С. Про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов	73
Свириденко А. В., Щербина О. А. Алгоритмы упорядочения переменных в локальном элиминационном алгоритме	81
Кротов К. В., Кротова Т. Ю. Градиентный метод составления расписаний обработки разноприоритетных требований в многостадийной системе с одинаковым порядком обслуживания	93
Лукьянова Е. А., Дереза А. В. Метод моделирования реактивных систем с параллельными и последовательными процессами	107
Терещенко В. Н., Зубарев В. А. Обобщенный метод решения комплекса задач в D-визуализации	117
Газиев Э. Л. О малых колебаниях системы «идеальная жидкость – баротропный газ»	127
Крилова А. С. Дослідження комплекснозначних власних функцій для струнного хреста ..	139
Рефераты	147
Список авторов номера	155
К сведению авторов	159

КРИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАИ УСТОЙЧИВОСТИ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© Анашкин О. В., Митько О. В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: anashkin@crimea.edu

Abstract. The problem of stability of the zero solution of a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse perturbation at fixed moments in a critical case is considered. To study the problem we suggest a new approach based on construction of discontinuous Lyapunov functions. The system of the second order with a cubic nonlinearity is studied on stability by this new approach.

ВВЕДЕНИЕ

Прямой метод Ляпунова является эффективным инструментом исследования устойчивости динамических процессов самой разнообразной природы, в том числе, решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсных систем). Проблема устойчивости решений рассматривалась уже в первой публикации, посвященной импульсным системам [1]. В монографии [2] были изложены основы метода функций Ляпунова для этого класса уравнений. Решения импульсных систем являются разрывными и для исследования их устойчивости естественно использовать разрывные по времени функции Ляпунова [3, 4]. Обратимость основных теорем прямого метода Ляпунова для импульсных систем в терминах разрывных вспомогательных функций обоснована в работах [6] – [10]. Однако подбор подходящей функции Ляпунова, удовлетворяющей этим теоремам, часто оказывается чрезвычайно трудным. Поэтому получение новых теорем о достаточных условиях устойчивости, допускающих более широкий класс вспомогательных функций, является практически важным направлением исследований.

Теория устойчивости импульсных систем имеет много общего с классическими результатами по устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Для импульсных систем известен аналог теоремы об устойчивости по первому приближению и актуальна проблема исследования устойчивости в критических случаях. Теория критических случаев для систем с импульсным воздействием находится пока в начальной стадии разработки и нам известны единичные публикации на эту тематику, например, статьи В. И. Слынько с соавторами [11, 12].

В настоящей работе проведен анализ одного критического случая для системы уравнений второго порядка с кубической нелинейностью. Исследование проводится с помощью разрывной вспомогательной функции, удовлетворяющей условиям теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости, являющихся модификациями результатов из работ авторов [13, 14].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= J_k(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ — моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ — скачок решения $x(t)$ в момент τ_k , $k = 1, 2, \dots$. Система имеет нулевое решение: $f(t, 0) = J_k(0) = 0$. Предполагается также, что функции $f(t, x)$ и $J_k(x)$ обеспечивают однозначную разрешимость начальной задачи. Используется обычное обозначение $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ для решения задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0 + 0) = x^0$ (таким образом учитывается возможность того, что начальный момент совпадает с моментом импульсного воздействия). В теории импульсных систем традиционно предполагается непрерывность решений слева, т. е. $x(t) = x(t - 0)$.

Обозначим через $B_r \subset \mathbb{R}^n$ открытый шар радиуса r с центром в нуле, $B_r = \{|x| < r\}$. Здесь и далее $|\cdot|$ — норма в \mathbb{R}^n .

Нулевое решение системы (1) назовем

– *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно притягивающим*, если некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*.

Обозначим через \mathcal{H} «класс Хана» — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$, и введем в рассмотрение множество $\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$. Будем считать, что моменты импульсного воздействия τ_k

распределены более или менее равномерно, а именно, пусть $0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2$, для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \leq \theta_2$.

В дальнейшем существенную роль играет *линеаризация* системы (1) в нуле

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} &= B_k y, \end{aligned} \quad (2)$$

где $|f(t, y) - A(t)y| = o(|y|)$, $|J_k(y) - B_k y| = o(|y|)$ при $|y| \rightarrow 0$ равномерно по $t \geq 0$ и $k = 1, 2, \dots$

Пусть $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ функция, имеющая на нем не более конечного числа разрывов первого рода. Обозначим $\|\varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|\varphi(t)|, t \in [a, b]\}$ норму в пространстве $KS([a, b])$ всех таких функций.

Используя лемму Гронуолла, можно получить оценку роста нормы решения системы (1) на произвольном конечном отрезке $[t_0, t_0 + T]$: $|x(t; t_0, x^0)| \leq |x^0| \text{Const}$, где Const зависит только от длины промежутка T . Оценку нормы разности решений систем (1) и (2) на отрезке $[t_0, t_0 + T]$ можно получить при помощи теоремы 2.5 из [1, стр. 19] (теорема 4 в [5, стр. 25]):

$$|x(t; t_0, x^0) - y(t; t_0, x^0)| \leq \|x - y\|_{[t_0, t_0+T]} = o(|x^0|) \text{ при } |x^0| \rightarrow 0. \quad (3)$$

При этом оценка равномерна относительно $t_0 \geq 0$ и x^0 из заданной окрестности нуля и зависит только от величины T .

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Введем в рассмотрение множества $G = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$ и $\mathcal{G} = \mathcal{T} \times \mathcal{D}$, где \mathcal{D} — некоторая окрестность нуля.

Будем говорить, что функция $V: G \rightarrow \mathbb{R}$, $V: (t, x) \mapsto V(t, x)$, принадлежит классу \mathcal{V}_1 , если

- 1) функция V непрерывно дифференцируема на множестве \mathcal{G} ;
- 2) для всякого x из \mathcal{D} и $k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} V(t, x) = V(\tau_k, x)$$

и существует конечный предел

$$\lim_{(t,z) \rightarrow (\tau_k+0,x)} V(t, z) = V(\tau_k + 0, x).$$

Следуя [3], будем предполагать, что правая часть f системы дифференциальных уравнений в (1) непрерывна на множестве $(\tau_k, \tau_{k+1}] \times \mathcal{D}$ и для каждого $x \in \mathcal{D}$ существует предел

$$\lim_{(t,z) \rightarrow (\tau_k+0,x)} f(t,z),$$

$k = 1, 2, \dots$. Иными словами, мы допускаем, что правая часть $f(t, x)$ дифференциального уравнения в (1) имеет по переменной t разрывы первого рода.

Используя априорные оценки вида (3), можно доказать следующие теоремы о достаточных условиях асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения системы с импульсным воздействием вида (1).

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого $0 < h$ в области $G_h = \mathbb{R} \times B_h \subset G$ существуют функции $V \in \mathcal{V}_1$ и $\Phi: G_h \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что:*

- (i) $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ для некоторых $a, b \in \mathcal{K}$;
- (ii) $\dot{V} \Big|_{(1)} \leq \Phi(t, x)$ для $(t, x) \in G_h$;
- (iii) существуют постоянные $d > 1$ и $M > 0$ такие, что

$$|\Phi(t, x)| \leq M|x|^d, \quad |\Phi(t, x') - \Phi(t, x'')| \leq Mr^{d-1}|x' - x''|$$

для $(t, x'), (t, x'') \in \mathcal{T} \times B_r$ при всяком $r \in (0, h)$;

- (iv) существуют постоянные $T_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для всех (t_0, x^0) из G_h при $\Delta t \geq T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, y(t; t_0, x^0)) dt \leq -\delta_0|x^0|^d \Delta t,$$

где $y(t; t_0, x^0)$ — решение линеаризации (2);

- (v) $V(\tau_k, x + J_k(x)) - V(\tau_k, x) \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots$

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Областью положительности функции $V: G \rightarrow \mathbb{R}, V(t, 0) \equiv 0$, назовем множество $\{V > 0\} = \{(t, x) \in G: V(t, x) > 0\}$. Будем говорить, что область $\{V > 0\}$ примыкает к нулю, если при всяком $t \geq 0$ и сколь угодно малом $\rho > 0$ множество $\{V > 0\}_t = \{x \in \mathcal{D}: V(t, x) > 0\}$ имеет открытое пересечение со сферой $\{|x| = \rho\}$.

Достаточные условия неустойчивости нулевого решения уравнения (1) мы также будем формулировать в терминах свойств разрывной вспомогательной функции V из класса \mathcal{V}_1 .

Теорема 2 ([14]). Пусть существуют постоянные $\tau \geq 0$, $h > 0$ и функции $V \in \mathcal{V}_1$, $\Phi: [\tau, \infty) \times B_h \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{K}$ такие, что:

- (i) функция V обладает примыкающей к нулю областью положительности $\{V > 0\}$ и $V(t, x) \leq b(|x|)$ в области $\{V > 0\}$;
- (ii) $\dot{V}|_{(1)}(t, x) \geq \Phi(t, x)$ в области $\mathcal{T} \times B_h$;
- (iii) существуют постоянные $d > 1$ и $M > 0$ такие, что

$$|\Phi(t, x)| \leq M|x|^d, \quad |\Phi(t, x') - \Phi(t, x'')| \leq Mr^{d-1}|x' - x''|$$

для $(t, x'), (t, x'') \in \mathcal{T} \times B_r$ при всяком $r \in (0, h)$;

- (iv) существуют постоянные $T_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для всех (t_0, x^0) из области положительности $\{V > 0\}$ при $\Delta t \geq T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \Phi(t, y(t; t_0, x^0)) dt \geq \delta_0|x^0|^d \Delta t,$$

где $y(t; t_0, x^0)$ — решение линеаризации (2);

- (v) $V(\tau_k, x + J_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО КРИТИЧЕСКОГО СЛУЧАЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим следующую систему уравнений второго порядка с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_k x_1 + X_k(x), \\ \dot{x}_2 &= \bar{\lambda}_k x_2 + \bar{X}_k(x), \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \\ x_1(\tau_k + 0) &= x_1(\tau_k) \exp(-\alpha_{k-1} \theta_{k-1}), \\ x_2(\tau_k + 0) &= x_2(\tau_k) \exp(-\alpha_{k-1} \theta_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$, $X_k(x) = \sum_{|\nu|=3} a_{k,\nu} x^\nu$, ν — мультииндекс, $a_{k,\nu} \in \mathbb{C}$, черта над символом обозначает комплексное сопряжение, $\tau_k = \tau_{k-1} + \theta_{k-1}$, $\theta_k \geq \text{const} > 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Последовательности $\{\lambda_k\}$, $\{\theta_k\}$, $\{a_{k,\nu}\}$ являются p -периодическими для некоторого натурального p . В предельном случае $p = 1$ получим систему с постоянными параметрами. Предполагается, что рассматриваемая система эквивалентна вещественной системе дифференциальных уравнений, переменные x_1 и x_2 комплексно сопряжены.

Система линейного приближения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_k y_1, \\ \dot{y}_2 &= \bar{\lambda}_k y_2, \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \\ y_1(\tau_k + 0) &= y_1(\tau_k) \exp(-\alpha_{k-1} \theta_{k-1}), \\ y_2(\tau_k + 0) &= y_2(\tau_k) \exp(-\alpha_{k-1} \theta_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (5)$$

и является устойчивой, но не асимптотически. Таким образом, в системе (4) наблюдается критический случай теории устойчивости.

Пусть $\tau_{k_0-1} < t_0 \leq \tau_{k_0}$. Отметим легко проверяемые непосредственным вычислением свойства решения $y(t) = y(t; t_0, y^0)$ задачи Коши для линеаризации (5) с начальным условием $y(t_0 + 0) = y^0$. При этом мы будем выписывать только выражения для первой проекции y_1 , т.к. вторая проекция комплексно сопряженной.

Во-первых, $|y(\tau_{k_0} + 0)| = |y(t_0)| \text{Const}$.

Во-вторых, для произвольного $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} y_1(\tau_{k+1} + 0) &= y_1(\tau_{k+1}) \exp(-\alpha_k \theta_k) = \\ &= y_1(\tau_k + 0) \exp(\lambda_k \theta_k) \exp(-\alpha_k \theta_k) = y_1(\tau_k + 0) \exp(i\beta_k \theta_k), \end{aligned} \quad (6)$$

следовательно

$$|y_1(\tau_{k+1} + 0)| = |y_1(\tau_k + 0)| = \dots = |y_1(\tau_{k_0} + 0)| = |y_1(t_0)| \text{Const}.$$

В-третьих, из (6) вытекает равенство

$$y_1(\tau_{k+2} + 0) = y_1(\tau_{k+1} + 0) \exp(i\beta_{k+1} \theta_{k+1}) = y_1(\tau_k + 0) \exp[i(\beta_k \theta_k + \beta_{k+1} \theta_{k+1})],$$

Продолжая вычисления, получим для произвольного $k \geq k_0$

$$y_1(\tau_{k+p} + 0) = y_1(\tau_k + 0) \exp[i(\beta_k \theta_k + \beta_{k+1} \theta_{k+1} + \dots + \beta_{k+p-1} \theta_{k+p-1})] = y_1(\tau_k + 0) \exp(i\Theta),$$

где

$$\Theta = \beta_1 \theta_1 + \beta_2 \theta_2 + \dots + \beta_{p-1} \theta_{p-1} \quad (7)$$

в силу периодичности последовательностей $\{\beta_k\}$ и $\{\theta_k\}$. И вообще, для любого натурального s

$$y_1(\tau_{k+ps} + 0) = y_1(\tau_k + 0) \exp(is\Theta). \quad (8)$$

В качестве вспомогательной функции, которая должна удовлетворять условиям одной из сформулированных выше теорем, возьмем первый интеграл линейного приближения (5):

$$V(t, x) = x_1 x_2 \exp[-2\alpha_k(t - \tau_k)] \quad \text{при } \tau_k < t \leq \tau_{k+1}.$$

Как легко проверить, эта функция положительно определена, допускает бесконечно малый высший предел, непрерывно дифференцируема в области \mathcal{G} и имеет по времени t разрывы первого рода в точках $t = \tau_k$, а именно

$$V(\tau_k + 0, x) = x_1 x_2 = |x_1|^2, \quad V(\tau_k, x) = x_1 x_2 \exp(-2\alpha_{k-1}\theta_{k-1}).$$

Таким образом, функция V принадлежит классу \mathcal{V}_1 . Более того, для любого k

$$\Delta V|_{t=\tau_k} = V(\tau_k + 0, y \exp(-\alpha_{k-1}\theta_{k-1})) - V(\tau_k, y) = 0, \quad (9)$$

поэтому $V(t, y(t; t_0, y^0)) \equiv V(t_0, y^0)$ при всех $t \geq t_0$ и является «настоящим» первым интегралом линеаризации (5), сохраняя постоянное значение вдоль любой интегральной кривой линейной системы с импульсным воздействием (5) даже в моменты импульсного воздействия. Это замечательное свойство выбранного нами первого интеграла линеаризации (5) существенно используется в дальнейшем.

На интервале $\tau_k < t < \tau_{k+1}$

$$\dot{V}|_{(4)}(t, x) = \exp[-2\alpha_k(t - \tau_k)] \sum_{|\nu|=3} a_{k,\nu} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2+1} + K.C. = \Phi(t, x),$$

где $K.C.$ — комплексно сопряженная часть выражения.

Пусть $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ — решение системы (4). Принимая во внимание равенство (9), получим

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &= V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, x(t)) dt = \\ &= V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, y(t)) dt + \int_{t_0}^t [\Phi(t, x(t)) - \Phi(t, y(t))] dt, \quad (10) \end{aligned}$$

где $y(t) = y(t; t_0, x^0)$ — решение линеаризации (5). Интеграл от $\Phi(t, y(t))$ представим в следующем виде

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \Phi(t, y(t)) dt &= \int_{t_0}^{\tau_{k_0}} \Phi(t, y(t)) dt + \\ &+ \sum_{s=0}^N \left[\int_{\tau_{k_0+p_s}}^{\tau_{k_0+1+p_s}} \Phi(t, y(t)) dt + \int_{\tau_{k_0+1+p_s}}^{\tau_{k_0+2+p_s}} \Phi(t, y(t)) dt + \dots + \int_{\tau_{k_0+p-1+p_s}}^{\tau_{k_0+p+p_s}} \Phi(t, y(t)) dt \right] + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\tau_{k_0+p+pN}}^t \Phi(t, y(t)) dt. \quad (11)$$

Оценим интеграл от одночлена

$$\int_{\tau_{k+ps}}^{\tau_{k+1+ps}} y_1^{\nu_1}(t) y_2^{\nu_2+1}(t) \exp[-2\alpha_k(t - \tau_{k+ps})] dt.$$

На данном интервале $(\tau_{k+ps}, \tau_{k+1+ps})$ с учетом (8) имеем следующую формулу для $y_1(t)$:

$$y_1(t) = y_1(\tau_{k+ps} + 0) \exp[\lambda_k(t - \tau_{k+ps})] = y_1(\tau_k + 0) \exp(is\Theta) \exp[\lambda_k(t - \tau_{k+ps})], \quad (12)$$

Ключевую роль в дальнейших рассуждениях играет множитель $\exp(is\Theta)$ (предполагается, что $\Theta \neq 0$) в этом выражении для $y_1(t)$, зависящий от s . Легко проверить, что

$$\int_{\tau_{k+ps}}^{\tau_{k+1+ps}} y_1^{\nu_1}(t) y_2^{\nu_2+1}(t) \exp[-2\alpha_k(t - \tau_{k+ps})] dt = y_1^{\nu_1}(\tau_k + 0) y_2^{\nu_2+1}(\tau_k + 0) C \exp[is(\nu_1 - \nu_2 - 1)\Theta],$$

где постоянная C не зависит от s . Поскольку при $\nu_1 - \nu_2 - 1 \neq 0$

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{s=0}^N \exp[is(\nu_1 - \nu_2 - 1)\Theta] \right| < \infty,$$

то на знак интеграла

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, y(t)) dt \quad (13)$$

влияют только одночлены с мультииндексом ν , удовлетворяющим условию

$$\nu_1 - \nu_2 - 1 = 0.$$

Таких в выражении для $\Phi(t, y(t))$ на каждом интервале (τ_k, τ_{k+1}) только два:

$$a_{k,21} y_1^2(t) y_2^2(t) \exp[-2\alpha_k(t - \tau_k)] = a_{k,21} |y_1(t)|^4 \exp[-2\alpha_k(t - \tau_k)]$$

и сопряженный ему.

Представим комплексный коэффициент $a_{k,21}$ в экспоненциальной форме, $a_{k,21} = \rho_{k,21} \exp[i\phi_{k,21}]$. Учитывая представление (11), периодичность коэффициентов рассматриваемой системы, приходим к заключению, что знак интеграла (13)

определяет выражение

$$\mathcal{J} = \sum_{m=1}^{p-1} \rho_{m,21} \frac{\exp[2\alpha_m \theta_m] - 1}{\alpha_m} \cos \phi_{m,21}. \quad (14)$$

При $\mathcal{J} \neq 0$ будут выполнены все условия одной из сформулированных выше теорем об устойчивости. Нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво при $\mathcal{J} < 0$ и неустойчиво при $\mathcal{J} > 0$.

В формуле (14) $\alpha_m \neq 0$, $m = 1, \dots, p$. Если $\alpha_m = 0$ для некоторого m , то из вида решения (3) линеаризации следует, что соответствующее слагаемое в (14) будет иметь вид $2\theta_m \rho_{m,21} \cos \phi_{m,21}$. Интересно отметить, что оно получается из выражения

$$\rho_{m,21} \frac{\exp[2\alpha_m \theta_m] - 1}{\alpha_m} \cos \phi_{m,21}$$

в пределе при $\alpha_m \rightarrow 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье проведен анализ одного критического случая для системы уравнений второго порядка с кубической нелинейностью вида (4). Получена формула индекса устойчивости (14), позволяющая установить характер устойчивости нулевого решения непосредственно по параметрам правой части системы. Исследование проводится с помощью разрывной вспомогательной функции, удовлетворяющей условиям теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости, приведенных в настоящей работе. Используемый в работе подход применим и для получения аналогичного результата для общего случая, когда в правой части системы (4) имеются квадратичные слагаемые. Однако для обоснования требуется модификация теорем об устойчивости, формулируемых в настоящей статье. Этому будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мильман В. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис // Сиб. матем. журнал. – 1060. – Т.1, №2. – С. 233-237.
2. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев, Вища школа, 1987. — 288 с.
3. Lakshmikantham V. Theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov // World Scientific, Singapore – New Jersey – London, 1989.
4. Bainov D. D. Systems with impulse effect: stability, theory and applications / D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — N.-Y., Halsted Press, 1989.

5. Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. И. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
6. Игнатъев А. О. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатъев // Матем. сборник. — 2003. — Т.194, №.10. — С.117-132.
7. Гладилина Р. И. О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем / Р. И. Гладилина, А. О. Игнатъев // Укр. матем. журнал. — 2003. — Т.55, №8. — С.1035-1043.
8. Гладилина Р. И. О необходимых и достаточных условиях устойчивости импульсных систем / Р. И. Гладилина, А. О. Игнатъев // Укр. матем. журнал. — 2003. — Т.55, №8. — С. 1035-1043.
9. Игнатъев А. О. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием / А. О. Игнатъев // Сиб. матем. журнал. — 2008. — Т.49, №1. — С.125–133.
10. Игнатъев А. О. О существовании функции Ляпунова в виде квадратичной формы для линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатъев // Укр. матем. журнал. — 2010. — Т.62, №11. — С.1451–1458.
11. Бабенко С. В. Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях / С. В. Бабенко, В. И. Слынько // Докл. НАН Украины — 2008. — №6. — С.46-52.
12. Двирный А. И. Устойчивость движения нелинейных систем с импульсным воздействием в критических случаях / А. И. Двирный, В. И. Слынько // Сиб. матем. журнал. — 2011. — Т.52, №1. — С.70-80.
13. Анашкин О. В. Прямой метод Ляпунова в задаче об устойчивости систем с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Таврический вестник информатики и математики. — 2010. — №2. — С.9-16.
14. Анашкин О. В. Неустойчивость в системах с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, О. В. Митько // Ученые записки ТНУ, серия физ.-мат. науки. — 2011. — Т. 24(63), №1. — С.125-131.

Статья поступила в редакцию 20.05.2011

ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ – РАЗЛИЧАЮЩИЕСЯ НАПРАВЛЕНИЯ УНИВЕРСИТЕТСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

© Донской В. И., Анафиев А. С., Блыщик В. Ф.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА

E-MAIL: donskoy@crimea.edu, anafiyev@gmail.com, veb@land.ru

Abstract. Under the circumstances, a maintenance and development of achievements of Ukrainian school of theoretical informatics today appeared more than usual actual. One of necessary elements of decision of this problem is strengthening of theoretical informatics as mathematical discipline and its teaching in such key in classic universities. To defend this position is a purpose of the annotated article.

ВВЕДЕНИЕ

Роль информатики в современном мире невероятно высока. Ее направления так широки и многочисленны, что трудно указать сферу человеческой деятельности или программу профессиональной подготовки, где бы не использовалась информатика.

Компьютерами пользуются практически все люди, включая детей. Но все ли они – информатики? Точно также, каждый ли человек, знающий формулировку теоремы Пифагора или научившийся интегрировать – математик?

Сложность классификации и выбора направлений информатики для включения в перечень специальностей конкретного учебного заведения объясняется стремительностью развития самой информатики, ускоряющимся процессом рождения новых идей, технологий, устройств. Но нельзя забывать о том, как информатика пришла в наш мир, как математики 30-40х годов XX века открыли теорию вычислений, изобрели вычислительные модели, структуру универсального конечного компьютера и в целом – заложили фундамент компьютерной математики (теоретической информатики). Нет сомнений, что в этом направлении и впереди еще много открытий. Значительное место в мировом становлении и развитии теоретической информатики в 60-70х годах играла украинская научная школа академика Глушкова.

Сложилось так, что на сегодняшний день *актуальным оказалось сохранение и развитие достижений украинской школы теоретической информатики. Одним из необходимых элементов решения этой задачи является укрепление теоретической информатики как математической дисциплины и ее преподавание в таком ключе в классических университетах. Отстоять эту позицию – цель настоящей статьи.*

Нужно сразу оговориться: в статье не фигурирует термин «кибернетика», обозначающий важнейшее направление науки. Это сделано для того, чтобы не уйти от основной задачи статьи. Вопрос о соотношении между информатикой и кибернетикой – отдельный. Сакральное отношение авторов статьи к кибернетике не позволяет вскользь рассматривать этот вопрос.

1. ИНФОРМАТИКА: АПОЛОГЕТИКА МАТЕМАТИКИ

Понятие информатики является очень широким. Это и наука, основанная на обширной и содержательной теории, и область прикладных исследований, и важная современная учебная дисциплина, и сфера междисциплинарных приложений и технологических разработок, во многом определяющих современное состояние общества.

Термин «информатика» возник как слияние французских слов *information* и *automatique* и предназначался для обозначения автоматической обработки информации. Широко распространён англоязычный вариант этого термина – *Computer Science*, что означает буквально «компьютерная наука». Информатике дают различные определения, как правило, отмечая, что главное внимание информатики сосредоточено на процессах извлечения, хранения, преобразования, передачи и использования информации.

Теоретическим аспектам посвящается раздел информатики, который в англоязычной литературе называют *Theoretical Computer Science* (теоретическая информатика). Прикладные разделы информатики – это *Computer Engineering* (компьютерная инженерия со своими задачами построения вычислительных сетей, систем и машин), *Software Engineering* (инженерия программного обеспечения), социальная информатика [2], экономическая информатика и многие другие. Исторически сложилось так, что теоретическая информатика чаще всего именуется просто как информатика. По мнению чл.-корр. РАН А. Разборова, теоретическая информатика является «весьма протяженной и в некотором смысле буферной дисциплиной, непрерывно заполняющей целый спектр между чистой логикой/математикой, с одной стороны, и реальными задачами, решаемыми системщиками, – с другой. Наиболее существенная разница между настоящими вычислительными процессами и их теоретическими моделями состоит в том, что достижения теоретической информатики по определению имеют форму математических теорем, удовлетворяющих всем стандартам строгости классической математики» [3].

На сегодняшний день теоретическая информатика – это раздел математики, связанный с исследованиями и решениями математических проблем алгоритмическим

методом. Суть алгоритмического метода состоит в нахождении решения в виде последовательности достаточно простых действий – шагов, которую и именуют алгоритмом. Алгоритм – одно из фундаментальных понятий математики, строго определенное при помощи ряда эквивалентных моделей вычислений. В частности, в рамках одного из таких определений, принятого в сегодняшней математике, существование алгоритма решения проблемы равносильно существованию машины (алгоритмической модели) Тьюринга, обеспечивающей корректное решение этой проблемы за конечное число шагов. Вычислимость определяется как возможность решить задачу на такой тьюринговской машине. Любая из упомянутых эквивалентных моделей вычислений предполагает существование конечной программы для получения решения каждой из алгоритмически разрешимых проблем. Так, например, программа для машины Тьюринга – это конечная последовательность однотипных инструкций-команд, каждая из которых обеспечивает чтение символа из текущей ячейки ленты, запись символа в эту ячейку, смену состояния машины и сдвиг головки чтения-записи на одну ячейку. Для каждой такой программы существует эквивалентная конечная схема нормального алгоритма в модели Маркова и частично рекурсивная модель вычислений с операциями суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Именно наличие точно определенных вычислительных программ позволяет говорить об автоматических вычислениях (обработки заданной начальной информации), что, собственно и оправдывает введение термина «информатика».

Теоретическая информатика является математической дисциплиной, что становится ясным, если учесть следующие обстоятельства:

- алгоритмический метод имеет математически точное определение;
- информация получает точное математическое определение в терминах конечных алфавитов и множеств слов над этими алфавитами: в теоретической информатике информация – это любая цепочка символов в заданном алфавите;
- алгоритмы могут рассматриваться как алфавитные отображения;
- компьютеры, работающие в соответствии с принципами Дж. Фон Неймана (таковые составляют подавляющее большинство в настоящее время), являются конечным подклассом универсальной алгоритмической модели.

Нужно подчеркнуть, что определение информации как цепочки символов (вообще говоря, произвольной длины) является достаточно общим и естественным. Так, любая книга по математике или любая другая книга – это цепочка символов с переносами по строкам, страницам, томам. При этом такие специальные знаки, как интеграл, предел и прочие – также являются лишь символами.

Нетрудно понять, что все указанные *объекты теоретической информатики являются абстрактными, что является одним из основных признаков математики как науки.*

Математические вопросы теоретической информатики разнообразны и содержательны. Перечислим некоторые из них (заметим, – далеко не все):

- существует ли для заданного класса задач (обобщенно называемого проблемой) возможность решения алгоритмическим методом? Это вопрос алгоритмической разрешимости;
- какова сложность решения заданной алгоритмически разрешимой проблемы?
- как вообще определять и распознавать сложность алгоритмически разрешимых проблем? (Одна из задач теории алгоритмической сложности – проблема равенства классов P и NP – является одной из семи математических задач тысячелетия, за решение которой Математический институт Клэя назначил премию в миллион долларов);
- для заданной разрешимой алгоритмически проблемы синтезировать алгоритм её решения, удовлетворяющий заданным условиям-ограничениям или доказать, что такового не существует;
- синтезировать алгоритм максимального сжатия информации, относящейся к допустимому классу начальных информаций;
- создание алгоритмов семантического поиска в больших массивах информации;
- создание алгоритмов кодирования, декодирования информации, автоматического исправления ошибок при передаче информации;
- создание алгоритмов понимания и распознавания информации, её преобразования, визуализации, расшифровки;
- разработка алгоритмов решения слабоформализованных задач и задач с неполной информацией;
- изучение и создание методов хранения больших объемов информации (хранилищ данных) и уже разработанных алгоритмов (алгоритмические базы знаний);
- создание алгоритмов извлечения закономерностей из эмпирической информации;
- функциональные построения в системах алгоритмических алгебр;
- теория верификации и оптимизации алгоритмов и программ;
- оптимизация вычислений;
- автоматическое доказательство теорем в формальных системах (исчислениях);
- изучение исчислений, автоматов и формальных языков;

- создание принципов построения конечных компьютерных реализаций алгоритмических языков процедурного и не процедурного типов;
- создание алгоритмической теории обработки и анализа изображений и речи (на основе сужения начальной информации до вида, допустимого для обработки на конечных вычислителях).

Очевидно, что теория алгоритмов и понятие вычислимости является базой теоретической информатики. Теория алгоритмов и математическая логика – разделы математики и информатики, которые неразрывно связывают эти две дисциплины. В обзорной книге по теории алгоритмов [4] перечислен впечатляющий *список основных математических открытий, связанных с понятиями алгоритма и исчисления*:

1. Общее понятие алгоритма как самостоятельное (отдельное) понятие.
2. Представительные вычислительные модели.
3. Общее понятие исчисления как самостоятельное (отдельное) понятие.
4. Представительные порождающие модели.
5. Выяснение связей между алгоритмами и исчислениями.
6. Время и ёмкость как сложности вычисления и порождения.
7. Вычислимые функции и породимые множества (множества, порожденные исчислениями).
8. Понятие частично-рекурсивной функции.
9. Возможность арифметического и даже диофантова представления любого перечислимого числового множества.
10. Построение неразрешимого породимого числового множества.
11. Проблема сводимости Поста.
12. Понятие относительного алгоритма, или алгоритма с оракулом.
13. Понятие вычислимой операции.
14. Понятие программы: программы как объекты вычисления и порождения.
15. Понятие нумерации и теория нумераций.
16. Начало создания инвариантной, или машинно-независимой, теории сложности вычислений.
17. Теория сложности и энтропия конструктивных объектов.
18. Удобные и экономные вычислительные модели.

Приведенное выше обоснование положения о том, что информатика – математическая дисциплина, делает очевидным, что *изучение информатики в классических университетах должно осуществляться в направлении физико-математических*

наук. Формирование специалиста в области теоретической информатики требует введения в учебные программы большого количества математических дисциплин, систематической подготовки «по линии»: «Математический анализ, дифференциальные и разностные уравнения, дискретный анализ – алгебра, геометрия, топология, теория алгоритмов, вычислительная геометрия, математическая логика, k -значная логика, логическое программирование – теория исчислений, формальных языков и автоматов – теория информации, кодирования, криптография – теория сложности вычислений, вычислительная математика – функциональный анализ, субрекурсивные функции, классическая теория вероятностей, алгоритмическая теория вероятностей, математическая статистика, анализ данных – исследование операций, математическая теория распознавания и управления, дискретная оптимизация, теория графов и сетей, теория принятия решений, поиск в пространстве состояний – нейросетевые и квантовые вычисления – теория программирования, вычислительных архитектур и операционных систем, параллельное программирование – языки и методы программирования, принципы построения компиляторов, теория баз данных и знаний, спецязыки программирования – системный анализ, методы анализа и синтеза сложных систем – математическое моделирование, теория искусственного интеллекта и машинное обучение – методология научных исследований и преподавания информатики». Подготовка специалистов в области теоретической информатики обязательно требует подключения к теоретическим (математическим) дисциплинам прикладных предметов, посвященных современным программным и аппаратным платформам, распространенным языкам программирования и средам разработки проектов – необходимому практическому дополнению, нужному для закрепления теоретических понятий и выработки навыков применения теоретических принципов информатики при создании прикладных систем.

Для того чтобы изучить дисциплины, которые перечислены указанной выше «линией» подготовки специалистов в области теоретической информатики на достаточно содержательном математическом уровне, на взгляд авторов настоящей статьи, необходимо не менее шести лет упорной учебы в университете. И выпускник, получивший такое образование, несомненно, должен иметь в составе квалификационной формулы специальности слово «математик». Понятно, что это только часть квалификационной формулы: её нужно расширить, уточнить. Например, «Магистр математики и теоретической информатики» (так было бы правильно); «Математик. Программист. Преподаватель информатики» (Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского) или «Математик. Системный программист» (Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, где теоретическая информатика

изучается студентами специальности «Прикладная математика и информатика»). Если идет речь о бакалаврском уровне, то подходящей, на наш взгляд, является квалификация «Бакалавр теоретической информатики. Математики, получившие классическое математическое образование, могли бы классифицироваться как «Магистр чистой математики» и «Бакалавр чистой математики» соответственно. Заметим, что для классических математиков отсутствие в учебных программах теории алгоритмов и основ теоретической информатики и программирования на сегодняшний день немыслимо.

Неожиданной и, на наш взгляд, ошибочной, явилась представленная бакалаврским стандартом по направлению 040302 «Информатика» и утвержденная приказом МОНУ №880 от 16.09.2010 г. формула квалификации 3121 «Специалист по информационным технологиям». Не соответствует теоретической информатике как науке и наименование области знаний 0403 – «Системные науки и кибернетика», в которую включается направление 040302 «Информатика». Мотивировка разработчиков указанного стандарта связана именно с формированием специалистов в области информационных технологий, а не в области теоретической информатики [1].

Представляется ошибочным выделение в отдельную область знаний 0403 – «Системные науки и кибернетика» направлений «Прикладная математика», «Информатика» и «Системный анализ». Эти направления должны быть включены в направление 0402 – «Физико-математические науки» вместе с математикой и физикой. Кроме приведенных выше соображений, мнение авторов статьи подкрепляется тем, что для специалистов высшей квалификации (кандидатов и докторов наук) специальности 01.05.01 – «Теоретическая информатика и кибернетика», 01.05.04 – «Системный анализ и теория оптимальных решений» включены в раздел 01 – «Физико-математические науки» (подраздел 01.05 – «Информатика и кибернетика»).

Специальность «Информатика» в классических университетах, по мнению авторов настоящей статьи, вовсе не нуждается в увеличении нагрузки на информационные технологии. Напротив, она нуждается в углублении теоретической подготовки математиков-информатиков. Не уменьшая важности подготовки специалистов в области информационных технологий (в том числе и в классических университетах, но по другим специальностям, отличным от специальности «Информатика»), можно с уверенностью полагать, что только на основе глубокого знания новейших математических вопросов информатики можно осуществлять прорывные шаги вперед вместо того, чтобы «плестись» в хвосте технологий, устаревание которых происходит едва ли не быстрее темпа подготовки университетских специалистов. Иначе говоря, превратив университетскую Информатику в ИТ, можно, не достигнув успехов в технологии

и непрерывно изучая устаревающие решения, утратить те возможности, которые позволяли советским, а в настоящее время – украинским математикам-информатикам демонстрировать способность к выработке новых передовых идей. Мы уверены, что Виктор Михайлович Глушков поддержал бы такую точку зрения.

2. ИНФОРМАТИКА И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Информационные технологии – обширное и важнейшее направление в образовании. Важнейшее, но существенно отличающееся от направления, обозначаемого как информатика (теоретическая информатика). Заметим, что на факультете ВМК МГУ направления «Прикладная математика и информатика» и «Информационные технологии» разделены. Это представляется правильным решением. Обучение по направлению «Информационные технологии» предполагает подготовку IT-профессионалов для видов деятельности, требующих глубокой фундаментальной подготовки, включая создание и использование новых информационных технологий, реализованных в виде систем, продуктов и сервисов; разработку и применение математических моделей процессов и объектов, современных математических методов и технологий для решения задач науки, техники, экономики и управления; использование информационных технологий в проектно-конструкторской, управленческой и финансовой деятельности.

Рассмотрим в качестве примера дисциплины магистерской программы Нижегородского государственного университета специальности «Инженерия программного обеспечения» направления «Информационные технологии» (2006 г.), которые разбиты на разделы и представлены ниже в таблице 1.

Из приведенной таблицы видно, насколько сильно отличаются магистерские дисциплины специальности «Информационные технологии» от дисциплин, которые должны быть направлены на формирование магистра теоретической информатики (университетской специальности информатика). Здесь усматривается и менеджмент в информатике – важный современный предмет. Но, двигаясь в таком направлении, можно прийти и до вопросов продвижения продукта на рынке IT, из чего вовсе не следует, что математиков-информатиков нужно загрузить изучением подобных дисциплин.

Информатику и информационные технологии совершенно естественно и правильно разделить на два образовательных направления, как это сделано в России. Еще раз подчеркиваем: IT и теоретическая информатика одновременно нужны и важны. Но различие – очень существенное. Самая сложная задача подготовки IT-специалистов – обеспечить достаточный уровень знаний современных выдающихся технологических разработок одновременно с высоким уровнем фундаментальной

підготовки, позволяючим створювати нові технології в інформатиці. Останнє відмічено і авторами згаданого вище стандарту [1].

Таблиця 1

Розділи програми і навчальні дисципліни	Кол. годин
Науково-методическіе і математическіе основи інформаційних технологій	300
Моделі і методи інформаційних технологій	128
Формальні моделі і методи проектування ПО	104
Інженерні основи інформаційних технологій	68
Современні інформаційні технології в науці і освіті	602
Современні технології системного програмування	128
Современні бази даних і знань	124
Сетеві і Інтернет технології	142
Управління ІТ проектами	136
Аналіз бізнес процесів	34
Оцінка і планування проекту	32
Управління командою розробників	36
Управління ризиками ІТ проекту	34
Управління якістю (ІТ-процесу)	104
Стандарти і засоби управління якістю процесу	36
Стандарти і засоби тестування ПО	68
Управління вимогами (к ІТ-продукту)	144
Аналіз вимог	72
Управління вимогами, конфігурацією і змінами	72
Проектування і розробка ПО	294
Технології проектування ПО	36
Патерни проектування і реалізації	72
Проектування архітектури ПО	72
Об'єктно-орієнтований аналіз і проектування ПО	114
Внедрення і супроводження ПО	72
Дисципліни по вибору студента	72
Аналіз продуктивності і оптимізація ПО	
Проектування користувацьких інтерфейсів	
Інформаційна безпека ПО	

3. КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ И УСПЕХИ В ПРОГРАММИРОВАНИИ (ПО МАТЕРИАЛАМ АСМ ICPC)

Анализируя результаты международных соревнований по программированию ICPC за последние три года, можно заметить, что первые 20 мест, как правило, занимают команды классических университетов. На наш взгляд, успешность на соревнованиях ICPC является одним из показателей качества подготовки студентов в университетах в области математических методов и программирования. Чтобы исключить ситуации случайного успеха, приведем данные пяти лучших команд мира по сумме мест за последние три года (Таблица 2). Например, для МГУ эта сумма составляет 26 (14 место в 2009 году, 2 место в 2010 году, 10 место в 2011 году). К первым пяти – лучшим командам – для сравнения добавлены еще четыре команды.

Таблица 2

Университеты, команды которых показали высокие результаты на АСМ ICPC	Сумма баллов за три года 2009-2011
Tsinghua University	11
Zhejiang University	13
СпбГУ	16
Саратовский госуниверситет	16
МГУ	26
СпбУ ИТ МО	31
Massachusetts Institute of Technology	50
Уральский госуниверситет	44
Киевский национальный университет	66

Охарактеризуем кратко первую пятерку университетов из этой таблицы.

Университет Tsinghua находится на первом месте в перечне лучших китайских университетов в области информатики и IT, а университет Zhejiang – на третьем месте в этом списке (см. <http://top.at0086.com/university/2011/Discipline/Computer-Science-and-Technology-Programs.html>). Классические университеты Tsinghua и Zhejiang имеют в своем составе департаменты математики, а также информатики и информационных технологий. Эти университеты – ведущие в Китае, также как Санкт-Петербургский и Московский университеты в России, которые выпускают и классических математиков, математиков по специальности «Прикладная математика и информатика», бакалавров и магистров по специальности «Информационные технологии».

Команда программистов Саратовского госуниверситета впервые приняла участие в полуфинале чемпионата мира по программированию в 1996 году. С 1998 года университет является организатором четвертьфинала чемпионата мира (АСМ ICPC) для студентов вузов Южного и Приволжского регионов России, в который входит 26 субъектов РФ. В 2003 году в университете был создан Центр олимпиадной подготовки программистов. Олимпиадная подготовка программистов стала играть существенную роль в университете, охватывая все большее число наиболее способных, талантливых, заинтересованных и трудолюбивых студентов различных факультетов, в первую очередь, студентов *механико-математического факультета*. Начиная с 2002 года, команды Саратовского госуниверситета завоевали 4 раза серебряные медали, дважды – золотые, дважды звание чемпионов Европы, в 2008 году – звание чемпионов России, а в 2006 году – звание чемпионов мира [5].

Лучшие результаты на АСМ ICPC украинских команд (наивысшие места по 2008-2011 годам среди ВУЗов Украины) показали классические университеты: Львовский национальный университет (4 место в 2008 году), Таврический национальный университет (20 место в 2009 году, первое 1 место в полуфинале ICPC в Юго-Восточной европейской полуфинальной зоне сезона 2010-2011), Киевский национальный университет (4 место в 2010 году), Донецкий национальный университет (8 место в 2011 году).

Выводы

Специальность «Информатика» направления 040302 безусловно должна относиться к области физико-математических наук, и выпускников по этой специальности следует квалифицировать, например, как «Бакалавр теоретической информатики» и «Магистр математики и теоретической информатики» либо (для магистров, в программу обучения которых включены предметы: педагогика, психология, методика преподавания математики и информатики) «Математик-программист. Преподаватель информатики». Для университетов, не имеющих в своем составе математических факультетов или, по крайней мере, пяти-шести математических кафедр, открывать такую специальность нецелесообразно. Здесь может использоваться широкий спектр других не менее важных и престижных направлений информатики – информационные технологии, компьютерные системы и сети, актуарная и социальная информатика, программное обеспечение вычислительных систем, педагогическая информатика, экономическая информатика и др.

Сохранение и развитие достижений украинской школы теоретической информатики, фундамент которой был заложен академиком Глушковым и его последователями, – важнейшая государственная задача. Одним из необходимых элементов ее

решения является укрепление теоретической информатики как математической дисциплины и ее преподавание в таком ключе в классических университетах.

Ведущим (автономным) университетам страны должна быть предоставлена возможность частично изменять учебные программы и квалификационную формулу специальности «Информатика», отклоняясь от стандарта и не опасаясь внести из сферы информатики в багаж знаний своих выпускников то, на чем узко специализировались их профессора (релевантные специальности результаты монографий, диссертационных работ, статей, прикладных разработок). Именно такой путь ведет к узнаваемости университета, формирует его «лицо» в науке и обществе. Дальнейшие исследования в рассматриваемом направлении целесообразно посвятить изучению мировых образовательных тенденций в теоретической информатике и устойчивому развитию этого направления в классических университетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акіменко В.В. Особливості розробки освітнього стандарту з інформатики (напряг підготовки 040302) / В.В. Акіменко, М.С. Нікітченко // Інформаційні технології в освіті. – 2010. – № 5. – С. 9-15.
2. Матвієнко О. Соціальна інформатика: наукова та освітня спеціальність в Україні / Оксана Матвієнко, Михайло Цивін // Вісник Книжкової палати. – №3. – 2011. – С. 1-4.
3. Разборов А. Theoretical Computer Science: взгляд математика / Александр Разборов // Компьютера. – №2. – 2001. – Режим доступа: <http://www.computerra.ru/offline/2001/379/6782/>
4. Успенский В. А., Семенов А. Л. Теория алгоритмов: основные открытия и Приложения / В. А. Успенский, А. Л. Семенов. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
5. Федорова А. Г. Преподавание информационных технологий в Саратовском государственном университете / А. Г. Федорова. IX Всероссийская конференция «Преподавание информационных технологий в Российской Федерации». – Саратов. – 15.05.2011 – 17.05.2011. – Режим доступа: <http://2011.ит-образование.рф/section/75/3780/>.

Статья поступила в редакцию 31.05.2011

УДК 517.977.5

ОПТИМАЛЬНІ ГАРАНТОВАНІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

© Наконечний О. Г., Чухрай Л. В.

Київський національний університет ім. Т.Г.Шевченка,
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ
пр-т Академіка Глушкова-2, корпус 6, м.Київ 03680, Україна
E-MAIL: l.chukhrai@gmail.com

Abstract. In this paper we find the optimal guaranteed estimation of functionals of solutions of parabolic equations with discontinuous coefficients at derivatives surveillance systems described by these equations. It is believed that the right parts, the initial conditions and error assessment accurately known, and known only to the set to which they belong. Found that finding the optimal estimates is reduced to solving certain systems of integro-differential equations is uniquely solvable.

ВСТУП

Інтенсивний розвиток сучасної науки та техніки обумовив необхідність розвитку нових напрямків прикладної математики. Серед них значне місце займає напрям, що пов'язаний з аналізом систем, що функціонують в умовах невизначеності. Результати одержані тут в більшості відносяться до систем, що описуються звичайними диференціальними рівняннями. В даний час інтенсивно розвиваються методи аналізу в умовах невизначеності в системах, що описуються рівняннями з частинними похідними. Особливо актуальними є проблеми оцінювання розв'язків та параметрів таких рівнянь при спостереженнях за їх станом. Значний вклад в розвиток відповідного напрямку внесли О.Б. Куржанський, Б.М. Бублик, О.Г. Наконечний, Ю.К. Подлипко та їх учні. Особливістю даної роботи є те, що досліджуються функціонали від розв'язку параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами при похідній по часу.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

В $\Omega_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, t_1 \leq t \leq t_3\}$ розглянемо параболічну крайову задачу

$$a(t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (b(x) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}) + B(x, t) f(x), (x, t) \in \Omega_T \quad (1)$$

з крайовими умовами

$$\varphi(0, t) = 0, t \in (t_1, t_3), \varphi(1, t) = 0, t \in (t_1, t_3) \quad (2)$$

та початковою умовою

$$\varphi(x, t_1) = f_0(x), x \in (0, 1), \quad (3)$$

де $f(x) \in L_2(0, 1)$, $f_0(x) \in L_2(0, 1)$, $B(x, t) \in C(\Omega_T)$, причому $\exists \alpha > 0, c > 0$ таке, що $b(x) \geq \alpha > 0, b(x) \leq c$ майже скрізь на $(0, 1)$, коефіцієнт $a(t)$ задовольняє умову

$$a(t) = \begin{cases} a_1, t_1 < t < s, \\ 0, t = t_2, \\ a_3, t_2 < t < t_3, \end{cases}$$

де $t_1 < s < t_2, a_1 > 0, a_3 > 0$.

Під розв'язком задачі (1)-(3) будемо розуміти узагальнений розв'язок $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x), \varphi_3(x, t))$, $\varphi_1(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega_t)$, $\varphi_3(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega_t)$, $\varphi_2(x) \in \dot{W}_2^1(0, 1)$ системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1 \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(x) \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \right) + B_1(x, t) f(x), t_1 < t < s, \\ \varphi_1(0, t) = \varphi_1(1, t) = 0, \varphi_1(x, t_1) = f_0(x), \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left(b(x) \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} \right) = B_2(x) f(x), \varphi_2(0) = \varphi_2(1) = 0, \\ a_3 \frac{\partial \varphi_3(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(b(x) \frac{\partial \varphi_3(x, t)}{\partial x} \right) + B_3(x, t) f(x), t_2 < t < t_3, \\ \varphi_3(0, t) = \varphi_3(1, t) = 0, \varphi_3(x, t_2) = \varphi_2(x), \end{cases} \quad (4)$$

де $B_1(x, t) \in L_2((0, 1) \times (t_1, s))$, $f(x) \in L_2(0, 1)$, $B_2(x) \in L_2(0, 1)$, $B_3(x, t) \in L_2((0, 1) \times (t_2, t_3))$, $B(x, t) = (B_1(x, t), B_2(x), B_3(x, t))$.

В подальшому при розгляді системи рівнянь (4), не зменшуючи загальності вважатимемо $a_1 = a_3 = 1$.

Означення 1. $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x), \varphi_3(x, t))$, $\varphi_1(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega_t)$, $\varphi_3(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega_t)$, $\varphi_2(x) \in \dot{W}_2^1(0, 1)$ називається узагальненим розв'язком системи рівнянь (4), якщо виконується співвідношення

$$\begin{cases} \int_{t_1}^s \int_0^1 (-\varphi_1(x, t) \frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial t} + b(x) \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi_1(x, t)}{\partial x}) dx dt = \int_0^1 f_0(x) \psi_1(x, t_1) dx + \\ + \int_{t_1}^s \int_0^1 B_1(x, t) f(x) \psi_1(x, t) dx dt, \\ \int_0^1 b(x) \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \psi_2(x)}{\partial x} dx = \int_0^1 B_2(x) f(x) \psi_2(x) dx, \\ \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 (-\varphi_3(x, t) \frac{\partial \psi_3(x, t)}{\partial t} + b(x) \frac{\partial \varphi_3(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \psi_3(x, t)}{\partial x}) dx dt = \int_0^1 \varphi_2(x) \psi_3(x, t_2) dx + \\ + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 B_3(x, t) f(x) \psi_3(x, t) dx dt, \end{cases}$$

$\forall \psi(x, t) = (\psi_1(x, t), \psi_2(x, t), \psi_3(x, t)), \psi_1(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega_t), \psi_3(x, t) \in W_2^{1,0}(\Omega_t), \psi_2(x) \in \dot{W}_2^1(0, 1), \psi_1(x, s) = 0, \psi_3(x, t_3) = 0, \psi_i(0, t) = \psi_i(1, t) = 0, i = \overline{1, n}$.

Припустимо, що спостерігається реалізація випадкового процесу $y = (y_1(t), y_2, y_3(t))$ у вигляді

$$\begin{cases} y_{1k}(t) = \int_0^1 h_{1k}(x)\varphi_1(x, t)dx + \eta_{1k}(t), t_1 < t < s, k = \overline{1, N_1}, \\ y_{2k} = \int_0^1 h_{2k}(x)\varphi_2(x)dx + \eta_{2k}, t = t_2, k = \overline{1, N_2}, \\ y_{3k}(t) = \int_0^1 h_{3k}(x)\varphi_3(x, t)dx + \eta_{3k}(t), t_2 < t < t_3, k = \overline{1, N_3}, \end{cases} \quad (5)$$

де $\varphi(x, t) = (\varphi_1(x, t), \varphi_2(x), \varphi_3(x, t))$ – узагальнені розв'язки системи рівнянь (4), $h_{ik}(x) \in L_2(0, 1), i = \overline{1, 3}, \eta_{1k}(t), \eta_{2k}, \eta_{3k}(t)$ – вибіркові значення випадкових процесів, які попарно некорельовані, з нульовими математичними сподіваннями

$$M\eta_{1k}(t) = M\eta_{2k}(t_2) = M\eta_{3k}(t) = 0, M\eta_{1k}^2(t) < \infty, M\eta_{2k}^2 < \infty, M\eta_{3k}^2(t) < \infty.$$

Будемо вважати, що $f_0(x), f(x), \eta_{1k}(t), \eta_{2k}, \eta_{3k}(t)$ не визначені точно, а відомо, що вони задовольняють умови

$$\int_0^1 f_0^2(x)q_0^2(x)dx \leq 1, \quad (6)$$

$$f(x) \in L_2(0, 1), \quad (7)$$

$$\int_{t_1}^s M\eta_{1k}^2(t)r_{1k}^2(t)dt \leq 1, \int_{t_2}^{t_3} M\eta_{3k}^2(t)r_{3k}^2(t)dt \leq 1, M\eta_{2k}^2 = r_{2k}^{-2}, \quad (8)$$

де $q_0^2(x), r_{1k}^2(t), r_{3k}^2(t), r_{2k}^{-2}$ – вимірні функції, що задовольняють умовам $q_0^2(x) \leq \overline{q_0^2(x)}, r_{1k}^2(t) \leq \overline{r_{1k}^2(t)}, r_{3k}^2(t) \leq \overline{r_{3k}^2(t)}, r_{2k}^{-2} \leq \overline{r_{2k}^{-2}}$.

Нехай в області Ω_T задана функція $l(x, t) = (l_1(x, t), l_2(x), l_3(x, t))$, $l_1(x, t) \in L_2((0, 1) \times (t_1, s)), l_2(x) \in L_2(0, 1), l_3(x, t) \in L_2((0, 1) \times (t_2, t_3))$. За спостереженнями (5) за станом системи, що описуються системою рівнянь (4) при відповідних початково-крайових умовах будемо шукати оцінки функціоналу

$$l(\varphi) = \int_{t_1}^s \int_0^1 l_1(x, t)\varphi_1(x, t)dxdt + \int_0^1 l_2(x)\varphi_2(x)dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 l_3(x, t)\varphi_3(x, t)dxdt \quad (9)$$

В класі лінійних оцінок вигляду

$$\widehat{l}(\varphi) = \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}(t) y_{1k}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} y_{2k} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}(t) y_{3k}(t) dt \quad (10)$$

де $u = (u_1(t), u_2, u_3(t))$, $u_1(t) = (u_{11}(t), \dots, u_{1N_1}(t)) \in L_2(t_1, s)$, $u_3(t) = (u_{31}(t), \dots, u_{3N_3}(t))$, $u_2(t) \in L_2(t_2, t_3)$, $u_2 = (u_{21}, \dots, u_{2N_2})$.

Позначимо через G_0 множину функцій $f_0(x), f(x), \eta_{1k}(t), \eta_{2k}, \eta_{3k}(t)$, що задовольняють умовам (6), (7), (8).

Означення 2. Оцінку $\widehat{l}(\varphi) = \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \widehat{u}_{1k}(t) y_{1k}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \widehat{u}_{2k} y_{2k} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \widehat{u}_{3k}(t) y_{3k}(t) dt$, яка визначається як розв'язок екстремальної задачі

$$\inf_{u_k(t) \in L_2(\Omega_T)} \sup_{G_0} M[l(\varphi) - \widehat{l}(\varphi)]^2 = \sup_{G_0} [l(\varphi) - \widehat{l}(\varphi)]^2,$$

називають мінімаксною оцінкою функціоналу, а величину

$$\sigma^2 = \sup_{G_0} M[l(\varphi) - \widehat{l}(\varphi)]^2$$

мінімаксною похибкою оцінювання.

2. Вигляд мінімаксної оцінки

Введемо функцію $z(x, t)$ наступним чином

$$z(x, t) \in L_2(\Omega_T), z(x, t) = (z_1(x, t), z_2(x), z_3(x, t)) = (z_1(x, t, u_1), z_2(x, u_2), z_3(x, t, u_3)),$$

де z_1, z_2, z_3 – узагальнені розв'язки наступних крайових задач

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial z_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial z_1(x, t)}{\partial x} + l_1(x, t) - \sum_{k=1}^{N_1} u_{1k}(t) h_{1k}(x), \\ z_1(0, t) = z_1(1, t) = 0, z_1(x, s) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial z_2(x)}{\partial x} = l_2(x) - \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} h_{2k}(x) + z_3(x, t_2), \\ z_2(0) = z_2(1) = 0, \\ -\frac{\partial z_3(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial z_3(x, t)}{\partial x} + l_3(x, t) - \sum_{k=1}^{N_3} u_{3k}(t) h_{3k}(x), \\ z_3(0, t) = z_3(1, t) = 0, z(x, t_3) = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

Позначимо через U множину функцій

$$U = \left\{ u : \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) z_1(x, t) dt + B_2(x) z_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) z_3(x, t) dt \right) = 0 \right\}.$$

Твердження 1. Нехай U – не порожня множина, функції z_1, z_2, z_3 є узагальнені розв'язки системи рівнянь (11). Тоді існує єдина мінімаксна оцінка, що має вигляд

$$\widehat{l}(\varphi) = (\widehat{u}, y),$$

де $\widehat{u} \in \arg \inf I(u), u \in U$,

$$\text{де } I(u) = \int_0^1 q_0^{-2}(x) z_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt,$$

при цьому $\sigma^2 = I(u)$.

Доведення. Використовуючи (5), (9), (10) запишемо різницю

$$\begin{aligned} [l(\varphi) - l(\widehat{\varphi})] &= \left[\int_{t_1}^s \int_0^1 l_1(x, t) \varphi_1(x, t) dx dt - \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}(t) y_{1k}(t) dt \right] + \\ &+ \left[\int_0^1 l_2(x) \varphi_2(x) dx - \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} y_{2k} \right] + \left[\int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 l_3(x, t) \varphi_3(x, t) dx dt - \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}(t) y_{3k}(t) dt \right] = \\ &= \left[\int_{t_1}^s \int_0^1 (l_1(x, t) - \sum_{k=1}^{N_1} u_{1k}(t) h_{1k}(x)) \varphi_1(x, t) dx dt - \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}(t) \eta_{1k}(t) dt \right] + \\ &+ \left[\int_0^1 (l_2(x) - \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} h_{2k}(x)) \varphi_2(x) dx - \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} \eta_{2k} \right] + \\ &+ \left[\int_{t_1}^{t_3} \int_0^1 (l_3(x, t) - \sum_{k=1}^{N_3} u_{3k}(t) h_{3k}(x)) \varphi_3(x, t) dx dt - \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}(t) \eta_{3k}(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи системи рівнянь (11) та (4), використовуючи означення узагальненого виразу з формулою інтегрування частинами, вираз $[l(\varphi) - l(\widehat{\varphi})]$ подамо в наступному вигляді

$$[l(\varphi) - l(\widehat{\varphi})] = \left[\int_0^1 f_0(x) z_1(x, t_1) dx - \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}(t) \eta_{1k}(t) dt - \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} \eta_{2k} - \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}(t) \eta_{3k}(t) dt \right]$$

Враховуючи попарну некорельованість будемо мати

$$M[l(\varphi) - \widehat{l}(\varphi)]^2 = \left[\left(\int_0^1 f_0(x) z_1(x, t_1) dx \right)^2 + \sum_{k=1}^{N_1} M \left(\int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) \eta_{1k}^2(t) dt \right)^2 + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} M \left(\int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) \eta_{3k}^2(t) dt \right)^2 \right]$$

В силу нерівності Коші-Буняковського та нерівностей (6), (8) отримаємо

$$\sup_{G_0} M[l(\varphi) - \widehat{l}(\varphi)]^2 \leq \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) z_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right]$$

$$\sup_{G_0} M[l(\varphi) - \widehat{l}(\varphi)]^2 = \begin{cases} \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) z_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2(t_2) r_{2k}^{-2}(t_2) + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right] \equiv I(u), \forall u \neq 0, u \in U \\ \infty, \forall u \notin U. \end{cases}$$

Отже існує єдиний елемент $\widehat{u} = (\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2, \widehat{u}_3(t))$ [2] такий, що $\widehat{u} \in \arg \inf I(u)$, $u \in U$. \square

Введемо функції $\widehat{z}_1, \widehat{z}_2, \widehat{z}_3, p_1, p_2, p_3$ як узагальнені розв'язки системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \widehat{z}_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{z}_1(x,t)}{\partial x} + l_1(x,t) - \sum_{k=1}^N \widehat{u}_{1k}(t) h_{1k}(x), \\ \widehat{z}_1(0,t) = \widehat{z}_1(1,t) = 0, \widehat{z}_1(x,s) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{z}_2(x)}{\partial x} = l_2(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{u}_{2k} h_{2k}(x) + \widehat{z}_3(x, t_2), \\ \widehat{z}_2(0) = \widehat{z}_2(1) = 0, \\ -\frac{\partial \widehat{z}_3(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{z}_3(x,t)}{\partial x} + l_3(x,t) - \sum_{k=1}^N \widehat{u}_{3k}(t) h_{3k}(x), \\ \widehat{z}_3(0,t) = \widehat{z}_3(1,t) = 0, \widehat{z}_3(x, t_3) = 0, \\ \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x} + \lambda(x) B_1(x,t), \\ p_1(0,t) = p_1(1,t) = 0, p_1(x, t_1) = q^{-2}(x) \widehat{z}_1(x, t_1) \\ -\frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial p_2(x)}{\partial x} = \lambda(x) B_2(x), \\ p_2(0) = p_2(1) = 0, \\ \frac{\partial p_3(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x} + \lambda(x) B_3(x,t), \\ p_3(0,t) = p_3(1,t) = 0, p_3(x, t_2) = p_2(x), \end{array} \right. \quad (12)$$

де $\widehat{u}_1, \widehat{u}_2, \widehat{u}_3$ мають вигляд

$$(\widehat{u}_1(t), \widehat{u}_2, \widehat{u}_3(t)) = \left(\int_0^1 r_1^2(t) h_1(x) p_1(x,t) dx, \int_0^1 r_2^2 h_2(x) p_1(x) dx, \int_0^1 r_3^2(t) h_3(x) p_3(x,t) dx \right), \quad (13)$$

а функція $\lambda(x) \in L_2(0,1)$ визначається з рівняння

$$\left(\int_{t_1}^s B_1(x,t) \widehat{z}_1(x,t) dt + B_2(x) \widehat{z}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x,t) \widehat{z}_3(x,t) dt \right) = 0. \quad (14)$$

Введемо лінійне відображення L , що визначається рівністю

$$Lu = \int_{t_1}^s B_1(x,t) \widetilde{z}_1(x,t,u) dt + B_2(x) \widetilde{z}_2(x,u) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x,t) \widetilde{z}_3(x,t,u) dt,$$

де $\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_2, \widetilde{z}_3$ – функції z_1, z_2, z_3 при $l_i = 0, i = 1, 2, 3$ відповідно.

Означення 3. Лінійне відображення L , що діє з гільбертового простору H_1 в гільбертів простір H_2 називається регулярним, якщо рівняння $L\varphi = f$ має розв'язок для всякого вектору $f \in H_2$.

Теорема 1. Припустимо, що відображення L – регулярне, тоді існує єдиний розв’язок системи рівнянь (12),(14), причому мінімаксна оцінка має вигляд

$$\widehat{l}(\varphi) = \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \widehat{u}_{1k}(t) y_{1k}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \widehat{u}_{2k} y_{2k} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \widehat{u}_{3k}(t) y_{3k}(t) dt,$$

де \widehat{u} має вигляд (13), а похибка оцінювання дорівнює

$$\sigma^2 = l(p).$$

Доведення. Нехай \widehat{u} – такий вектор, при якому $I(\widehat{u}) = \inf_u I(u)$, $\widehat{z}(x, t) = \widehat{z}(x, t, \widehat{u})$. Розв’яжемо задачу оптимального керування (11) з критерієм якості $I(u) = \int_0^1 q_0^{-2}(x) z_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt$, з застосуванням методу множників Лагранжа. Використовуючи умову регулярності будемо мати, що $\widehat{u} \in \arg \inf I(\lambda, u)$, де $I(\lambda, u) = I(u) + \int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) z_1(x, t) dt + B_2(x) z_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) z_3(x, t) dt \right) dx$, $\lambda(x) \in L_2(0, 1)$.

Вектор \widehat{u} може бути знайдений з умови

$$\left. \frac{d}{dt} I(\lambda, \widehat{u} + \tau v) \right|_{\tau=0} \equiv 0, \forall v \in U.$$

Запишемо $I(\lambda, u)$ в наступному вигляді

$$I(\lambda, u) = \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) z_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right] + \left[\int_0^1 \lambda(x) \int_{t_1}^s B_1(x, t) z_1(x, t) dt + B_2(x) z_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) z_3(x, t) dt dx \right] \quad (16)$$

Враховуючи системи рівнянь (12) та вираз (16) і використовуючи означення узагальненого розв’язку з формулою інтегрування частинами отримаємо наступне

$$I(\lambda, u) = \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s u_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} u_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right] + \left[\int_{t_1}^s \int_0^1 (l_1(x, t) - \sum_{k=1}^{N_1} u_{1k}(t) h_{1k}(x)) p_1(x, t) dx dt + \int_0^1 (l_2(x) - \sum_{k=1}^{N_2} u_{2k} h_{2k}(x)) p_2(x) dx + \right]$$

$$+ \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 \left(l_3(x, t) - \sum_{k=1}^{N_3} u_{3k}(t) h_{3k}(x) \right) p_3(x, t) dx dt \Big].$$

Тепер можемо записати

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} I(\lambda, \hat{u} + \tau v) \Big|_{\tau=0} &= \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \hat{u}_{1k}(t) r_{1k}^{-2}(t) v_{1k}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \hat{u}_{2k} r_{2k}^{-2} v_{2k} + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \hat{u}_{3k}(t) r_{3k}^{-2}(t) v_{3k}(t) dt \right] - \left[\int_{t_1}^s \int_0^1 \sum_{k=1}^{N_1} v_{1k}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) dx dt + \right. \\ &+ \left. \int_0^1 \sum_{k=1}^{N_2} v_{2k} h_{2k}(x) p_2(x) dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 \sum_{k=1}^{N_3} v_{3k}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) dx dt \right] \equiv 0, \forall v_{ik}(t), i = \overline{1, 3}. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю тотожність отримаємо вираз для визначення \hat{u}

$$\hat{u} = (\hat{u}_1(t), \hat{u}_2, \hat{u}_3(t)) = \left(\int_0^1 r_1^2(t) h_1(x) p_1(x, t) dx, \int_0^1 r_2^2 h_2(x) p_2(x) dx, \int_0^1 r_3^2(t) h_3(x) p_3(x, t) dx \right).$$

Покажемо, що $\sigma^2 = l(p)$.

$$\sigma^2 = \inf_{u \in L_2(\Omega_T)} \sup_{G_0} M |l(\varphi) - \hat{l}(\varphi)|^2 = I(\hat{u}),$$

де $I(\hat{u}) = \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) \hat{z}_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \hat{u}_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \hat{u}_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \hat{u}_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right]$.

Враховуючи рівності (12) запишемо $I(\hat{u})$ в наступному вигляді

$$\begin{aligned} I(\hat{u}) &= \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) \hat{z}_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \hat{u}_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \hat{u}_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \hat{u}_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right] + \\ &+ \left[\int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) \hat{z}_1(x, t) dt + B_2(x) \hat{z}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) \hat{z}_3(x, t) dt \right) dx \right]. \end{aligned}$$

В цьому виразі зробивши заміну, використавши систему (12) отримаємо

$$I(\hat{u}) = \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) \hat{z}_1^2(x, t_1) dx + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \hat{u}_{1k}^2(t) r_{1k}^{-2}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \hat{u}_{2k}^2 r_{2k}^{-2} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \hat{u}_{3k}^2(t) r_{3k}^{-2}(t) dt \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\int_{t_1}^s \int_0^1 \left(\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \right) \widehat{z}_1(x, t) dx dt + \int_0^1 \left(-\frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial p_2(x)}{\partial x} \right) \widehat{z}_2(x) dx + \right. \\
& \left. + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 \left(\frac{\partial p_3(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial p_3(x, t)}{\partial x} \right) \widehat{z}_3(x, t) dx dt \right].
\end{aligned}$$

Підставивши значення \widehat{u} в попередню рівність у першому доданку та використавши означення узагальненого розв'язку з інтегрування частинами і систему рівнянь (11) у другому будемо мати

$$\begin{aligned}
I(\widehat{u}) = & \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 \widehat{u}_{1k}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) dx + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 \widehat{u}_{2k} h_{2k}(x) p_2(x) dx + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 \widehat{u}_{3k}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) dx \left. + \int_{t_1}^s \int_0^1 (l_1(x, t) - \sum_{k=1}^{N_1} \widehat{u}_{1k}(t) h_{1k}(x)) p_1(x, t) dx dt + \right. \\
& \left. + \int_0^1 (l_2(x) - \sum_{k=1}^{N_2} \widehat{u}_{2k} h_{2k}(x)) p_2(x) dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 (l_3(x, t) - \sum_{k=1}^{N_3} \widehat{u}_{3k}(t) h_{3k}(x)) p_3(x, t) dx dt \right]
\end{aligned}$$

Отже, скоротивши однакові доданки отримаємо

$$\sigma^2 = I(\widehat{u}) = \int_{t_1}^s \int_0^1 l_1(x, t) p_1(x, t) dx dt + \int_0^1 l_2(x) p_2(x) dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 l_3(x, t) p_3(x, t) dx dt = l(p).$$

□

Введемо функції $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3, \widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3$ як узагальнені розв'язки системи рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \widehat{p}_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{p}_1(x,t)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{N_1} r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) (y_{1k}(t) - \int_0^1 h_{1k}(x) \widehat{\varphi}_1(x,t) dx), \\ \widehat{p}_1(0,t) = \widehat{p}_1(1,t) = 0, \widehat{p}_1(x,s) = 0, \\ -\frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{p}_2(x)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{N_2} r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) (y_{2k} - \int_0^1 h_{2k}(x) \widehat{\varphi}_2(x) dx) + \widehat{p}_3(x,t), \\ \widehat{p}_2(0) = \widehat{p}_2(1) = 0, \\ -\frac{\partial \widehat{p}_3(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{p}_3(x,t)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{N_3} r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) (y_{3k}(t) - \int_0^1 h_{3k}(x) \widehat{\varphi}_3(x,t) dx), \\ \widehat{p}_3(0,t) = \widehat{p}_3(1,t) = 0, \widehat{p}_3(x,t_3) = 0, \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_1(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{\varphi}_1(x,t)}{\partial x} + \lambda(x) B_1(x,t), \\ \widehat{\varphi}_1(0,t) = \widehat{\varphi}_1(1,t) = 0, \widehat{\varphi}_1(x,t_1) = q^{-2}(x) \widehat{p}_1(x,t_1) \\ -\frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{\varphi}_2(x)}{\partial x} = \lambda(x) B_2(x), \\ \widehat{\varphi}_2(0) = \widehat{\varphi}_2(1) = 0, \\ \frac{\partial \widehat{\varphi}_3(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial \widehat{\varphi}_3(x,t)}{\partial x} + \lambda(x) B_3(x,t), \\ \widehat{\varphi}_3(0,t) = \widehat{\varphi}_3(1,t) = 0, \widehat{\varphi}_3(x,t_2) = \widehat{\varphi}_2(x), \\ (\int_{t_1}^s B_1(x,t) \widehat{p}_1(x,t) dt + B_2(x) \widehat{p}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x,t) \widehat{p}_3(x,t) dt) = 0, \end{array} \right. \quad (15)$$

Теорема 2. При умовах теореми 1 мінімаксна оцінка має вигляд

$$\widehat{l}(\varphi) = \int_{t_1}^s \int_0^1 l_1(x,t) \widehat{\varphi}_1(x,t) dx dt + \int_0^1 l_2(x) \widehat{\varphi}_2(x) dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 l_3(x,t) \widehat{\varphi}_3(x,t) dx dt = l(\widehat{\varphi}),$$

де функції $\widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2, \widehat{\varphi}_3, \widehat{p}_1, \widehat{p}_2, \widehat{p}_3$ визначаються як розв'язки системи рівнянь (15).

Доведення. Покажемо, що $\widehat{l}(\varphi) = l(\widehat{\varphi})$.

$$\begin{aligned} \widehat{l}(\varphi) &= \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \widehat{u}_{1k}(t) y_{1k}(t) dt + \sum_{k=1}^{N_2} \widehat{u}_{2k} y_{2k} + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \widehat{u}_{3k}(t) y_{3k}(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x,t) y_{1k}(t) dx dt + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) y_{2k} dx + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x,t) y_{3k}(t) dx dt. \end{aligned}$$

Використавши систему рівнянь (5) запишемо

$$\begin{aligned} \widehat{l}(\varphi) = & \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) \left(\int_0^1 h_{1k}(x) \varphi_1(x, t) dx \right) dx dt + \\ & + \sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) \eta_{1k}(t) dx dt + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) \left(\int_0^1 h_{2k}(x) \varphi_2(x) dx \right) dx + \\ & + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) \eta_{2k} dx + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) \left(\int_0^1 h_{3k}(x) \varphi_3(x, t) dx \right) dx dt + \\ & + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) \eta_{3k}(t) dx dt. \end{aligned}$$

В попередню рівність підставимо значення $\eta(t)$ з системи рівнянь (5) та зробимо заміну, використавши систему рівнянь (15)

$$\begin{aligned} \widehat{l}(\varphi) = & \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) \left(\int_0^1 h_{1k}(x) \varphi_1(x, t) dx \right) dx dt + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) \left(\int_0^1 h_{2k}(x) \varphi_2(x) dx \right) dx + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) \left(\int_0^1 h_{3k}(x) \varphi_3(x, t) dx \right) dx dt \right] + \left[\int_{t_1}^s \int_0^1 \left(-\frac{\partial \widehat{p}_1(x, t)}{\partial t} p_1(x, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + b(x) \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \widehat{p}_1(x, t)}{\partial x} \right) dx dt + \int_0^1 b(x) \left(\frac{\partial p_2(x)}{\partial x} \frac{\partial \widehat{p}_2(x)}{\partial x} \right) dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 \left(-\frac{\partial \widehat{p}_3(x, t)}{\partial t} p_3(x, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + b(x) \frac{\partial p_3(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \widehat{p}_3(x, t)}{\partial x} \right) dx dt \right] \end{aligned}$$

За допомогою означення узагальненого розв'язку перетворимо попередню рівність

$$\begin{aligned} \widehat{l}(\varphi) = & \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) \left(\int_0^1 h_{1k}(x) \varphi_1(x, t) dx \right) dx dt + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) \left(\int_0^1 h_{2k}(x) \varphi_2(x) dx \right) dx + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) \left(\int_0^1 h_{3k}(x) \varphi_3(x, t) dx \right) dx dt \Big] + \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) \widehat{z}_1(x, t_1) \widehat{p}_1(x, t) dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) \widehat{p}_1(x, t) dt + B_2(x) \widehat{p}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) \widehat{p}_3(x, t) dt \right) dx - \int_0^1 p_3(x, t_2) \widehat{p}_2(x) dx \right]
 \end{aligned}$$

Враховуючи (14) додамо до попередньої рівності певні доданки

$$\begin{aligned}
 \widehat{l}(\varphi) = & \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) \left(\int_0^1 h_{1k}(x) \varphi_1(x, t) dx \right) dx dt + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) \left(\int_0^1 h_{2k}(x) \varphi_2(x) dx \right) dx + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) \left(\int_0^1 h_{3k}(x) \varphi_3(x, t) dx \right) dx dt \right] + \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) \widehat{z}_1(x, t_1) \widehat{p}_1(x, t) dx + \right. \\
 & \left. + \int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) \widehat{p}_1(x, t) dt + B_2(x) \widehat{p}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) \widehat{p}_3(x, t) dt \right) dx - \int_0^1 p_3(x, t_2) \widehat{p}_2(x) dx \right] + \\
 & + \left[\int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) \widehat{z}_1(x, t) dt + B_2(x) \widehat{z}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) \widehat{z}_3(x, t) dt \right) dx \right].
 \end{aligned}$$

Третій доданок попередньої рівності розглянемо окремо. Скориставшись системою рівнянь (15) і означенням узагальненого розв'язку з формулою інтегрування частинами подамо його в наступному вигляді

$$\begin{aligned}
 & \left[\int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) \widehat{z}_1(x, t) dt + B_2(x) \widehat{z}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) \widehat{z}_3(x, t) dt \right) dx \right] = \\
 = & \left[- \int_0^1 q_0^{-2}(x) \widehat{z}_1(x, t_1) \widehat{p}_1(x, t_1) dx + \int_{t_1}^s \int_0^1 \left(l_1(x, t) - \sum_{k=1}^{N_1} \widehat{u}_{1k}(t) h_{1k}(x) \right) \widehat{\varphi}_1(x, t) dx dt \right. \\
 & \left. + \int_0^1 (l_2(x) + \widehat{z}_3(x, t_2) - \sum_{k=1}^{N_2} \widehat{u}_{2k} h_{2k}(x)) \widehat{\varphi}_2(x) dx - \int_0^1 \widehat{z}_3(x, t_2) \widehat{\varphi}_2(x) dx + \right. \\
 & \left. + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 \left(l_3(x, t) - \sum_{k=1}^{N_3} \widehat{u}_{3k}(t) h_{3k}(x) \right) \widehat{\varphi}_3(x, t) dx dt \right].
 \end{aligned}$$

Підставивши даний доданок в рівність для визначення $\widehat{l}(\varphi)$ будемо мати

$$\begin{aligned} \widehat{l}(\varphi) = & \left[\sum_{k=1}^{N_1} \int_{t_1}^s \int_0^1 r_{1k}^{-2}(t) h_{1k}(x) p_1(x, t) \left(\int_0^1 h_{1k}(x) \varphi_1(x, t) dx \right) dx dt + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_2} \int_0^1 r_{2k}^{-2} h_{2k}(x) p_2(x) \left(\int_0^1 h_{2k}(x) \varphi_2(x) dx \right) dx + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{N_3} \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 r_{3k}^{-2}(t) h_{3k}(x) p_3(x, t) \left(\int_0^1 h_{3k}(x) \varphi_3(x, t) dx \right) dx dt \right] + \left[\int_0^1 q_0^{-2}(x) \widehat{z}_1(x, t_1) \widehat{p}_1(x, t) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \lambda(x) \left(\int_{t_1}^s B_1(x, t) \widehat{p}_1(x, t) dt + B_2(x) \widehat{p}_2(x) + \int_{t_2}^{t_3} B_3(x, t) \widehat{p}_3(x, t) dt \right) dx - \int_0^1 p_3(x, t_2) \widehat{p}_2(x) dx \right] + \\ & + \left[- \int_0^1 q_0^{-2}(x) \widehat{z}_1(x, t_1) \widehat{p}_1(x, t_1) dx + \int_{t_1}^s \int_0^1 (l_1(x, t) - \sum_{k=1}^{N_1} \widehat{u}_{1k}(t) h_{1k}(x)) \widehat{\varphi}_1(x, t) dx dt + \right. \\ & + \int_0^1 (l_2(x) + \widehat{z}_3(x, t_2) - \sum_{k=1}^{N_2} \widehat{u}_{2k} h_{2k}(x)) \widehat{\varphi}_2(x) dx - \int_0^1 \widehat{z}_3(x, t_2) \widehat{\varphi}_2(x) dx + \\ & \left. + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 (l_3(x, t) - \sum_{k=1}^{N_3} \widehat{u}_{3k}(t) h_{3k}(x)) \widehat{\varphi}_3(x, t) dx dt \right]. \end{aligned}$$

Врахувавши (15) та підставивши в попередню рівність значення \widehat{u} та скоротивши однакові доданки отримаємо

$$\widehat{l}(\varphi) = \int_{t_1}^s \int_0^1 l_1(x, t) \widehat{\varphi}_1(x, t) dx dt + \int_0^1 l_2(x) \widehat{\varphi}_2(x) dx + \int_{t_2}^{t_3} \int_0^1 l_3(x, t) \widehat{\varphi}_3(x, t) dx dt = l(\widehat{\varphi}).$$

□

Висновки

У даній роботі знайдено мінімаксні оцінки лінійних функціоналів від розв'язків параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами при похідній за спостереженнями за станом системи, що описуються цими рівняннями. Доведено, що дані оцінки будуть оптимальними гарантованими оцінками.

Дослідження мінімаксних оцінок проводиться за допомогою побудови спряженої системи та означення узагальненого розв'язку з інтегруванням частинами параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами при похідній. Знаходження мінімаксних

оцінок зводиться до розв'язку систем інтегро-диференціальних рівнянь, які є однозначно розв'язними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1989. – 459 с.
2. Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах / Александр Григорьевич Наконечный. – Киев: КГУ, 1985. – 82 с.
3. Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 430 с.
4. Наконечный О.Г. Оптимальне керування та оцінювання в рівняннях із частинними похідними. Навчальний посібник / О.Г. Наконечний. – ВПЦ «Київський університет», 2004. – 103 с.
5. Наконечний О.Г. Оцінювання параметрів в умовах невизначеності / О.Г. Наконечний // Наукові записки КНУ ім.Т.Г.Шевченка. – 2004. – Том 7: факультет кібернетики. – С. 102-112.
6. Наконечний О.Г. До проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач / С. Демиденко, С. Жук, О. Наконечний // Тавр. вісн. інформ. і мат. – 2007. – №1. С. 7-24.
7. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
8. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 407 с.
9. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А.Б. Куржанский. – М.: «Наука», 1977. – 393 с.
10. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / Михайлов В.П. – М.: «Наука», 1983. – 424 с.

Статья поступила в редакцию 28.02.2011

ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКУ В МЕРЕЖІ З ДОДАТКОВИМИ КОМБІНАТОРНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

© Ємець О. О., Ємець Є. М., Олексійчук Ю. Ф.

ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ
ВУЛ. КОВАЛЯ, 3, М. ПОЛТАВА, 36014, УКРАЇНА
E-MAIL: yemetsli@mail.ru, olexijchuk@gmail.com

Abstract. In article the task of a finding of the maximum flow in a network with additional combinatorial restrictions is delivered and solved. The mathematical model is constructed; the algorithm of its decision is stated. The considered task is generalization of the task of a finding of the maximum flow in a network.

ВСТУП

Розв'язання багатьох прикладних і теоретичних задач можна звести до моделі знаходження максимального потоку в мережі. Ця задача є добре дослідженою і розглядається, зокрема в [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Для знаходження максимального потоку в мережі використовуються алгоритми Форда і Фалкерсона [1], Едмондса і Карпа [4], Дініца [5], Карзанова [6] та ін. Задача знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями в літературі не розглядалася. Вона дозволяє розширити коло прикладних задач, що моделюються потоками в мережах. Водночас, перелічені алгоритми потребують суттєвої модифікації або й взагалі є неадекватними до розв'язання цієї задачі. Отже, нова модель вимагає розробки методів її розв'язування.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай задано транспортну мережу графом з множиною вершин $\{V_i\}$ та множиною дуг $\{e_{ij}\}$, де e_{ij} сполучає вершини V_i та V_j . Принаймні одна із вершин має лише дуги, що виходять. Така вершина називається джерелом і позначається V_s . Вершина, яка має лише дуги, що входять, називається стоком і позначається V_t . (Надалі будемо розглядати лише мережі з одним джерелом і одним стоком.) Кожна з дуг e_{ij} має пропускну спроможність $b_{ij} \geq 0$. Елемент потоку, що відповідає дузі e_{ij} позначимо y_{ij} , $0 \leq y_{ij} \leq b_{ij}$. Нехай через деякі із дуг e_{ij} можна транспортувати продукт деякими порціями $x_{ij} = g_l \in G$, де $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ – деяка мультимножина, причому вектор з x_{ij} є розміщенням елементів з G . (Під мультимножиною G будемо розуміти сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові (нерозрізніми) [7].)

Тоді для таких дуг $y_{ij} \leq x_{ij}$. Для будь-якої вершини z , окрім джерела і стоку, суми елементів потоку на вхідних і вихідних дугах має бути однаковою:

$$\sum_i y_{iz} = \sum_j y_{zj} \quad \forall z \neq s; \forall z \neq t. \quad (1)$$

Також однаковою будемо вважати суми елементів потоків на дугах, що виходять із джерела та що входять в стік:

$$\sum_i y_{si} = \sum_j y_{jt} = w. \quad (2)$$

Задача полягає у знаходженні за названих умов максимального потоку, тобто максимального значення w .

Зауваження 1. В залежності від змісту задачі, що моделюється, можна додавати обмеження вигляду $x_{ij} \leq b_{ij}$.

2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Введемо деякі означення. Будь-яку мультимножину A можна представити її основою $S(A)$, тобто множиною всіх її різних елементів, та первинною специфікацією $[A]$ – списком кратностей елементів основи мультимножини.

Розглянемо k – вибірку з мультимножини $G = \{g_1, g_2, \dots, g_\eta\}$ такого вигляду:

$$g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}), \quad (3)$$

де $g_{i_j} \in G$, $i_j \neq i_t \quad \forall i_j, i_t \in J_\eta \quad \forall j, t \in J_k$. Тут J_n – множина n перших натуральних чисел, тобто $J_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Множину $A_{\eta n}^k(G)$, елементами якої є різні упорядковані k – вибірки вигляду (3) з мультимножини G називають [7, 8, 9] евклідовою комбінаторною множиною розміщень.

Відображення

$$\varphi : A_{\eta n}^k \rightarrow E_\varphi \subset R^k \quad (4)$$

називають зануренням $A_{\eta n}^k$ в арифметичний евклідовий простір, якщо між $A_{\eta n}^k$ та E_φ існує взаємно однозначна відповідність, встановлена правилом: для $g = (g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_k}) \in A_{\eta n}^k$, $x = \varphi(g)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in E_\varphi$ маємо $x_j = g_{i_j} \quad \forall j \in J_k$.

Позначимо занурену евклідову комбінаторну множину розміщень $E_{\eta n}^k(G)$ або просто $E_{\eta n}^k$.

Задачу знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями можна описати математичною моделлю:

Знайти

$$f(y) = \sum_j y_{jt} \rightarrow \max \quad (5)$$

за обмежень

$$\sum_i y_{iz} = \sum_j y_{zj}, z \neq t, z \neq s, \forall i \forall j \quad (6)$$

$$0 \leq y_{ij} \leq b_{ij}, \forall i \forall j \quad (7)$$

$$y_{ij} \leq x_{ij}, \forall i \forall j \quad (8)$$

$$x = (x_{i_1 j_1}, \dots, x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k, \quad (9)$$

де $(i_1, j_1), \dots, (i_k, j_k)$ – дуги транспортної мережі.

Зауваження 2. Зазначимо, що задача (5)-(7) є класичною задачею знаходження максимального потоку в мережі з обмеженими пропускними спроможностями дуг, що розглядається в [1, 2, 3, 4, 5, 6].

Зауваження 3. В цільовій функції шукається максимальний потік, що входить в стік. Формулу (2) легко вивести із співвідношень (6).

Задача (5)-(9) є задачею евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях [8, 9, 10]. Методи її розв'язання розглядаються, зокрема, в [9] та [10].

Зауваження 4. Нульовий розв'язок є допустимим для задачі (5)-(9). Тому мультимножина G має містити елемент нуль із кратністю, що не менша за кількість дуг, на які накладаються комбінаторні обмеження.

3. АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Ненульовий вектор $x \in R^k$ називається лексикографічно додатнім (позначення $x \succ 0$), якщо додатною є його перша відмінна від нуля координата. Вектор $x \in R^k$ лексикографічно більший за вектор $y \in R^k$ (позначення $x \succ y$), якщо $x - y \succ 0$.

Цілою частиною дійсного числа a (позначення $[a]$) називається найбільше ціле число, що не перевищує a . Дробовою частиною числа a (позначення $\{a\}$) називається різниця $a - [a]$.

Розглянемо прямий метод комбінаторного відсікання [10] для розв'язання задачі (5)-(9).

Крок 0. Побудуємо симплекс-таблицю відповідної до задачі (5)-(9) задачі лінійного програмування (без урахування комбінаторних умов): $f \rightarrow \max$ за умов (6)-(8). До симплекс-таблиці приєднується рядок (далі L -рядок), який відповідає обмеженню, що виражає верхню межу небазисних змінних $x_L + \sum_{j \in J} x_j = a_{L0}$, де J – множина

небазисних змінних, $a_{L0} = \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$, де \bar{x}_i – максимально можливе або більше, ніж максимально можливе, значення змінної x_i , за умови задачі (5)-(9), $x_L \geq 0$ – базисна змінна, що введена для отримання рівності з введеної нерівності.

Крок 1. Перевірити умову оптимальності для розв'язку задачі лінійного програмування (ЗЛП): якщо рядок оцінок $x_{0j} \geq 0$, то розв'язок оптимальний, зупинка; інакше – перехід до кроку 2.

Крок 2. Вибрати напрямний стовпець з номером σ , що задовольняє умовам $a_{L\sigma} > 0$ і $r_\sigma < r_j$ для всіх $j \neq \sigma, j \in J$ при $a_{L\sigma} > 0$, де $r_j = \left(\frac{a_{0j}}{a_{Lj}}, \frac{a_{1j}}{a_{Lj}}, \dots, \frac{a_{nj}}{a_{Lj}} \right)$.

Крок 3. Вибрати номер твірного рядка v , за яким буде будуватися відсікання, із множини $V(s) = \left\{ i \mid 0 \leq \left[\frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}} \right] \leq \Theta_\sigma \right\}$, де $\Theta_\sigma = \min_{a_{i\sigma} > 0} \frac{a_{i0}}{a_{i\sigma}}$ за наступними правилами:

А) Нехай $V_t(\sigma)$ – множина $V(\sigma)$, що відповідає t -й симплекс-таблиці. Якщо $V_t(\sigma)$ містить більше одного елемента: $V_t(\sigma) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, то вибираємо рядок v_α , що в послідовності $V_1(\sigma), V_2(\sigma), \dots, V_t(\sigma)$ з'явився раніше (не пізніше) інших $v_i \in V_t(\sigma)$ і зберігався до $V_t(\sigma)$. Перейти до Б)

Б) Послідовно вибирати рядок v , взятий в А), поки $v \in V(\sigma)$. Якщо $v \notin V(\sigma)$, перейти до А).

Крок 4. Додати в симплекс-таблицю відсікання

$$x_{m+1} = \left[\begin{array}{c} a_{v0} \\ a_{v\sigma} \end{array} \right] + \sum_{j \in J} \left[\begin{array}{c} a_{vj} \\ a_{v\sigma} \end{array} \right] (-x_j) \quad (10)$$

і перевірити, чи задовольняє для наступного допустимого розв'язку нової ЗЛП вектор x , що складений з координат, що фігурують в (9), комбінаторним обмеженням ($x \in E_{\eta n}^k$). Якщо так – перейти до кроку 7. Інакше – покласти $d = 1$, перейти до кроку 5.

Крок 5. Замінити відсікання (10) наступним

$$x_{m+1} = \left(\left[\begin{array}{c} a_{v0} \\ a_{v\sigma} \end{array} \right] - d \right) + \sum_{j \in J} \left(\left[\begin{array}{c} a_{vj} \\ a_{v\sigma} \end{array} \right] - d + q \right) (-x_j), \quad (11)$$

де $q = 1$, якщо $\left\{ \frac{a_{v0}}{a_{v\sigma}} \right\} < \left\{ \frac{a_{vj}}{a_{v\sigma}} \right\}$, інакше $q = 0$.

Перейти до кроку 6.

Крок 6. Перевірити, чи задовольняє для наступного допустимого розв'язку нової ЗЛП вектор x , що складений з координат, що фігурують в (9), комбінаторним обмеженням. Якщо так – перейти до кроку 7. Інакше – збільшити d на одиницю, перейти до кроку 5.

Крок 7. Провести симплекс-перетворення, де розв'язувальним стовпцем є стовець з номером σ , а розв'язувальним рядком – додане відсікання.

Крок 8. Викреслити рядок, що відповідає введеному відсіканню із симплекса-таблиці. Перейти до кроку 1.

4. ПРИКЛАД

Є центральний склад (V_s), пункт перевантаження (V_1) та магазини (V_2, V_3). Транспортна мережа задана графом (Рис. 1). В дужках вказана пропускна спроможність дуги. Для дуг x_{3t} та x_{4t} пропускна спроможність характеризує кількість товару, яку може продати магазин покупцям, для інших дуг – максимальну кількість товару, яку можна перевезти. Є три одиниці транспорту вантажопідйомності 2, 4 та 6 одиниць.

Знайти максимальну кількість товару, яку можна довести до споживачів. Позначимо $x_1 = x_{s1}$, $x_2 = x_{s2}$, $x_3 = x_{12}$, $x_4 = x_{13}$ – вантажопідйомність транспор-

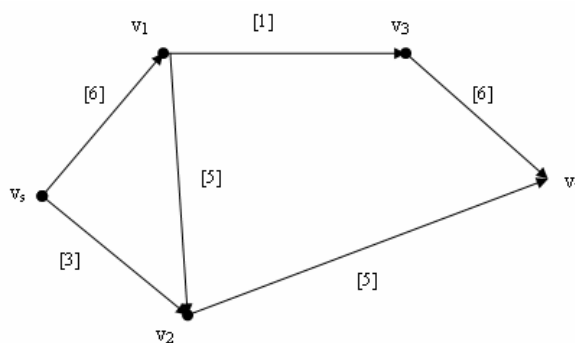


Рис. 1. Транспортна мережа

ту, призначеного на відповідні маршрути, $x_5 = y_{s1}$, $x_6 = y_{s2}$, $x_7 = y_{12}$, $x_8 = y_{13}$ – кількість вантажу перевезеного по відповідних маршрутах, $x_9 = y_{2t}$, $x_{10} = y_{3t}$ – кількість товару проданого магазинами.

Відповідно до умов задачі, складемо модель:

$$f(x) = x_5 + x_6 \rightarrow \max$$

обмеження на пропускну спроможність дуг:

$$x_5 \leq 6;$$

$$x_6 \leq 3;$$

$$x_7 \leq 5;$$

$$x_8 \leq 1;$$

$$x_9 \leq 5;$$

$$x_{10} \leq 6;$$

обмеження на вантажопідйомність транспорту:

$$x_5 - x_1 \leq 0;$$

$$x_6 - x_2 \leq 0;$$

$$x_7 - x_3 \leq 0;$$

$$x_8 - x_4 \leq 0;$$

баланс у вузлах:

$$x_5 - x_7 - x_8 = 0;$$

$$x_6 + x_7 - x_9 = 0;$$

$$x_8 - x_{10} = 0;$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 10;$$

комбінаторні обмеження:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E_{74}^4(G), \text{ де } G = \{0^4, 2, 4, 6\}.$$

Для обмеженості допустимої області в ЗЛП доцільно вести обмеження:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq \max_i g_i, g_i \in G,$$

тобто

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 6.$$

Зауваження 5. Умови балансу у вузлах можна замінити на нерівності, оскільки це не змінить цільової функції:

$$x_5 - x_7 - x_8 \leq 0;$$

$$x_6 + x_7 - x_9 \leq 0;$$

$$x_8 - x_{10} \leq 0.$$

Таблиця 1. Початкова симплекс-таблиця

	1	-x1	-x2	-x3	-x4	-x5	-x6	-x7	-x8	-x9	-x10
x0	0					-1	-1				
x11	6					1					
x12	3						1				
x13	5							1			
x14	1								1		
x15	5									1	
x16	6										1
x17	0	-1				1					
x18	0		-1				1				
x19	0			-1				1			
x20	0				-1				1		
x21	6	1									
x22	6		1								
x23	6			1							
x24	6				1						
x25	0					1		-1	-1		
x26	0						1	1		-1	
x27	0								1		-1
x1	0	-1									
x2	0		-1								
x3	0			-1							
x4	0				-1						
x5	0					-1					
x6	0						-1				
x7	0							-1			
x8	0								-1		
x9	0									-1	
x10	0										-1
xL	61	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Побудуємо початкову симплекс-таблицю (Таб. 1, використовуються форма таблиці і позначення з [3]):

Застосувавши програмну реалізацію на мові C# прямого методу відсікання, розв'язок задачі знайдено за 1174 кроки, використавши при цьому 0,02 секунди (на комп'ютері з процесором AMD Athlon x2 4200+ тактовою частотою 2200 МГц).

Розв'язком є вектор $x^* = (6, 4, 2, 0, 2, 3, 2, 0, 0, 5, 0)$. Значення цільової функції $f(x^*) = 5$. Це означає, що для досягнення максимального потоку на маршруті x_{s_1} треба використати транспорт вантажопідйомністю 6 одиниць і перевезти 2 одиниці товару, на маршруті x_{s_2} – транспорт вантажопідйомністю 4 одиниці і перевезти 3 одиниці товару, на маршруті x_{12} – транспорт вантажопідйомністю 2 одиниці і перевезти 2 одиниці товару. До магазину v_3 товар не потрапить, а магазин v_2 зможе продати 5 одиниць товару.

Висновки

В роботі розглянута задача знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями та побудована відповідна модель у вигляді лінійної умовної задачі евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях.

Розглянутий приклад застосування прямого алгоритму до поставленої задачі показує застосовність прямого методу комбінаторного відсікання в потокових задачах на розміщеннях.

В подальшому доцільно дослідити теоретичну ефективність алгоритму для розв'язання поставленої задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Форд Л. Потоки в сетях / Форд Л., Фалкерсон Д. – М.: Мир, 1966. – 277 с.
2. Ху Т.Ч. Комбинаторные алгоритмы / Т. Ч. Ху, М. Т. Шинг – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2004. – 330 с.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. – М.: «Мир», 1974. – 519 с.
4. Edmonds J. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems / Edmonds J., Karp R. M. // J. ACM. – 1972. – Vol. 19, №2. – P. 248-264.
5. Диниц Е.А. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой / Е.А. Диниц // Докл. АН СССР. – 1970. – Т. 194, №4. – С. 754-757.
6. Карзанов А. А. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков / А. А. Карзанов // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 215, №1. – С. 49-53.
7. Стоян Ю.Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю.Г. Стоян, О.О. Ємець. – К.: ІСДО, 1993. – 188 с.
8. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. – Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. – 103 с.
9. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т.Н. Барболина. – К.: Наук. думка, 2008. – 159 с.
10. Ємець О. О. Прямий метод відсікання для задач евклідової комбінаторної оптимізації на розміщеннях / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // II всеукраїнська науково-практична конференція «Інформатика та системні науки», 17-19 березня 2011 року. – Полтава, 2011. – С. 104-107

Стаття поступила в редакцію 28.05.2011

2D КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є НА КЛАСІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ТА СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЯ

© Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.

УКРАЇНЬСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
КАФЕДРА ВИЩОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
ВУЛ. УНІВЕРСИТЕТСЬКА 16, М. ХАРКІВ, 61003, УКРАЇНА
E-MAIL: olesya@email.com

Abstract. Cubature formulas of the calculation of two dimensions of Fourier's coefficients are presented by using interlineation in the case when information about function is set of lines on the class $|f^{(r,0)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(0,r)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(r,r)}(x,y)| \leq \tilde{M}$, $r = 1, 2$. The error of the cubature formulas is evaluated by errors of quadratures formulas.

ВСТУП

При наближенні функцій двох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, значення функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Задачу наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій відповідно [1] на різних класах функцій. Важливим кроком в розв'язанні такої задачі є обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій (інформація про задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих). Актуальним є питання оцінки похибки кубатурної формули, а також отримання оцінки похибки кубатурної формули через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

В [2] – [4] розглядалась задача наближеного обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про $f(x,y)$ задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Однак питання отримання оцінки похибки кубатурних формул через відповідні оцінки похибки квадратурних формул розглядається вперше.

Отже, метою даної роботи є побудова кубатурних формул для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій на класі дійсних функцій двох змінних, визначених на $G = [0, 1]^2$ і таких, що $|f^{(r,0)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(0,r)}(x,y)| \leq M$,

$|f^{(r,r)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $r = 1, 2$, у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих $x_k = k\Delta$, $y_j = j\Delta$, $k, j = \overline{0, \ell}$. Довести, що оцінку похибки побудованих кубатурних формул можна отримати різними способами, зокрема, виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

1. ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Для досягнення поставленої мети доводяться допоміжні твердження щодо похибки обчислення коефіцієнтів Фур'є функції однієї змінної.

Лема 1. Нехай $g(x) \in C^1[0, 1]$, $|g'(x)| \leq M$. Для функції однієї змінної справедлива нерівність:

$$\left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi m x dx \right| \leq M \frac{\Delta}{3},$$

де $S_k g(x) = g(x_k) \frac{x-x_{k+1}}{-\Delta} - g(x_{k+1}) \frac{x-x_k}{\Delta}$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $x_k = k\Delta$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$.

Доведення. Нехай

$$G_{0,k}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{\Delta}, & x_k \leq \xi \leq x, \\ \frac{x - x_k}{-\Delta}, & x \leq \xi \leq x_{k+1}, \end{cases}$$

Справедлива наступна нерівність:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi m x dx \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} g'(\xi) G_{0k}(x, \xi) d\xi \sin 2\pi m x dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g'(\xi)| |G_{0k}(x, \xi)| d\xi dx \leq M \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |G_{0k}(x, \xi)| d\xi dx = \\ &= M \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{x_{k+1} - x}{\Delta} \int_{x_k}^x d\xi + \frac{x - x_k}{\Delta} \int_x^{x_{k+1}} d\xi \right) dx = \\ &= M \frac{2}{\Delta} \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - x)(x - x_k) dx = M \frac{2}{\Delta} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{\Delta^3}{6} = M \ell \frac{\Delta^2}{3} = M \frac{\Delta}{3}, \end{aligned}$$

де $|g'(x)| \leq M$. □

Лема 2. Нехай $g(x) \in C^2[0, 1]$, $|g''(x)| \leq M$. Для функції однієї змінної справедлива нерівність:

$$\left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi m x dx \right| \leq M \frac{\Delta^2}{12},$$

де $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $x_k = k\Delta$, $\Delta = \frac{1}{\ell}$.

Доведення. Нехай

$$\tilde{G}_{0k}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{\Delta} (x_k - \xi), & x_k \leq \xi \leq x, \\ \frac{x - x_k}{-\Delta} (x_{k+1} - \xi), & x \leq \xi \leq x_{k+1}, \end{cases}$$

тоді виконується рівність

$$\begin{aligned} g(x) - g(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{-\Delta} - g(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{\Delta} &= \frac{x_{k+1} - x}{\Delta} \int_{x_k}^x g''(\xi) \frac{x_k - \xi}{1!} d\xi + \\ &+ \frac{x_k - x}{\Delta} \int_{x_{k+1}}^x g''(\xi) \frac{x_{k+1} - \xi}{1!} d\xi = \int_{x_k}^{x_{k+1}} g''(\xi) \tilde{G}_{0k}(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - S_k g(x)) \sin 2\pi m x dx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[g(x) - g(x_k) \frac{x - x_{k+1}}{-\Delta} - g(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{\Delta} \right] \sin 2\pi m x dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |g''(\xi)| |\tilde{G}_{0k}(x, \xi)| d\xi dx \leq \\ &\leq M \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\tilde{G}_{0k}(x, \xi)| d\xi dx = \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{M\Delta^3}{12} = \frac{M\Delta^2}{12}. \end{aligned}$$

□

2. ОЦІНКА ПОХИБКИ ОБЧИСЛЕННЯ 2D КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

Нехай $p_k(x)$, $p_j(y)$ – сплайни порядку $0, 1, 2, 3$ з властивостями $p_k(x_p) = \delta_{kp}$, $p_j(y_s) = \delta_{js}$ і

$$O_1 f(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x), \quad O_2 f(x, y) = \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y), \quad k, j \in \overline{0, \ell},$$

$$R_1(f; x, y) = f(x, y) - \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) = f(x, y) - O_1 f(x, y),$$

$$R_2(f; x, y) = f(x, y) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) = f(x, y) - O_2 f(x, y).$$

Оператор сплайн-інтерліант $Of(x, y)$ представляється через оператори $O_\mu f(x, y)$, $\mu = 1, 2$ наступним чином:

$$Of(x, y) = O_1 f(x, y) + O_2 f(x, y) - O_1 O_2 f(x, y).$$

Лема 3. Для залишку

$$R(f) = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy$$

справедлива наступна рівність:

$$R(f) = \int_0^1 \int_0^1 R_1 R_2 f(x, y) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy.$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned} f(x, y) - Of(x, y) &= f(x, y) - O_1 f(x, y) - O_2 f(x, y) + O_1 O_2 f(x, y) = \\ &= [I - O_1 - O_2 + O_1 O_2] f(x, y) = \\ &= [I - O_1 + I - O_2 + I - O_1 O_2] f(x, y) = [(I - O_1)(I - O_2)] f(x, y) = R_2 R_1 f(x, y), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R_1 R_2 f(x, y) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy. \end{aligned}$$

□

Нехай

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1(f; y) &= \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) \right) \sin 2\pi m x dx = \\ &= \int_0^1 (f(x, y) - O_1 f(x, y)) \sin 2\pi m x dx, \\ \tilde{R}_2(f; x) &= \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy = \\ &= \int_0^1 (f(x, y) - O_2 f(x, y)) \sin 2\pi n y dy.\end{aligned}$$

Лема 4. Для залишку $R(f)$ справедлива наступна рівність:

$$R(f) = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - O f(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 f(x, y).$$

Доведення. Розглянемо

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 \tilde{R}_2 f(x, y) &= \int_0^1 \left(\tilde{R}_2(f; x) - \sum_{k=0}^{\ell} \tilde{R}_2(f; x_k) p_k(x) \right) \sin 2\pi m x dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\ell} \int_0^1 \left(f(x_k, y) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy p_k(x) \right\} \sin 2\pi m x dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(f(x, y) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy \right) \sin 2\pi m x dx - \\ &\quad - \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\ell} \int_0^1 \left(f(x_k, y) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi n y dy p_k(x) \right) \sin 2\pi m x dx = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin 2\pi m x \sin 2\pi n y dx dy - \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \sin 2\pi n y dy \sin 2\pi m x dx - x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy + \\
& + \int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) p_k(x) p_j(y) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = \\
& = \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f(x, y) - \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) - \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) p_k(x) p_j(y) \right\} \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = \\
& = \int_0^1 \int_0^1 (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi m x dx \sin 2\pi n y dy = R(f).
\end{aligned}$$

□

Далі в якості $p_k(x)$, $p_j(y)$ будемо розглядати лінійні базисні сплайни.

3. КУВАТУРНА ФОРМУЛА ОБЧИСЛЕННЯ 2D КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є

Введемо позначення

$$h_{10}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_1}{-\Delta}, & x_0 \leq x < x_1, \\ 0, & x \geq x_1, \end{cases} \quad h_{20}(y) = \begin{cases} \frac{y - y_1}{-\Delta}, & y_0 \leq y < y_1, \\ 0, & y \geq y_1, \end{cases}$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{k-1}, \\ \frac{x - x_k}{\Delta}, & x_{k-1} \leq x < x_k, \\ \frac{x - x_{k+1}}{-\Delta}, & x_k \leq x < x_{k+1}, \\ 0, & x \geq x_{k+1}, \end{cases} \quad k = \overline{1, \ell - 1};$$

$$h_{2j}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{j-1}, \\ \frac{y - y_j}{\Delta}, & y_{j-1} \leq y < y_j, \\ \frac{y - y_{j+1}}{-\Delta}, & y_j \leq y < y_{j+1}, \\ 0, & y \geq y_{j+1}, \end{cases} \quad j = \overline{1, \ell - 1};$$

$$h_{1\ell}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\ell-1}, \\ \frac{x - x_{\ell-1}}{\Delta}, & x_{\ell-1} \leq x < x_{\ell}, \end{cases} \quad h_{2\ell}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq y_{\ell-1}, \\ \frac{y - y_{\ell-1}}{\Delta}, & y_{\ell-1} \leq y < y_{\ell}, \end{cases}$$

$$x_k = k\Delta, y_j = j\Delta, \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

Нехай $Of(x, y)$ – оператор сплайн-інтерліант:

$$Of(x, y) = \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) h_{1k}(x) + \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) h_{2j}(y) - \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j, z) h_{1k}(x) h_{2j}(y).$$

Лема 5. [1] Для $Of(x, y)$ виконуються наступні властивості:

$$1. \quad |f(x, y) - Of(x, y)| = O\left(\frac{1}{\ell^{2r}}\right) = O(\Delta^{2r}),$$

$$\forall (x, y) \in G = [0, 1]^2, \quad r = 1, 2;$$

$$2. \quad Of(x_k, y) = f(x_k, y), \quad k = \overline{0, \ell}; \quad Of(x, y_j) = f(x, y_j), \quad j = \overline{0, \ell}.$$

Для обчислення інтегралів

$$I_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$I_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$I_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Of(x, y) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_2^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Of(x, y) \cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dx dy,$$

$$\Phi_3^2(m, n) = \int_0^1 \int_0^1 Of(x, y) e^{-i2\pi mx} e^{-i2\pi ny} dx dy.$$

Підставимо вираз для оператора сплайн-інтерліаннта та отримаємо відповідні кубатурні формули, наприклад:

$$\begin{aligned} \Phi_1^2(m, n) &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{\ell} f(x_k, y) \int_0^1 h_{1k}(x) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy + \\ &+ \int_0^1 \sum_{j=0}^{\ell} f(x, y_j) \int_0^1 h_{2j}(y) \sin 2\pi ny dy \sin 2\pi mx dx - \\ &- \sum_{k=0}^{\ell} \sum_{j=0}^{\ell} f(x_k, y_j) \int_0^1 h_{1k}(x) \sin 2\pi mx dx \int_0^1 h_{2j}(y) \sin 2\pi ny dy. \end{aligned}$$

Теорема 1. Для кубатурної формули $\Phi_1^2(m, n)$ обчислення $I_1^2(m, n)$ справедлива наступна оцінка

$$|R(f)| \leq \frac{4\tilde{M}}{[(r+2)!]^2} \Delta^{2r} = \frac{4\tilde{M}}{[(r+2)!]^2} \frac{1}{\ell^{2r}}, \quad r = 1, 2.$$

Доведення. Маємо наступну оцінку (лема 3)

$$\begin{aligned} |R(f)| &= \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} (f(x, y) - Of(x, y)) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy \right| = \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f^{(r,r)}(\xi, \eta) G_{1k}(x, \xi) G_{2j}(y, \eta) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dx dy \right|, \\ G_{1k}(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k < \xi < x, \\ \frac{x_k - x}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x < \xi < x_{k+1}, \end{cases} \\ G_{2j}(y, \eta) &= \begin{cases} \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j < \eta < y, \\ \frac{y_j - y}{y_{j+1} - y_j} \frac{(y_{j+1} - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y < \eta < y_{j+1}, \end{cases} \\ &r = 1, 2. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$|R(f)| \leq \tilde{M} \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} |G_{1k}(x, \xi)| |G_{2j}(y, \eta)| dx dy.$$

Зауважимо, що $\int_{x_k}^{x_{k+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |G_1(x, \xi)| d\xi =$

$$\begin{aligned} &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{|x_{k+1} - x|}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^x \frac{|x_k - \xi|^{r-1}}{(r-1)!} d\xi + \frac{|x_k - x|}{x_{k+1} - x_k} \int_x^{x_{k+1}} \frac{|x_{k+1} - \xi|^{r-1}}{(r-1)!} d\xi \right) dx = \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{|x_{k+1} - x|}{x_{k+1} - x_k} \int_{x_k}^x \frac{(\xi - x_k)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi + \frac{|x_k - x|}{x_{k+1} - x_k} \int_x^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi \right) dx = \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{|x_{k+1} - x|}{x_{k+1} - x_k} \frac{(\xi - x_k)^r}{r!} \Big|_{x_k}^x - \frac{|x_k - x|}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x_{k+1} - \xi)^r}{r!} \Big|_x^{x_{k+1}} \right) dx = \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x - x_k)^r}{r!} + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \frac{(x_{k+1} - x)^r}{r!} \right) dx = \\ &= \frac{1}{r! \Delta} \left(\frac{(x_{k+1} - x)(x - x_k)^{r+1}}{r+1} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)^{r+1}}{r+1} dx \right) + \\ &+ \frac{1}{r! \Delta} \left(\frac{(x_{k+1} - x)(x - x_k)^{r+1}}{r+1} \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1} - x)^{r+1}}{r+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{r! \Delta} \left(\frac{\Delta^{r+2}}{(r+1)(r+2)} + \frac{\Delta^{r+2}}{(r+1)(r+2)} \right) = \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}. \end{aligned}$$

Аналогічно обчислюються наступні інтеграли: $\int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} |G_{2j}(y, \eta)| d\eta dy = \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!}$.

Тому,

$$|R(f)| \leq \tilde{M} \sum_{k=0}^{\ell-1} \sum_{j=0}^{\ell-1} \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!} \frac{2\Delta^{r+1}}{(r+2)!} = \tilde{M} \frac{4\Delta^{2r}}{[(r+2)!]^2} = \frac{4\tilde{M}}{[(r+2)!]^2 \ell^{2r}}.$$

□

Зауваження. Доведення теореми можна здійснити на основі леми 4, використовуючи оцінки похибок квадратурних формул з леми 1 та леми 2. Тобто, при $r = 1$, $|\tilde{R}_1| \leq M \frac{\Delta}{3}$, (лема 1), а за лемою 4 маємо

$$|R(f)| \leq |\tilde{R}_1 \tilde{R}_2(f; x, y)| \leq \tilde{M} \frac{\Delta^2}{3^2} = \frac{\tilde{M}}{9\ell^2},$$

а при $r = 2$, $|\tilde{R}_1| \leq M \frac{\Delta^2}{12}$, (лема 2) і за лемою 4

$$|R(f)| \leq |\tilde{R}_1 \tilde{R}_2(f; x, y)| \leq \tilde{M} \frac{\Delta^4}{12^2} = \frac{\tilde{M}}{144\ell^4}.$$

Наведемо результати чисельного експерименту.

1. Нехай $f(x, y) = \frac{1}{2}(\cos(2x - 2y) - \cos(2x + 2y))$, тоді $|f^{(1,0)}(x, y)| \leq 2$, $|f^{(0,1)}(x, y)| \leq 2$, $|f^{(1,1)}(x, y)| \leq 4$. Якщо обчислювати інтеграл $I_1^2(2, 3)$ за кубатурою $\Phi_1^2(2, 3)$ формулою при $\ell = 19$, то $|R(f)| = |I_1^2(2, 3) - \Phi_1^2(2, 3)| = |0.00362210009505 - 0.003622096935204| = 0.000000003159846$.

Функцію $f(x, y)$ можна представити у вигляді $f(x, y) = \sin 2x \sin 2y$, тому якщо в якості $g(u) = \sin 2u$, $u = x, y$, то можна отримати наступні результати обчислень при $\ell = 19$ для

$$\tilde{R}_i(g, u, s) = \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} (g(u) - S_k g(u)) \sin 2\pi s u du \right|, \quad i = 1, 2,$$

$$\tilde{R}_1(g, x, 2) = 0.000069018217309, \quad \tilde{R}_2(g, y, 3) = 0.00004578277933.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |R(f)| &= |I_1^2(2, 3) - \Phi_1^2(2, 3)| = \tilde{R}_1(g, x, 2) \cdot \tilde{R}_2(g, y, 3) = \\ &= 0.000069018217309 \cdot 0.00004578277933 = 0.000000003159846. \end{aligned}$$

2. Нехай $f(x, y) = \frac{1}{2}(\cos(2x - 2y) + \cos(2x + 2y))$, тоді $|f^{(2,0)}(x, y)| \leq 4$, $|f^{(0,2)}(x, y)| \leq 4$, $|f^{(2,2)}(x, y)| \leq 16$. Якщо обчислювати інтеграл $I_1^2(2, 3)$ за кубатурою формулою $\Phi_1^2(2, 3)$ при $\ell = 19$, то $|R(f)| = |I_1^2(2, 3) - \Phi_1^2(2, 3)| = |0.008785471951418 - 0.008785464287153| = 0.000000007664265$.

Функцію $f(x, y)$ можна представити у вигляді $f(x, y) = \cos 2x \cos 2y$, тому якщо в якості $g(u) = \cos 2u$, $u = x, y$, то можна отримати наступні результати обчислень для

$$\tilde{R}_i(g, u, s) = \left| \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} (g(u) - S_k g(u)) \sin 2\pi s u du \right|, \quad i = 1, 2,$$

$$\text{при } \ell = 19 : \tilde{R}_1(g, x, 2) = 0.000107489504778, \quad \tilde{R}_2(g, y, 3) = 0.000071302454184.$$

Отже,

$$\begin{aligned} |R(f)| &= |I_1^2(2, 3) - \Phi_1^2(2, 3)| = \tilde{R}_1(g, x, 2) \cdot \tilde{R}_2(g, y, 3) = \\ &= 0.000107489504778 \cdot 0.000071302454184 = 0.000000007664265. \end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕННЯ

В статті пропонуються та досліджуються кубатурні формули обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації на класі функцій, у яких $|f^{(r,0)}(x, y)| \leq M$, $|f^{(0,r)}(x, y)| \leq M$, $|f^{(r,r)}(x, y)| \leq \tilde{M}$, $r = 1, 2$. Інформація про функцію задана слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доводиться, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат. Результати даної роботи можуть бути використані при дослідженні кубатурних формул обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерфлетації.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О.М. Литвин. –Харків.: Основа, 2002. –544 с.
2. Литвин О.М. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18 –21 трав., 2010р., Харків, Ч.1. – 2010. – С. 211-213.
3. Литвин О.М. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Доповіді НАН України. – 2010. № 3. – С. 24-29.
4. Литвин О.М. Кубатурна формула для обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О.М. Литвин, О.П. Нечуйвітер // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». –2010. № 926. – С. 153-160.

Стаття поступила в редакцію 06.05.2011

ПОБУДОВА КУСКОВО-БІЛІНІЙНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ
НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З РОЗРИВАМИ ПЕРШОГО РОДУ У
ВУЗЛАХ РЕКТАНГУЛЯЦІЇ ДВОВИМІРНОЇ ОБЛАСТІ

© Литвин О. М., Першина Ю. І.

УКРАЇНЬСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
ВУЛ. УНІВЕРСИТЕТСЬКА, 16, М. ХАРКІВ, 61003, УКРАЇНА
E-MAIL: *academ@kharkov.ua*

Abstract. In the paper the general method of construction of piece-bilinear interpolational splines which can have ruptures of the first sort on borders between rectangular elements with the parties parallel to axes of co-ordinates is offered. These results are offered to be used for approach of explosive functions from two variables, which too can have (and can and not have) ruptures of the first sort on the specified lines.

ВСТУП

Загальновідомими є результати теорії наближення функцій поліномами або сплайнами, які є неперервними або диференційовними до деякого порядку включно ([1]-[4]). В той же час практика вимагає уміння створювати математичні моделі внутрішньої структури 3D тіл в заданих площинах за умови, що функція $f(x, y)$, яка описує цю внутрішню структуру у точках площин має розриви першого роду на деякій системі ліній. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин, підшлункова залоза має свою форму та щільність тканин, хребет має свою щільність тощо).

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Крім того, наведемо наступний приклад. В механіці твердого тіла однією із складних задач є задача дослідження тріщин у внутрішніх точках тіла, тобто таких включень у внутрішніх точках тіла, в яких відсутній матеріал, з якого складається тіло. Можна сказати, що таке тіло має щільність, яка є розривною: за межами тріщини одна щільність, в області, обмеженою стінками тріщини – інша щільність.

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

В роботах [5, 6] авторами був розроблений метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, що використовує метод мінімакса. Робота [7] присвячена узагальненню результатів попередніх робіт на випадок наближення розривної функції двох змінних за допомогою розривних інтерлінаційних сплайнів двох змінних для випадку, коли розриви першого роду наближуваної функції та розриви першого роду наближуваних сплайнів розміщені в точках прямих, паралельних осям координат.

В даній роботі вперше пропонується загальний підхід до побудови кусково-білінійних сплайнів, які можуть мати розриви першого роду на границях між прямокутними елементами зі сторонами, паралельними осям координат. Ці результати пропонується використовувати для наближення розривних функцій від двох змінних, які теж можуть мати (а можуть і не мати) розриви першого роду на вказаних лініях. Будемо вважати, що область наближення повністю розміщена в квадраті $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Постановка задачі. Нехай в області D задана розривна функція $f(x, y)$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_m = 1$, $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = 1$. Вважаємо, що на кожному з відрізків, які є спільними для двох сусідніх прямокутників $\Pi_{i,j}$ та $\Pi_{i,j+1}$ або $\Pi_{i+1,j}$, або $\Pi_{i+1,j+1}$ функція $f(x, y)$ може мати розриви першого роду, причому в кожній точці (x_i, y_j) може бути задано чотири різних значення наближуваної функції:

$$C_{i,j}^{++} = \lim_{x \rightarrow x_i+0} \lim_{y \rightarrow y_j+0} f(x, y), C_{i,j}^{-+} = \lim_{x \rightarrow x_i-0} \lim_{y \rightarrow y_j+0} f(x, y),$$

$$C_{i,j}^{+-} = \lim_{x \rightarrow x_i+0} \lim_{y \rightarrow y_j-0} f(x, y), C_{i,j}^{--} = \lim_{x \rightarrow x_i-0} \lim_{y \rightarrow y_j-0} f(x, y)$$

Потрібно побудувати наближувачий розривний кусково-лінійний сплайн для заданої розривної функції $f(x, y)$.

1. ОПИС МЕТОДУ НАБЛИЖЕННЯ

Побудуємо за допомогою вказаної інформації в кожному з елементів $\Pi_{i,j}$ інтерполяційний білінійний поліном у вигляді

$$p_{ij}(x, y) = C_{i,j}^{++} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} + C_{i+1,j}^{-+} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} +$$

$$+ C_{i,j+1}^{+-} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} + C_{i+1,j+1}^{--} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Лема. Функція $s(x, y) = p_{ij}(x, y), (x, y) \in \Pi_{i,j} \subset D$ є розривною функцією білінійною в кожному з елементів розбиття з наступними властивостями:

$$\lim_{x \rightarrow x_{i+1}-0} s(x, y) = p_{ij}(x_{i+1}, y), \quad \lim_{x \rightarrow x_i+0} s(x, y) = p_{ij}(x_i, y),$$

$$\lim_{y \rightarrow y_{j+1}-0} s(x, y) = p_{ij}(x, y_{j+1}), \quad \lim_{y \rightarrow y_j+0} s(x, y) = p_{ij}(x, y_j).$$

Доведення очевидним чином витікає з представлення функції $s(x, y) = p_{ij}(x, y)$.

Означення. Функцію $s(x, y)$ будемо називати розривним білінійним сплайном на прямокутній сітці.

Зауваження. Якщо $C_{i,j}^{++} = C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-} = C_{i,j+1}^{--}$, то на лінії $x = x_i$ сплайн $s(x, y)$ є неперервною функцією для кожного $y, y_j \leq y \leq y_{j+1}$. Якщо ж для всіх точок (x_i, y_j) виконуються рівності $C_{i,j}^{++} = C_{i,j}^{-+} = C_{i,j}^{+-} = C_{i,j}^{--}$, то $s(x, y) \in C(D)$ і буде класичним білінійним сплайном на вказаній сітці вузлів.

Теорема 1. Якщо $f(x, y)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i, y_j) та $f(x, y) \in C^{r,r}(\Pi_{i,j}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, r = 1, 2$ то залишок наближення функції $f(x, y)$ білінійним поліномом

$$S(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) h_i(x) h_j(y),$$

$$h_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, h_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$$

в кожному прямокутнику $\Pi_{i,j}$ буде мати вигляд:

$$RS(x, y) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f^{(r,r)}(\xi, \eta) G_1(x, \xi) G_2(y, \eta) d\xi d\eta, (x, y) \in \Pi_{i,j}, \quad (2)$$

$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} h_1(x) \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq \xi \leq x \leq x_{i+1} \\ -h_2(x) \frac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq x \leq \xi \leq x_{i+1} \end{cases},$$

$$G_2(y, \eta) = \begin{cases} h_1(y) \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq \eta \leq y \leq y_{j+1} \\ -h_2(y) \frac{(y_{j+1} - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq y \leq \eta \leq y_{j+1} \end{cases}.$$

Доведення. Скористаємося формулою, яка виведена в роботі [7]

$$\begin{aligned} RS(x, y) &= f(x, y) - S(x, y) = f(x, y) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_i^x, y_j h_i(x) h_j(y) = \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i(x) h_j(y) \int_{x_i}^x \int_{y_j}^y f^{(r,r)}(\xi, \eta) \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!} d\xi d\eta \end{aligned}$$

Оскільки ми маємо справу з прямокутним елементом $\Pi_{i,j}$, то ця формула запишеться у вигляді формули (2) із врахуванням властивості інтеграла

$$\int_{x_{i+1}}^x f^{(r,r)}(\xi, \eta) \frac{(x_i - \xi)^{(r-1)}}{(r-1)!} d\xi = - \int_x^{x_{i+1}} f^{(r,r)}(\xi, \eta) \frac{(x_i - \xi)^{(r-1)}}{(r-1)!} d\xi$$

та

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,r)}(\xi, \eta) \frac{(x_i - \xi)^{(r-1)}}{(r-1)!} d\xi &= \int_{x_i}^x f^{(r,r)}(\xi, \eta) \frac{(x_i - \xi)^{(r-1)}}{(r-1)!} d\xi - \\ &- \int_x^{x_{i+1}} f^{(r,r)}(\xi, \eta) \frac{(x_i - \xi)^{(r-1)}}{(r-1)!} d\xi \end{aligned}$$

Теорема 1 доведена. □

Теорема 2. Якщо $f(x, y) \in C^{(r,r)}(\Pi_{i,j})$ і має розриви першого роду у деяких точках (або у всіх) (x_i, y_j) , то існують такі значення $C_{i,j}^{++}$, $C_{i+1,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i+1,j+1}^{--}$, що

$$\|f(x, y) - s(x, y)\|_{C(D)} = O(\Delta_1^r + \Delta_2^r),$$

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq i < m} (x_{i+1} - x_i), \Delta_2 = \max_{0 \leq j < n} (y_{j+1} - y_j)$$

$$\forall f(x, y) \in C^{(r,r)}(\Pi_{i,j}), \forall \Pi_{i,j} \subset D, r = 1, 2$$

Доведення. Покладемо у формулі (1)

$$C_{i,j}^{++} = f(x_i + 0, y_j + 0), C_{i+1,j}^{-+} = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0)$$

$$C_{i,j+1}^{+-} = f(x_i + 0, y_{j+1} - 0), C_{i+1,j+1}^{--} = f(x_{i+1} - 0, y_{j+1} - 0)$$

Звертаємо увагу, що оператор $p_{ij}(x, y)$ можна зобразити в цьому випадку у вигляді

$$p_{ij}(x, y) = p_{ij}f(x, y) = E1_i E2_j f(x, y),$$

$$E1_i f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}, y),$$

$$E2_j f(x, y) = \frac{y - y_{j+1}}{y_j - y_{j+1}} f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} f(x, y_{j+1}).$$

Тому

$$\begin{aligned} f(x, y) - p_{ij}f(x, y) &= (I - E1_i E2_j)f(x, y) = ((I - E1_i) + (I - E2_j) - \\ &\quad - (I - E1_i)(I - E2_j))f(x, y) = (R1 + R2 - R1R2)f(x, y), \\ R1f(x, y) &= (I - E1_i)f(x, y), R2f(x, y) = (I - E2_j)f(x, y). \end{aligned}$$

Оцінимо похибку наближення в нормі $C(D)$ через оцінки в $C(\Pi_{i,j})$

$$\begin{aligned} \|f(x, y) - p_{ij}f(x, y)\|_{C(D)} &= \|R1f(x, y) + R2f(x, y) - R1R2f(x, y)\|_{C(D)} = \\ &= O(\Delta_1^r + \Delta_2^r + \Delta_1^r \Delta_2^r), \end{aligned}$$

де

$$\Delta_1 = \max_{0 \leq i < m} (x_{i+1} - x_i), \Delta_2 = \max_{0 \leq j < n} (y_{j+1} - y_j).$$

При малих Δ_1 та Δ_2 останнім доданком можна знехтувати.

Теорема 2 доведена. \square

Для знаходження невідомих $C_{i,j}^{++}$, $C_{i+1,j}^{-+}$, $C_{i,j+1}^{+-}$, $C_{i+1,j+1}^{--}$ в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J(C) = \sum_{\Pi_{i,j} \subset D} \iint_{\Pi_{i,j}} [f(x, y) - p_{ij}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C$$

2. ПРИКЛАДИ

Приклад 1. Нехай $m = 2$, $n = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0.5$, $y_3 = 1$. Тобто область визначення наближуваної функції (рис.1) складається з чотирьох прямокутних елементів, які задаються наступним чином:

$$\Pi_{11} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\},$$

$$\Pi_{12} = \{(x, y) : x_1 < x < x_2, y_2 < y < y_3\},$$

$$\Pi_{21} = \{(x, y) : x_2 < x < x_3, y_1 < y < y_2\},$$

$$\Pi_{22} = \{(x, y) : x_2 < x < x_3, y_2 < y < y_3\}.$$

Задамо функцію $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої прямокутної сітки (рис.2)

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ x - y, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ -x + y, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ -x - y, & (x, y) \in \Pi_{22} \end{cases}$$

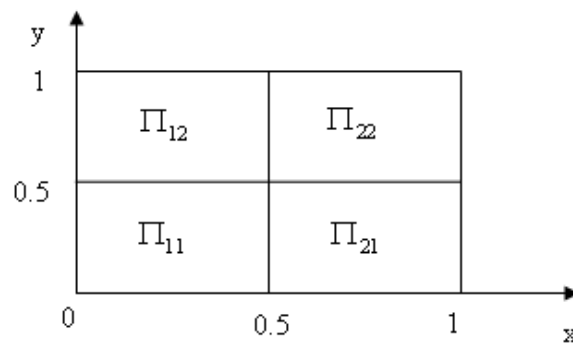


Рис. 1. Область визначення наближуваної функції $f(x, y)$

В цьому випадку маємо п'ять точок, в яких побудована функція має розриви першого роду

$$\begin{aligned}
 f^{-+}(0.5, 0) &= 0.5, f^{++}(0.5, 0) = -0.5, \\
 f^{+-}(0, 0.5) &= 0.5, f^{+-}(0, 0.5) = -0.5, \\
 f^{--}(0.5, 0.5) &= 1, f^{-+}(0.5, 0.5) = 0, f^{++}(0.5, 0.5) = -1, f^{+-}(0.5, 0.5) = 0, \\
 f^{--}(1, 0.5) &= -0.5, f^{-+}(1, 0.5) = -1.5, \\
 f^{--}(0.5, 1) &= -0.5, f^{+-}(0.5, 1) = -1.5
 \end{aligned}$$

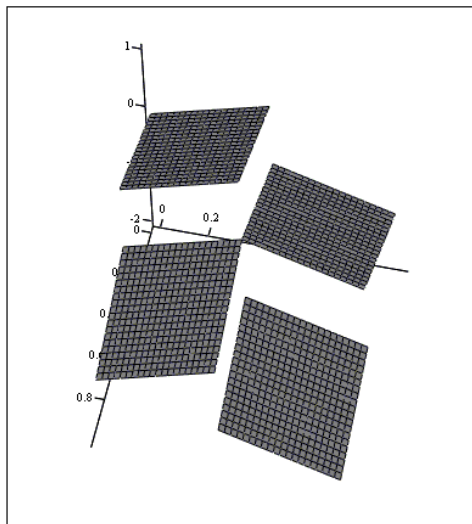


Рис. 2. Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$

В кожному розглянутому прямокутному елементі побудуємо білінійний інтерполяційний сплайн

$$S(x, y, C) = \begin{cases} S_{11}(x, y, C), (x, y) \in \Pi_{11} \\ S_{12}(x, y, C), (x, y) \in \Pi_{12} \\ S_{21}(x, y, C), (x, y) \in \Pi_{21} \\ S_{22}(x, y, C), (x, y) \in \Pi_{22} \end{cases},$$

де, наприклад,

$$S_{11}(x, y, C) = C_{1,1}^{++} \frac{(x-0.5)(y-0.5)}{0.25} - C_{2,1}^{-+} \frac{x(y-0.5)}{0.25} - C_{1,2}^{+-} \frac{(x-0.5)y}{0.25} + C_{2,2}^{--} \frac{xy}{0.25}.$$

Поліноми $S_{12}(x, y, C)$, $S_{21}(x, y, C)$, $S_{22}(x, y, C)$ визначаються аналогічно поліному $S_{11}(x, y, C)$, використовуючи формулу (1), де C – матриця невідомих коефіцієнтів:

$$C = \begin{pmatrix} C_{1,1}^{++} & C_{2,1}^{-+} & C_{1,2}^{+-} & C_{2,2}^{--} \\ C_{1,2}^{+-} & C_{2,2}^{--} & C_{1,3}^{+-} & C_{2,3}^{--} \\ C_{2,1}^{-+} & C_{3,1}^{-+} & C_{2,2}^{--} & C_{3,2}^{--} \\ C_{2,2}^{--} & C_{3,2}^{--} & C_{2,3}^{--} & C_{3,3}^{--} \end{pmatrix}$$

Далі за методом найменших квадратів розглянемо вираз

$$\begin{aligned} F(C) &= \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy = \iint_{\Pi_{11}} (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy + \\ &+ \iint_{\Pi_{12}} (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy + \iint_{\Pi_{21}} (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy + \\ &+ \iint_{\Pi_{22}} (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy \end{aligned}$$

Треба знайти такі елементи матриці C , щоб вираз $F(C)$ набував мінімального значення, тобто треба розв'язати мінімізаційну задачу $F(C) \rightarrow \min$. Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad та була отримана наступна матриця коефіцієнтів

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 1 \\ -0.5 & 0 & -1 & -0.5 \\ -0.5 & -1 & 0 & -0.5 \\ -1 & -1.5 & -1.5 & -2 \end{pmatrix}$$

Після підстановки цих коефіцієнтів у визначений вище білінійний сплайн $S(x, y, C)$ отримаємо наближувану функцію $f(x, y)$. Тобто побудований

білінійний сплайн відновив точно задану кусково-лінійну розривну функцію двох змінних.

Приклад 2. Нехай на області, визначеній в прикладі 1 задана функція $f(x, y)$ з розривами першого роду у вузлах заданої прямокутної сітки

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x, y) \in \Pi_{11} \\ x^2 - y^2, & (x, y) \in \Pi_{12} \\ -x^2 + y^2, & (x, y) \in \Pi_{21} \\ -x^2 - y^2, & (x, y) \in \Pi_{22}. \end{cases}$$

В цьому випадку також маємо п'ять точок, в яких побудована функція має розриви першого роду

$$\begin{aligned} f^{-+}(0.5, 0) &= 0.25, f^{++}(0.5, 0) = -0.25, \\ f^{+-}(0, 0.5) &= 0.25, f^{+-}(0, 0.5) = -0.25, \\ f^{--}(0.5, 0.5) &= 0.5, f^{-+}(0.5, 0.5) = 0, f^{++}(0.5, 0.5) = -0.5, f^{+-}(0.5, 0.5) = 0, \\ f^{--}(1, 0.5) &= -0.75, f^{-+}(1, 0.5) = -1.25, \\ f^{--}(0.5, 1) &= -0.75, f^{+-}(0.5, 1) = -1.25 \end{aligned}$$

В кожному розглянутому прямокутному елементі побудуємо білінійний інтерполяційний сплайн $S(x, y, C)$ у вигляді, представленою в прикладі 2, з матрицею невідомих коефіцієнтів. Далі, застосовуючи метод найменших квадратів, розв'язуємо мінімізаційну задачу

$$F(C) = \iint_D (f(x, y) - S(x, y, C))^2 dx dy \rightarrow \min$$

Ця задача була розв'язана в системі комп'ютерної математики MathCad та була отримана наступна матриця коефіцієнтів

$$C = \begin{pmatrix} -0.083 & 0.167 & 0.167 & -0.083 \\ -0.25 & 0 & -1 & -0.75 \\ -0.25 & -1 & 0 & -0.75 \\ -0.417 & -1.167 & -1.167 & -1.917 \end{pmatrix}$$

Тобто білінійний наближуючий сплайн набуває вигляду, представленою на рис.3.

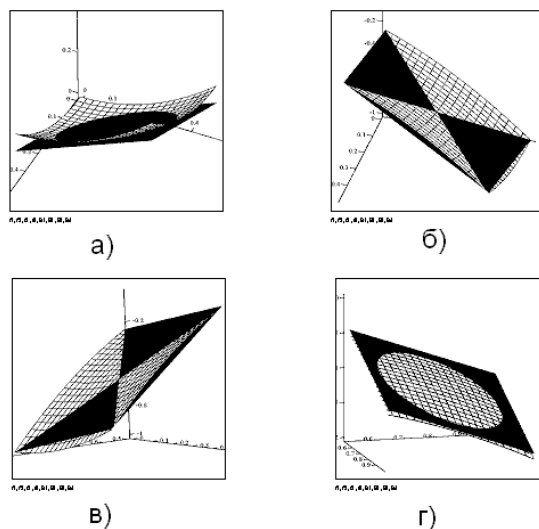


Рис. 3. Графічний вигляд наближуваної функції $f(x, y)$ (світлий колір) та наближуючої функції $S(x, y)$, що визначені на прямокутних елементах: а) $\Pi_{1,1}$; б) $\Pi_{1,2}$; в) $\Pi_{2,1}$; г) $\Pi_{2,2}$

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого білінійного сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.064.$$

Висновки

Таким чином, в даній статті запропоновано метод побудови розривних білінійних сплайнів для випадку, коли область визначення досліджуваної функції розбита на прямокутні елементи і досліджувана функція може мати розриви першого роду лише на спільних сторонах між елементами розбиття. Далі автори планують розробити та дослідити метод наближення розривної функції розривними сплайнами, коли її область визначення розбита на трикутні елементи, і між цими елементами наближувала функція може мати розриви першого роду.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения / Н.П. Корнейчук. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – М.: Наука, 1976.
3. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука. 1976.

4. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / В.А. Василенко. – Новосибирск; Наука, 1983.
5. Литвин О.М. Наближення розривної функції однієї змінної, використовуючи метод мінімакса / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: Праці науково-технічної конференції (7-8 жовтня 2010р.). – Львів. – 2010. – С.52-55.
6. Литвин О.М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – Вип.3. – С. 122 – 131.
7. Литвин О.М. Наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами (прямокутні елементи) / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // «Теорія прийняття рішень»: праці V міжнародної школи-семінару, 27 вересня-1 жовтня 2010р., Ужгород. – 2010 – С.141 – 142.
8. Литвин О.М. Интерполирование функций: Учеб. Пособие / О.М. Литвин. – Киев: Учеб.-метод. каб. высш. образования (УМК ВО), 1988. – 31 с.

Статья поступила в редакцию 02.02.2011

ПРО НЕПЕРЕРВНУ ЗАЛЕЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИСКРЕТНИХ ВКЛЮЧЕНЬ ВІД ПОЧАТКОВИХ УМОВ

© Пічкур В. В., Сасонкіна М. С.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

вул. Дворянська, 2, Одеса, 23454, Україна

E-MAIL: vpichkur@gmail.com, masonmas@gmail.com

Abstract. In this paper we prove that solutions of discrete inclusion continuously depend on initial conditions. If the right side of discrete inclusion satisfies the Lipschitz condition then for solutions the Lipschitz condition with respect to initial data holds.

Вступ

Завдяки значній кількості математичних моделей і застосуванням в обчислювальних методах інтенсивно розвиваються математичні підходи до аналізу розв'язків дискретних систем [1, 2, 3, 4, 5]. За умов невизначеності дискретні моделі набувають форми включень. Дискретні включення на даний момент недостатньо вивчені. Наявна література в цілому стосується апроксимації диференціальних включень та рівнянь Хукухари дискретними включеннями, оцінки точності таких наближень [7, 6, 8, 9, 10]. Разом з тим, властивості розв'язків дискретних включень, зокрема, умови неперервної залежності від початкових умов, досліджені мало. В статті доведені твердження про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов. Подібні твердження мають місце для диференціальних включень і рівнянь Хукухари, але при більш жорстких умовах на праву частину [9, 11, 12].

В статті будемо використовувати такі позначення: \mathbb{R}^n – евклідовий n -вимірний простір, $\|\cdot\|$ – евклідова норма, $\text{int}A$ – множина внутрішніх точок, ∂A – границя, $[0, N] = \{0, 1, \dots, N\}$ – множина індексів, $\mathcal{K}_r(a)$ – замкнена куля радіусу r з центром в точці $a \in \mathbb{R}^n$, $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ – множина всіх непорожніх компактів з \mathbb{R}^n , $A^\sigma = A + \sigma \mathcal{K}_1(0)$ – σ -розширення множини $A \subset \mathbb{R}^n$, $\rho(\cdot, \cdot)$, $\beta(\cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot)$ – відстань від точки до множини, напівметрика і метрика Хаусдорфа відповідно, які визначаються над $\text{comp}(\mathbb{R}^n)$ у такий спосіб

$$\rho(x, A) = \inf \{\|x - a\| : a \in A\}, \quad \beta(A, B) = \inf \{\sigma > 0 : A \subset B^\sigma\},$$
$$h(A, B) = \max \{\beta(A, B), \beta(B, A)\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A, B \in \text{comp}(\mathbb{R}^n).$$

1. НЕПЕРЕРВНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПОЧАТКОВИХ УМОВ

Розглянемо дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in f_k(x(k)), \quad k \in [0, N-1], \quad (1)$$

де $f_k : D \rightarrow \text{comp}(D)$ – багатозначні відображення, які визначені в області $D \subset \mathbb{R}^n$, $k \in [0, N-1]$.

Означення 1. Розв'язком дискретного включення (1) називається така функція $x : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^n$, що точка $x(k+1)$ належить компактi $f_k(x(k))$ для всіх $k \in [0, N-1]$.

Розв'язок задачі Коші (1), $x(0) = x_0$, будемо позначати $x(k, x_0)$, $k \in [0, N]$.

Означення 2. Множиною досяжності дискретного включення (1) для $x(0) = x_0$ в момент $k \in [0, N-1]$ називається сукупність точок $z \in \mathbb{R}^n$ таких, що знайдеться розв'язок $x(\cdot, x_0)$ дискретного включення (1), $x(0) = x_0$, що $z = x(k, x_0)$. Така множина позначається $X(k, x_0)$.

Позначимо $X(k, X_0) = \cup_{x_0 \in X_0} X(k, x_0)$ множину досяжності (1) за умови, що $x(0) \in X_0$. Дискретне рівняння вигляду

$$X(k+1) = f_k(X(k)), \quad k \in [0, N-1] \quad (2)$$

описує динаміку множини досяжності за умови, що $X(0) = X_0$.

Теорема 1. Нехай відображення f_k є напівнеперервними зверху на D , $k \in [0, N-1]$, і всі розв'язки $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = x_0$ визначені на D . Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$, $y_0 \in D$ для довільного розв'язку $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$ існує розв'язок $x(k, x_0)$, $x_0 \in D$ такий, що

$$x(k, x_0) \in \mathcal{H}_\varepsilon(x(k, y_0))$$

для будь-якого $k \in [1, N]$.

Доведення. Проведемо за індукцією. Відображення f_0 є напівнеперервним зверху в точці $x_0 \in D$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$, $y_0 \in D$ виконується

$$f_0(y_0) \subseteq (f_0(x_0))^\varepsilon.$$

Звідси для довільного $x(1, y_0)$ маємо

$$x(1, y_0) \in f_0(y_0) \subseteq (f_0(x_0))^\varepsilon.$$

Тобто, $x(1, y_0) \in (f_0(x_0))^\varepsilon$. Це означає, що існує розв'язок $x(1, x_0)$ такий, що

$$\|x(1, x_0) - x(1, y_0)\| \leq \varepsilon$$

або $x(1, y_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(x(1, x_0))$. При $k = 1$ твердження доведено.

Далі припускаємо, що теорема виконується для всіх $k \in [1, m - 1]$. Покажемо, що вона вірна для $k = m$, $m \in [2, N]$. З означення напівнеперервності зверху відображення f_{m-1} в точці $x(m - 1, x_0)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\sigma > 0$, що для всіх $z \in D$ таких, що $\|x(m - 1, x_0) - z\| \leq \sigma$ виконується

$$f_{m-1}(z) \subseteq (f_{m-1}(x(m - 1, x_0)))^\varepsilon.$$

За припущенням індукції для $\sigma > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного розв'язку $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$ знайдеться розв'язок $x(k, x_0)$, $x_0 \in D$ такий, що

$$x(m - 1, y_0) \in \mathcal{K}_\sigma(x(m - 1, x_0))$$

при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$. Підставляючи $z = x(m - 1, y_0)$, отримуємо

$$f_{m-1}(x(m - 1, y_0)) \subseteq (f_{m-1}(x(m - 1, x_0)))^\varepsilon$$

при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$. Звідси, для будь-якого $x(m, y_0) \in f_{m-1}(x(m - 1, y_0))$ існує $x(m, x_0) \in f_{m-1}(x(m - 1, x_0))$ таке, що

$$\|x(m, x_0) - x(m, y_0)\| \leq \varepsilon.$$

Отже, показали справедливість твердження при $k = m$. Теорему доведено. \square

Наслідок 1. В умовах теореми 1 відображення $X(k, \cdot) : D \rightarrow \text{comp}(D)$, яке кожній точці $x_0 \in D$ ставить у відповідність множину досяжності $X(k, x_0)$, є напівнеперервним зверху на D .

Теорема 2. Нехай відображення f_k є напівнеперервними знизу на D , $k \in [0, N - 1]$ і всі розв'язки $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = x_0$ визначені на D . Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$, $y_0 \in D$, для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = x_0$ існує розв'язок $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$, $y_0 \in D$ такий, що

$$x(k, y_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(x(k, x_0))$$

для будь-якого $k \in [1, N]$.

Доведення. Проведемо за індукцією. Відображення f_0 є напівнеперервним знизу в точці $x_0 \in D$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$, $y_0 \in D$ виконується

$$f_0(x_0) \subseteq (f_0(y_0))^\varepsilon.$$

Звідси для будь-якого розв'язку $x(1, x_0)$ маємо

$$x(1, x_0) \in f_0(x_0) \subseteq (f_0(y_0))^\varepsilon.$$

Тобто, $x(1, x_0) \in (f_0(y_0))^\varepsilon$. Це означає, що існує розв'язок $x(1, y_0)$ такий, що

$$\|x(1, x_0) - x(1, y_0)\| \leq \varepsilon$$

або $x(1, y_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(x(1, x_0))$. При $k = 1$ твердження доведено.

Далі припускаємо, що теорема виконується для всіх $k \in [1, m - 1]$. Покажемо, що вона вірна для $k = m$, $m \in [2, N]$. За означенням напівнеперервності зверху відображення f_{m-1} в точці $x(m - 1, x_0)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\sigma > 0$, що для всіх $z \in D$ таких, що $\|x(m - 1, x_0) - z\| \leq \sigma$ має місце

$$f_{m-1}(x(m - 1, x_0)) \subseteq (f_{m-1}(z))^\varepsilon.$$

За припущенням індукції для $\sigma > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$ існує розв'язок $x(k, y_0)$, $y_0 \in D$ такий, що

$$x(m - 1, x_0) \in \mathcal{K}_\sigma(x(m - 1, y_0))$$

при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$. Підставляючи $z = x(m - 1, y_0)$, отримуємо

$$f_{m-1}(x(m - 1, x_0)) \subseteq (f_{m-1}(x(m - 1, y_0)))^\varepsilon$$

при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$. Звідси для будь-якого $x(m, x_0) \in f_{m-1}(x(m - 1, x_0))$ існує $x(m, y_0) \in f_{m-1}(x(m - 1, y_0))$ таке, що

$$\|x(m, x_0) - x(m, y_0)\| \leq \varepsilon.$$

Отже, показали справедливість твердження при $k = m$. Теорему доведено. \square

Наслідок 2. В умовах теореми 2 відображення $X(k, \cdot)$ є напівнеперервним знизу на D .

Має місце таке твердження.

Теорема 3. Нехай відображення f_k є неперервними на D , $k \in [0, N - 1]$ і всі розв'язки $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = x_0$ визначені на D . Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|x_0 - y_0\| \leq \delta$, $y_0 \in D$, для довільного розв'язку $x(k, x_0)$ задачі

Коші (1), $x(0) = x_0$ існує розв'язок $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$, $y_0 \in D$ такий, що

$$x(k, y_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(x(k, x_0))$$

для будь-якого $k \in [0, N]$, а також для довільного розв'язку $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$ існує розв'язок $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$ такий, що

$$x(k, y_0) \in \mathcal{K}_\varepsilon(x(k, x_0)), k \in [0, N].$$

Доведення. Випливає з теорем 1,2. □

2. УМОВА ЛІПШИЦЯ І ОБЕРНЕНА УМОВА ЛІПШИЦЯ

Теорема 4. Нехай відображення f_k задовольняють умові Ліпшиця на D , тобто існують додатні константи \mathcal{L}_k такі, що

$$h(f_k(x), f_k(y)) \leq \mathcal{L}_k \|x - y\|, k \in [0, N - 1], x, y \in D.$$

Тоді знайдуться константи Ліпшиця $\mathcal{C}_k > 0$ такі, що для будь-якого розв'язку $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = x_0$, існує розв'язок $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$, для якого виконується умова

$$\|x(k, y_0) - x(k, x_0)\| \leq \mathcal{C}_k \|x_0 - y_0\|, k \in [1, N]. \quad (3)$$

Доведення. Проведемо за індукцією. За умовами теореми існує додатня константа \mathcal{L}_0 така, що

$$h(f_0(x_0), f_0(y_0)) \leq \mathcal{L}_0 \|x_0 - y_0\|.$$

Звідси маємо, що для будь-якого $x(1, x_0)$ буде виконуватись

$$\rho(x(1, x_0), f_0(y_0)) \leq h(f_0(x_0), f_0(y_0)) \leq \mathcal{L}_0 \|x_0 - y_0\|.$$

Це означає, що існує $x(1, y_0)$ і константа Ліпшиця $\mathcal{C}_1 = \mathcal{L}_0$ такі, що

$$\|x(1, x_0) - x(1, y_0)\| \leq \mathcal{C}_1 \|x_0 - y_0\|.$$

Отже, при $k = 1$ нерівність (3) доведено.

Далі припускаємо, що теорема виконується для всіх $k \in [1, m - 1]$. Покажемо, що вона вірна для $k = m$, $m \in [2, N]$. За умовами теореми існує додатня константа \mathcal{L}_{m-1} така, що

$$h(f_{m-1}(x(m-1, x_0)), f_{m-1}(z)) \leq \mathcal{L}_{m-1} \|x(m-1, x_0) - z\|.$$

Звідси для будь-якого $x(m, x_0)$ має місце нерівність

$$\rho(x(m, x_0), f_{m-1}(z)) \leq \mathcal{L}_{m-1} \|x(m-1, x_0) - z\|.$$

З припущення випливає, що для довільного $x(m-1, x_0)$ існує $x(m-1, y_0)$ таке, що

$$\|x(m-1, x_0) - x(m-1, y_0)\| \leq \mathcal{C}_{m-1} \|x_0 - y_0\|$$

для деякого $\mathcal{C}_{m-1} > 0$. Покладемо $z = x(m-1, y_0)$. Маємо

$$\begin{aligned} \rho(x(m, x_0), f_{m-1}(x(m-1, y_0))) &\leq \mathcal{L}_{m-1} \|x(m-1, x_0) - x(m-1, y_0)\| \leq \\ &\leq \mathcal{L}_{m-1} \mathcal{C}_{m-1} \|x_0 - y_0\|. \end{aligned}$$

Це означає, що існує $x(m, y_0)$ і константа Ліпшиця $\mathcal{C}_m = \mathcal{L}_{m-1} \mathcal{C}_{m-1}$ такі, що

$$\|x(m, x_0) - x(m, y_0)\| \leq \mathcal{C}_m \|x_0 - y_0\|.$$

Отже, справджується нерівність (3) при $k = m$. Теорему доведено. \square

Теорема 5. Нехай відображення f_k задовольняють оберненій умові Ліпшиця на D , тобто, існують додатні константи \mathcal{M}_k такі, що

$$\beta(f_k(x), f_k(y)) \geq \mathcal{M}_k \|x - y\|, \quad x, y \in D, \quad k \in [0, N-1].$$

Тоді знайдуться константи $\mathcal{N}_k > 0$ такі, що для будь-якого розв'язку $x(k, y_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = y_0$ існує розв'язок $x(k, x_0)$ задачі Коші (1), $x(0) = x_0$ для якого виконується нерівність

$$\|x(k, y_0) - x(k, x_0)\| \geq \mathcal{N}_k \|x_0 - y_0\|, \quad k \in [1, N]. \quad (4)$$

Доведення. Доведемо нерівність (4) при $k = 1$. За умовами теореми існує додатня константа \mathcal{M}_0 така, що

$$\beta(f_0(x_0), f_0(y_0)) \geq \mathcal{M}_0 \|x_0 - y_0\|,$$

де $\beta(f_0(x_0), f_0(y_0)) = \max_{p \in f_0(x_0)} \rho(p, f_0(y_0))$. Це означає, що знайдеться $x(1, x_0)$, таке, що

$$\rho(x(1, x_0), f_0(y_0)) = \max_{p \in f_0(x_0)} \rho(p, f_0(y_0)).$$

Звідси маємо, що для будь-якого $x(1, y_0)$ виконується

$$\|x(1, x_0) - x(1, y_0)\| \geq \rho(x(1, x_0), f_0(y_0)) \geq \mathcal{M}_0 \|x_0 - y_0\|.$$

Це означає, що існує константа $\mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_0$ така, що

$$\|x(1, x_0) - x(1, y_0)\| \leq \mathcal{N}_1 \|x_0 - y_0\|.$$

При $k = 1$ твердження доведено.

Далі припускаємо, що теорема виконується для всіх $k \in [1, m-1]$. Покажемо, що теорема вірна для $k = m$, де $m \in [2, N]$. Отже, існує додатня константа \mathcal{M}_{m-1} така, що

$$\beta(f_{m-1}(x(m-1, x_0)), f_{m-1}(z)) \geq \mathcal{M}_{m-1} \|x(m-1, x_0) - z\|.$$

Звідси знайдеться $x(m, x_0)$, для якого

$$\rho(x(m, x_0), f_{m-1}(z)) = \beta(f_{m-1}(x(m-1, x_0)), f_{m-1}(z)) \geq \mathcal{M}_{m-1} \|x(m-1, x_0) - z\|.$$

З припущення випливає, що існує $x(m-1, x_0)$, що для будь-якого $x(m-1, y_0)$ справджується нерівність

$$\|x(m-1, x_0) - x(m-1, y_0)\| \geq \mathcal{N}_{m-1} \|x_0 - y_0\|$$

для деякого $\mathcal{N}_{m-1} > 0$. Покладемо $z = x(m-1, y_0)$. Тоді

$$\begin{aligned} \rho(x(m, x_0), f_{m-1}(x(m-1, y_0))) &\geq \mathcal{M}_{m-1} \|x(m-1, x_0) - x(m-1, y_0)\| \geq \\ &\geq \mathcal{M}_{m-1} \mathcal{N}_{m-1} \|x_0 - y_0\|. \end{aligned}$$

Звідси випливає нерівність (4) при $k = m$, де $\mathcal{N}_m = \mathcal{N}_{m-1} \mathcal{M}_{m-1}$. Теорему доведено. \square

Приклад 1. Розглянемо лінійне дискретне включення вигляду

$$x(k+1) \in A_k x(k) + U(k), k \in [0, N-1], \quad (5)$$

де $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U(k) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ для всіх $k \in [0, N-1]$. Багатозначні відображення $f_k(x) = A_k x + U(k) \in$ неперевними, $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in [0, N-1]$. У цьому випадку для включення (5) має місце теорема 3. Для $f_k(x) = A_k x + U(k)$ також справджується умова Ліпшиця з константою Ліпшиця

$$\mathcal{L}_k = \|A_k\| = \sqrt{\text{tr}(A_k^* A_k)}.$$

Тут $*$ – операція транспонування, $\text{tr}(\cdot)$ – слід матриці. Отже, для включення (5) має місце теорема 4, де

$$\mathcal{C}_k = \prod_{s=0}^{k-1} \|A_s\|.$$

Якщо матриці A_k – невироджені, $U(k)$ – опуклі компакти, $k \in [0, N-1]$, тоді

$$\|A_k x - A_k y\| \geq \mathcal{M}_k \|x - y\|,$$

де $\mathcal{M}_k = \sqrt{\lambda_{\min}(A_k^* A_k)}$, $k \in [0, N-1]$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ – найменше власне число матриці. Звідси маємо

$$\beta(f_k(x), f_k(y)) = \beta(A_k x + U(k), A_k y + U(k)) \geq \mathcal{M}_k \|x - y\|.$$

Отже, багатозначне відображення $f_k(x) = A_k x + U(k)$ задовольняє оберненій умові Ліпшиця і для включення (5) має місце теорема 5, де

$$\mathcal{N}_k = \prod_{s=0}^{k-1} \sqrt{\lambda_{\min}(A_s^* A_s)}.$$

ВИСНОВКИ

В роботі отримані твердження про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов. В залежності від класу багатозначних відображень, до якого належить права частина включення, такі твердження характеризують напівнеперервну зверху (знизу), неперервну і ліпшицеву залежність розв'язків від початкових умов.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Халанай А. Качественная теория импульсных систем / Халанай А., Векслер Д. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
2. Antsaklis P. Linear Systems / Antsaklis P., Michel A. – Boston: Birkhauser, 2006. – 670 p.
3. Galor O. Discrete Dynamical Systems / Galor O. – Berlin: Springer, 2007. – 158 p.
4. Martynyuk A.A. Stability analysis of discrete systems / Martynyuk A.A. // International Applied Mechanics. – 2000. – Vol.36, No. 7. – P. 3-34.
5. Michel A. Stability of dynamical systems / Michel A, Hou L, Liu D. – Boston: Birkhauser, 2008. – 515 p.
6. Dontchev A.L. Error estimates for discretized differential inclusions / Dontchev A.L. and Farkhi E.M. – Computing 41 (1989), P. 349–358.
7. Dontchev A. Difference Methods for Differential Inclusions: A Survey / Asen Dontchev and Frank Lempio // SIAM Review. –1992. Vol. 34, No. 2, pp. 263-294.
8. Grammel G. Towards Fully Discretized Differential Inclusions / Grammel G. // Set-Valued Analysis. – 2003. –Vol.11. P. 1–8.
9. Плотников В.А. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью. Асимптотические методы. / В.А. Плотников, А.В. Плотникова, А.Н. Витюк – Одесса: АстроПринт, 1999. – 354 с.
10. Plotnikov V. A. Averaging method for discrete systems and its application to control problems / Plotnikov V. A., Plotnikova L.I., Yarovoi A.T. // Nonlinear Oscillations. – 2004. –Vol. 7, No. 2. – P. 240–253.
11. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения / А.Ф. Филиппов // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. - М.: Физматлит, 2003. – С. 265-288.
12. Aubin J.P. Differential Inclusions: Set-Valued Maps and Viability Theory / Aubin J.P., Cellina A. – Berlin: Springer-Verlag, 1984. – 342 p.

Статья поступила в редакцию 03.05.2011

АЛГОРИТМЫ УПОРЯДОЧЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ В ЛОКАЛЬНОМ ЭЛИМИНАЦИОННОМ АЛГОРИТМЕ

© Свириденко А. В., Щербина О. А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: oleks.sviridenko@gmail.com, oshcherbina@gmail.com

Abstract. Five ordering algorithms for the nonserial dynamic programming algorithm for solving sparse discrete optimization problems are considered. As a result of benchmarking, firstly, it was noted that for solving sparse discrete optimization problems, the ordering of the variables has a significant impact on the run-time of solving the problem. In addition, it was shown that the different heuristics ordering are most effective for different classes of problems. And finally, it was noted that heuristics MCS and MIN-FILL showed the best result for solving discrete optimization problems of the considered class of test problems.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения разреженных задач дискретной оптимизации (ДО) путем вычисления глобальной информации с помощью локальных вычислений на основе анализа окрестностей элементов задачи [1], [2], может быть использован класс локальных элиминационных алгоритмов (ЛЭА) [8], включающий локальные алгоритмы декомпозиции [1], [4], алгоритмы несериального динамического программирования (НСДП) ([11], [6]), алгоритмы сегментной элиминации [16], методы решения задач ДО на основе древовидной декомпозиции [7]. Вопросам теоретического исследования поведения ЛЭА на квазиблочных и блочно-древовидных структурах на основе анализа оценок эффективности посвящены работы [4], [5], результаты экспериментального исследования поведения ЛЭА на квазиблочных структурах освещены в работах [4], [3]. Представляет интерес исследование поведения алгоритма НСДП. Это определило необходимость *постановки следующей проблемы.*

Анализ последних достижений и публикаций, посвященных этой проблеме [9], [10], [13], [19], [24], [31], позволяет сделать вывод, что в настоящее время экспериментальное исследование поведения алгоритма НСДП, являющегося локальным алгоритмом элиминации переменных, не проводилось. Алгоритм НСДП последовательно элиминирует переменные в порядке, задаваемом упорядочением переменных, которое существенно влияет на время счета. Как показано в [37], задача поиска оптимального упорядочения является NP-полной, поэтому на практике для нахождения

элиминационной последовательности переменных используются всевозможные эвристики (такие как рассмотренные ниже метод минимальной степени, рекурсивного разбиения и др.). *Нерешенным является вопрос об экспериментальном исследовании поведения алгоритма НСДП в зависимости от использования алгоритма упорядочивания переменных.*

Целью настоящей работы является исследование влияния каждого из пяти алгоритмов упорядочивания переменных, а именно, алгоритма минимальной степени MD, алгоритма рекурсивного разбиения ND, алгоритма поиска по максимальной степени MCS, алгоритма минимального пополнения MIN-FILL, и алгоритма лексикографического поиска в ширину LEX-BFS, оказываемое ими на время решения разреженной задачи ДО с помощью алгоритма НСДП.

1. АЛГОРИТМ НЕСЕРИАЛЬНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим задачу ДО с ограничениями

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k \in K} f_k(X^k) \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(X_{S_i}) R_i 0, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (2)$$

$$x_j \in D_j, \quad j \in N = \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ – множество дискретных переменных, $X^k \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $k \in K = \{1, 2, \dots, t\}$. Функции $f_k(X^k)$, $k \in K$ называются компонентами целевой функции, t – число компонент целевой функции, $S_i \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $R_i \in \{\leq, =, \geq\}$, $i \in M$; D_j – конечное множество возможных значений переменной x_j , $j \in N$.

Мы используем обозначение: если $S = \{j_1, \dots, j_q\}$, то $X_S = \{x_{j_1}, \dots, x_{j_q}\}$.

1.1. Задание структуры разреженной задачи дискретной оптимизации.

Рассмотрим подробнее детали реализации ЛЭА при решении задач ДО в случае, когда структурный граф является графом взаимосвязей переменных [11], который в литературе называется также графом ограничений [16].

Определение 1. ([11], [6]). Две переменные $x \in X$ и $y \in X$ взаимосвязаны в задаче ДО с ограничениями, если они появляются вместе в одном компоненте ЦФ или в одном и том же ограничении (другими словами, если переменные входят одновременно во множество X^k или во множество X_{S_i})).

Определение 2. Графом взаимосвязей ([11], [6]) задачи ДО называется неориентированный граф $G = (X, E)$, для которого множество вершин X соответствует множеству переменных X задачи ДО, две вершины графа соединены ребром тогда и

только тогда, когда соответствующие им переменные взаимосвязаны. В дальнейшем будем отождествлять переменные задачи ДО с вершинами графа взаимосвязей.

Для переменных задачи ДО будем использовать все эти же обозначения, пользуясь взаимно-однозначным соответствием между вершинами графа взаимосвязей и переменными.

Основным понятием в теории локальных алгоритмов является понятие *близости элементов*, определяемое понятием *окрестности*.

Определение 3. Две вершины x и y в графе $G = (X, E)$ называются *соседними*, если $(x, y) \in E$.

Определение 4. Множество переменных, соседних с переменной $x \in X$ в графе $G = (X, E)$, обозначается $Nb_G(x)$ (или $Nb(x)$) и называется *окрестностью* переменной x .

В гиперграфовом представлении структуры задачи ДО множество вершин гиперграфа H соответствует множеству переменных X задачи ДО, а гиперребра гиперграфа образуют подмножества взаимосвязанных переменных, входящих в ограничения, т.е. гиперребро соответствует ограничению.

1.2. Локальные алгоритмы элиминации переменных. Рассмотрим решение разреженной задачи ДО (1) – (3), структура которой описывается неориентированным графом взаимосвязей переменных $G = (X, E)$, с помощью локального алгоритма элиминации переменных, именуемого также алгоритмом НСДП. Алгоритм НСДП использует упорядочение вершин графа.

Определение 5. [34]. Граф, полученный из графа $G = (X, E)$ с помощью удаления вершины x_k и всех ребер, исходящих из нее и соединения ребрами всех ранее не соседних вершин в $Nb(x_k)$, называется x_k -элиминационным графом графа G и обозначается G^k . Описанная операция называется *элиминацией* вершины x_k .

Для упорядочения x_1, \dots, x_n работа алгоритма НСДП состоит в последовательной элиминации вершин x_1, \dots, x_n в текущем элиминационном графе и вычислении соответствующей локальной информации о вершинах $h_i(Nb(x_i))$ [8]. Этот процесс порождает последовательность графов: $G^0 = G, G^1, \dots, G^j, \dots, G^n$, так что G^j – x_j -элиминационный граф графа G^{j-1} , а G^n – пустой граф.

Процесс преобразования графа взаимосвязей переменных, соответствующий процедуре элиминации переменных с помощью локального алгоритма, известен как «*элиминационная игра*», которая впервые была введена *Партером* [30], как графовая

интерпретация метода исключения Гаусса. Входом для алгоритма элиминационной игры является граф G и упорядочение α вершин графа G .

Рассмотрим описанную выше задачу ДО (P). Предположим без потери общности, что переменные исключаются в порядке x_1, \dots, x_n . Рассмотрим исключение первой переменной x_1 . Найдем члены целевой функции, содержащие x_1 : $K_1 = \{k \mid x_1 \in Y^k\}$ и множество индексов ограничений, содержащих x_1 : $U_1 = \{i \mid x_1 \in X^i\}$. Совместно с x_1 в $Y^k, k \in K_1$ и в U_1 входят переменные из $Nb(x_1)$. Переменной x_1 соответствует следующая подзадача (P_1):

$$h_1(Nb(x_1)) = \max_{x_1} \left\{ \sum_{k \in K_1} f_k(Y^k) \mid g_i(X^i) R_i 0, i \in U_1, x_j \in D_j, x_j \in Nb[x_1] \right\}$$

Тогда исходная задача (P) сводится к решению следующей задачи:

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \sum f_k(Y^k) \mid g_i(X^i) R_i 0, i \in M, x_j \in D_j, j \in N \right\} = \\ & = \max_{x_2, \dots, x_n} \left\{ \sum_{k \in K \setminus K_1} f_k(Y^k) + h_1(Nb(x_1)) \mid g_i(X^i) R_i 0, \right. \\ & \quad \left. i \in M \setminus U_1, x_j \in D_j, j \in N \setminus \{1\} \right\}. \end{aligned}$$

В последней задаче $n - 1$ переменная, по сравнению с исходной задачей (P) из ограничений исключены ограничения с индексами из U_1 , а также члены целевой функции $\sum_{k \in K_1} f_k(Y^k)$, однако появился новый компонент целевой функции $h_1(Nb(x_1))$ ¹, благодаря чему изменился граф взаимосвязей задачи: в нем вершина x_1 удалена, а вершины из $Nb(x_1)$ соединены ребрами между собой

Это называется «пополнением» [9]. Заметим, что вершины из $Nb(x_1)$ образуют клику графа G .

Новый граф взаимосвязей обозначим G^1 . Далее все окрестности переменных находятся уже в новом графе G^1 . Алгоритм исключает оставшиеся переменные по одной за раз аналогичным образом. Исключение очередной переменной x_j называется «шаг j », а функции (таблицы), вычисленные на этом шаге, будем обозначать $h_j(\cdot)$.

Алгоритм НСДП может быть кратко записан так:

1. Перенумеровать переменные согласно порядку α (в данном случае $\alpha : \{x_1, \dots, x_n\}$).
2. Для $j = 1, \dots, n$ исключить x_j , изменяя граф взаимосвязей путем добавления ребер для превращения окрестности исключаемой вершины в клику.

¹Компонент $h_1(Nb(x_1))$ содержит вычисленную на данном шаге информацию.

2. АЛГОРИТМЫ УПОРЯДОЧИВАНИЯ ВЕРШИН ГРАФОВ

2.1. Алгоритм минимальной степени MD. Алгоритм упорядочивания минимальной степени (MD)(minimum degree) является одной из наиболее широко используемых эвристик, т.к. он дает хорошие результаты с относительно небольшим пополнением для разреженных графов.

В алгоритме MD выбирается вершина v графа G с минимальной степенью. Далее строится граф G' , получаемый путем создания клики из вершины v и ее соседей с последующим удалением v и инцидентных ей ребер. Рекурсивно из G' с помощью эвристики создается *хордальный* суперграф H' . И, наконец, строится связный суперграф H из G , путем добавления v и инцидентных ей ребер из G к H' . Будучи алгоритмом локальной минимизации, алгоритм MD не всегда дает упорядочение с минимальным пополнением для графа в целом.

Имеются следующие модификации алгоритма минимальной степени – алгоритмы MMD (Multiple Minimum Degree [26]) и AMD (Approximate Minimum Degree) [9].

Для получения упорядочения при помощи алгоритма минимальной степени MD в данной работе была выбрана функция `minimum_degree_ordering()` из библиотеки BOOST [12].

2.2. Алгоритм рекурсивного разбиения ND. Алгоритм рекурсивного разбиения ND [19] – глобальный эвристический рекуррентный алгоритм, находящий сепаратор, т.е. множество вершин S , разделяющее граф на две части A и B , помещая его в упорядочении последним. Алгоритм применяется рекуррентно к частям графов A и B , пока их размеры не станут меньше, чем некоторое пороговое значение.

Многоуровневые алгоритмы нахождения *реберных сепараторов* в графах были предложены в работе [13] и затем усовершенствованы в работах [20], [23]. Эти методы обладают способностью достаточно быстро находить реберные сепараторы высокого качества.

Имеются также гибридные схемы методов рекурсивного разбиения ND и минимальной степени MD [10], [21], [31], позволяющие улучшить как время счета, так и качество полученных с помощью алгоритмов MD и ND упорядочений. Для вычисления упорядочения с помощью алгоритма рекурсивного разбиения ND в настоящей работе использовалась функция `METIS_EdgeND()` библиотеки Metis [24].

2.3. Алгоритм MCS. В [36] был предложен алгоритм MCS (Maximum Cardinality Search – поиск по максимальной степени). Алгоритм MCS на некотором графе G производит за время $O(n + m)$ полное упорядочение множества вершин следующим

образом. Из произвольной вершины выбирается любая, еще не пронумерованная вершина, смежная максимальному числу уже пронумерованных вершин.

MCS упорядочение было получено здесь при помощи функции `chompack.maxcardsearch()` из пакета CHOMPACK [14].

2.4. Алгоритм минимального пополнения MIN-FILL. ² Эвристика минимального пополнения MIN-FILL (Minimum Fill-in) [22] работает практически так же, как и описанная выше эвристика минимальной степени MD, с той лишь разницей, что здесь на каждом шаге выбирается такая вершина, чтобы число добавляемых к ней ребер, необходимых для получения клики, было минимальным.

2.5. Алгоритм LEX-BFS. ³ В работе [35] предложен алгоритм, вычисляющий хорошую элиминационную последовательность за линейное время, который был назван лексикографический поиск в ширину (LEX-BFS). Суть данного метода заключается в следующем. Вершины нумеруются от n до 1 (нумерация фиксирует позиции переменных) в упорядочении. Далее, для каждой вершины создается метка, содержащая множество чисел, записанных по убыванию. Таким образом вершины могут быть лексикографически упорядочены согласно их меткам.

3. ОПИСАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

3.1. Программная реализация алгоритма несериального динамического программирования, ее особенности. Алгоритм НСДП реализован на языке программирования Python [33], который был выбран в связи с наличием в нем средств для быстрого построения и описания задач ДО, а также ввиду обширного количества имеющихся библиотек для работы с графами и алгоритмами упорядочивания. Для работы с алгоритмами ND и MD соответственно были использованы языки программирования C и C++ . Для чтения формата Metis и формирования графов использовалась библиотека MetisReader [28]. Работа с объектами графа велась при помощи класса `networkx.Graph` из библиотеки `networkx` [29].

²Алгоритм Minimum Fill-in был реализован Свириденко А. В. на языке программирования Python.

³Алгоритм LEX-BFS был реализован Свириденко А. В. на языке программирования Python.

3.2. Описание множества тестовых задач. Тестовые задачи ДО генерировались на основе уже существующих гиперграфов из библиотеки CSP⁴ [15]. Указанная библиотека содержит различные классы гиперграфов⁵ (для задач удовлетворения ограничений), как для приложений в промышленности (DaimlerChrysler, NASA, ISCAS), так и искусственно созданных.

Тестовые задачи ДО строились следующим образом. Структура ограничений линейной задачи ДО с бинарными переменными задавалась гиперграфом из библиотеки [15]. Для построения ограничения i бралось очередное гиперребро гиперграфа, содержащее множество переменных X_{S_i} , входящих в строящееся ограничение. Далее с помощью процедуры, использующей датчик случайных чисел, строились коэффициенты A_{S_i} при соответствующих переменных, тогда левая часть i -го ограничения имела вид $A_{S_i} X_{S_i}$. Правая часть i -го ограничения имеет вид $\sigma \sum A_{S_i}$, где σ – случайное число из интервала $(0, 1)$. Целевая функция линейна, содержит все переменные – вершины гиперграфа, причем коэффициенты c_j целевой функции $\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$. строились с помощью процедуры, использующей датчик случайных чисел.

Далее для каждого графа взаимосвязей применялись алгоритмы упорядочивания MD, ND, MCS, MIN-FILL и LEX-BFS, после чего задачи решались с помощью алгоритма НСДП с соответствующими найденными упорядочениями задачи ДО.

3.3. Анализ результатов вычислительного эксперимента. Для проведения вычислительного эксперимента были построены пять групп тестовых задач: 'dubois', 'bridge', 'adder', 'pret' и 'NewSystem' для 33 гиперграфов из библиотеки [15]. Все вычисления были проведены на базе процессора Intel Core 2 Duo @ 2.66 GHz, 2 GB ОЗУ и операционной системы Linux, версия ядра 2.6.35-24-generic. Результаты вычислительного эксперимента приведены в таблице 1, в которой n – число переменных, m – число ограничений, а минимальное время решения задачи при использовании соответствующей эвристики выделено подчеркиванием. Таким образом, для алгоритма ND минимальное время работы алгоритма НСДП было достигнуто 0 раз (0 %), для MD – 2 раза (6,0 %), LEX-BFS – 3 раза (9,1 %), MCS – 9 раз (27,3 %) и MIN-FILL – 19 раз (57,6 %).

Рассмотрим результаты для тестовых задач более детально. Рис. 1 описывает результаты вычислительного эксперимента для групп тестовых задач 'dubois', 'adder' и 'bridge', которые свидетельствуют о том, что эвристики MCS, MIN-FILL и LEX-BFS ведут себя достаточно похоже и дают наилучший результат для данной группы

⁴CSP (Constraint Satisfaction Problem) – задача удовлетворения ограничений.

⁵Гиперграфы были загружены с сайта проекта DBAI Hypertree Project: <http://www.dbai.tuwien.ac.at/proj/hypertree/downloads/>.

Таблица 1. Время решения (в секундах) задач ДО с помощью алгоритма НСДП с использованием различных упорядочений.

Задача	n	m	MD	ND	MCS	MIN-FILL	LEX-BFS
dubois20	60	40	1,31	1,43	<u>1,17</u>	1,19	1,20
dubois21	63	42	1,52	1,67	1,35	<u>1,31</u>	1,35
dubois22	66	44	<u>1,37</u>	1,70	1,51	1,51	1,49
dubois23	69	46	1,90	2,02	1,70	<u>1,68</u>	1,74
dubois24	72	48	2,18	2,17	1,89	<u>1,80</u>	1,95
dubois25	75	50	2,72	2,50	<u>2,11</u>	2,14	2,15
dubois26	78	52	2,62	2,82	<u>2,32</u>	2,43	2,39
dubois27	81	54	<u>2,58</u>	3,09	2,60	2,71	2,66
dubois28	84	56	3,55	3,43	2,90	<u>2,84</u>	2,98
dubois29	87	58	3,91	3,84	3,22	<u>3,21</u>	3,28
dubois30	90	60	4,46	4,14	3,50	<u>3,52</u>	<u>3,48</u>
dubois50	150	100	17,52	16,31	14,34	<u>14,00</u>	14,53
dubois100	300	200	126,32	111,64	106,34	<u>103,23</u>	106,29
adder_15	106	75	6,20	7,04	<u>5,25</u>	5,64	5,38
adder_25	176	125	27,33	32,13	<u>21,47</u>	24,27	23,10
adder_50	351	250	326,54	388,74	268,39	276,47	<u>254,25</u>
adder_75	526	375	4876,74	5180,46	<u>3381,28</u>	3460,32	3435,76
bridge_15	137	135	15,21	15,41	<u>13,90</u>	<u>12,45</u>	12,86
bridge_25	227	225	63,14	74,18	62,30	<u>55,98</u>	58,62
bridge_50	452	450	900,20	983,40	922,68	<u>886,91</u>	1003,89
bridge_75	677	675	4832,55	5049,61	4507,38	<u>3886,34</u>	5040,91
pret60_25	60	53	1,89	1,51	1,68	<u>1,32</u>	1,59
pret60_40	60	53	1,50	1,48	1,69	<u>1,26</u>	1,52
pret60_60	60	53	1,58	1,51	1,83	<u>1,27</u>	1,64
pret60_75	60	53	1,44	1,60	1,79	<u>1,31</u>	1,54
pret150_25	150	133	21,29	33,06	20,51	<u>16,25</u>	23,04
pret150_40	150	133	22,63	32,83	21,47	<u>16,44</u>	24,76
pret150_60	150	133	22,09	31,13	23,72	<u>16,35</u>	23,99
pret150_75	150	133	21,20	33,23	20,19	<u>18,57</u>	23,59
NewSystem1	142	85	19,21	16,24	<u>14,05</u>	17,33	14,08
NewSystem2	345	200	603,83	520,82	<u>376,33</u>	489,80	425,35
NewSystem3	474	284	1294,86	1352,75	1159,75	1247,81	<u>1072,58</u>
NewSystem4	718	422	7769,10	8322,58	<u>6427,85</u>	7095,17	6845,20

тестовых задач. MD и ND, напротив, показывают худшее время. Также для группы тестовых задач 'bridge' наблюдается постепенное ухудшение результата по времени эвристики LEX-BFS и явное преобладание MIN-FILL.

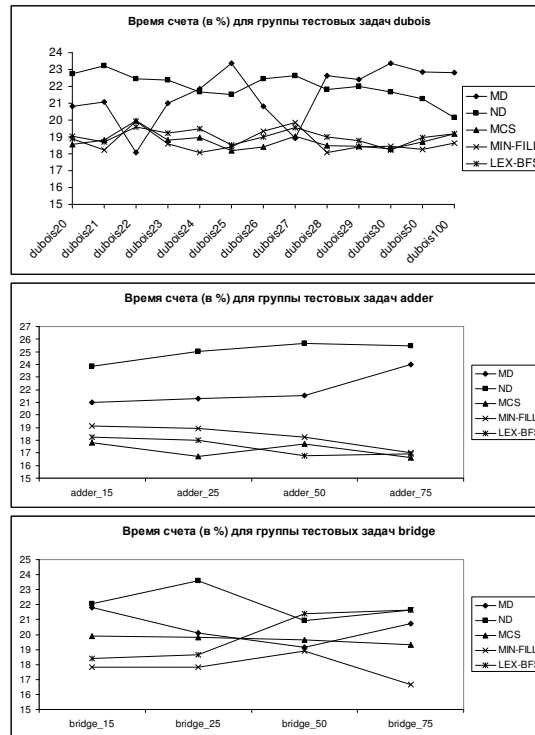


Рис. 1. Время счета (в секундах) для групп тестовых задач "dubois "adder "bridge"

Рис. 2 отражает результаты вычислительного эксперимента для групп задач 'pret' и 'NewSystem'. Здесь можно видеть всю важность правильного выбора эвристики для конкретной группы задач. В случае тестов 'pret' наблюдается явное доминирование алгоритма MIN-FILL, а MCS и LEX-BFS уступают MD. Для 'NewSystem', напротив, MIN-FILL отходит на третий план, в то время, как MCS и LEX-BFS занимают лидирующие позиции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной статьи является исследование влияния пяти алгоритмов упорядочивания вершин на время решения разреженных задач ДО с помощью алгоритма НСДП. В результате проведенного вычислительного эксперимента, было отмечено, что для решения задач ДО упорядочивание переменных оказывает значительное влияние на время решения задачи. Помимо этого, было показано, что различные эвристики упорядочивания наиболее эффективны для различных

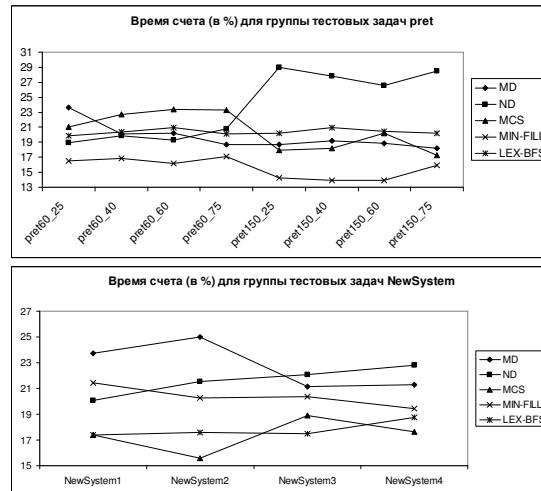


Рис. 2. Время счета (в секундах) для групп тестовых задач "pret "NewSystem"

классов задач. И, наконец, было отмечено, что эвристики MCS и MIN-FILL показали наилучший результат для решения задач ДО из предложенных классов тестовых задач.

Представляется перспективным продолжить данное исследование, причем направление дальнейших исследований состоит в изучении использования методов блочной элиминации с соответствующими методами разбиения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю.И. Избранные научные труды / Ю.И. Журавлев. – М.: Магистр, 1998. – 420 с.
2. Журавлев Ю.И. Окрестности в задачах дискретной математики / Ю.И. Журавлев, Г.Ф. Лосев // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – №2. – С. 32-41.
3. Иловайская Е.И. О вычислительных аспектах реализации локальных алгоритмов решения задач дискретной оптимизации / Е.И. Иловайская, О.А. Щербина // Динамические системы. – 1990. – Вып. 9. – С. 117-122.
4. Щербина О.А. О локальных алгоритмах решения квазиблочных задач дискретного программирования / О.А. Щербина // Проблемы кибернетики. – М.: Наука. – 1983. – Вып. 40. – С. 171-200.
5. Щербина О.А. Локальные алгоритмы для блочно-древовидных задач дискретного программирования / О.А. Щербина // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1985. Т. 25, – N 8. – С. 1143-1154.
6. Щербина О.А. О несериальной модификации локального алгоритма декомпозиции задач дискретной оптимизации / О.А. Щербина // Динамические системы. – 2005. – Вып. 19. – С. 179-190.

7. Щербина О.А. Древоподобная декомпозиция и задачи дискретной оптимизации (обзор) / О.А. Щербина // Кибернетика и системный анализ. – 2007. – № 4. – С. 102-118.
8. Щербина О.А. Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач / О.А. Щербина // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, N 1. – С. 161-177.
9. Amestoy P.R. An approximate minimum degree ordering algorithm / P.R. Amestoy, T.A. Davis, I.S. Duff // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1996. – V. 17, N 4. – P. 886-905.
10. Ashcraft C. Robust ordering of sparse matrices using multisection / C. Ashcraft, J.W.H. Liu // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1995. – V. 19. P. 816-832.
11. Bertele U. Nonserial Dynamic Programming / U. Bertele, F. Brioschi. – New York: Academic Press, 1972. – 235 p.
12. BOOST, minimum degree ordering algorithm. – Режим доступа: http://www.boost.org/doc/libs/1_46_1/libs/graph/doc/minimum_degree_ordering.html.
13. Bui T. A heuristic for reducing fill in sparse matrix factorization / T. Bui, C. Jones // Proc. 6th SIAM Conf. Parallel Processing for Scientific Computing. – Philadelphia: SIAM, 1993. – P. 445-452.
14. CHOMPACT, maximum cardinality ordering algorithm. – Режим доступа: <http://abel.ee.ucla.edu/chompact/>
15. Musliu N. A CSP hypergraph library / N. Musliu, M. Samer, T. Ganzow, G. Gottlob. Technical Report, DBAI-TR-2005-50. – Technische Universität Wien, 2005.
16. Dechter R. Constraint Processing / R. Dechter. – San Francisco: Morgan Kaufmann, 2003. – 481 p.
17. networkx, maximal cliques search algorithm. – Режим доступа: http://networkx.lanl.gov/reference/generated/networkx.algorithms.clique.find_cliques.html
18. Fiduccia C.M. A linear-time heuristics for improving network partitions / C.M. Fiduccia, R.M. Mattheyses // Proc. 19th ACM/IEEE Design Automation Conference, 1982. – P. 175-181.
19. George J.A. Nested dissection of a regular finite element mesh / J.A. George // SIAM J. Numer. Anal. – 1973. – V. 10. – P. 345-367.
20. Hendrickson B. A multilevel algorithm for partitioning graphs / B. Hendrickson, R. Leland // Proc. Supercomputing '95. – San-Diego: ACM, 1995.
21. Hendrickson B. Improving the run time and quality of nested dissection ordering / B. Hendrickson, E. Rothberg // SIAM J. Sci. Comput. – 1998. – V. 20(2). – P. 468-489.
22. Jégou P. Computing and exploiting tree-decompositions for (Max-)CSP / P. Jégou, S.N. Ndiaye, C. Terrioux // Proceedings of the 11th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP-2005). – 2005. – P. 777-781.
23. Karypis G. A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs / G. Karypis, V. Kumar. TR 95-035, University of Minnesota, 1995.
24. Karypis G. MeTiS – a software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes, and computing fill-reducing orderings of sparse matrices. Version 4 / G. Karypis, V. Kumar. – University of Minnesota, 1998.

25. Kernighan B.W. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs / B.W. Kernighan, S. Lin // The Bell System Techn. Journal. – 1970. – V. 49. – P. 291-307.
26. Liu J.W.H. Modification of the minimum-degree algorithm by multiple elimination / J.W.H. Liu // ACM Transactions on Mathematical Software. – 1985. – V. 11. – P. 141-153.
27. matplotlib is a python 2D plotting library which produces publication quality figures in a variety of hardcopy formats and interactive environments across platforms. – Режим доступа: <http://matplotlib.sourceforge.net/>
28. Metis graph reader. – Режим доступа: <http://pypi.python.org/pypi/MetisReader>.
29. NetworkX is a Python package for the creation, manipulation, and study of the structure, dynamics, and functions of complex networks. – Режим доступа: <http://networkx.lanl.gov/>
30. Parter S. The use of linear graphs in Gauss elimination / S. Parter // SIAM Review. – 1961. – V. 3. – P. 119-130.
31. Pellegrini F. Sparse matrix ordering with SCOTCH / F. Pellegrini, J. Roman // Proceedings of HPCN'97, Vienna, LNCS 1225, 1997. – P. 370-378.
32. PyMetis is a Python wrapper for the Metis library. – Режим доступа: <http://pypi.python.org/pypi/PyMetis>
33. Python Programming Language. – Режим доступа: <http://python.org>
34. Rose D.J. A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations / D.J. Rose // Graph Theory and Computing / R.C. Read (ed.). – New York: Academic Press, 1972. – P. 183-217.
35. Rose D.J. Algorithmic aspects of vertex elimination on graphs / D.J. Rose, R. Tarjan, G. Lueker // SIAM J. on Computing. – 1976. – V. 5. – P. 266-283.
36. Tarjan R.E. Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hypergraphs / R.E. Tarjan, M. Yannakakis // SIAM J. Comput. – 1984. – V. 13. – P. 566-579.
37. Yannakakis M. Computing the minimum fill-in is NP-complete / M. Yannakakis // SIAM J. Alg. Disc. Meth. – 1981. – V. 2. – P. 77-79.

Статья поступила в редакцию 22.04.2011

УДК 519.854

ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЙ ОБРАБОТКИ РАЗНОПРИОРИТЕТНЫХ ТРЕБОВАНИЙ В МНОГОСТАДИЙНОЙ СИСТЕМЕ С ОДИНАКОВЫМ ПОРЯДКОМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

© Кротов К. В., Кротова Т. Ю.

СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ АВТОМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ
СТУДГОРОДОК, Г. СЕВАСТОПОЛЬ, 99053, УКРАИНА
E-MAIL: *krotov_kv@mail.ru*

Abstract. Shedule composition gradient method in multi-stage system with the same claim service degree and different priority of degree.

ВВЕДЕНИЕ

Задача составления расписания обработки требований в многостадийных системах при одинаковом порядке обслуживания и различными их приоритетами с использованием точных методов является NP-трудной при значительном количестве требований и обслуживающих приборов в системе [1]. Поэтому в настоящее время используются методы, позволяющие получить приближенные решения [2, 3]. Возможным вариантом решения задач дискретной оптимизации и связанной с ним проблемой составления расписаний является градиентный метод. При этом необходима реализация методов, которые позволяют формировать расписания обработки при учете особенностей функционирования систем (в частности при различных приоритетах обслуживаемых требований).

Под многостадийной системой подразумевается система, в которой процесс обслуживания каждого требования состоит из нескольких последовательных стадий, на каждой из которых требование обслуживается определенным прибором. Постановка задачи предполагает задание: множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ обрабатываемых требований; множества $M = \{1, 2, \dots, m\}$ приборов, выполняющих обработку требований на определенных стадиях их обслуживания в системе; длительностей обработки i -го требования на l -ом приборе $t_i^l > 0$; приоритетов R_i обрабатываемых требований; моментов времени поступления требований в систему на обслуживание d_i (особенностью постановки задачи является задание значений $d_i = 0$ для требований с наименьшим приоритетом и $d_i > 0$ для требований с наибольшим приоритетом).

Система с одинаковыми маршрутами реализует последовательность операций обработки i -го требования каждым из приборов, входящим в многостадийную систему

(в множество приборов M). Время обработки требований на приборах различно, а обработка более одного требования на приборе невозможна, то на приборах (в накопителях) образуются очереди требований на обработку, в которых порядок размещения требований может быть произвольным. Порядок размещения требований в очередях перед приборами может быть определен таким образом, чтобы расписание обслуживания требований в системе было оптимальным в соответствии с некоторым критерием. Обозначив через π^l последовательность обработки требований на l -ом приборе, расписание π может быть определено в виде: $\pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^m\}$ как совокупность последовательностей π^l , определяющих очередность обработки требований на соответствующих приборах.

Поступление в систему для обработки требования $i_{\text{пр}}$, имеющего наивысший приоритет $R_{i_{\text{пр}}} > R_i$, приводит к прерыванию обработки требований i_q^l на соответствующих приборах (через i_q^l обозначим то требование, обработка которого на l -м приборе прерывается требованием $i_{\text{пр}}$, имеющим наивысший приоритет). В момент времени $d_{i_{\text{пр}}}$ поступления требования в систему прибор 1 немедленно приступает к его обработке, прерывая обработку требования i_q^l (при условии, что приоритеты обрабатываемых на l -ом приборе требований являются более низкими, чем приоритет требования $i_{\text{пр}}$), в момент $\overline{t_{i_{\text{пр}}}^{l-1}}$ ($l = \overline{2, m}$) происходит окончание обработки требования $i_{\text{пр}}$ на $(l-1)$ -ом приборе, l -й прибор прерывает обработку требования i_q^l . Процесс прерывания обработки требований i_q^l на l -ых приборах (в моменты времени $\overline{t_{i_{\text{пр}}}^{l-1}}$) продолжается до полной обработки требования $i_{\text{пр}}$ в системе. В этом случае выполнение операций по обработке требования i_q^l может быть представлена в виде двух стадий: первой – предшествующей прерыванию обработки требования i_q^l требованием $i_{\text{пр}}$, второй – следующей за окончанием обработки требования $i_{\text{пр}}$ на l -ом приборе. Т. е. $(t_q^l)_1$ – интервал времени реализации первой стадии обработки, $(t_q^l)_2$ – интервал времени реализации второй стадии обработки требования i_q^l .

В силу того, что значение $d_{i_{\text{пр}}}$ является известным (определено в момент поступления требования $i_{\text{пр}}$ в обработку), длительности $t_{i_{\text{пр}}}^l$ обработки требования $i_{\text{пр}}$ на каждом l -ом приборе также известны ($l = \overline{1, m}$), то могут быть определены моменты времени $t_{i_{\text{пр}}}^{0l}$ начала обработки требования $i_{\text{пр}}$ на каждом l -ом приборе. Так как приоритет требования $i_{\text{пр}}$ наивысший, то

$$t_{i_{\text{пр}}}^{0l} = t_{i_{\text{пр}}}^{0l-1} + t_{i_{\text{пр}}}^{l-1}, \overline{t_{i_{\text{пр}}}^{l-1}} = t_{i_{\text{пр}}}^{0l}, t_{i_{\text{пр}}}^{01} = d_{i_{\text{пр}}}. \quad (1)$$

То есть, начало обработки требования $t_{i_{\text{пр}}}^{0l}$ является вычислимым по (1), а не определяется в результате составления расписания обработки требований. Так как момент поступления требования $i_{\text{пр}}$ в обработку является случайным ($d_{i_{\text{пр}}} > 0$), то

при фиксированной детерминированной длительности $t_{i_{np}}^l$ обработки требования i_{np} на l -ом приборе момент времени прерывания обработки требования i_q^l также является случайным (случайной является и длительность $(t_q^l)_2$). Так как момент $t_{i_{np}}^{0l}$ поступления требования i_{np} на обработку на l -ом приборе может совпадать с моментом t_q^{0l} начала обработки требования i_q^l (обработка которого должна быть прервана), либо $t_{i_q}^{0l} \in [t_{np}^{0l}, \overline{t_{i_{np}}^l}]$, то

$$(t_q^l)_2 = \begin{cases} t_q^l, & \text{при } t_q^{0l} = t_{i_{np}}^{0l} \\ t_q^l - (t_q^l)_1, & \text{при } t_q^{0l} < t_{i_{np}}^{0l} \end{cases} \quad (2)$$

Последовательности π^l , образующие расписание π^* , оптимизированное для $(n + 1)$ -го требования (n имеющихся требований и одного требования с наивысшим приоритетом), с учетом необходимости определения порядка обработки требований с различными приоритетами могут быть представлены в виде:

$$\pi^l = \pi_1^l \cup \pi_2^l.$$

Подпоследовательность (последовательность) π_1^l определяется по статическому расписанию для требований с $d_i = 0$. Её образуют требования, обработанные к моменту поступления требования i_{np} в систему, требования, обрабатываемые к моменту поступления требования i_{np} в систему, но обработка которых на соответствующем l -ом приборе будет закончена до поступления требования i_{np} на l -й прибор. Таким образом, последовательность π_1^l образуют те требования, порядок которых в π^l остается неизменным (уже не может быть изменен). Для требований i_k^l подпоследовательности π_1^l сформулированы следующие условия:

1. обработанные к моменту $d_{i_{np}}$ требования:

$$t_{i_k}^{0l} < d_{i_{np}}; \overline{t_{i_k}^l} \leq d_{i_{np}}; \quad (3)$$

2. обрабатываемые к моменту $d_{i_{np}}$ требования, но их обработка завершится к моменту $t_{i_{np}}^{0l}$ (т. е. до поступления требования i_{np} на обработку на l -ый прибор):

$$t_{i_k}^{0l} < d_{i_{np}}; \overline{t_{i_k}^l} > d_{i_{np}}; \overline{t_{i_k}^l} < t_{i_{np}}^{0l}. \quad (4)$$

Обозначив через i_k^l требование, для которого последним из последовательности π^l выполняются условия (3), (4), последовательность π_1^l можно представить в следующем виде

$$\pi_1^l = \{i_1^l, i_2^l, \dots, i_k^l\}, \quad (5)$$

где i_j^l ($j = \overline{1, k-1}$) – те требования, порядок которых в π^l не может быть изменен, требование i_k^l – «граница» между последовательностями π_1^l и π_2^l .

В соответствии с (3)-(5) могут быть введены дополнительные условия для последовательностей требований π_1^l и π_2^l . Если для требования i_k выполняются условия:

$$t_{i_k}^{0l} < d_{i_{\text{пр}}} \text{ и } \overline{t_{i_k}^l} > t_{i_{\text{пр}}}^{0l}, \quad (6)$$

где $\overline{t_{i_k}^l}$ – момент времени окончания обработки требования i_k в статическом расписании, то обработка требования i_k будет прервана обработкой требования $i_{\text{пр}}$ с наибольшим приоритетом и вид последовательностей π_1^l и π_2^l в этом случае может быть определен следующим образом:

$$\pi_1^l = \{i_1^l, i_2^l, \dots, (i_k^l)_1\}, \pi_2^l = \{i_{\text{пр}}, (i_k^l)_2, i_{k+1}^l, i_{k+2}^l, \dots, i_n^l\}, \quad (7)$$

где через $(i_k^l)_1$ и $(i_k^l)_2$ обозначены начальная и заключительная стадии обработки требования i_k ($(i_k^l)_1$ и $(i_k^l)_2$ так называемые «фиктивные» требования – стадии обработки требования i_k).

Таким образом, для рассматриваемого требования i_k^l могут быть сформулированы следующие предпосылки (условия):

1. его обработка начата ранее момента $d_{i_{\text{пр}}}$ поступления требования $i_{\text{пр}}$ в систему;
2. обработка требования не прекратится к моменту $t_{i_{\text{пр}}}^{0l}$ (обработка требования i_k^l не будет закончена к моменту $t_{i_{\text{пр}}}^{0l}$);
3. обработка требования не прекращается до поступления на l -ый прибор требования $i_{\text{пр}}$, однако должна быть прервана в момент $t_{i_{\text{пр}}}^{0l}$ при переходе на l -ом приборе к обработке требования $i_{\text{пр}}$;
4. обработка требования i_k^l состоит из двух стадий: стадия $(i_k^l)_1 \in \pi_1^l$, стадия $(i_k^l)_2 \in \pi_2^l$.

При этом требование $i_{\text{пр}} \in \pi_2^l$ является «границей» между последовательностями π_1^l и π_2^l (при выполнении условия (6)). Рассматриваемую ситуацию комментирует Рис. 1. Таким образом (в соответствии с Рис. 1), в случае выполнения условия (6) границей последовательности π_1^l является первая стадия обработки требования i_k^l (обозначенная через $(i_k^l)_1$).

Для всех остальных i_k^l -ых требований, входящих в последовательность π_2^l выполняется условие $d_{i_{\text{пр}}} < t_{i_k}^{0l}$ (то есть требование i_k^l начинает обрабатываться на l -ом приборе уже после поступления требования $i_{\text{пр}}$ в систему) и одно из указанных ниже условий:

$$t_{i_k}^{0l} < t_{i_{\text{пр}}}^{0l}; \overline{t_{i_k}^l} < t_{i_{\text{пр}}}^{0l}, \quad (8)$$

то есть окончание обработки требования i_k происходит раньше поступления требования $i_{\text{пр}}$ на обработку на l -ый прибор;

$$t_{i_k}^{0l} < t_{i_{\text{пр}}}^{0l}; \overline{t_{i_k}^l} > t_{i_{\text{пр}}}^{0l}, \quad (9)$$

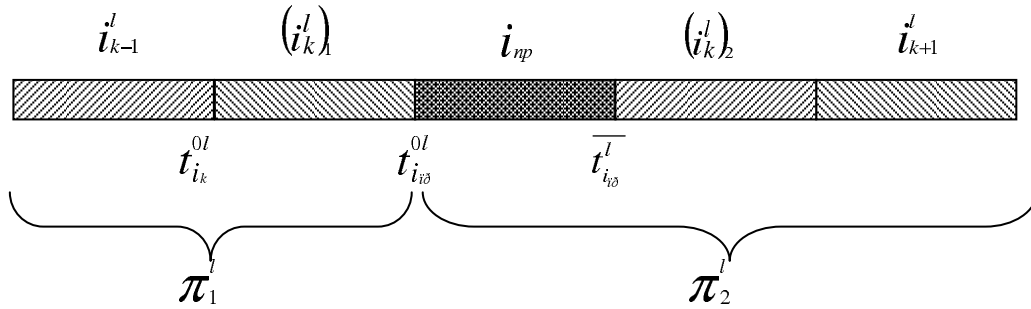


Рис. 1. Прерывание требованием i_{np} обработки требования i_k^l при условии $t_{i_k}^{0l} < d_{i_{np}}$

то есть обработка требования i_k на l -ом приборе будет прервана поступлением на обработку требования i_{np} с наивысшим приоритетом;

$$\overline{t_{i_{np}}^l} < t_{i_k}^{0l}, \tag{10}$$

то есть обработка требования i_k начинается после завершения обработки требования i_{np} .

В результате для некоторого требования i_k последовательности π_2^l выполняются условия: $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условие (8), если обработка требования i_k предшествует поступлению требования i_{np} на l -й прибор; $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условие (9), если обработка требования i_k на l -ом приборе прерывается поступлением требования i_{np} ; $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условие (10), если обработка требования i_k выполняется после завершения обработки требования i_{np} на l -ом приборе.

Таким образом, выражения (8), (9), (10) и $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ определяют условия для требований $i_k^l \in \pi_2^l$, порядок которых в π_2^l может быть изменен с учетом размещения в этой последовательности требования i_{np}^l .

Вид последовательностей π_1^l и π_2^l при выполнении условия $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условий, определяемых выражениями (8)–(10), следующий:

$$\pi_1^l = \{i_1^l, i_2^l, \dots, i_{k-1}^l\}, \pi_2^l = \{i_k^l, i_{k+1}^l, \dots, (i_q^l)_1, i_{np}^l, (i_q^l)_2, i_{q+1}^l, i_{q+2}^l, \dots, i_n^l\}, \tag{11}$$

где для требования i_{k-1}^l выполняются условия, определенные выражениями (3) и (4); для требований i_k^l, i_{k+1}^l, \dots выполняется условие $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условие (8); i_q^l – идентификатор требования, обработка которого прервана поступлением i_{np} на l -ый прибор (обработка которого состоит из двух стадий), т.е. для которого выполняется условие $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условие (9); для требований $i_{q+1}^l, i_{q+2}^l, \dots, i_n^l$ выполняется условие $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условие (10). Необходимость изменения порядка обработки требований

в последовательности π_2^l при поступлении требования i_{np} на обработку l -ом прибором комментирует Рис. 2.

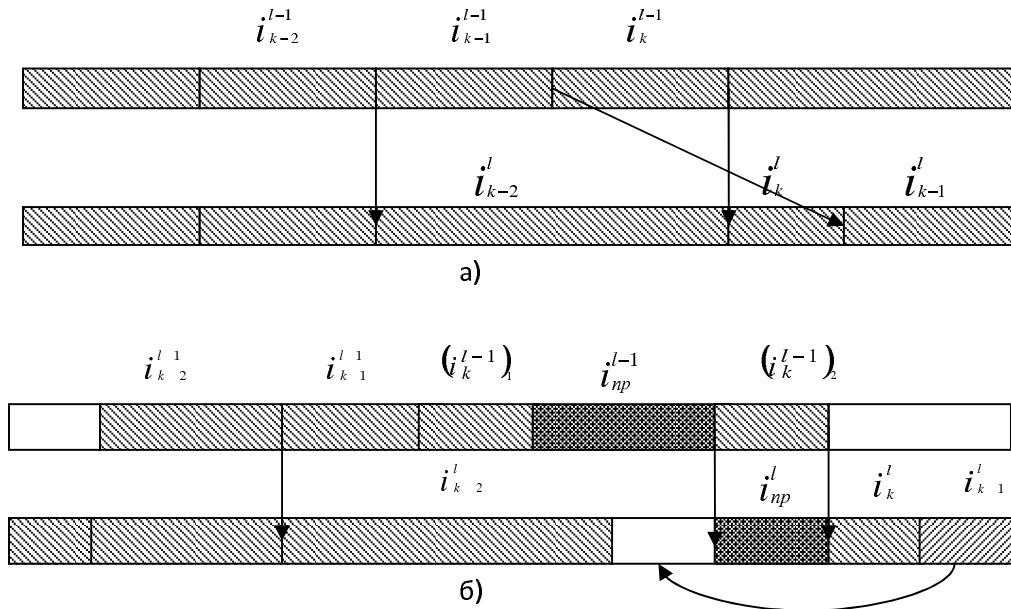


Рис. 2. Причины необходимости изменения расписания π . а) оптимальные последовательности π^{l-1} и π^l в оптимальном виде до поступления требования i_{np} (для n требований); б) изменение последовательности π_2^l при поступлении требования i_{np} .

При этом на Рис. 2а определены виды последовательностей π^{l-1} и π^l для оптимального решения π , построенного для n требований до того как требование i_{np} поступило на обработку в систему; на рисунке 2б определена необходимость перестроения расписания (последовательности π^l) по причине задержки обработки требования i_k (модифицируемая последовательность). Стрелка определяет необходимость перемещение требования i_{k-1} в начало последовательности (т.е. изменение исходной последовательности, оптимальной для n требований).

Определение границ между последовательностями π_1^l и π_2^l для различных приборов и способы размещения требования i_{np} в последовательностях π_2^l ($l = \overline{1, m}$) прокомментированы на Рис. 3.

Анализ Рис. 3 показывает, что местоположение границы между последовательностями π_1^l и π_2^l в последовательности π^l должно определяться динамически в соответствии с сформулированными выше условиями. Так для приборов 1 и 2 на данном рисунке – из условий (3)–(4), для l -го и m -го приборов – из условий (8)–(10).

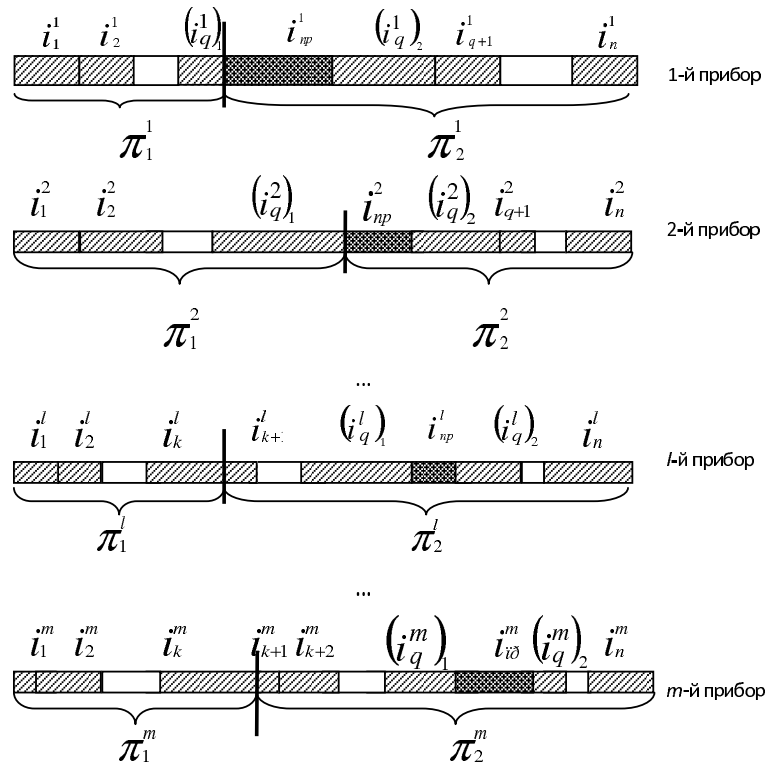


Рис. 3. Определение границы между последовательностями π_1^l и π_2^l , размещение требования i_{np} в последовательности π_1^l .

Таким образом, предлагаемый алгоритм составления расписания предполагает определение оптимального порядка обработки требований в последовательности π_2^l (с учетом определяемых моментов $t_{i_{np}}^{0l}$ и длительностей $t_{i_{np}}^l$) при неизменном порядке требований в последовательностях π_1^l .

При поступлении требования i_{np} на обработку в систему (задании значения $d_{i_{np}}$) при известных $t_{i_{np}}^l$ могут быть определены значения $t_{i_{np}}^{0l}$. Так как построенное для требований множества N (до поступления требования i_{np}) эффективное расписание π^* характеризуется значениями $t_{i_k}^{0l}$ и $\overline{t_{i_k}^l}$, то могут быть идентифицированы требования i_k^l (выполнение условий (3) и (4)) и i_{k+1}^l (выполнение условия $d_{i_{np}} < t_{i_k}^{0l}$ и условия (8)), являющиеся граничными для последовательностей π_1^l и π_2^l , либо требования $(i_q^l)_1$, i_{np}^l , являющиеся граничными для π_1^l и π_2^l (при выполнении условия (6)). На основе исходного вида последовательностей π^l ($l = \overline{1, m}$) эффективного расписания π^* для n требований, определенных граничных требований i_k^l и i_{k+1}^l , (либо $(i_q^l)_1$, i_{np}^l) последовательностей π_1^l и π_2^l могут быть определены множества N^l (для каждого l -го прибора) тех требований, которые должны быть упорядочены в последовательностях π_2^l при учете наличия в них требования i_{np} . В случае, если i_{k+1}^l (либо i_{np}^l) – левые граничные

элементы (требования) для последовательности π_2^l , то вид множеств N^l ($l = \overline{1, m}$) следующий:

$$N^l = \{i_{k+1}^l, i_{k+2}^l, \dots, i_n^l\},$$

либо

$$N^l = \{(i_q^l)_2, i_{q+1}^l, \dots, i_n^l\}.$$

Естественно, что $|N^1| < |N^2| < \dots < |N^m|$.

Для удобства решения задачи требования в множествах N^l должны быть упорядочены таким образом, чтобы $i_k^l < i_{k+1}^l < i_{k+2}^l < \dots < i_n^l$. Задача состоит в том чтобы сформировать новый вид последовательностей π_2^l из элементов множеств N^l при учете размещения в этих последовательностях требований $i_{пр}^l$ ($\pi_2^l \neq \emptyset$ на начальной стадии алгоритма упорядочивания требований множеств N^l , реализуемого после поступления требования $i_{пр}$ на обработку).

По аналогии с методом составления расписаний обработки требований с одинаковыми приоритетами формирование алгоритма составления расписания обработки требований с разными приоритетами (и различными временами поступления на обработку) предваряется рассмотрением способа построения последовательностей π^l и способа определения градиента целевой функции $f(\pi_s)$ вдоль направлений, соответствующих l -ым приборам (вдоль решеток дискретных решений, формируемых изменением порядка требований в этих последовательностях):

1. в соответствии с вышеприведенными рассуждениями каждая последовательность π^l на некотором $(s - 1)$ шаге может быть представлена в виде:

$$\pi_{s-1}^l = (\pi_1^l \cup \pi_2^l)_{s-1},$$

при этом вид последовательности π_{s-1}^l ($l = \overline{1, m}$) является оптимальным для $(k - 1)$ -го рассматриваемого требования ($k - 1 < n$) (т.е. расписание π_{s-1} , представляющее собой совокупность последовательностей π_{s-1}^l , является оптимальным для $(k - 1)$ -го требования)

2. тогда на s -ом шаге алгоритма должна быть сформирована новая последовательность π_s^l ($l = \overline{1, m}$) путем добавления в конец последовательности $(\pi_2^l)_{s-1}$ требования $i_k \in N^l$ (при этом из всех множеств N^l выбирается требование i_k с одинаковым наименьшим идентификатором). В результате вид последовательности π_s^l следующий:

$$\pi_s^l = (\pi_1^l \cup \pi_2^l)_{s-1} \cup \{i_k\}; \quad (12)$$

3. на основе множеств N^l (при условии, что $i_k \in N^l$) формируется множество L тех приборов, в последовательностях π_2^l которых требование i_k должно быть

размещено (тех направлений, вдоль которых возможно изменение целевой функции $f(\pi_s)$ при формировании новых решений π_{s+j} ($j = \overline{1, |L|}$)), получаемых путем изменения порядка в соответствующих последовательностях π_s^l . Полученное путем добавления требование i_k в конец последовательности π_s^l решение характеризуется значением $f(\pi_s)$.

Конечный вид последовательностей π_s^l , сформированный на основе (12):

$$\pi_s^l = \{i_1^l, i_2^l, \dots, i_g^l, i_{g+1}^l, \dots, i_{k-1}^l, i_k^l\}_S, \quad (13)$$

где i_g^l – требование, являющееся правым граничным для последовательности $(\pi_1^l)_s$, i_{g+1}^l – требование, являющееся левым граничным для последовательности $(\pi_2^l)_s$. Таким образом, количество последовательностей, содержащих требование i_k^l равно $|L|$;

4. для тех l -ых приборов, для которых $l \in L$, выполняется изменение порядка требований i_{k-1}^l и i_k^l в последовательности π_s^l . Измененный вид последовательности π_s^l :

$$\pi_s^l = \{i_1^l, i_2^l, \dots, i_g^l, i_{g+1}^l, \dots, i_k^l, i_{k-1}^l\}.$$

Изменение порядка требований в последовательности π_s^l , соответствующей одному из приборов $l \in L$ (при неизменных оставшихся последовательностях) позволяет получить одно из $|L|$ возможных решений π_{s+j} ($j = \overline{1, |L|}$). Каждое решение π_{s+j} (с одной измененной последовательностью π_s^l), характеризуется значением $f(\pi_{s+j})$. Это позволяет для каждого $l \in L$ определить левый либо правый градиент целевой функции ($\nabla_l^- f(\pi_s)$ либо $\nabla_l^+ f(\pi_s)$) следующим образом:

1. для левого дискретного градиента целевой функции:

$$\nabla^- f(\pi_s) = f(\pi_{s+1}) - f(\pi_s)$$

при условии выполнения отношения частичного порядка между решениями π_s и π_{s+1} вида $\pi_{s+1} \prec \pi_s$;

2. для правого градиента целевой функции:

$$\nabla^+ f(\pi_s) = f(\pi_{s+1}) - f(\pi_s)$$

при условии выполнения отношения частичного порядка между решениями π_s и π_{s+1} вида $\pi_s \prec \pi_{s+1}$.

Среди тех $l \in L$, для которых выполняется условие $\nabla_l^- f(\pi_s) < 0$, выбирается то направление l' (вдоль решетки дискретных решений), в котором гарантируется максимальный отрицательный градиент функции $f(\pi_s)$, то есть:

$$l' \rightarrow \max_l (|\nabla_l^- f(\pi_s)|), \text{ при } \nabla_l^- f(\pi_s) < 0.$$

В данном направлении (вдоль цепи дискретных решений) изменяется значение целевой функции $f(\pi_s)$, связанное с изменением порядка требований в последовательности π'_s («перемещением» требования i_k в начало последовательности π'_s до левой границы последовательности π'_2). Если левой является требование i'_{g+1} , то при перемещении требования i_k в начало последовательности и выполнении условия $\nabla_l^- f(\pi_s) \leq 0$ требование i_k может занять любую позицию в последовательности π'_2 , включая саму левую границу (занять позицию требования i'_{g+1}). Если левой границей является требование i'_{np} , то при условии $\nabla_l^- f(\pi_s) \leq 0$ требование i'_k может занять в последовательности π'_2 любую позицию, за исключением i'_{np} (то есть требование i'_k при $\nabla_l^- f(\pi_s) \leq 0$ будет являться последующим за i'_{np} в последовательности π'_2). Изменение порядка требований в π'_2 должно быть прекращено в том случае, если новое решение π_{s+p} ($p = \{1, 2, 3 \dots\}$), полученное путем изменения порядка требований в π'_2 , позволяет определить значение правого градиента целевой функции вида $\nabla_{l'}^+ f(\pi_s) > 0$ (доказана теорема об условии оптимальности решения на решетке).

При «перемещении» требования i'_k в начало последовательности π'_2 выполняется модификация длительности обработки этого требования в том случае если его обработка будет прервана обработкой требования i'_{np} следующим образом (при фиксированных $t_{i_{np}}^{0l'}$ и $\overline{t_{i_{np}}^{l'}}$):

$$\text{если } t_{i_k}^{0l'} < t_{i_{np}}^{0l'}, t_{i_{np}}^{0l'} < \overline{t_{i_k}^{l'}}, \text{ то } (t_{i_k}^{l'})' = t_{i_k}^{l'} + t_{i_{np}}^{l'}; \quad (14)$$

$$\text{если } t_{i_k}^{0l'} = t_{i_{np}}^{0l'}, \text{ то } (t_{i_k}^{l'})' = t_{i_k}^{l'}. \quad (15)$$

Сформулированный выше способ формирования последовательностей π^l позволяет решать задачу упорядочивания требований множеств N^l в последовательностях π_2^l и является основой градиентного алгоритма поиска эффективного расписания π^* . Таким образом, исходными данными для решения задачи градиентным методом являются сформированные множества N^l и начальные виды последовательностей π^l , которые в силу того, что $\pi_2^l(0) = \emptyset$ будут иметь следующий вид (в соответствии с условиями (3), (4), (6)):

$$\pi^1 = \pi_1^1 = \{i_1^1, i_2^1, \dots, (i_q^1)_1\} = \pi_1^1 \cup \pi_2^1 = \pi_1^1 \cup \emptyset;$$

$$\pi^2 = \pi_1^2 = \{i_1^2, i_2^2, \dots, i_k^2\} = \pi_1^2 \cup \pi_2^2 = \pi_1^2 \cup \emptyset;$$

$$\pi^m = \pi_1^m = \{i_1^m, i_2^m, \dots, i_k^m\} = \pi_1^m \cup \pi_2^m = \pi_1^m \cup \emptyset,$$

где $(i_q^1)_1$ – первая стадия обработки требования i_q^1 , которая прерывается поступлением требования i_{np} .

С учетом введенных обозначений и предположений алгоритм градиентного метода построения расписания обработки требований множеств N^l состоит из следующих шагов (s) – индекс шага алгоритма, первоначально $s = 0$):

1. в силу того, что $\pi_2^l(0) = \emptyset$ (для $l = \overline{1, m}$), то должны быть определены те π_2^l , для которых требование $i_{\text{пр}}^l$ является начальным элементом (то есть левой границей последовательности π_2^l). В результате последовательность π_2^l примет вид $\pi_2^l = \{i_{\text{пр}}^l\}$;
2. в качестве множества N^l , требования которого будут упорядочены в первую очередь (на первой стадии алгоритма переупорядочивания требований), принимается множество N^m (для последнего m -го прибора, как содержащее максимальное число элементов), таким образом, $l = m$ – индекс текущего множества l , требования которого рассматриваются в ходе реализации алгоритма первыми. Обозначим индекс рассматриваемого на первом шаге множества N^l через p , т. е. рассматривается множество N^{l_p} при $l_p = m$;
3. в случае если $N^{l_p} \neq \emptyset$, то из N^{l_p} выбирается такое требование $i_k^{l_p}$, что $(i_k^{l_p} < i_h^{l_p} \mid h = \overline{k+1, n})$. На основе идентификатора требования $i_k^{l_p}$ из множеств N^l ($l \neq l_p$) выбираются такие требования i_k^l , что $i_k^l = i_k^{l_p}$. В соответствии с условием $(i_k^l = i_k^{l_p} \mid i_k^l \in N^l)$ формируется множество $L = \{l \mid i_k^l \in N^l, i_k^l = i_k^{l_p}\} \cup \{l_p\}$ тех направлений, вдоль которых на данном шаге алгоритма может быть изменено значение целевой функции $f(\pi_s)$ при изменении порядка требований в последовательностях $\pi_2^l(s)$ (размещении требований i_k в последовательности). При этом из N^l могут выбираться как непосредственно требования i_k^l , так и «фиктивные» требования $(i_k^l)_2$. В результате полученный вид последовательности π_s^l следующий:

$$\pi_s^l = (\pi_1^l(s-1) \cup \pi_2^l(s-1)) \cup \{i_k^l\}.$$

В результате множества N^l примут вид:

$$N^l(s+1) = N^l(s) \setminus \{i_k^l\}, N^{l_p}(s+1) = N^{l_p}(s) \setminus \{i_k^{l_p}\}.$$

Текущее решение π_s характеризуется значением $f(\pi_s)$. В случае, если $|\pi_2^l| = 1$ (либо $|\pi_2^l| = 2$ при условии, что первый элемент π_2^l – требование $i_{\text{пр}}$ – переход к шагу 3);

4. для каждой из последовательностей π_2^l , таких, что $l \in L$ изменяется порядок требований i_{k-1}^l и i_k^l (с учетом того, что положение требования $i_{\text{пр}}^l$ (возможного первого элемента π_2^l) не может быть изменено) при неизменных остальных

последовательностях π_2^l . В результате получено $|L|$ решений π_{s+j} ($j = \overline{1, |L|}$). Таким образом, L – множество идентификаторов тех последовательностей π_2^l , в которых размещение требования i_k^l должно быть выполнено оптимальным образом;

5. для исходного решения π_s (значения $f(\pi_s)$) и полученных решений π_{s+j} (значений $f(\pi_{s+j})$, $j = \overline{1, |L|}$) определяется $\nabla_l^- f(\pi_s)$ либо $\nabla_l^+ f(\pi_s)$. В результате формируется множество N_s^p тех направлений l , для которых $\nabla_l^- f(\pi_s) \leq 0$ (то есть тех направлений, вдоль которых значение целевой функции $f(\pi_s)$ может быть улучшено). В множестве N_s^p выбирается такое направление l' , в котором $l' \rightarrow \max_l (|\nabla_l^- f(\pi_s)|)$, при $\nabla_l^- f(\pi_s) \leq 0$, то есть направление l' , гарантирующее максимальное уменьшение функции $f(\pi_s)$;
6. в последовательности $\pi_2^{l'}(s+j)$, соответствующей выбранному направлению l' осуществляется изменение порядка требований следующим образом:
 - а) рассматриваемое требование i_k^l «продвигается» в начало последовательности $\pi_2^{l'}(s+j)$. В результате формируются новые решения π_{s+p} ($p = \{1, 2, 3, \dots\}$), при этом гарантируется условие $\nabla_l^- f(\pi_s) \leq 0$;
 - б) в случае, если $t_{i_k}^{ol} < t_{i_{np}}^{ol}$; $\overline{t_{i_k}^l} > t_{i_{np}}^{ol}$, то требование i_k^l заменяется двумя «фиктивными» требованиями $(i_k^l)_1$ и $(i_k^l)_2$, такими, что:

$$(t_{i_k}^{ol})_1 = t_{i_k}^{ol}, (\overline{t_{i_k}^l})_1 = t_{i_{np}}^{ol}, (t_{i_k}^{ol})_2 = \overline{t_{i_{np}}^l}, (\overline{t_{i_k}^l})_2 = \overline{t_{i_k}^l},$$

то есть окончание обработки требования i_k^l фиксируется как окончание стадии $(i_k^l)_2$ (в силу выполнения условий (14), (15));

- с) поиск локально оптимального решения в направлении l' прекращается (то есть прекращается «продвижение» i_k^l в начало последовательности $\pi_2^{l'}(s)$):
 - в случае $\nabla_l^+ f(\pi_s) > 0$;
 - когда достигнута левая граница последовательности $\pi_2^{l'}$ (когда рассматриваемому требованию $i_k^{l'}$ предшествует требование $i_g^{l'}$, являющееся правой границей последовательности $\pi_1^{l'}$, определяемой условиями (3) и (4) либо условием (6)).

Таким образом, при выполнении сформулированных условий текущее положение требования $i_k^{l'}$ в последовательности $\pi_2^{l'}$ фиксируется (в дальнейшем остается неизменным). Для полученного решения π_s , характеризуемого оптимальным видом последовательности $\pi^{l'}$ определяется значение $f(\pi_s)$ (здесь присутствуют элементы «жадного» выбора – локально лучшее решение в направлении l' фиксируется и на его основе строятся другие решения),

выполняется преобразование множества L : $L(s+1) = L(s) \setminus l'$. Выполняется переход к шагу 4;

7. в случае, если $L(s) = \emptyset$ (то есть, нет направлений, в которых решение может быть улучшено либо во всех возможных последовательностях π_2^l ($l \in L$) размещение требования i_k выполнено), то получено локально оптимальное (для данного требования i_k) решение π_s . В случае, если $N^{l_p}(s) \neq \emptyset$, то из $N^{l_p}(s)$ выбирается требование i_{k+1} , выполняется переход к шагу 3;
8. в ситуации, когда $N^{l_p}(s) = \emptyset$, все требования $i_k \in N^{l_p}(s)$ размещены оптимальным образом. Тогда $l_p = l_p - 1$ (т.к. реализуется переход к множеству N^{l_p} предшествующего прибора) и выполняется переход к шагу 3 рассматриваемого алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, при реализации шагов 3)-8) алгоритма исследуется оптимальность решений (расписаний), входящих в множество D' , определяемое с использованием условий (3), (4), (6) на основе множества D всех возможных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Танаев В. С. Теория расписаний. Многостадийные системы / В. С. Танаев, Ю. Н. Сотсков, В. А. Струевич – М.: Наука, 1989. – 328 с.
2. Сигал И. Х. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы / И. Х. Сигал, А. П. Иванова – М.: Физматлит, 2003. – 240 с.
3. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. Целочисленное программирование / М. М. Ковалев – М.: Из-во «Едиториал УРСС», 2003. – 192 с.
4. Ковалев М. М. Матроиды в дискретной оптимизации / М. М. Ковалев – М.: Из-во «Едиториал УРСС», 2003. – 224 с.

Статья поступила в редакцию 08.02.2011

УДК 519.713.1 УДК 51.681.3

МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ РЕАКТИВНЫХ СИСТЕМ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

© Лукьянова Е. А., Дереза А. В.

КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Т.Г.ШЕВЧЕНКО, г.КИЕВ.
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО, г.СИМФЕРОПОЛЬ.
E-MAIL: *lukyanovaea@mail.ru*

Abstract. The method of creation of model of difficult multiblock real system is offered. The task of a combination of serial and parallel performance of initial processes of modelled system at the expense of performance of APLLY – operation for OBDD, representing automatic machines corresponding for the Petri nets components of researched system dares.

ВВЕДЕНИЕ

Отдавая предпочтение формальному моделированию, представим модель реактивной системы в виде набора моделей взаимодействующих компонент. Это позволит моделировать каждую компоненту независимо. Цель – получить общую модель сложной многоблоковой реальной системы, что в дальнейшем даст возможность провести проверку свойств всей исходной моделируемой системы. Для достижения поставленной цели в работе предлагается метод, использующий формализм сетей Петри (СП) [1], компактное представление конечных систем, в частности конечных автоматов (КА), упорядоченными бинарными диаграммами решений (УБДР, или OBDD – Ordered binary Decision Diagrams [2]) и применяющий APLLY – операцию к OBDD конечных автоматов сетей Петри, моделирующих исходные компоненты исследуемой системы.

В статье предлагаемый метод продемонстрирован на работе единого ресурса, содержащего две криптографические схемы Диффи-Хелмана и RSA.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

BDD – графическое представление булевой функции, представляющая собой ориентированный ациклический граф $G = (V, E)$, где V – множество вершин графа. Каждая внутренняя (нетерминальная) вершина дерева решений v обозначается символом переменной $var(v)$ и имеет дуги, которые ведут к сыновьям: сын $l(v)$ отвечает значению переменной 0 и сын $h(v)$ отвечает значению переменной 1. Все вершины-листья дерева (терминальные вершины) обозначаются константами 0 или 1, и не

имеют выходящих дуг. Для заданного распределения логических значений (интерпретаций) переменных, путь в дереве, который отвечает этому распределению, ведёт от корня дерева к вершине-листочку, обозначение которой есть значение функции.

Для вычисления булевой функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *BDD* используется следующим образом: каждый вход $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ определяет вычислительный путь через *BDD*, начинающийся с корня. Если путь достигает нетерминальный узел v – он следует по дуге $l(v)$, если $x_i = 0$, и по дуге $h(v)$, если $x_i = 1$. На всех путях достигается терминальный узел, так как граф направленный и ациклический. *BDD* с заданным порядком на переменных называется *OBDD*. От выбора подходящего порядка зависит размер и эффективность манипуляций с *OBDD*.

Использование *OBDD* для представления конечного X – автомата $A = (A, X, f, F)$ основано на представлении его функции перехода f в виде отношения R_f , заданного на множестве кодов состояний $A \times X$ – автомата, где $X = \{0, 1\}$, $f : A \times X \rightarrow A$, $F \subseteq A$. Пусть для некоторых состояний $a, b \in A$ и некоторого $x \in X$ имеем $f(a, x) = b$. Если $\underline{x}, \underline{a}, \underline{b}$ – соответственно коды символа x и состояний $a, b \in A$, то

$$R_f(\underline{x}, \underline{a}, \underline{b}) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(a, x) = b; \\ 0, & \text{если } f(a, x) \neq b; \\ d, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Отношению R_f соответствует булева функция $g_f(x, a, b)$, которая равна 1, тогда и только тогда, когда $R_f(\underline{x}, \underline{a}, \underline{b}) = 1$.

Символьные операции над булевыми функциями с применением *OBDD* можно рассматривать как соответствующие алгоритмы на графах, которые представляют эти *OBDD*. Причем выполнять можно произвольные как угодно сложные последовательности операций, не нарушая заданного порядка для переменных. *APPLY* – операция строит булеву функцию $f(op)g$ при помощи применения бинарных операций ($(op) \in \{+, \cdot\}$) к функциям-аргументам f и g и выполняет соединение двух графов-аргументов глубины 1 при использовании двух хеш-таблиц. Первая из этих таблиц служит для повышения эффективности вычислений, а вторая – для построения максимально отредактированного графа-результата. *APPLY* – операция основывается на возможности перестановки бинарных операций с расширенной операцией сужения для произвольной переменной x :

$$f(op)g = \neg x \cdot (f|_{x \leftarrow 0} (op)g|_{x \leftarrow 0}) + x \cdot (f|_{x \leftarrow 1} (op)g|_{x \leftarrow 1}).$$

Данное равенство – рекурсивная процедура вычисления *OBDD*, представляющей функцию $f(op)g$.

Операция сужения для функции f , представленной $OBDD$ с вершиной-корнем r_f , относительно переменной $x < var(r_f)$ вычисляется при помощи следующей процедуры:

$$f|_{x \leftarrow b} = \begin{cases} r_f, & \text{если } x < var(r_f); \\ l(r_f), & \text{если } x = var(r_f) \text{ and } b = 0; \\ h(r_f), & \text{если } x = var(r_f) \text{ and } b = 1. \end{cases}$$

Применение $APPLY$ – алгоритма к $OBDD$ выполняется следующим образом. Каждый шаг вычислений определяется корневыми вершинами графов-аргументов. Пусть функции f и g представлены $OBDD$, корни которых r_f и r_g соответственно. В том случае, когда r_f и r_g конечные вершины-листья, они обозначаются константой. Рекурсия заканчивается и получаем вершину, которую обозначаем этой константой.

Если какая-нибудь из вершин r_f или r_g не являются конечными, то выбираем переменную x , которая связывает эти вершины. Выбор такой переменной выполняется по правилу:

$$x = \min(var(r_f), var(r_g)).$$

$OBDD$ для функций $f|_{x \leftarrow 0} (op)g|_{x \leftarrow 0}$ и $f|_{x \leftarrow 1} (op)g|_{x \leftarrow 1}$ вычисляются рекурсивно для сужения функций f и g для значения 0 и для значения 1 соответственно.

В случае, когда одна из вершин графов-аргументов является листком и представляет доминирующее значение (1 для операции $+$ и 0 для операции \cdot) вызов рекурсивной процедуры не нужен, результатом является вершина, обозначенная доминирующим значением.

Для исключения повторных рекурсивных вызовов для одной и той же пары вершин структуру данных организуют в виде хеш-таблицы для сохранения уже построенных пар. При этом вершины представляют собой ключ, при помощи которого в этой таблице находятся пара вершин и построенная вершина-результат для этой пары. При существовании такой хеш-таблицы начало вычислений начинается с проверки для двух аргументов u и v , есть или нет пара с ключом $key(u, v)$ в таблице. Если такая пара уже существует, то результатом будет построенная вершина, которая отвечает этой паре. Если не существует такой пары, то в таблицу записывается пара вершин (u, v) с ключом $key(u, v)$ и выполняются вычисления, описанные выше для пары (u, v) , и после окончания вычислений результат записывается в хеш-таблицу с тем же ключом.

Каждый шаг вычислений определяет вершину в строящемся графе. Для того, чтобы сгенерировать редуцированный граф непосредственно, при каждом шаге вычислений необходимо избежать возникновения новой вершины, что достигается путём использования соответствующих правил преобразований *OBDD*.

2. ФУНКЦИОНИРУЮЩИЕ СХЕМЫ

Согласно результатам представленных в [3] работа схемы Диффи-Хелмана моделируется СП представленной на рисунке 1.

Эта СП имеет конечные множества S и T – инвариантов [3], что позволяет по данной СП построить соответствующую конечную транзитивную систему (ТС), граф которой представлен на рисунке 2.

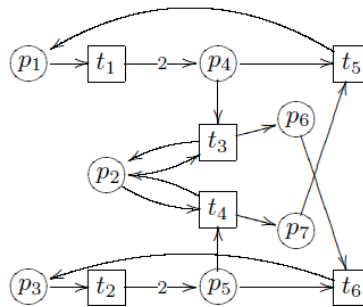


Рис. 1. СП для схемы Диффи-Хеллмана

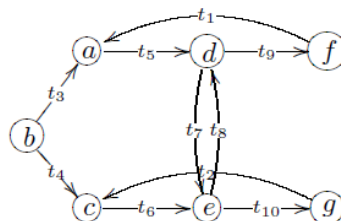


Рис. 2. ТС для схемы Диффи-Хеллмана

Полученная (ТС) представляет собой четверку $A = (S = \{a, b, c, d, e, f, g\}, T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}\}, f, g)$, где S – множество состояний, T – множество переходов, f и g – два отображения из T в S , ставящие в соответствие каждому переходу t из T два состояния $f(t)$ и $g(t)$ – соответственно начало и конец перехода t . Зададим функции $f(t)$ и $g(t)$ с помощью таблицы 1.

Имея множество состояний S ТС и учитывая таблицу переходов, получим, что построенная ТС есть конечный инициальный бинарный X – автомат (КА), реализующий схему Диффи-Хеллмана (Рис. 3).

Таблица 1

1	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}
f	f	g	b	b	a	c	d	e	d	e
g	a	c	a	c	d	e	e	d	f	g

Далее, полученный конечный X – автомат представляется редуцированной $OBDD$, изображенной на рисунке 4.

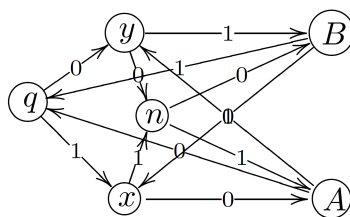


Рис. 3. КА для схемы Диффи-Хеллмана

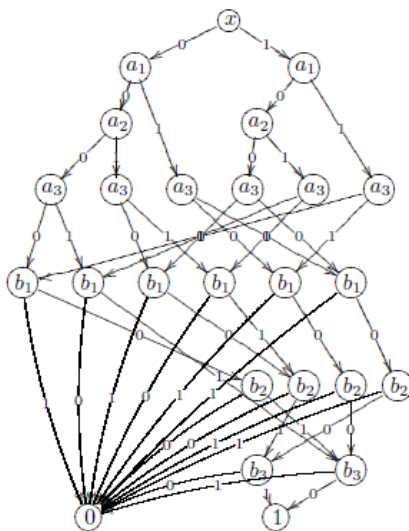


Рис. 4. OBDD представление для схемы Диффи-Хеллмана

Проведя исследования для криптографической схемы RSA , аналогичные исследованиям схемы Диффи-Хеллмана, подробно описанные в [3], получаем модель схемы RSA в виде СП (рисунок 5). Затем, проводим формальный анализ свойств модели на наличие S и T – инвариантов, строим соответствующую ТС (таблица 2, рисунок 6), трансформируем ее в КА (рисунок 7) и строим редуцированную $OBDD$ (рисунок 8). На каждом этапе выясняются и проверяются свойства, рассматриваемой алгоритмической схемы.

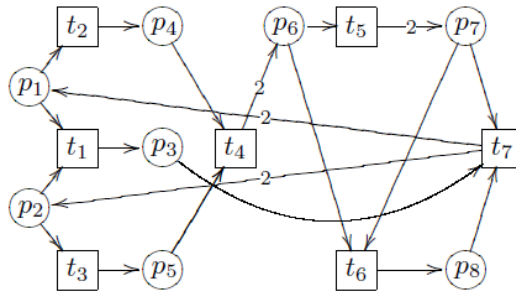


Рис. 5. СП для схемы RSA

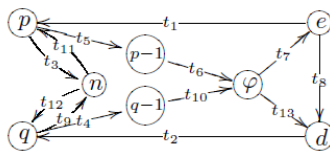


Рис. 6. ТС для схемы RSA

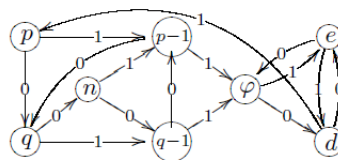


Рис. 7. КА для схемы RSA

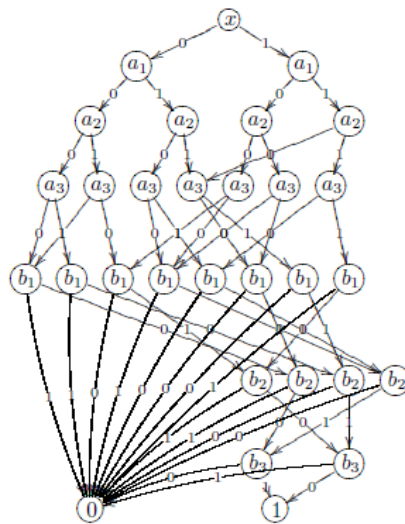


Рис. 8. OBDD представление для схемы RSA

Табличное представление ТС, соответствующей СП схемы *RSA*:

2	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9	t_{10}	t_{11}	t_{12}	t_{13}
f	e	d	p	q	p	$p-1$	φ	e	q	$q-1$	n	n	φ
g	p	q	n	$q-1$	$p-1$	φ	e	d	n	φ	p	q	d

3. *APPLY* – ОПЕРАЦИЯ ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ СХЕМ

Выполнение *APPLY* – операции для построения *OBDD* для операции $((op) \in \{+, \cdot\})$, применительно к булевым функциям, сконструированных согласно отношениям R_f относительно кодировки состояний соответствующих X – автоматов, отражающих соответственно работу схем Диффи-Хелмана и *RSA*, дает результирующий граф, который после применения правил упрощения для *OBDD* может быть переведет в конечный результирующий X – автомат. Использование операции \cdot или $+$ отражает либо последовательный характер работы единого ресурса алгоритмических схем, либо параллельное выполнение. В данной работе демонстрируется результат операции «и». Результирующая *OBDD* представляется двенадцати уровневый графом. Применив к нему правила редуцирования, получили *OBDD*, изображенную на рисунке 9 (дуги ведущие в листок 0 не указаны, чтобы не загромождать рисунок).

Данная *OBDD* может быть представлена в виде конечного инициального X – автомата A , насчитывающего 31 состояние.

Алфавит входных символов представляется множеством $X = 0, 1$. Подмножество $F \subseteq A$ состоит из 15 состояний, называемых заключительными или финальными. Функция переходов $f : A \times X \rightarrow A$ задается при помощи таблицы, которая в данной работе не приводится в связи с громоздкостью. Полученный X – автомат не является детерминированным.

Используя алгоритм детерминизации, получим детерминированный инициальный X – автомата, построенный по *OBDD APPLY* – операции двух алгоритмических, граф которого представлен на рисунке 10. Поскольку в полученном детерминированном автомате состояния A_4 и A_5 эквивалентны, можно построить минимальный ДКА, граф которого представлен на рисунке 11.

Выводы

В работе предложенный метод моделирования реактивных систем продемонстрирован для моделирования единого ресурса алгоритмических схем. Метод позволил

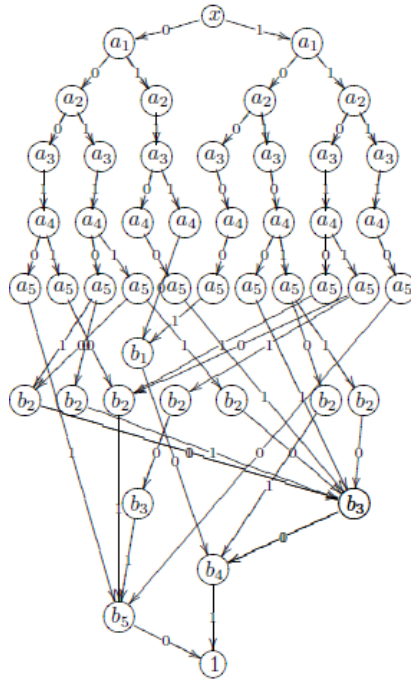


Рис. 9. Результирующая OBDD после *APPLY* – операции схемы RSA и Диффи-Хелмана

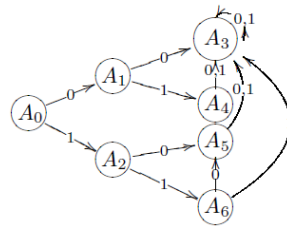


Рис. 10. Граф ДКА, результирующей *OBDD APPLY* – операции двух функционирующих схем

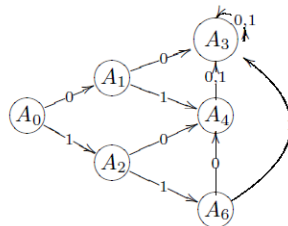


Рис. 11. Граф минимального ДКА, результирующей *OBDD APPLY* – операции двух функционирующих схем

совместить различные функционирующие схемы в один работающий комплекс. При этом показана реализация возможности как параллельного, так и последовательного соединения исходных компонент единого ресурса алгоритмических схем, за счет выполнения процедуры сложения или умножения графов, реализующих исходные алгоритмические схемы и используемых для спецификации поведения алгоритмических схем. Предлагаемый метод позволил построить модель единого ресурса алгоритмических схем, организованную до результирующего конечного автомата, реализующего работу всего работающего комплекса.

Получение результирующего конечного автомата сложной системы дает возможность исследовать свойства сложной системы в комплексе. Например, устанавливать такие важные свойства системы как свойства взаимного исключения (mutex) и справедливости (fairness).

Предложенный метод является полностью автоматическим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Котов В. Е. Сети Петри / В.Е. Котов. – М.: Наука, 1984.
2. Bryant R. Symbolic Boolean Manipulation with Ordered Binary Decision Diagrams / Bryant R. // School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburg. – 1992. – 34 p.
3. Лукьянова Е. А. Об одном процессе верификации алгоритмических схем / Е.А. Лукьянова, А.В. Дереза // International conference "Intelligent Informations Procesing". ИП-8, Cyprus, Parhos. – 2010. – С. 299-302.
4. Чугаенко А. В. О реализации TSS алгоритма / А.В. Чугаенко // Управляющие системы и машины. – 2007. – № 3. – С. 26-32.
5. Кривый С. Л. Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях / С.Л. Кривый // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №2. – С. 3-17

Статья поступила в редакцию 03.05.2011

УДК 004.925.8, 004.272.2

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСА ЗАДАЧ В D-ВИЗУАЛИЗАЦИИ

© Терещенко В. Н., Зубарев В. А.

КИЕВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО

ФАКУЛЬТЕТ КИБЕРНЕТИКИ

ул. Владимирская, 64, Киев, 01601, Украина

E-MAIL: v_ter@ukr.net, Vova-Odessa@narod.ru

Abstract. The paper is devoted to the development of effective approaches to solving problems of the construction of visual models in the space of E^d . We propose a new paradigm of creating algorithmic environment for solving complex interrelated geometric problems - generalized parallel-recursive algorithm using a set of efficient parallel procedures of implementation. As the basis of the generalized algorithm, we took a strategy of "divide and rule" which allows efficient use of parallel computing at each step. We obtained an improved efficiency of the solution as separate tasks, and their combination. In addition, we have determined estimates the time complexity for the developed procedures and have executed implementation.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка проблемы. Графическое моделирование является одним из эффективных современных способов исследования и анализа сложных динамических процессов и явлений в науке и технике. В частности, это актуально для моделирования физических и механических процессов, которые происходят при высоких температурах нагревания твердого и жидкого тела, графического рендеринга, моделирование критических процессов реального времени, и других сложных динамических процессов и явлений. Современный высокотехнологический уровень науки и техники ставит новые проблемы и определяет направления исследований относительно разработки новых и модификации существующих эффективных методов и алгоритмов. В основе этого лежат новые парадигмы и направления разработки такие, как параллельные и распределенные вычисления, а также архитектурные особенности новейших вычислительных систем.

Анализ последних исследований и публикаций. К задачам геометрического моделирования можно отнести исследование целевых объектов познания по их модели, построение и изучение моделей реально существующих предметов, процессов или явлений, а также создание моделей новых и еще не изученных явлений. Геометрическая модель – определенный объект, природа которого отображает главные, с точки

зрения поставленной задачи, пространственно-геометрические свойства его моделирования. К таким свойствам можно отнести расположение объекта в пространстве, его форма, внутренняя структура, и др. При построении модели для описания всего комплекса свойств необходимо решать одновременно целую совокупность взаимосвязанных геометрических задач.

Достаточно полно изучен двумерный случай. Но более сложными и важными на практике являются задачи для больших измерений. И здесь существует много открытых и не решенных проблем, одной из которых является построение единого общего решения для целого комплекса взаимосвязанных задач. В большинстве случаев, даже притом, что каждая отдельная задача имеет эффективный алгоритм, в совокупности не всегда дают желаемую эффективную реализацию. В основном это связано с не соответствием структур данных и отсутствием связи между входными данными и результатами вычислений задач, что затрудняет возможность взаимодействия между процедурами алгоритмов и не дает минимального времени решения такого класса задач. Поэтому, необходима разработка универсального инструмента, который имел бы общие средства для эффективного решения всего комплекса взаимосвязанных геометрических и прикладных задач. Другими словами, мы должны выбрать стратегию, которая использует общие средства реализации: структуры данных, отдельные этапы алгоритмов, процедуры и некоторые их шаги, а также способы представления результатов. И одной из таких стратегий может быть использование параллельных алгоритмов.

На сегодняшний день разработано много эффективных параллельных алгоритмов решения отдельных задач вычислительной геометрии. Так, в работе [1] описаны эффективные алгоритмы, с использованием схемы «распределяй и властвуй», решения задач построения выпуклой оболочки для 2-х и 3-х мерных пространств с оценкой сложности $O(\log N)$ и $O(\log^3 N)$, соответственно, а также построения диаграммы Вороного ($O(\log^2 N)$). В этой же работе представлен достаточно глубокий анализ других эффективных алгоритмов решения задач пересечение отрезков, триангуляции полигонов, оптимизации ($O(\log N)$). В работах М. Т. Гудриха, М. Дж. Атталеха, Р. Коле, Н. М. Амато, Д. З. Чена и других авторов [2-7] получены улучшенные результаты решения, выше указанных задач, для различных моделей вычислений (CREW, EREW) и для высших размерностей ($d \geq 4$). Ряд статей посвящен общим параллельным методам, которые применимы к решению отдельных задач вычислительной геометрии [8-11]. Но после анализа непосредственной реализации многих из этих алгоритмов были выявлены некоторые проблемы, которые не были авторами учтены. В частности, проблемы возникают при анализе границ выпуклых

оболочек, когда звенья границ имеют количество точек большее, чем размерность целевого пространства. В тоже время, идеи, предложенные в работах [1, 4-6, 12, 13] дают нам представление о структуре необходимой геометрической модели в многомерных пространствах, и вообще путь развития и построения необходимых стратегий построения моделей. Особенно следует отметить работу М. Шеймоса и Д. Хоея, которые впервые в своей работе [14] использовали стратегию «разделяй и властвуй» при построении выпуклой оболочки для случая трехмерного пространства. Они получили наилучшую оценку $O(N \log N)$ для однопроцессорной машины. Также необходимо упомянуть работу Т. Чена [15], в которой он элегантно реализовал их идею.

Нерешенные проблемы. При решении целого комплекса задач на одном и том же множестве данных использование отдельных эффективных алгоритмов в общем случае не приносит желаемой эффективности. Дело в том, что каждый алгоритм нуждается в собственной предварительной обработке и создании структуры данных, а также процедур реализации, что не дает минимального времени решения такого класса задач. Поэтому необходимо было выбрать такую стратегию, которая бы позволяла получить самую эффективную реализацию. Учитывая отмеченные особенности и то, что большинство задач вычислительной геометрии имеет внутренний параллелизм и предусматривает рекурсивную природу реализации, наиболее подходящей стратегией, на наш взгляд, может быть та, в основе которой лежит параллельно-рекурсивный алгоритм, использующий технику «разделяй и властвуй». Здесь этапы предварительной обработки и разбиения множества будут общими для всего комплекса задач, а на этапе слияния предлагается использовать общую для всех задач структуру данных – *взвешенную сцепляемую очередь*. Кроме того, результаты отдельных этапов некоторых процедур, будут использоваться другими процедурами, что обеспечивает высокую эффективность.

Предметом исследования являются проблемы, задачи и алгоритмы геометрического моделирования в пространствах большой размерности.

Объектом исследования является применение параллельных вычислений в задачах геометрического моделирования и решения набора взаимосвязанных задач вычислительной геометрии на одном и том же множестве входных данных.

Цель и задачи исследования. Целью исследования является поиск подходов, которые позволяют разработать простую и, в тоже время, эффективную алгоритмическую среду для одновременного решения целого комплекса взаимосвязанных задач вычислительной геометрии в евклидовых d -мерных пространствах. Для решения

этой проблемы необходимо разработать обобщенный параллельно-рекурсивный алгоритм, использующий общие алгоритмические инструменты и структуры данных, а также соответствующий набор процедур реализации.

1. ПАРАЛЛЕЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ

Поскольку нашей целью есть создание алгоритмической среды для реализации комплекса задач, за общую стратегию построения решения, мы взяли схему «разделяй и властвуй». Эта стратегия позволяет нам построить эффективный обобщенный параллельно-рекурсивный алгоритм на уровне управления и использования общей структуры данных, что открывает возможность эффективной разработки не только на машинах с общей памятью, но и с распределенной. Кроме того, выделение и решение задач на подзадачах позволит при необходимости эффективно обмениваться уже полученными результатами между отдельными задачами, что уменьшает алгоритмическую нагрузку на них.

Общая схема. Весь процесс вычисления можно изобразить следующим образом: предобработка, разбиение множества точек на равномошные подмножества (рекурсивный спуск), решение комплекса задач на подмножествах, начиная с элементарных, и слияние результатов при возвращении к исходному множеству.

Так как предварительная обработка и шаг разбиения, общие для всего комплекса задач, то мы опишем лишь шаг слияния на примере задачи построения выпуклой оболочки. Процедуры слияния для задач построения триангуляции и диаграммы Вороного аналогичные и отличаются лишь деталями.

1.1. Алгоритм построения процедуры слияния выпуклых оболочек. Алгоритм слияния можно схематически разделить на 3 этапа: построение опорных граней моста, удаление лишних вершин и граней, окончательное построение граней моста.

Этап 1. Построение опорных граней моста, которые соединяют две оболочки.

1. Выбираем внутреннюю точку p . Пусть это будет точка, которая лежит в серединной плоскости, разделяющей взаимно выпуклые части двух выпуклых оболочек.

2. Находим первую опорную грань. Берем первую точку левой выпуклой оболочки и первую точку правой. На этих точках и векторах b_2, b_{n-1} базиса B пространства E^d строим плоскость. В качестве положительного направления вектора нормали выбираем тот, полуплоскость которого содержит точку p . Перебираем соседей точки первого выпуклого множества. Если новая точка вместе с правой образует плоскость, относительно которой предыдущая точка вместе с точкой p будет лежать в одной полуплоскости, вместо первой точки берем вновь найденную. Повторяем этот шаг до тех пор, пока можно найти такую точку.

3. Аналогично для следующей грани.

4. Повторяем предыдущие два шага до тех пор, пока мы не сможем изменить ни одну из точек. Таким образом, мы имеем уже 2 точки, принадлежащие определенной плоскости на выпуклой оболочке. Дальше, нам необходимо найти другие $d - 2$ точки. Для этого исключаем из базиса вспомогательной плоскости по одному вектору и перебираем соседей текущих точек. Если текущая точка лежит по разные стороны от текущего кандидата и центральной точки, переписываем текущего кандидата на новую точку. Первого кандидата выбираем автоматически в качестве первого соседа. В результате получаем грань выпуклой оболочки.

5. Для найденной грани перебираем все ее ребра и для каждого ребра, концы которого принадлежат разным оболочкам, из соседних точек ребра находим такую, относительно которой все другие точки лежат в одной полуплоскости с p .

- а) Если найденной грани нет в списке уже прибавленных граней к выпуклой оболочке, добавляем ее и выполняем пункт 5.
- б) Если найдено определенное подмножество точек, которые являются кандидатами на грань на плоскости, но для этого подмножества еще не выполняется пункт 5, то триангулируем это множество по условию принадлежности каждой грани триангуляции опорной грани (дальше «мост»). Каждую полученную грань добавляем к «мосту» и выполняем пункт 5 для нее. Берется начальное ребро из грани, которую проверяем, формируется плоскость с этой гранью и вектором нормали к плоскости, в которой это все строится. Среди точек текущего множества, находящихся по разные стороны относительно плоскости с точками, уже включенными в мост, находим точку с минимальным углом к этой плоскости. При этом рассматриваются только те точки, которые находятся слева и справа, а также смежные с текущими точками.
- в) Иначе поиск прекращаем. Когда поиск прекращен для всех граней, переходим к следующему пункту.

6. Найденное множество и является мостом между оболочками.

Этап 2. Удаление вершин с гранями, которые принадлежат «внутренней части» оболочек подмножеств, и не принадлежат результирующей оболочке.

1. Возвращаемся к центральной точке p_1 , которую использовали для объединения дочерних множеств с первой. Сначала перебираем точки моста на левой оболочке, а затем – все грани, которым принадлежит эта точка. Для каждой грани проверяем, лежит ли точка p_1 в одной полуплоскости с точками максимума и минимума по каждой координате второй оболочки. Если нет, и все точки грани принадлежат мосту, то

просто удаляем эту грань. Если же какая-то точка не принадлежит мосту, то запускаем шаг 2 (такой вызов будет единственен). После проверки всех ребер, переходим к шагу 3.

2. Отмечаем точку как удаленную из оболочки и рекурсивно запускаем этот шаг для всех соседей, которые не принадлежат мосту. На шаге рекурсивного подъема удаляем все ребра и грани, которые выходят из этой точки.

3. Выполняем шаги 1-3 для другой оболочки.

Этап 3. Грани моста добавляем к выпуклым оболочкам и получаем выпуклую оболочку общую для всего множества.

Теорема 1. *Выпуклую оболочку на множестве S из N точек в Евклидовом d -мерном пространстве $E^d (d > 2)$ можно построить параллельно-рекурсивным алгоритмом с использованием q процессоров ($q \leq N$) за время $O(\log(N) / (\max(2, \log(q) + 1) d(K/2 + dK/\max(1, q - \log(q)))))$, (где K — количество вершин выпуклой оболочки), с ускорением процедуры слияния $R = \log(N) / \max(2, \log(q) + 1)$.*

Доказательство. Доказательство теоремы выводится из анализа сложности основных этапов алгоритма. Для двумерного случая эта оценка будет $O(\log N / \min(2, \log(q) + 1)K)$. Поскольку, количество точек моста всегда 2 на каждом из подмножеств. \square

1.2. Особенности построения процедур слияния для триангуляции и диаграммы Вороного. Задача триангуляции на ограниченном множестве точек достаточно изучена и для ее решения существует ряд эффективных последовательных алгоритмов. Здесь следует отметить работы Скворцова и, в частности роботу [16], в которой предложено несколько быстрых алгоритмов триангуляции. В данной работе предлагается процедура триангуляции для рассматриваемого параллельного алгоритма в случае асимптотически больших множеств точек (или множеств точек представляемых структурированными объектами).

Легко доказать, что триангуляция в Евклидовом d -мерном пространстве — это тоже самое, что выпуклая оболочка в пространстве $d + 1$. Для этого нужно расширить пространство размерности d до $d + 1$, а точки заданного множества S необходимо поместить на $(d + 1)$ -мерный параболоид, где $d + 1$ координата каждой точки определяется простым соотношением $x_{d+1} = x_1^2 + \dots + x_d^2$. Далее, необходимо построить выпуклую оболочку для полученных точек, и спроектировать обратно на d -мерное пространство. Полученная нижняя часть оболочки будет искомым триангуляцией.

Теорема 2. Триангуляцию на множестве S из N точек в Евклидовом d -мерном пространстве E^d ($d > 2$) можно построить параллельно-рекурсивным алгоритмом с использованием q процессоров ($q \leq N$) за время $O(\log(N) / \max(2, \log(q) + 1) * d * K / (\max(k, 1, q - \log(q))))$, (K – количество вершин выпуклой оболочки), с ускорением процедуры слияния $R = \log(N) / \max(2, \log(q) + 1)$.

Доказательство. Предложенный метод позволяет значительно улучшить суммарную сложность, заменив в оценке для классического решения N на K . Кроме того, при кажущейся одинаковой эффективности, мы выигрываем на значительно меньшем значении коэффициента комплексности оценки в последнем случае (то есть $O(N) = k_2 N$, $k_2 = const$, $k_2 \ll k_1$, где k_2 – коэффициент триангуляции, k_1 – коэффициент построения оболочки). Этот факт очевиден, достаточно сравнить соответствующие шаги выполнения в обоих случаях. Еще одно преимущество такой реализации в том, что не нужно создавать новый массив точек для триангуляции, все можно реализовать на базе основных, на которых строим выпуклую оболочку.

Как и в случае с триангуляцией, для построения диаграммы Вороного используются на основных этапах построения процедуры слияния результаты предыдущих задач: триангуляции и выпуклой оболочки. Нас здесь больше интересует решение, вытекающее из построения триангуляции. В отличие с триангуляцией, здесь не нужна перестройка в полном объеме. Достаточно получить триангуляцию в пространстве той же самой размерности и на ее основе построить диаграмму Вороного. В таблице 1 приведен общий анализ оценок сложности для рассмотренных задач. \square

Таблица 1. Общий анализ эффективности алгоритма

Алгоритм	1 процессор	Q процессоров
Предобработка	$O(N \log N)$	$O(\log N / \max(\log(Q) + 1, 2) * N)$
Выпуклая оболочка	$O(\log N d^2 K)$	$O(\log(N) / (\max(2, \log(Q) + 1) * d * (K/2 + dK / \max(K, 1, Q - \log(Q))))))$
Триангуляция	$O(\log N * d * K)$	$O(\log(N) / \max(2, \log(Q) + 1) * d * K / (\max(k, 1, Q - \log(Q))))$
Диаграмма Вороного	$O(N * d^2)$	$O(N * d * 2 / \max(Q, N))$
Суммарная	$O(N(d^2 \log K + \log N))$	$O(\text{предобработка} + \text{построение оболочки})$

Из сравнительного анализа оценок следует что, для всех задач, достигается высокая эффективность, за исключением предобработки. Важно отметить, что предложенный алгоритм, в общем, способен эффективно использовать количество процессоров даже большее чем N . Это достигается благодаря, *во-первых*, использованию процедур слияния, построенных единым способом, что позволяет выполнять ряд расчетов независимо и, *во-вторых*, наличие нескольких задач позволяет получить дополнительное распараллеливание на межзадачном уровне (пока решается определенная стадия одной из текущих задач, другие могут выполнять следующие стадии).

2. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Для распараллеливания алгоритма реализована система управления процессами, которая совместима как с системами, которые работают с общей памятью, так и распределенной. Более сложным по структуре и реализации является второй случай. Там особого выбора нет, система использует MPI на низком уровне. Для первого случая было решено разработать свой механизм управления, но так, чтобы интерфейсы управления в обоих случаях были похожими, для обеспечения максимальной простоты перехода от одной парадигмы к другой. Необходимо также отметить, что эффективность использования функциональности реализации лежит на разработчике в рамках используемой им парадигмы. Кроме этого для «последовательной части» функциональности имеется возможность создавать виртуальные процессоры, которые будут псевдопараллельно нагружать определенный процессор.

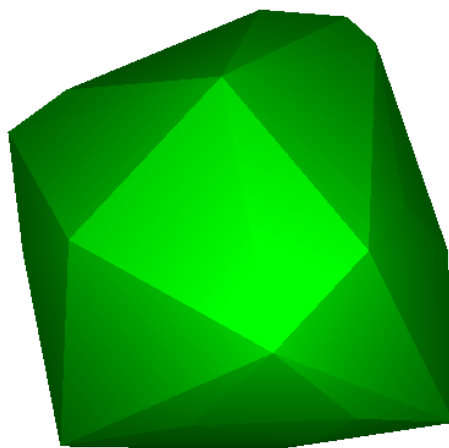


Рис. 1. Выпуклая оболочка и триангуляция для точек, равномерно распределенных точек в кубе.

На этапе предварительной обработки нужно выполнить начальную обработку входных данных. В нашем случае это лишь сортировка точек. В работах [17-18] предложены эффективные параллельные алгоритмы сортировки. Для реализации разработанного алгоритма мы выбрали сортировку слиянием. Этот алгоритм простой и показывает хорошие результаты на больших объемах данных. Он имеет меньшее ускорение на большом количестве процессоров, но не требовательный к архитектуре памяти. Был проведенный анализ производительности работы разработанного алгоритма и сравнения его с существующими последовательными реализациями. Вычислительная система реализации алгоритма исследовалась для множества точек от 10^5 по 10^6 с шагом 10^5 . На рис. 1 представлены результаты построения выпуклой оболочки и триангуляции с помощью предложенного алгоритма.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

1. *Разработан параллельно-рекурсивный алгоритм построения комплекса взаимосвязанных задач вычислительной геометрии (выпуклой оболочки, триангуляции, диаграммы Вороного и других задач) для пространств произвольной размерности.*

2. *Получена улучшенная эффективность решения, как отдельных задач, так и их совокупности. Установлена эффективность алгоритма и предложена его практическая реализация для построения выпуклой оболочки и триангуляции в 3-мерном пространстве.*

3. *Характерной чертой практической реализации предложенного подхода является то, что разработанный алгоритм позволяет одновременно решать как разные шаги одной процедуры задачи на многих процессорах, так и разные процедуры в одном узле алгоритма с помощью технологии MPI.*

4. *Особенность разработанного алгоритма заключается в том, что предобработка и процесс разбиения множества точек являются общими для решения рассматриваемого множества задач; отличаться будут лишь процедуры на этапе слияния.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aggarwal A. Parallel computational geometry / Aggarwal A., Chazelle B., Guibas L. [and others] // *Algorithmica*. – 1988. – Vol. 3. – P. 293-327.
2. Atallah M.J. Cascading divide-and-conquer: A technique for designing parallel algorithms / Atallah M.J., Cole R., Goodrich M.T. // *SIAM J. Comput.* – 1989. – Vol. 18. – P. 499-532.
3. Cole R. Optimal parallel algorithms for polygon and point-set problems / Cole R., Goodrich M.T. // *Algorithmica*. – 1992. – Vol. 7. – P. 3-23.

4. Amato N.M. Parallel algorithms for higher-dimensional convex hulls / Amato N.M., Goodrich M.T., Ramos E.A. // In Proc. 35th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci. – 1994. – P. 683-694.
5. Chen D. Efficient geometric algorithms on the EREW PRAM / Chen D. // IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. – 1995. – Vol. 6. – P. 41-47.
6. Chen D. A fast parallel algorithm for finding the convex hull of a sorted point set / Chen D., Berkman O., Schieber B. [and others] // Internat. J. Comput. Geom. Appl. – 1996. – Vol. 6. – P. 231-242.
7. Goodman J.E. Handbook of Discrete and Computational Geometry / Goodman J.E., O'Rourke J. – N.Y.: Chapman and Hall/CRC Press, 2004. – 1497 p.
8. Akl S.G. Parallel Computational Geometry / Akl S.G., Lyons K.A. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1993. – 224 p.
9. JaJa J. An Introduction to Parallel Algorithms / JaJa J. – Amsterdam: Addison-Wesley, 1992. – 566 p.
10. Van Leeuwen J. Handbook of Theoretical Computer Science / Van Leeuwen J. – Amsterdam: Elsevier/The MIT Press, – 1990. – 1294 p.
11. Reif J.H. Synthesis of Parallel Algorithms / Reif J.H. – San Mateo: Morgan Kaufmann, 1993. – 1011 p.
12. Ghose M. Fast randomized parallel methods for planar convex hull construction / M. Ghose and M. Goodrich // Comput. Geom. Theory Appl. – 1997. – Vol. 7: P. 219-236.
13. Preparata F.P. Computational Geometry: An introduction / F.P. Preparata and M.I. Shamos. – Berlin: Springer-Verlag, 1985.
14. Shamos M.I. Closest-point problems / M.I. Shamos, D. Hoey // In Proc. 16th IEEE Sympos. Found. Comput., 1975. – P. 151-162.
15. Chan T. M. A minimalist's Implementation 3-d Divide-and-Conquer Convex Hull Algorithm / T. M. Chan. – Waterloo: School Computer Science University. – 2003. – 12 p. Режим доступа: <http://www.cs.uwaterloo.ca/~tmchan/ch3d/ch3d.pdf>
16. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение / А.В. Скворцов. – Томск: из-во Том. ун-та. – 2002. – 128 с.
17. J.H. Reif. Optimal parallel randomized algorithms for three-dimensional convex hulls and related problems / J.H. Reif and S. Sen // SIAM J. Comput., 21:466-485, 1992.
18. Cole R. Parallel merge sort / R. Cole // Proc. 27th IEEE FOCS Symposium (1986), P. 511-516.

Статья поступила в редакцию 28.01.2011

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ «ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ – БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ»

© Газиев Э. Л.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА

E-MAIL: *gilmor2004@mail.ru*

Abstract. In this article the problem on small motions and eigenoscillations of a system "ideal fluid – barotropic gas" with taking into account gravity and surface tension is considered. The theorem on spectrum structure and eigenfunctions properties was proved.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи о малых движениях и собственных колебаниях гидросистем исследовались многими авторами, в частности, Н.Д. Копачевским, С.Г. Крейном, И.А. Луковским, А.Д. Мышкисом, Б.М. Вронским, А.Н. Тимохой и др. Так, в работах [1, 2] рассмотрены задачи о малых движениях и собственных колебаниях капиллярных и вязких жидкостей, а в [3] изучена динамика системы, состоящей из идеальной жидкости и газа с постоянной плотностью. Исследование малых движений и собственных колебаний системы, состоящей из идеальной жидкости и баротропного газа с изменяемой плотностью, является целью данной работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Начально-краевая задача. Рассмотрим гидродинамическую систему, состоящую из идеальной жидкости и сжимаемого газа, полностью заполняющих область $\Omega \in \mathbb{R}^3$ и находящуюся под действием гравитационного поля с ускорением \vec{g} , и будем учитывать силы поверхностного натяжения. Введем декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, неподвижно связанную с сосудом так, что $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где \vec{e}_i – орты осей Ox_i , $i = 1, 2, 3$.

Определение 1. Пусть a – скорость звука в газе. Будем называть газ баротропным, если в нем зависимость плотности $\rho(x)$ от давления $p(x)$ имеет вид

$$\nabla p(x) = a^2 \nabla \rho(x). \quad (1)$$

Пусть в состоянии равновесия жидкость с постоянной плотностью ρ_1 занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, ограниченную частью S_1 твердой стенки сосуда $S := \partial\Omega$ и равновесной поверхностью Γ . Баротропный газ находится над жидкостью, занимает область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, ограниченную поверхностью Γ и частью $S_2 = S \setminus S_1$ и имеет плотность $\rho_{2,0}(x) = \rho_2^0 \exp(-gx_3/a^2)$ (см. [4], с. 41). Будем считать поверхности липшицевыми, в частности, кусочно гладкими с ненулевыми внутренними и внешними двугранными углами между гладкими частями границ $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2$.

Тогда малые движения гидросистемы описываются следующими уравнениями и граничными условиями

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\nabla p_1 + \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2)$$

$$\rho_{2,0} \frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{e}_3 + \rho_{2,0} \vec{f}_2, \quad \rho_2 + \operatorname{div}(\rho_{2,0} \vec{w}_2) = 0 \quad \text{в } \Omega_2, \quad (3)$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } S_1, \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } S_2, \quad \vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} =: \zeta \quad \text{на } \Gamma, \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (4)$$

$$p_1 - p_2 = \mathcal{L}_\sigma \zeta := -\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a_\sigma(x) \zeta \quad \text{на } \Gamma, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0, \quad x \in \partial\Gamma, \quad (5)$$

$$a_\sigma(x) := -\sigma(k_1^2 + k_2^2) + g(\rho_1 - \rho_{2,0}) \cos(\vec{n}, \hat{e}_3), \quad \chi := (\bar{k} - k_\Gamma \cos \alpha) / \sin \alpha, \quad (6)$$

а также начальными условиями

$$\begin{aligned} \vec{w}_1(0, x) &= \vec{w}_1^{(0)}(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_1(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{w}_1^{(1)}(x), \quad x \in \Omega_1, \\ \vec{w}_2(0, x) &= \vec{w}_2^{(0)}(x), \quad \frac{\partial \vec{w}_2(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \vec{w}_2^{(1)}(x), \quad x \in \Omega_2, \\ \rho_2(0, x) &= \rho_2^{(0)}(x), \quad x \in \Omega_2, \quad \zeta(0, x) = \vec{w}_1^{(1)}(x) \cdot \vec{n} = \vec{w}_2^{(1)}(x) \cdot \vec{n} =: \zeta^{(0)}(x) \quad \text{на } \Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\vec{w}_i(t, x)$ – смещения частиц жидкости и газа от равновесных значений, $p_i(t, x)$ – динамические давления, $\rho_2(t, x)$ – динамическая плотность, $\vec{f}_i(t, x)$ – внешние силы; \vec{n} – вектор внешней нормали к границе области Ω_1 ; $\vec{\nu}$ – нормаль к $\partial\Gamma$ в плоскости, касательной к Γ ; α – угол смачивания на $\partial\Gamma$; \bar{k} и k_Γ – кривизны сечений поверхностей Γ и S_1 плоскостью, перпендикулярной к $\partial\Gamma$; Δ_Γ – оператор Лапласа-Бельтрами, действующий на поверхности Γ .

1.2. Функциональные пространства, переход к скалярной задаче. Введем гильбертовы пространства: $\vec{L}_2(\Omega_1)$ и $\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0})$ со скалярными произведениями $(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int_{\Omega_1} \vec{u}(x) \cdot \vec{v}(x) d\Omega_1$ и $(\vec{u}, \vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0})} = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \vec{u}(x) \vec{v}(x) d\Omega_2$ соответственно; а также $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением $(\zeta, \eta)_0 := \int_{\Gamma} \zeta(x) \overline{\eta(x)} d\Gamma$ и его подпространство $H_0 := L_{2,\Gamma} = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$.

Из определения 1 и вида $\rho_{2,0}$ следует, что $-\nabla p_2 - \rho_2 g \vec{e}_3 = -\rho_{2,0} \nabla(\rho_2/\rho_{2,0})$, и имеет место ортогональное разложение функционального пространства

$$\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0}) = \vec{G}(\Omega_2, \rho_{2,0}) \oplus \vec{J}_0(\Omega_2, \rho_{2,0}), \quad (8)$$

$$\vec{G}(\Omega_2, \rho_{2,0}) := \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0}) : \vec{u} = \nabla \varphi, \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \varphi d\Omega_2 = 0 \right\}, \quad (9)$$

$$\vec{J}_0(\Omega_2, \rho_{2,0}) := \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0}) : \operatorname{div}(\rho_{2,0} \vec{v}) = 0 \text{ (в } \Omega_2), \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_2) \right\}. \quad (10)$$

Известно ортогональное разложение функционального пространства $\vec{L}_2(\Omega_1)$ (см. [1], с. 106, а также [3], с. 9)

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad (11)$$

$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \left\{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \operatorname{div} \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega_1), \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1) \right\}, \quad (12)$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1) := \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{u} = \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \right\}, \quad (13)$$

$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \left\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega_1) : \vec{w} = \nabla \Phi, \Delta \Phi = 0 \text{ (в } \Omega_1), \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \int_{\Gamma} \Phi d\Gamma = 0 \right\}. \quad (14)$$

Будем считать, что смещения частиц жидкости и газа при каждом t принадлежат пространствам $\vec{L}_2(\Omega_1)$ и $\vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0})$ соответственно. Применяя метод ортогонального проектирования к задаче (2) – (7) на подпространства разложений (11) – (14), (8) – (10), получаем задачи Коши в подпространствах $\vec{J}_0(\Omega_2, \rho_{2,0})$, $\vec{J}_0(\Omega_1)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_1)$, решаемые непосредственно. Потому в дальнейшем рассматриваем эволюционную задачу лишь для потенциалов смещений $\nabla \Phi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ и $\nabla \Phi_2 \in \vec{G}(\Omega_2, \rho_{2,0})$:

$$\Delta \Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta_0 \Phi_2 + F_2(t, x), \quad \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2) \text{ (в } \Omega_2), \quad \nabla F_2 := P_{2,G} \vec{f}_2, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (17)$$

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} F_2 d\Omega_2 = 0,$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_{\Gamma}(\rho_{2,0} \Phi_2) + B_{\sigma} \zeta = \rho_1 F_1 - P_{\Gamma}(\rho_{2,0} F_2) \quad (\text{на } \Gamma), \quad B_{\sigma} := P_{\Gamma} \mathcal{L}_{\sigma} P_{\Gamma}, \quad (18)$$

$$\nabla \Phi_1(0, x) = \nabla \Phi_1^0(x) = P_{1,h,S_1} \vec{w}_1^{(0)}(x), \quad \nabla \Phi_2(0, x) = \nabla \Phi_2^0(x) = P_{2,G} \vec{w}_2^{(0)}(x), \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_1(0, x) = \nabla \Phi_1^1(x) = P_{1,h,S_1} \vec{w}_1^{(1)}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_2(0, x) = \nabla \Phi_2^1(x) = P_{2,G} \vec{w}_2^{(1)}(x). \quad (20)$$

Здесь использованы ортопроекторы: $P_\Gamma \zeta := \zeta - |\Gamma|^{-1} \int_\Gamma \zeta d\Gamma$, действующий из $L_2(\Gamma)$ в $L_{2,\Gamma}$, $P_{1,h,S_1} : \vec{L}_2(\Omega_1) \rightarrow \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, $P_{2,G} : \vec{L}_2(\Omega_2, \rho_{2,0}) \rightarrow \vec{G}(\Omega_2, \rho_{2,0})$.

Рассмотрим оператор B_σ с областью определения

$$\mathcal{D}(B_\sigma) := \left\{ \zeta \in H^2(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} : \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} + \chi \zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma) \right\}, \quad (21)$$

и квадратичной формой

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 = (\zeta, \zeta)_{B_\sigma} = \int_\Gamma [\sigma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 + a_\sigma |\zeta|^2] d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \chi |\zeta|^2 d\Gamma.$$

По схеме [2], с. 205, учитывая вид $\rho_{2,0}$ и a_σ , получен следующий факт.

Лемма 1. *Если граница $\partial\Gamma$ является достаточно гладкой, то оператор B_σ с областью определения (21) в пространстве $L_{2,\Gamma}$ является самосопряженным и ограниченным снизу, т.е. существует $\gamma \in \mathbb{R}$, такое что $(\zeta, \zeta)_{B_\sigma} \geq \gamma \|\zeta\|_0^2$, $\forall \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma)$.*

1.3. Спектральная задача. В случае собственных колебаний гидросистемы, когда внешние силы отсутствуют и потенциалы смещений зависят от t по закону $\Phi_i(t, x) = \Phi_i(x) \exp(i\omega t)$, $i = 1, 2$, имеем спектральную задачу

$$\Delta \Phi_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad (22)$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda a^{-2} \Phi_2 \text{ (в } \Omega_2), \quad \lambda := \omega^2, \quad (23)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \text{ (на } \Gamma), \quad (24)$$

$$B_\sigma \zeta = \lambda P_\Gamma (\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) \text{ (на } \Gamma), \quad (25)$$

$$\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_\Gamma \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \lambda \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0. \quad (26)$$

Здесь $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ – неизвестные амплитудные функции. Искомый спектральный параметр λ входит как в уравнение (23), так и граничное условие (25).

Определение 2. Будем говорить, что гидросистема статически устойчива в линейном приближении, если оператор B_σ положительно определен, т.е.

$$(B_\sigma \zeta, \zeta)_0 \geq c \|\zeta\|_0^2, \quad c > 0, \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_\sigma). \quad (27)$$

□

Рассмотрим случай статической устойчивости и введем энергетическое пространство оператора B_σ .

Лемма 2. Энергетическая норма $\|\zeta\|_{B_\sigma}^2 := \int_\Gamma [\sigma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 + a_\sigma |\zeta|^2] d\Gamma + \oint_{\partial\Gamma} \chi |\zeta|^2 ds$ эквивалентна норме $\|\zeta\|_\nabla^2 := \int_\Gamma |\nabla_\Gamma \zeta|^2 d\Gamma$, $\int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0$, и эквивалентна стандартной норме $\|\zeta\|_{1,\Gamma}^2 := \int_\Gamma [|\nabla_\Gamma \zeta|^2 + |\zeta|^2] d\Gamma$ пространства $H^1(\Gamma)$. \square

Поскольку $H^1(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, из леммы 2 следует, что оператор B_σ положительно определенный ($B_\sigma \gg 0$), имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k(B_\sigma)\}_{k=1}^\infty$, его собственные значения имеют конечную кратность, предельная точка спектра расположена на бесконечности. Система собственных элементов B_σ составляет ортогональный базис в $L_{2,\Gamma}$ и $H_{B_\sigma} = H^1(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma} = \mathcal{D}(B_\sigma^{1/2})$. Более того, обратный оператор B_σ^{-1} компактен и положителен в пространстве $L_{2,\Gamma}$.

Лемма 3. Если удовлетворяется условие (27), то собственные значения λ , соответствующие решениям $\{\Phi_1(x), \Phi_2(x)\}$, являются значениями функционала

$$F_1(\Phi_1; \Phi_2) := \frac{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2}{a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \left\| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) \right\|_0^2}. \quad (28)$$

Доказательство. Умножим уравнение (22) на $\rho_1 \Phi_1$, проинтегрируем по области Ω_1 , применим формулу Грина и, используя граничные условия (24), получим

$$0 = -\rho_1 \int_{\Omega_1} \Phi_1 \Delta \Phi_1 d\Omega_1 = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla \Phi_1|^2 d\Omega_1 - \rho_1 \int_\Gamma \Phi_1 \zeta d\Gamma. \quad (29)$$

Умножим уравнение (23) на $\rho_{2,0} \Phi_2$ и, выполняя аналогичные преобразования, имеем

$$\lambda a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Phi_2|^2 d\Omega_2 = - \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 \Delta_0 \Phi_2 d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla \Phi_2|^2 d\Omega_2 + \int_\Gamma \rho_{2,0} \Phi_2 \zeta d\Gamma. \quad (30)$$

Поскольку оператор $B_\sigma \gg 0$, то существует оператор $B_\sigma^{-1} > 0$. Действуя им слева на (25), находим $\zeta = \lambda B_\sigma^{-1} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2)$. Умножим это равенство на $(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2)$, проинтегрируем по поверхности Γ , воспользуемся вторым условием в (26) и получим

$$\int_\Gamma (\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) \zeta d\Gamma = \lambda \left\| B_\sigma^{-1/2} P_\Gamma(\rho_1 \Phi_1 - \rho_{2,0} \Phi_2) \right\|_0^2. \quad (31)$$

Подставляя (31) в сумму тождеств (29) – (30), приходим к соотношению (28). \square

В случае статической устойчивости имеет место и динамическая устойчивость, так как в силу леммы 3 собственные значения неотрицательны, а частоты собственных колебаний вещественны, что соответствует свойству консервативности системы.

(Нулевое собственное значение соответствует решению $\Phi_i(x) = \text{const}$, $i = 1, 2$, т.е. нулевым потенциалам смещений \vec{w}_1 , \vec{w}_2 .)

2. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

2.1. Вспомогательные краевые задачи. Введем следующие гильбертовы пространства скалярных функций.

1⁰. $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2, \rho_{2,0})$ со скалярными произведениями $(u, v)_{L_2(\Omega_1)} := \int_{\Omega_1} u(x)\overline{v(x)} d\Omega_1$, $(u, v)_{L_2(\Omega_2, \rho_{2,0})} := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}u(x)\overline{v(x)} d\Omega_2$.

2⁰. $H^1(\Omega_1)$ с нормой $\|u\|_{1, \Omega_1}^2 := \int_{\Omega_1} |\nabla u|^2 d\Omega_1 + \left| \int_{\Gamma} u d\Gamma \right|^2$, эквивалентной стандартной норме пространства Соболева $H^1(\Omega_1)$.

3⁰. $H^1(\Omega_2, \rho_{2,0})$ с нормой $\|u\|_{1, \Omega_2, \rho_{2,0}}^2 := \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla u|^2 d\Omega_2 + \left| \int_{\Omega_2} \rho_{2,0}u d\Omega_2 \right|^2$, эквивалентной стандартной норме пространства Соболева $H^1(\Omega_2)$ в силу вида $\rho_{2,0}$.

4⁰. Оснащение $H_+ \subset H_0 \subset H_-$, где $H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0$, $H_- = (H_+)^*$, H_- является дуальным пространством к H_+ в терминах скалярного произведения $(\cdot, \cdot)_0$.

5⁰. $H_{\Omega_1}^1 \subset H^1(\Omega_1)$ – подпространство пространства $H^1(\Omega_1)$, для элементов которого удовлетворяется условие $\int_{\Gamma} u d\Gamma = 0$, $u \in H^1(\Omega_1)$.

6⁰. $H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1 \subset H^1(\Omega_2, \rho_{2,0})$ – подпространство пространства $H^1(\Omega_2, \rho_{2,0})$, для элементов которого удовлетворяется условие $\int_{\Omega_2} \rho_{2,0}u d\Omega_2 = 0$, $u \in H^1(\Omega_2, \rho_{2,0})$.

Следуя [3], сформулируем вспомогательные краевые задачи для задачи (22)–(26).

Задача 1. Дана функция $\zeta(x)$, $x \in \Gamma$. Найти слабое решение $\Phi_1(x) \in H_{\Omega_1}^1$ задачи

$$\Delta \Phi_1(x) = 0 \text{ (в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \zeta \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0.$$

Задача 2. Дана функция $\zeta(x)$, $x \in \Gamma$. Найти слабое решение $\Phi_{22}(x) \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ задачи

$$\Delta_0 \Phi_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial n} = -\zeta \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{22} d\Omega_2 = 0.$$

Задача 3. Дана функция $f(x)$, $x \in \Omega_2$. Найти слабое решение $\Phi_{21}(x) \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ задачи

$$-\Delta_0 \Phi_{21} = f \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial n} = 0 \text{ (на } \Gamma), \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} f d\Omega_2 = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{21} d\Omega_2 = 0.$$

Можно проверить, что классические решения задач 1 – 3 являются и их слабыми решениями.

Известно (см. [2], с. 106), что задача 1 имеет единственное слабое решение $\Phi_1 \in H_{\Omega_1}^1$, $\Phi_1 = T_1\zeta$ тогда и только тогда, когда $\zeta \in H_- = (H_+)^* = \{\zeta \in H^{-1/2}(\Gamma) : \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0\}$, причем $T_1 : H_- \rightarrow H_{\Omega_1}^1$ — линейный ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный оператор на множестве значений $\mathcal{R}(T_1) \subset H_{\Omega_1}^1$ оператора T_1 .

При выполнении того же условия однозначно разрешима и задача 2, т.е. $\Phi_{22} = T_2\zeta \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$, причем линейный ограниченный оператор $T_2 : H_- \rightarrow H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ имеет ограниченный обратный на множестве $\mathcal{R}(T_2) \subset H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$.

Задача 3 имеет единственное слабое решение $\Phi_{21} = A^{-1}f \in H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$ ([2], с. 97) тогда и только тогда, когда $f(x) \in (H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1)^*$. Здесь $A^{-1} : (H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1)^* \rightarrow H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$, $A : H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1 \rightarrow (H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1)^*$.

Далее рассмотрим сужение оператора A так, что $\mathcal{R}(A) = L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}$. Тогда A — самосопряженный положительно определенный неограниченный оператор, имеющий компактный обратный оператор, т.е. $A^{-1} : L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \rightarrow L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_{\infty}(L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}})$. Оператор $A : \mathcal{D}(A) \subset L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \rightarrow L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}$ имеет дискретный спектр $\{\lambda_k(A)\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ и

$$\lambda_k(A) = \left(\frac{|\Omega_2|}{6\pi^2}\right)^{-2/3} k^{2/3}[1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty, \quad \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3. \quad (32)$$

Отсюда следует, что оператор A^{-1} принадлежит классу компактных операторов \mathfrak{S}_p для $p > 3/2$. Кроме того, $\mathcal{D}(A) \subset H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1$.

2.2. Переход к операторной задаче в гильбертовом пространстве.

Пусть $\Phi_1(x)$ — слабое решение задачи 1. Тогда согласно изложенному выше $\Phi_1|_{\Omega_1} = T_1\zeta$, $\gamma_1\Phi_1 = \gamma_1T_1\zeta =: C_1\zeta$.

Представим $\Phi_2(x)$ в виде $\Phi_2(x) = \Phi_{21}(x) + \Phi_{22}(x)$, где $\Phi_{22}(x)$ — слабое решение задачи 2, а $\Phi_{21}(x)$ — слабое решение задачи 3 для $f = \lambda a^{-2}\Phi_2$.

Тогда $\Phi_{21}|_{\Omega_2} = A^{-1}(\lambda a^{-2}\Phi_2)$, $\Phi_{22}|_{\Omega_2} = T_2\zeta$, $\gamma_2\Phi_{22} = \gamma_2T_2\zeta =: -C_2\zeta$.

Обозначая $\Phi_{21}|_{\Omega_2} =: \eta(x)$, приводим спектральную задачу (22) – (26) к виду

$$A\eta = \lambda a^{-2}\Phi_2 = \lambda a^{-2}(\Phi_{21} + \Phi_{22}) = \lambda a^{-2}(\eta + T_2\zeta), \quad \eta \in \mathcal{D}(A), \quad (33)$$

$$B_{\sigma}\zeta = \lambda(P_{\Gamma}(\rho_1C_1\zeta + \rho_{2,0}C_2\zeta) - P_{\Gamma}(\rho_{2,0}\gamma_2\eta)), \quad \zeta \in \mathcal{D}(B_{\sigma}). \quad (34)$$

Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}(\Omega) := L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} \oplus H_0$, $L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}} := L_2(\Omega_2, \rho_{2,0}) \ominus \{1\}$, элементов вида $z = (\eta; \zeta)^t$ с нормой $\|z\|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 := \|\eta\|_{L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}}^2 + \|\zeta\|_0^2$. Будем рассматривать элементы $\eta \in \mathcal{D}(A) \subset H_{\Omega_2, \rho_{2,0}}^1 \subset L_{2, \Omega_2, \rho_{2,0}}$, $\zeta \in \mathcal{D}(B_{\sigma}) \subset L_{2, \Gamma}$. Осуществляя замену $\psi := aA\eta$, $\varphi := B_{\sigma}^{1/2}\zeta$, приводим уравнения (33) – (34) к виду

$$y = \lambda \mathcal{A}y, \quad y \in \mathcal{H}(\Omega), \quad (35)$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} a^{-2}A^{-1} & a^{-1}A^{-1/2}(A^{1/2}T_2)B_\sigma^{-1/2} \\ -a^{-1}B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2})A^{-1/2} & B_\sigma^{-1/2}CB_\sigma^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$C := P_\Gamma(\rho_1C_1 + \rho_{2,0}C_2)P_\Gamma, \quad y := (\psi; \varphi)^t. \quad (37)$$

Таким образом, спектральная задача (22) – (26) эквивалентна задаче (35) – (37) о нахождении собственных чисел λ и собственных элементов y операторной матрицы \mathcal{A} , которая действует в ортогональной сумме гильбертовых пространств.

2.3. Свойства решений спектральной задачи. Введем в пространстве H_- норму, эквивалентную стандартной: $\|\zeta\|_{H_-}^2 := \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2$, где Φ_1 и Φ_{22} – слабые решения задач 1 и 2 соответственно.

Лемма 4. *Оператор $C = P_\Gamma(\rho_1C_1 + \rho_{2,0}C_2)P_\Gamma : H_0 \rightarrow H_0$ положительный и компактный. Его расширение на $H_- \supset H_0$ является изометрическим оператором, отображающим H_- на H_+ . При этом $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_+$, а после расширения $\mathcal{D}(C^{-1/2}) = H_0$, $\mathcal{R}(C^{-1/2}) = H_-$.*

Доказательство. Оно аналогично [2], с. 193 – 194. \square

Лемма 5. *Операторы $A^{1/2}T_2 : H_0 \rightarrow L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}$ и $-P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2}) : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow H_0$ являются взаимно сопряженными компактными операторами.*

Доказательство. Из определения слабого решения задачи 2 имеем

$$(\Psi, \Phi_{22})_{1,\Omega_2\rho_{2,0}} = (A^{1/2}\Psi, A^{1/2}\Phi_{22})_{L_2(\Omega_2,\rho_{2,0})} = -(\rho_{2,0}\gamma_2\Psi, \zeta)_0.$$

Осуществляя замену $A^{1/2}\Psi = v$ и учитывая, что $\Phi_{22} = T_2\zeta$, получим

$$(A^{1/2}T_2\zeta, v)_{L_2(\Omega_2,\rho_{2,0})} = -\left(\zeta, \rho_{2,0}\gamma_2A_2^{-1/2}v\right)_0 = -(P_\Gamma\zeta, \rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2}v)_0 = (\zeta, -P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2}v))_0,$$

для $\forall \zeta \in H_0$, $\forall v \in L_2(\Omega_2, \rho_{2,0})$, откуда следует, что $(A^{1/2}T_2)^* = -P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2})$ и ограниченность обоих операторов. Но оператор $\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2} : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow L_2(\Gamma)$ компактен. В самом деле, оператор $A^{-1/2} : L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \rightarrow H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1$ ограничен, а оператор следа γ_2 ограниченно действует из $H_{\Omega_2,\rho_{2,0}}^1$ в $H_+ = H^{1/2}(\Gamma) \cap H_0$ и H_+ компактно вложено в H_0 . \square

Теорема 1. *Оператор \mathcal{A} , действующий в пространстве $\mathcal{H}(\Omega)$, является положительным самосопряженным компактным оператором.*

Доказательство. В силу неравенства (27) оператор B_σ имеет ограниченный обратный оператор $B_\sigma^{-1/2}$, действующий в H_0 . Поскольку A^{-1} , $A^{-1/2}$, $A^{1/2}T_2$, $-P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2})$ и C (см. леммы 4 и 5) являются компактными операторами, то

все элементы операторной матрицы (36) являются компактными операторами. Проверим свойства положительности и самосопряженности оператора \mathcal{A} . Для произвольного $y = (\psi; \varphi)^t \in \mathcal{H}(\Omega)$ составим квадратичную форму оператора \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} &= a^{-2}(A^{-1}\psi, \psi)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} + a^{-1}(A^{-1/2}A^{1/2}T_2B_\sigma^{-1/2}\varphi, \psi)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} - \\ &- a^{-1}(B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1/2})A^{-1/2}\psi, \varphi)_0 + (B_\sigma^{-1/2}CB_\sigma^{-1/2}\varphi, \varphi)_0 = a^{-2}(A^{-1}\psi, \psi)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} + \\ &+ a^{-1}(T_2B_\sigma^{-1/2}\varphi, \psi)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} - a^{-1}(B_\sigma^{-1/2}P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2A^{-1})\psi, \varphi)_0 + (CB_\sigma^{-1/2}\varphi, B_\sigma^{-1/2}\varphi)_0 = \\ &= (\eta, A\eta)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} + (T_2\zeta, A\eta)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} - (P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2\eta), \zeta)_0 + (C\zeta, \zeta)_0, \end{aligned}$$

где

$$(C\zeta, \zeta)_0 = \rho_1(C_1\zeta, \zeta)_0 + (\rho_{2,0}C_2\zeta, \zeta)_0 = \rho_1(\gamma_1T_1\zeta, \zeta)_0 - (\rho_{2,0}\gamma_2T_2\zeta, \zeta)_0.$$

Учитывая, что $\rho_1(\gamma_1T_1\zeta, \zeta)_0 = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1$,

$$(\eta, A\eta)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{21}|^2 d\Omega_2, \quad (T_2\zeta, A\eta)_{L_2, \Omega_2, \rho_{2,0}} = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{22} \cdot \overline{\nabla\Phi_{21}} d\Omega_2,$$

$$-(P_\Gamma(\rho_{2,0}\gamma_2\eta), \zeta)_0 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{21} \cdot \overline{\nabla\Phi_{22}} d\Omega_2, \quad -(\rho_{2,0}\gamma_2T_2\zeta, \zeta)_0 = \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_{22}|^2 d\Omega_2,$$

получаем

$$(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} = \rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2 \geq 0, \quad (38)$$

где $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$. Следовательно, оператор $\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \geq 0$ является самосопряженным и неотрицательным. Если $(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)} = 0$, из (38) имеем $\Phi_1(x) \equiv c_1 = 0$; $\Phi_2(x) \equiv c_2 = 0$, следовательно, оператор \mathcal{A} является положительным. \square

Таким образом, спектральная задача (35) эквивалентна задаче на собственные значения компактного положительного оператора \mathcal{A} , а именно

$$\mathcal{A}y = \mu y, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad y \in \mathcal{H}(\Omega). \quad (39)$$

Теорема 2. 1^0 . Спектральная задача (22) – (26) имеет дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, состоящий из конечнократных собственных значений λ_k , расположенных на правой полуоси \mathbb{R}_+ с предельной точкой $\lambda = +\infty$.

2^0 . Собственные значения λ_k могут быть найдены как последовательные минимумы функционала (28) или функционала

$$F_2(\Phi_1; \Phi_2) = \frac{a^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Delta_0\Phi_2|^2 d\Omega_2 + (\zeta, \zeta)_{B_\sigma}}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2}. \quad (40)$$

Функционалы $F_1(\Phi_1; \Phi_2)$ и $F_2(\Phi_1; \Phi_2)$ рассматриваются на классе функций $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$, для которых удовлетворяются условия

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1), \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2), \quad \zeta := \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (41)$$

$$\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad \int_{\Gamma} \Phi_1 d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0.$$

3⁰. Собственные элементы $y_k = ((\Phi_{21})_k; \zeta_k)^t$, $k = 1, 2, \dots$ образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(\Omega) = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus H_0$ и выполняются следующие условия ортогональности:

$$(\mathcal{A}y_k, y_j)_{\mathcal{H}(\Omega)} = \rho_1 \int_{\Omega_1} \nabla\Phi_{1k} \cdot \nabla\bar{\Phi}_{1j} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla\Phi_{2k} \cdot \nabla\bar{\Phi}_{2j} d\Omega_2 = \delta_{kj}, \quad (42)$$

$$(y_k, y_j)_{\mathcal{H}(\Omega)} = a^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Delta_0\Phi_{2k} \cdot \overline{\Delta_0\Phi_{2j}} d\Omega_2 + \left(\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \frac{\partial\Phi_{1j}}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \right)_{B_\sigma} = \lambda_k \delta_{kj}, \quad (43)$$

$$(B_\sigma^{-1}P_\Gamma(\rho_1\Phi_{1k} - \rho_{2,0}\Phi_{2k}), P_\Gamma(\rho_1\Phi_{1j} - \rho_{2,0}\Phi_{2j}))_0 + a^{-2} \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_{2k} \cdot \bar{\Phi}_{2j} d\Omega_2 = \lambda_k^{-1} \delta_{kj}. \quad (44)$$

Доказательство. Утверждение 1⁰ следует из теоремы 1, поскольку (39) — спектральная задача для компактного положительного оператора \mathcal{A} и $\lambda = \mu^{-1}$. Утверждение 2⁰ является следствием теоремы Гильберта–Шмидта (т.к. система собственных элементов $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ образует ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}(\Omega) = L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}} \oplus H_0$, а система элементов $\{(\eta_k, \zeta_k)\}^t = \{a(A^{-1}(\Phi_{21})_k, B_\sigma^{-1/2}\zeta_k)\}^t$ получается из $\{y_k\}_{k=1}^\infty$ действием на компоненты элементов y_k ограниченных операторов). Учитывая замены $y = (\psi; \varphi)^t \in \mathcal{H}(\Omega)$ и (38), для собственных значений задачи (35) имеем выражение

$$\frac{(y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)}}{(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}(\Omega)}} = \frac{a^2 \|A\Phi_{21}\|_{L_{2,\Omega_2,\rho_{2,0}}}^2 + \|B_\sigma^{1/2}\zeta\|_0^2}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2} = \frac{a^2 \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\Delta_0\Phi_2|^2 d\Omega_2 + (\zeta, \zeta)_{B_\sigma}}{\rho_1 \int_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \rho_{2,0} |\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2}.$$

Используя разложения решений Φ_1 и $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$ по ортогональным базисам $\{\Phi_{mk}\}_{k=1}^\infty$, $\Phi_{mk} \cdot \Phi_{mj} = \delta_{kj}$, $k \neq j$; $m = 1, 2$, получаем условие (42). Тогда условие (43) следует из (39) и (42). Затем из (28), учитывая (42), получаем формулу (44). \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о малых движениях и собственных колебаниях гидродинамической системы, состоящей из идеальной жидкости и баротропного газа, плотность которого зависит от вертикальной координаты. Доказана теорема о структуре спектра и свойствах собственных функций. Полученные результаты можно использовать для обоснования разрешимости начально-краевой задачи о малых колебаниях гидросистемы.

Автор выражает благодарность Н.Д. Копачевскому за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуи Кан. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
2. Kopachevsky N.D. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self – adjoint Problems for an Ideal Fluid / N.D. Kopachevsky, S.G. Krein. – Basel: Birkhauser Verlag, 2001. – 384p.
3. Kopachevsky N.D. Small motions and eigenoscillations of a system "fluid – gas" in a bounded region / N.D. Kopachevsky, M. Padula, V.M. Vronsky // Ученые записки ТНУ. – Сер. «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». – 2007. – Т. 20(59), № 1. – С. 3–55.
4. Газиев Э.Л. Задача статики гидросистемы «жидкость – баротропный газ» в условиях, близких к невесомости / Э.Л. Газиев // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 39-47.

Статья поступила в редакцию 25.01.2011

УДК 517.9: 519.7

ДОСЛІДЖЕННЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНИХ ВЛАСНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ СТРУННОГО ХРЕСТА

© Крилова А. С.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ИМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ

вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна

E-MAIL: *krylovaas@univ.kiev.ua*

Abstract. The spectral problem on a string cross with the terms of the boundary conditions of q -periodicity, the contact conditions, balance condition of tension in the overall site is considered. The calculation results gave out the complex-valued eigenfunctions. For two-dimensional and three-dimensional cross string we have two-dimensional and one-dimensional eigenspaces. Their structure depend on parameter q .

ВСТУП

Останнім часом моделювання в природознавстві породило багато задач на вивчення складних систем. Дослідження процесів складних систем, які можна представити у вигляді набору одномірних континуумів, що взаємодіють тільки через кінці, призводить до розгляду звичайних диференціальних рівнянь другого порядку на відрізку. Такі системи, зазвичай, моделюють на просторову сітку, решітку, або, ще як її називають, геометричний граф [1]. Для аналізу поведінки усієї складної системи будемо відокремлювати періодично-повторювальну частину. Для нашої задачі будемо використовувати модель «струнний хрес». Наступним етапом розв'язання задачі на хресті ми вбачаємо в усередненні результатів на всю сітку та решітку методами [2, 3].

Деякі висновки будемо робити, спираючись на вже проведений аналіз крайових періодичних та a -періодичних спектральних задач на одиничному струнному хресті [4], де було отримано дійснозначні власні функції. Для періодичної спектральної задачі отримано власні значення $\lambda = 4n^2\pi^2$ та відповідні власні функції на двовимірному одиничному струнному хресті, які формують тривимірний власний простір. Аналогічні результати отримано на тривимірному струнному хресті. В цьому випадку власні функції формують чотирьохвимірний власний простір. Для a -періодичної спектральної задачі отримано власні значення $\lambda = (2n - 1)^2\pi^2$, яким відповідають також тривимірний власний простір на двовимірному одиничному струнному хресті та чотирьохвимірний власний простір на тривимірному струнному хресті.

Таким чином в даній роботі розглядається задача знаходження усіх власних значень спектральної задачі $-u'' = \lambda u$ на струнному хресті, де функція u є комплекснозначна та задовольняє відповідним граничним умовам. З попередніх досліджень [4], де власні функції є дійсними, було зроблено висновок, що двовимірний струнний хрест, який розглядається як пучок з чотирьох струн, для даної задачі, еквівалентний струнному хресту, що складається з двох струн, які мають спільну середину, де вони зв'язані. Аналогічно будемо розглядати й тривимірний струнний хрест. Струни хреста будемо вважати однаковими однорідними натягнутими одиничної довжини, розташованими під прямим кутом відносно одна одної та такими, що мають одиничний натяг та щільність розподілу мас [1].

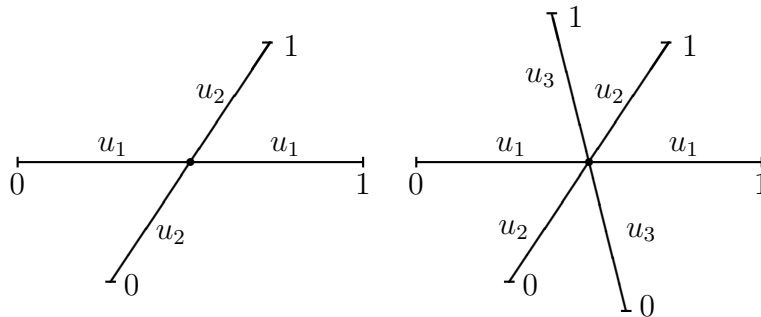


Рис.1. Двовимірний та тривимірний струнний хрест

1. ДВОВИМІРНИЙ ВИПАДОК

Розглянемо задачу на двовимірному струнному хресті. Оскільки розглядаються дві струни, то задача буде складатися з дослідження двох функцій u на двох координатних осях x_1 та x_2 відповідно (рис. 1). Тобто постановка задачі буде виглядати наступним чином

$$\begin{aligned} -u_1'' &= \lambda u_1, \\ -u_2'' &= \lambda u_2. \end{aligned} \quad (1)$$

З граничними умовами для $q \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} u_1(0) &= e^{i2\pi q} u_1(1), & u_2(0) &= e^{i2\pi q} u_2(1), \\ u_1'(0) &= e^{i2\pi q} u_1'(1), & u_2'(0) &= e^{i2\pi q} u_2'(1). \end{aligned} \quad (2)$$

Умовами зв'язки вузлів

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{1}{2}\right). \quad (3)$$

Умовами балансу натягу

$$u_1'\left(\frac{1}{2} + 0\right) - u_1'\left(\frac{1}{2} - 0\right) + u_2'\left(\frac{1}{2} + 0\right) - u_2'\left(\frac{1}{2} - 0\right) = 0. \quad (4)$$

Теорема 1. Нехай дана задача (1)-(4) на двовимірному струнному хресті з одиничними довжинами струн, тоді розв'язком будуть власні значення $\lambda = 4\pi^2(n - q)^2$, $n \in \mathbb{Z}$ та відповідні комплекснозначні власні функції:

(а) якщо $2q = 0$ та $2q = 1$, тоді

$$u_1 = Ae^{i2\pi(n-q)x_1} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = Ae^{i2\pi(n-q)x_2} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1];$$

(б) якщо $2q \notin \mathbb{Z}$, тоді

$$u_1 = Ae^{i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = Ae^{i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1];$$

де A, C - довільні константи.

Доведення. Загальні розв'язки задачі (1) вже відомі з теорії звичайних диференціальних рівнянь для простору комплекснозначних функцій [5]. Оскільки ми розглядаємо диференціальне рівняння другого порядку, то беремо двовірний розв'язок $u = Ae^{i\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-i\sqrt{\lambda}x}$ для кожної струни хреста.

Для знаходження власного значення розглянемо з початку граничні умови. З (2) маємо

$$\begin{aligned} A_1 + C_1 &= e^{i2\pi q} \left(A_1 e^{i\sqrt{\lambda}} + C_1 e^{-i\sqrt{\lambda}} \right), \\ A_2 + C_2 &= e^{i2\pi q} \left(A_2 e^{i\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

А також для граничних умов маємо

$$\begin{aligned} A_1 - C_1 &= e^{i2\pi q} \left(A_1 e^{i\sqrt{\lambda}} - C_1 e^{-i\sqrt{\lambda}} \right), \\ A_2 - C_2 &= e^{i2\pi q} \left(A_2 e^{i\sqrt{\lambda}} - C_2 e^{-i\sqrt{\lambda}} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Якщо розглянути умови (6), то маємо $A_1 = C_1 \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}}$ та $A_2 = C_2 \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}}$. Підставивши отримані вирази в умову контакту (3) $A_1 e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} + C_1 e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} = A_2 e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} + C_2 e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}}$, будемо мати наступний вираз

$$C_1 \left(e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}} + e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \right) = C_2 \left(e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}} + e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \right). \tag{7}$$

Розглянемо рівняння (5) та (6). Нехай $e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})} = 1$, тоді $\sqrt{\lambda} + 2\pi q = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тобто отримаємо власне значення $\lambda = 4\pi^2(n - q)^2$. Підставимо власне значення, наприклад у (5), з чого виходить $C_1 = C_1 e^{i(4\pi q - 2\pi n)}$. Отримана тотожність виконується або якщо $C_1 = 0$ або якщо $e^{i(4\pi q - 2\pi n)} = 1$. Якщо константа $C_1 \neq 0$, тоді

маємо $4\pi q = 2\pi(n + t)$, $n, t \in \mathbb{Z}$. Оскільки сума цілих чисел дає ціле число, то з проміжку $q \in [0, 1)$ для останньої нерівності маємо тільки два значення $2q = 0$ та $2q = \pi$, або в загальному випадку можемо записувати у вигляді $2q \in \mathbb{Z}$.

Для другого рівняння умови (5) маємо такі ж результати: або $C_2 = 0$ або $2q \in \mathbb{Z}$.

Якщо ж оберемо у (5) та (6) $e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})} = 1$, тоді отримаємо власне значення $\lambda = 4\pi^2(q - n)^2$. Для цього власного значення з (5) отримаємо $A_1 = A_1 e^{i(4\pi q - 2\pi n)}$. Отримана тотожність виконується або якщо $A_1 = 0$ або якщо $e^{i(4\pi q - 2\pi n)} = 1$. Тобто, якщо константа $A_1 \neq 0$, тоді маємо $2\pi q = \pi(n + t)$, $n, t \in \mathbb{Z}$. Оскільки сума цілих чисел дає ціле число, то з проміжку $q \in [0, 1)$ для останньої нерівності маємо тільки два значення $2q = 0$ та $2q = \pi$, або в загальному випадку можемо записувати у вигляді $2q \in \mathbb{Z}$.

Для другого рівняння умови (5) маємо такі ж результати: або $A_2 = 0$ або $2q \in \mathbb{Z}$.

Не важко перевірити, що перше власне значення приведе до тих самих власних функцій, що й друге. Тому будемо розглядати одне з них.

Знайдемо власні функції для власного значення $\lambda = 4\pi^2(q - n)^2$. Підставимо власне значення у вищезазначений вираз (7), з якого виливає $C_1 e^{-i\pi(q-n)} = C_2 e^{-i\pi(q-n)}$. Не важко побачити рівність констант $C_1 = C_2$ цього виразу. Позначимо ці константи через C .

Оскільки добуток експонент є неперервною функцією, то умова балансу натягу (4) виконується для власних функцій.

Розглянемо випадок, коли $2q \in \mathbb{Z}$, тобто $2q = 0$ та $2q = 1$. Підставимо отримані результати в теж саме рівняння зв'язки вузлів (3). Будемо мати для власного значення $\lambda = (2\pi q - 2\pi n)^2$

$$A_1 e^{i\frac{2\pi q - 2\pi n}{2}} + C e^{-i\frac{2\pi q - 2\pi n}{2}} = A_2 e^{i\frac{2\pi q - 2\pi n}{2}} + C e^{-i\frac{2\pi q - 2\pi n}{2}}.$$

Для $2q = 0$ маємо $A_1 e^{-i\pi n} + C e^{i\pi n} = A_2 e^{-i\pi n} + C e^{i\pi n}$, з чого отримуємо тотожність $(-1)^n(A_1 + C) = (-1)^n(A_2 + C)$, яка вірна тоді і тільки тоді, коли константи A_1 та A_2 рівні між собою. Позначимо їх через нову константу A .

Для $2q = 1$ маємо $A_1 e^{-i\frac{(2n-1)\pi}{2}} + C e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}} = A_2 e^{-i\frac{(2n-1)\pi}{2}} + C e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}}$, з чого отримуємо тотожність $(-1)^n i(A_1 - C) = (-1)^n i(A_2 - C)$, яка також доводить рівність констант A_1 та A_2 . Для цього випадку вводиться аналогічне позначення загальної для двох рівнянь константи A .

Тобто можемо записати загальне рівняння для випадків коли $2q = 0$ та $2q = 1$. Власному значенню $\lambda = 4\pi^2(q - n)^2$ відповідає система комплекснозначних власних

функцій

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{i2\pi(q-n)x_1} + Ce^{-i2\pi(q-n)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1], \\ u_2 &= Ae^{i2\pi(q-n)x_2} + Ce^{-i2\pi(q-n)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{8}$$

Для власного значення $\lambda = 4\pi^2(n - q)^2$, якщо винести знак «-» у показнику степеня власних функцій та переназвати довільні константи в системі (8), отримаємо таку систему власних функцій

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{i2\pi(n-q)x_1} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1], \\ u_2 &= Ae^{i2\pi(n-q)x_2} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Якщо ж $2q \notin \mathbb{Z}$ тоді $A_1 = 0$ та $A_2 = 0$, що вище вже описане. Тому маємо наступні власні функції, беручи до уваги попередні перетворення,

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1], \\ u_2 &= Ae^{i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1]. \end{aligned}$$

□

Тобто ми отримали для значень параметру q , що відповідає значенням 0 та $\frac{1}{2}$, двовимірні власні підпростори, а для всіх інших значень цього параметру з проміжку $[0, 1)$ власні підпростори мають одиничну розмірність.

2. ТРИВИМІРНИЙ ВИПАДОК

Аналогічним чином будемо розглядати задачу на тривимірному струнному хресті, що складається з трьох однорідно натягнутих струн одиничної довжини, які зв'язані у спільній точці (рис. 1). Розглянемо систему трьох диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} -u_1'' &= \lambda u_1, \\ -u_2'' &= \lambda u_2, \\ -u_3'' &= \lambda u_3. \end{aligned} \tag{9}$$

З граничними умовами для $q \in [0, 1)$

$$\begin{aligned} u_1(0) &= e^{i2\pi q} u_1(1), \quad u_2(0) = e^{i2\pi q} u_2(1), \quad u_3(0) = e^{i2\pi q} u_3(1), \\ u_1'(0) &= e^{i2\pi q} u_1'(1), \quad u_2'(0) = e^{i2\pi q} u_2'(1), \quad u_3'(0) = e^{i2\pi q} u_3'(1). \end{aligned} \tag{10}$$

Умовами зв'язки вузлів

$$u_1\left(\frac{1}{2}\right) = u_2\left(\frac{1}{2}\right) = u_3\left(\frac{1}{2}\right). \tag{11}$$

Умовами балансу натягу

$$u'_1\left(\frac{1}{2}+0\right) - u'_1\left(\frac{1}{2}-0\right) + u'_2\left(\frac{1}{2}+0\right) - u'_2\left(\frac{1}{2}-0\right) + u'_3\left(\frac{1}{2}+0\right) - u'_3\left(\frac{1}{2}-0\right) = 0. \quad (12)$$

Теорема 2. *Нехай дана задача (9)-(12) на тривимірному струнному хресті з одиничними довжинами струн, тоді розв'язком будуть власні значення $\lambda = 4\pi^2(n-q)^2$, $n \in \mathbb{Z}$ та відповідні комплекснозначні власні функції:*

(а) якщо $2q = 0$ та $2q = 1$, тоді

$$u_1 = Ae^{i2\pi(n-q)x_1} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = Ae^{i2\pi(n-q)x_2} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1],$$

$$u_3 = Ae^{i2\pi(n-q)x_3} + Ce^{-i2\pi(n-q)x_3}, \quad x_3 \in [0, 1];$$

(б) якщо $2q \notin \mathbb{Z}$, тоді

$$u_1 = Ae^{i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1],$$

$$u_2 = Ae^{i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1],$$

$$u_3 = Ae^{i2\pi(n-q)x_3}, \quad x_3 \in [0, 1];$$

де A, C – довільні константи.

Доведення. Будемо будувати доведення аналогічно до випадку двовимірного струнного хреста. З граничних умов (10) та умови зв'язки вузлів (11) витікає тотожність

$$\begin{aligned} C_1 \left(e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}} + e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \right) &= C_2 \left(e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}} + e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \right) = \\ &= C_3 \left(e^{i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \frac{1 - e^{i(2\pi q - \sqrt{\lambda})}}{1 - e^{i(2\pi q + \sqrt{\lambda})}} + e^{-i\frac{\sqrt{\lambda}}{2}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Оскільки в тотожності (13) один із множників усіх добутоків рівний та не нульовий, тоді можна говорити про рівність констант C_1, C_2 та C_3 , що будемо позначати як одну константу C .

Для знаходження власних значень цієї задачі розглянемо граничні умови (10). Як і в попередньому випадку двовимірного струнного хреста, отримаємо два власних значення $\lambda = 4\pi^2(q-n)^2$ та $\lambda = 4\pi^2(n-q)^2$, $n \in \mathbb{Z}$, що приводять до тих самих власних функцій, що й друге. Тому будемо розглядати одне з них, наприклад $\lambda = 4\pi^2(q-n)^2$.

Для цього власного значення як і в першій теоремі робимо висновок, що або $A_1 = 0$ або $2\pi q = \pi(n + t)$, $n, t \in \mathbb{Z}$. Оскільки $q \in [0, 1)$ для останньої нерівності маємо тільки два значення $2q = 0$ та $2q = 1$, або в загальному випадку можемо записувати у вигляді $2q \in \mathbb{Z}$.

Для другого та третього рівняння цієї умови маємо такі ж результати: $A_2 = 0$ або $2q \in \mathbb{Z}$ та $A_3 = 0$ або $2q \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо випадок, коли $2q \in \mathbb{Z}$, тобто $2q = 0$ та $2q = 1$. Підставимо отримані результати в теж саме рівняння зв'язки вузлів (11), з якого для обраного власного значення та для $2q = 0$ маємо $A_1 e^{-i\pi n} + C e^{i\pi n} = A_2 e^{-i\pi n} + C e^{i\pi n} = A_3 e^{-i\pi n} + C e^{i\pi n}$, з чого отримуємо тотожність $(-1)^n (A_1 + C) = (-1)^n (A_2 + C) = (-1)^n (A_3 + C)$, яка вірна тоді і тільки тоді, коли константи A_1 , A_2 та A_3 рівні між собою. Позначимо їх через нову константу A .

Для $2q = 1$ маємо $A_1 e^{-i\frac{(2n-1)\pi}{2}} + C e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}} = A_2 e^{-i\frac{(2n-1)\pi}{2}} + C e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}} = A_3 e^{-i\frac{(2n-1)\pi}{2}} + C e^{i\frac{(2n-1)\pi}{2}}$, з чого отримуємо тотожність $(-1)^n i (A_1 - C) = (-1)^n i (A_2 - C) = (-1)^n i (A_3 - C)$, яка також доводить рівність констант A_1 , A_2 та A_3 . Також вводимо аналогічне позначення загальної для трьох рівнянь константи A .

Оскільки добуток експонент є неперервною функцією, то умова балансу натягу (4) виконується для власних функцій.

Тобто можемо записати загальне рівняння для випадків коли $2q = 0$ та $2q = 1$. Як і для випадку двовимірного струнного хреста зробимо висновок для власного значення $\lambda = 2\pi^2(n - q)^2$, переназвавши довільні константи, якому відповідає система комплекснозначних власних функцій

$$\begin{aligned} u_1 &= A e^{i2\pi(n-q)x_1} + C e^{-i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1] \\ u_2 &= A e^{i2\pi(n-q)x_2} + C e^{-i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1] \\ u_3 &= A e^{i2\pi(n-q)x_3} + C e^{-i2\pi(n-q)x_3}, \quad x_3 \in [0, 1] \end{aligned}$$

Якщо ж $2q \notin \mathbb{Z}$ тоді $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ та $A_3 = 0$, що вище вже описане. Тому маємо наступні власні функції

$$\begin{aligned} u_1 &= A e^{i2\pi(n-q)x_1}, \quad x_1 \in [0, 1] \\ u_2 &= A e^{i2\pi(n-q)x_2}, \quad x_2 \in [0, 1] \\ u_3 &= A e^{i2\pi(n-q)x_3}, \quad x_3 \in [0, 1] \end{aligned}$$

□

ВИСНОВКИ

Таким чином в роботі отримано наступні результати: було доведено теореми о структурах власних підпросторів задачі (1)-(4) на одиничному двовимірному струнному хресті та задачі (9)-(12) на одиничному тривимірному струнному хресті; отримані аналогічні результати для комплекснозначних власних функцій, тобто для параметру q що дорівнює значенням 0 та $\frac{1}{2}$ маємо двовимірні власні підпростори а для всіх інших значень цього параметру з проміжку $[0, 1)$ маємо одновимірні власні підпростори.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Покорный Ю. В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 272 с.
2. Мазья В. Г. Осреднение разностных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами / В. Г. Мазья, А. С. Слуцкий // Seminar Analysis Operator equat. and numerical analysis 1986/87, Karl-Weierstrab-Institut für Mathematik, Berlin. – 1987. – С. 63-92
3. Сандраков Г. В. Принципы осреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами / Г. В. Сандраков // Матем. сб., 180:12 – 1989. – С. 1634-1679
4. Сандраков Г. В. Спектральна задача для фрагментів сіток та решіток / Г. В. Сандраков, А. С. Крилова // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – 4. – С. 125-130
5. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Пер. с нем. – 4-е изд., испр.] / Э. Камке. – М.: Наука. – 1971. – 576 с.

Статья поступила в редакцию 01.05.2011

Анашкин О. В. Критические случаи устойчивости в системах с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, О. В. Митько // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 5-14.

УДК 517.925.51

Розглядається задача про стійкість нульового розв'язку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу в критичному випадку. Запропоновано новий підхід дослідження таких задач, заснований на побудові розривної функції Ляпунова. Наведено приклад реалізації цього підходу в критичному випадку системи другого порядку з кубічною нелінійністю.

Рассматривается задача об устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени в критическом случае. Предложен новый подход исследования таких задач, основанный на построении разрывной функции Ляпунова. Приведен пример реализации этого подхода в критическом случае системы второго порядка с кубической нелинейностью.

Донской В. И. Информатика и информационные технологии – различающиеся направления университетского образования / В. И. Донской, А. С. Анафиев, В. Ф. Блыщик // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 15-26.

УДК 378.14

Склалося так, що на сьогодні актуальним виявилось збереження і розвиток досягнень української школи теоретичної інформатики. Одним з необхідних елементів рішення цієї задачі є зміцнення теоретичної інформатики як математичної дисципліни і її викладання в такому ключі в класичних університетах. Відстояти цю позицію – мета статті, що анотується.

Сложилось так, что на сегодняшний день актуальным оказалось сохранение и развитие достижений украинской школы теоретической информатики. Одним из необходимых элементов решения этой задачи является укрепление теоретической информатики как математической дисциплины и ее преподавание в таком ключе в классических университетах. Отстоять эту позицию – цель аннотируемой статьи.

Наконечний О. Г. Оптимальні гарантовані оцінки розв'язків параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами / О. Г. Наконечний, Л. В. Чухрай // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 27-41.

УДК 517.977.5

У даній роботі знайдено оптимальні гарантовані оцінки функціоналів від розв'язків параболічних рівнянь з розривними коефіцієнтами при похідній за спостереженнями за станом системи, що описуються цими рівняннями. При цьому вважається, що праві частини, початкові умови та похибки оцінювання точно невідомі, а відомі лише множини, яким вони належать. Встановлено, що знаходження оптимальних оцінок зводиться до розв'язку деяких систем інтегро-диференціальних рівнянь, що є однозначно розв'язними.

В данной работе найдены оптимальные гарантированные оценки функционалов от решений параболических уравнений с разрывными коэффициентами при производной по наблюдениям за состоянием системы, описываемые этими уравнениями. При этом считается, что правые части, начальные условия и погрешности оценивания точно неизвестны, а известны лишь множества, которым они принадлежат. Установлено, что нахождение оптимальных оценок сводится к решению некоторых систем интегро-дифференциальных уравнений, является однозначно разрешимыми.

Ємець О. О. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 43-50.

УДК 519.85

В статті поставлено і розв'язано задачу знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями. Побудовано математичну модель, викладений алгоритм її розв'язання. Розглянута задача є узагальненням задачі знаходження максимального потоку в мережі.

В статье поставлена и решена задача нахождения максимального потока в сети с дополнительными комбинаторными ограничениями. Построена математическая модель, изложен алгоритм ее решения. Рассмотренная задача является обобщением задачи нахождения максимального потока в сети.

Литвин О. М. 2D коефіцієнти Фур'є на класі диференційованих функцій та сплайн-інтерлінація / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 51-61.

УДК 621.391:517.518:510.52

В статті досліджуються кубатурні формули обчислення 2D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації на класі функцій, у яких $|f^{(r,0)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(0,r)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(r,r)}(x,y)| \leq \tilde{M}$, $r = 1, 2$. Інформація про функцію задана слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доводиться, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні похибки квадратурних формул.

В статье исследуются кубатурные формулы вычисления 2D коэффициентов Фурье с использованием интерликации на классе функций, у которых $|f^{(r,0)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(0,r)}(x,y)| \leq M$, $|f^{(r,r)}(x,y)| \leq \tilde{M}$, $r = 1, 2$. Информация о функции задана следами на системе взаимно-перпендикулярных прямых. Доказывается, что оценку погрешности кубатурной формулы можно выразить через соответствующие погрешности квадратурных формул.

Литвин О. М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О. М. Литвин, Ю. І. Першина // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 63-72.

УДК 519.6

У роботі пропонується загальних метод побудови кусково-білінійних інтерполяційних сплайнів, які можуть мати розриви першого роду на границях між прямокутними елементами зі сторонами, паралельними осям координат. Ці результати пропонується використовувати для наближення розривних функцій від двох змінних, які теж можуть мати (а можуть і не мати) розриви першого роду на вказаних лініях.

В работе предлагается общий метод построения кусочно-билинейных интерполяционных сплайнов, которые могут иметь разрывы первого рода на границах между

прямоугольными элементами со сторонами, параллельными осям координат. Эти результаты предлагается использовать для приближения разрывных функций от двух переменных, которые тоже могут иметь (а могут и не иметь) разрывы первого рода на указанных линиях.

Пічкур В. В. Про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов / В. В. Пічкур, М. С. Сасонкіна // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 73-80.

УДК 517.962.24

В роботі обґрунтовані твердження про неперервну залежність розв'язків дискретних включень від початкових умов в залежності від того, до якого класу багатозначних відображень належить права частина включення. Доведено, що у випадку ліпшицевої правої частини, для розв'язків має місце умова Ліпшиця відносно початкових умов.

В работе обоснованы утверждения о непрерывной зависимости решений дискретных включений от начальных условий в зависимости от того, к какому классу многозначных отображений принадлежит правая часть включения. Доказано, что в случае липшицевости правой части, для решений имеет место условие Липшица относительно начальных условий.

Щербина О. А. Алгоритмы упорядочения переменных в локальном элиминационном алгоритме / О. А. Щербина, А. В. Свириденко, // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 81-92.

УДК 519.68

У роботі розглянуто п'ять алгоритмів впорядкування змінних для рішення розріджених задач дискретної оптимізації за допомогою алгоритму несеріального динамічного програмування. У результаті проведеного обчислювального експерименту, по-перше, було зазначено, що для вирішення розріджених задач дискретної оптимізації, впорядкування змінних має значний вплив на час рішення задачі. Крім цього, було показано, що різні евристичні впорядкування найбільш ефективні для різних класів задач. І, нарешті, було відзначено, що евристичні MCS і MIN-FILL

показали найкращий результат для рішення задач дискретної оптимізації із запропонованих класів тестових задач.

В работе рассмотрены пять алгоритмов упорядочивания переменных для решения разреженных задач дискретной оптимизации с помощью алгоритма несериального динамического программирования. В результате проведенного вычислительного эксперимента, во-первых, было отмечено, что для решения разреженных задач дискретной оптимизации, упорядочивание переменных оказывает значительное влияние на время решения задачи. Помимо этого, было показано, что различные эвристики упорядочивания наиболее эффективны для различных классов задач. И, наконец, было отмечено, что эвристики MCS и MIN-FILL показали наилучший результат для решения задач дискретной оптимизации из предложенных классов тестовых задач.

Кротов К. В. Градиентный метод составления расписаний обработки разноранжированных требований в многостадийной системе с одинаковым порядком обслуживания / К. В. Кротов, Т. Ю. Кротова // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 93-105.

УДК 519.854

Згідно з приближеними методами дискретної оптимізації виконується розвиток градієнтного метода складання розкладів у багатостадійних системах з однаковим порядком обслуговування вимог та різноманітними часами їх надходження.

На основе приближенных методов дискретной оптимизации выполняется развитие градиентного метода составления расписаний в многостадийных системах с одинаковым порядком обслуживания и различными приоритетами требований.

Лукьянова Е. А. Метод моделирования реактивных систем с параллельными и последовательными процессами / Е.А. Лукьянова, А.В. Дереза // Таврический вестник информ. и матем. – 2011. – № 1. – С. 107-115.

УДК 519.713.1 УДК 51.681.3

У роботі пропонується метод побудови складної багатоблокової реальної системи. Вирішується задача комбінування послідовного та паралельного виконання початкових процесів за рахунок виконання APPLY-операції для OBDD, представляючих автомати відповідних мереж Петрі компонент досліджуваної системи.

Предлагается метод построения модели сложной многоблоковой реальной системы. Решается задача комбинирования последовательного и параллельного выполнения исходных процессов моделируемой системы за счет выполнения APPLY-операции для OBDD, представляющих автоматы соответствующих сетей Петри компонент исследуемой системы.

Терещенко В. Н. Обобщенный метод решения комплекса задач в D-визуализации / В. Н. Терещенко, В. А. Зубарев // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 117-126.

УДК 004.925.8, 004.272.2

Робота присвячена створенню ефективних підходів розв'язання задач побудови візуальних моделей в просторі E^d . Пропонується нова парадигма створення алгоритмічного середовища для вирішення комплексу взаємоз'язаних геометричних задач – узагальнений паралельно-рекурсивний алгоритм, який використовує набір ефективних паралельних процедур розв'язання. За основу узагальненого алгоритму взята стратегія «розділяй і володарюй», що дозволяє ефективно використовувати паралельні обчислення на кожному кроці алгоритму. Одержано покращену ефективність розв'язання, як окремих задач, так і їх сукупності. Встановлені оцінки складності розроблених процедур і здійснена їх практична реалізація, що підтвердила їх ефективність.

Работа посвящена созданию эффективных подходов решения задач построения визуальных моделей в пространстве E^d . Предлагается новая парадигма создания алгоритмической среды для решения комплекса взаимосвязанных геометрических задач – обобщенный паралельно-рекурсивный алгоритм, использующий набор эффективных параллельных процедур решения. За основу обобщенного алгоритма взята стратегия «разделяй и властвуй», что позволяет эффективно использовать параллельные вычисления на каждом шаге алгоритма. Получена улучшенная эффективность решения, как отдельных задач, так и их совокупности. Установлены оценки сложности разработанных процедур и осуществлена их практическая реализация, подтвердившая их эффективность.

Газиев Э. Л. О малых движениях и собственных колебаниях системы «идеальная жидкость – баротропный газ» / Э. Л. Газиев // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 127-137.

УДК 517.9[58+8]:532.6

В роботі розглянуто проблему малих рухів і власних коливань гідродинамічної системи, що складається з ідеальної рідини та баротропного газу та враховує гравітаційне поле та поверхневий натяг. Доведено теорему про структуру спектра та властивості власних функцій.

В работе рассматривается задача о малых движениях и собственных колебаниях гидродинамической системы «идеальная жидкость – баротропный газ» с учетом гравитационных и капиллярных сил. Доказана теорема о структуре спектра и свойствах собственных функций.

Крилова А. С. Дослідження комплекснозначних власних функцій для струнного хреста / А. С. Крилова // Таврический вестник информатики и математики. – 2011. – № 1. – С. 139-146.

УДК 517.9: 519.7

Розглядається спектральна задача на струнному хресті з крайовими умовами q – періодичності, умовами контакту та балансу натягу. В результаті отримані комплекснозначні власні функції. Для двовимірного та тривимірного струнного хреста маємо двовимірні та одновимірні власні підпростори. Їх структура залежить від параметру q .

Рассматривается спектральная задача на струнном кресте с граничными условиями q – периодичности, условиями контакти и баланса натяжения. В результате получены комплекснозначные собственные функции. Для двухмерного и трехмерного струнного креста имеем двухмерные и одномерные собственные подпространства. Их структура зависит от параметра q .

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

**Алексейчук Юрий
Федорович**

аспирант кафедры мат. моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли, Украина
e-mail: olexijchuk@gmail.com

**Анафиев Айдер
Сератович**

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, ученый секретарь редакции журнала ТВИМ, Украина
e-mail: anafiyev@gmail.com

**Анашкин Олег
Васильевич**

д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: oanashkin@yandex.ru

**Блыщик Владимир
Федорович**

к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: veb@land.ru

**Газиев Эскендер
Линурович**

аспирант кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: gilmor2004@mail.ru

**Дереза Алена
Владиславовна**

аспирантка кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: gdevredina@ukr.net

- Донской Владимир
Иосифович** д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, главный редактор журнала ТВИМ
e-mail: donskey@tnu.crimea.ua
- Емец Елизавета
Михайловна** к. ф.-м. н., доцент кафедры мат. моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли, Украина
e-mail: yemetsli@mail.ru
- Емец Олег
Алексеевич** д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедры мат. моделирования и социальной информатики Полтавского университета экономики и торговли, Украина
e-mail: yemetsli@mail.ru
- Зубарев Владимир
Алексеевич** аспирант кафедры математической информатики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: Vova-Odessa@narod.ru
- Кротов Кирилл
Викторович** к. т. н., кафедра информационных систем Севастопольского национального технического университета, Украина
e-mail: krotov_kv@mail.ru
- Кротова Татьяна
Юрьевна** ассистент кафедры высшей математики Севастопольского национального технического университета, Украина
- Крылова Анастасия
Сергеевна** аспирантка факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: krylovaas@univ.kiev.ua
- Литвин Олег
Николаевич** д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедры высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии, Украина
e-mail: academ@kharkov.ua

- Лукьянова Елена Александровна** к. ф.-м. н., докторант Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: lukyanovaea@mail.ru
- Митько Ольга Владимировна** ассистент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
- Наконечный Александр Григорьевич** д. ф.-м. н., профессор, зав. кафедры системного анализа и теории принятия решений факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: nakonichniy@unicyb.kiev.ua
- Нечуйвистер Олеся Петровна** к. ф.-м. н., докторант кафедры высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии Украина
e-mail: olesya@email.com
- Першина Юлия Игоревна** к. ф.-м. н. докторант кафедры высшей и прикладной математики Украинской инженерно-педагогической академии, Украина
e-mail: yulia_pershina@mail.ru
- Пичкур Владимир Владимирович** д. ф.-м. н., доцент кафедры моделирования сложных систем факультета кибернетики, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: vpichkur@gmail.com
- Сасонкина Мария Сергеевна** ассистент кафедры вычислительной математики Одесского национального университета им И.И. Мечникова, Украина
e-mail: masonmas@gmail.com
- Свириденко Александр Васильевич** студент факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: oleks.sviridenko@gmail.com

**Терещенко Василий
Николаевич**

к. ф.-м. н., доцент кафедры математической информатики факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: v_ter@ukr.net

**Чухрай Любомир
Владимирович**

аспирант факультета кибернетики Киевского национального университета им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: l.chukhrai@gmail.com

**Щербина Олег
Александрович**

д. ф.-м. н., профессор кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: oleg.shcherbina@univie.ac.at

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі «Таврійський вісник інформатики і математики» приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Падати заявку на сайті журналу www.tvim.info.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. **Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

- *Постановка проблеми* у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями
- *Аналіз останніх досліджень і публікацій*, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор
- *Невирішені* раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття
- *Формулювання цілей статті (постановка задачі)*

У висновку з даного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом) *результати дослідження та перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.*

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або аббревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2008, № 3.
6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету `twim.sty`, який можна отримати за адресою **www.tvim.info**. Файли статті у форматі TeX і PDF (плюс графічні файли, якщо потрібні) необхідно прикріпити до заявки на публікацію статті на сайті журналу.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надіслати за допомогою сайту **www.tvim.info**, а також у вигляді “твердої” копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м. Симферопіль, Крим, Україна, 95007**.
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

**Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК
України**

**ПОСТАНОВА
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ
від 15.01.2003 р. №7-05/1**

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України

В.В.Скопенко

Вчений секретар

Л.М.Артюшин

Подписано к печати 03.06.2011. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 17,8 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.

Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, 95007, Украина