

Т А В Р И Ч Е С К И Й
В Е С Т Н И К
И Н Ф О Р М А Т И К И И
М А Т Е М А Т И К И

№2 ' 2010

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 26 травня 2010 р. 1—05/4 в журналі "Таврійський вісник інформатики та математики" можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук з фізико-математичних наук (01.01 — математика і 01.05 — інформатика і кібернетика)

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА

В. И. ДОНСКОЙ,	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Е. П. БЕЛАН,	доктор физико-математических наук
Ю. И. ЖУРАВЛЁВ,	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
И. В. ОРЛОВ,	доктор физико-математических наук
А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
С. К. ПОЛУМИЕНКО,	доктор физико-математических наук
К. В. РУДАКОВ,	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
Ю. С. САМОЙЛЕНКО,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
А. А. САПОЖЕНКО,	профессор, доктор физико-математических наук
В. Н. ЧЕХОВ,	профессор, доктор физико-математических наук
А. А. ЧИКРИЙ,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ:

к. ф.-м. н. **А. С. АНАФИЕВ** — ученый секретарь,
к. ф.-м. н. **В. Ф. БЛЫЩИК**, к. ф.-м. н., доцент **М. Г. КОЗЛОВА**

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский научный центр Национальной Академии наук
и Министерства образования и науки Украины
пр-т Вернадского, 2, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

Факультет математики и информатики ТНУ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

Тел. гл. редактора: (0652) 63-75-42
Тел. редакции: (0652) 602-466
e-mail (гл. редактор): donskey@fnu.crimea.ua
e-mail (для переписки): article@tvim.info
сайт журнала: www.tvim.info

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Математические модели и методы прогнозирования
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Машинное обучение и извлечение закономерностей
Нелинейный анализ и его применение	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Вычислительная математика
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов

Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ НАН и Министерства образования и науки Украины
Протокол №8 от 24 декабря 2010 г.

© КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Итоги полуфинала Чемпионата мира по программированию	5
К 70-летию А. Д. Глубочанского	7
Анашкин О.В., Довжик Т.В., Митько О.В. Прямой метод Ляпунова в задаче об устойчивости систем с импульсным воздействием	9
Ахрамович М.В., Муратов М.А. О классификации пары q -коммутирующих операторов в конечномерном линейном пространстве	17
Белан Е.П. Динамика диссипативных структур в параболической задаче с преобразованием отражения пространственной переменной	27
Блыщик В.Ф., Донской Д.В. Модель планирования использования денежных ресурсов, поступающих по инвестиционным контрактам	39
Ибрагимов Н.С. Задача идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики....	45
Ильченко А.В. Поиск максимальных интервалов области признакового пространства в лексикографическом порядке	57
Cheremnih E. V., Ivasyk G. V. On continuous spectrum of transport operator	71
Рефераты	79
Список авторов номера	82
К сведению авторов	85

ИТОГИ ПОЛУФИНАЛА ЧЕМПИОНАТА МИРА ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ



С 12 по 19 октября 2010 года в Румынии (г. Бухарест) состоялись полуфинальные соревнования Чемпионата мира по программированию среди университетских команд Юго-Восточного региона Европы.

В соревнованиях участвовали 53 команды из 7 стран (Румынии, Украины, Болгарии, Македонии, Турции, Сербии и Греции). По результатам олимпиады 9 украинских команд вошли в первую десятку сильнейших команд региона.

ПЕРВОЕ МЕСТО заняла команда **TTL300 Таврического национального университета им. В. И. Вернадского** в составе: **Виктор Баринов, Александр Барыкин и Владимир Крестьянников** (студенты факультета математики и информатики). Команда TTL300 завоевала право участвовать в финале чемпионата мира, который состоится в Египте в марте 2011 г.

Четвертое место также заняла команда Таврического национального университета (**Aka1**) в составе: **Александр Мангилев, Александр Миланин, Александр Винц** (студенты факультета математики и информатики).

Редакция журнала ТВИМ поздравляет молодых крымских программистов и их тренера доцента кафедры информатики факультета математики и информатики ТНУ Козлова Александра Ивановича с этим значительным результатом и желает им больших успехов!

К 70-ЛЕТИЮ АЛЕКСАНДРА ДАВИДОВИЧА ГЛУБОЧАНСКОГО



Редакционный Совет журнала ТВИМ сердечно поздравляет юбиляра!

Александр Давидович Глубочанский посвятил почти полвека своей жизни активной деятельности в области прикладной и теоретической информатики. Он в числе первых крымских математиков начал заниматься программированием, алгоритмическим моделированием, внедрением информационных систем.

Закончив физико-математический факультет Симферопольского педагогического института (ныне – Таврический национальный университет) в 1962 году, А. Глубочанский преподавал в Севастопольском высшем военно-морском училище (1962-1967 гг.), учился в аспирантуре Института технической кибернетики АН БССР (1967-1971 гг.). Уже в 1967 году он возглавил бюро разработки задач отдела АСУП Симферопольского завода телевизоров, где развернулась интересная и плодотворная работа по внедрению идей автоматизированного управления в производство. Александр Давидович успешно справлялся с самыми трудными проблемами в информатике: доведения программных комплексов до реально и надежно работающих систем.

В 1972-1977 годах А. Д. Глубочанский работал заместителем директора ИВЦ Крымоблсельхозтехники по экономико-математическим методам, затем – главным конструктором САПР СКБ «Продмаш» (1977-1986 гг.), главным инженером проекта САПР ВНИПИ «Шельф» (1986-1991 гг.), заведующим лабораторией информационного и программного обеспечения АСУ ТП НПО «Агроприбор» (1991-1996 гг.).

В 1996-2000 годах А. Д. Глубочанский работал заведующим кафедрой системного анализа и информатизации ТИПП. Им опубликовано более 40 научных работ по экономической кибернетике, системному анализу, информационным системам и технологиям. Ряд его работ по теории расписаний был выполнен под руководством академика АН БССР Танаева В. С.

Желаем Александру Давидовичу здоровья и дальнейших творческих успехов!

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

© Анашкин О.В.*, Довжик Т.В.**, Митько О.В.*

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
E-MAIL: anashkin@crimea.edu

**Рязанский государственный радиотехнический университет
Россия, Рязань 390005.

Abstract. The problem of stability of the zero solution of a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse perturbation at fixed moments is considered. The system of linear approximation is supposed to be non-asymptotically stable. Sufficient conditions on the uniform asymptotic stability of the complete system are obtained.

ВВЕДЕНИЕ

Система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (короче, импульсная система) моделирует поведение эволюционного процесса с конечномерным вектором состояния, который в некоторые моменты времени резко изменяет свое положение. При этом скорость изменения вектора состояния столь велика, что можно считать это изменение практически мгновенным. Физическими примерами таких явлений являются механические удары, электрические импульсы и т.п. Итоги первых пятнадцати лет развития математической теории систем с импульсным воздействием подведены в монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка [1], за которой последовали книги [2]–[5]. К настоящему времени это направление в теории дифференциальных уравнений основательно разработано и библиография исследовательских статей насчитывает сотни наименований.

Одним из важнейших вопросов при анализе любого дифференциального уравнения, является проблема устойчивости решений, рассмотренная уже в первой публикации по системам с импульсами [7]. С прикладной точки зрения важно иметь эффективные инструменты для исследования устойчивости конкретных уравнений. Общеизвестно, что именно таким инструментом является метод функций Ляпунова (называемый обычно прямым или вторым методом Ляпунова) [8]. Различным аспектам задачи устойчивости и развития прямого метода для импульсных систем уделено много внимания в монографиях [1]–[6] и посвящены статьи [9]–[20], составляющие лишь малую часть публикаций последнего времени по этой тематике.

Обратимость основных теорем прямого метода Ляпунова (см., например, [12, 20]) свидетельствует о его универсальности. Однако подбор подходящей функции Ляпунова, удовлетворяющей этим теоремам, часто оказывается чрезвычайно трудным. Не зря широко распространено мнение, что практическое применение прямого метода Ляпунова является скорее искусством, чем наукой. Поэтому постоянно актуальна задача поиска условий устойчивости, расширяющих класс подходящих функций типа Ляпунова и, тем самым, облегчающих подбор таких функций. В настоящей работе

предложены новые достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени в критическом случае, когда система линейного приближения не позволяет определить характер устойчивости полной системы. Используются идеи, сочетающие прямой метод Ляпунова и асимптотический метод усреднения [21]-[23].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Общепринятым стандартом записи систем с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени стала следующая форма

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= h_k(x), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ – фиксированные моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ – скачок решения $x(t)$ в момент τ_k , $k = 1, 2, \dots$. Система имеет нулевое решение: $f(t, 0) = h_k(0) = 0$. Следуя установившейся традиции [1], будем предполагать непрерывность решений системы (1) слева, т.е. $x(t) = x(t - 0)$. Предполагается также, что функции $f(t, x)$ и $h_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}: t \geq 0\}$ и $k = 1, 2, \dots$. Как обычно, $x(t) = x(t; t_0, x^0)$ есть решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Обозначим через $B_h \subset \mathbb{R}^n$ открытый шар радиуса h с центром в нуле (h -окрестность нуля).

Нулевое решение системы (1) назовем

– *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

– *равномерно притягивающим*, если некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;

– *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*.

Систему (1) назовем *невозмущенной* и будем предполагать, что ее нулевое решение неасимптотически устойчиво. Целью настоящей работы является вывод условий устойчивости *возмущенной* системы

$$\begin{aligned} \dot{y} &= F(t, y) = f(t, y) + R(t, y), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} &= H_k(y) = h_k(y) + r_k(y), \end{aligned} \quad (2)$$

где $|R(t, y)| = o(|y|)$, $|r(t, y)| = o(|y|)$ при $|y| \rightarrow 0$. Здесь и далее $|\cdot|$ обозначает норму в соответствующем конечномерном пространстве.

В дальнейших рассуждениях существенную роль играет *линеаризация* невозмущенной системы в нуле

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta z|_{t=\tau_k} &= B_k z, \end{aligned} \tag{3}$$

где $|f(t, x) - A(t)x| = o(|x|)$, $|h_k(x) - B_k x| = o(|x|)$ при $|x| \rightarrow 0$ равномерно по $t \geq 0$ и $k = 1, 2, \dots$. Пусть $Z(t, t_0)$ есть матрицант этой системы, нормированный при $t = t_0$, т. е. $Z(t_0, t_0) = I$ — единичная матрица. Предположим, что найдутся числа $0 < \nu_1 \leq \nu_2$ такие, что решение линеаризации $z(t; t_0, x^0) = Z(t, t_0)x^0$ с начальным условием $z(t_0) = x^0$ удовлетворяет при $t \geq t_0$ и $x^0 \in \mathcal{D}$ неравенствам

$$\nu_1 |x^0| \leq |z(t; t_0, x^0)| \leq \nu_2 |x^0|$$

Это условие заведомо будет выполнено, если норма $|Z(t, t_0)|$ ограничена.

Обозначим через \mathcal{K} «класс Хана» — множество всех непрерывных строго возрастающих функций $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$, и введем в рассмотрение множество $\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$.

Пусть $V(t, x)$ — функция Ляпунова невозмущенной системы (1), непрерывно дифференцируемая в области $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$ и удовлетворяющая неравенствам

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|), \tag{4}$$

$$\left. \frac{dV}{dx} \right|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial V}{\partial x}(t, x)f(t, x) \leq 0, \quad t \neq \tau_k, \tag{5}$$

$$V(\tau_k, x + h_k(x)) \leq V(\tau_k, x), \tag{6}$$

где $a, b \in \mathcal{K}$. Как следует из [3], эти условия обеспечивают равномерную устойчивость нулевого решения невозмущенной системы (1).

Обозначим $\Phi(t, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(t, y)R(t, y)$, $y^k = y(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots$

Как известно [1, стр. 20], решение $y(t; t_0, y^0)$ системы (2) с начальными значениями t_0, y^0 может быть представлено в виде

$$y(t; t_0, y^0) = y^0 + \int_{t_0}^t F(s, y(s)) ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} H_k(y^k). \tag{7}$$

Вдоль решения $y(t)$ системы (2) функция $v(t) = V(t, y(t))$ также будет претерпевать разрывы первого рода в моменты импульсных воздействий τ_i . Учитывая (6)–(7), получим

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y^0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, y) ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} [V(\tau_k, y^k + H_k(y^k)) - V(\tau_k, y^k + h_k(y^k))]. \tag{8}$$

Разность под знаком суммы представим в виде

$$V(\tau_k, y^k + H_k(y^k)) - V(\tau_k, y^k + h_k(y^k)) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(\tau_k, y^k + h_k(y^k) + \lambda r_k(y^k)) r_k(y^k) d\lambda. \quad (9)$$

Обозначая

$$W_k(y) = \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(\tau_k, y^k + h_k(y^k) + \lambda r_k(y^k)) r_k(y^k) d\lambda, \quad (10)$$

окончательно получим

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y^0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, y) ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} W_k(y^k). \quad (11)$$

Пусть $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ – кусочно-непрерывная на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функция, имеющая на нем не более конечного числа разрывов первого рода. Обозначим

$$\|\varphi\|_J = \sup\{|\varphi(t)|, t \in J\}$$

норму $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ в пространстве $KC(J)$ всех таких функций.

Используя лемму Гронуолла, легко получить оценку роста нормы решения системы (1) на произвольном конечном отрезке $J = [t_0, t_0 + T]: |x(t; t_0, x^0)| \leq |x^0| \text{const}$, где const зависит только от длины промежутка J . Аналогичная оценка справедлива для решения возмущенной системы (2). Оценку нормы разности решений систем (1) и (2) или систем (2) и (3) на отрезке J можно получить при помощи теоремы 2.5 из [1, стр. 19] (теорема 4 в [5, стр. 25]):

$$|y(t; t_0, y^0) - x(t; t_0, y^0)| \leq \|y - x\|_J = o(|y^0|) \text{ при } |y^0| \rightarrow 0.$$

При этом оценка равномерна относительно $t_0 \geq 0$ и y^0 из заданной окрестности нуля и зависит только от величины T .

2. УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Чтобы не обсуждать возможные патологии, в дальнейшем будем считать, что моменты импульсного воздействия τ_k распределены более или менее равномерно, а именно, пусть

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2, \quad (12)$$

для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \leq \theta_2$. Напомним, что нами введены следующие обозначения

$$\Phi(t, y) = \frac{\partial V}{\partial y}(t, y) R(t, y),$$

$$W_k(y) = r_k(y) \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial y}(\tau_k, y + h_k(y) + \lambda r_k(y)) d\lambda.$$

Теорема. Пусть непрерывно дифференцируемая функция $V: \mathbb{R}_+ \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям (5)–(7) и в области $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{D}$ выполнены требования:

1) существуют константы $M > 0$, $d_1 > 1$, $d_2 > 1$ такие, что

$$|\Phi(t, y)| \leq M|y|^{d_1}, \quad |W_k(y)| \leq M|x|^{d_2}, \quad |\Phi(t, x) - \Phi(t, y)| \leq M\rho^{d_1-1}|x - y|, \\ |W_k(x) - W_k(y)| \leq M\rho^{d_2-1}|x - y|, \quad \forall x, y \in B_\rho, \quad 0 < \rho < h, \quad k = 1, 2, \dots;$$

2) существуют константы $T_0 > 0$, и $\delta > 0$ такие, что для любых $t_0 \geq 0$, $y^0 \in \mathcal{D}$, $T > T_0$ верно неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \Phi(t, z(t; t_0, y^0)) dt + \sum_{t_0 < \tau_k < t_0+T} W_k(z(\tau_k; t_0, y^0)) \leq -2\delta|y^0|^dT,$$

где $d = \min\{d_1, d_2\} > 1$, $z(t; t_0, y^0)$ – решение системы (3) с начальным условием $z(t_0) = y^0$.

Тогда нулевое решение системы (2) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Покажем, что нулевое решение системы (2) равномерно устойчиво по Ляпунову. Фиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и некоторое $\tau \in \mathcal{T}$. Положим $\eta = b^{-1}(a(\varepsilon/2))$ и пусть $y(t)$ – решение возмущенной системы, траектория которого выходит в момент τ из точки $y_\tau \in B_\eta \subset B_{\varepsilon/2}$. Тогда $V(\tau, y_\tau) \leq b(\eta) < a(\varepsilon/2)$. Пусть при некотором $t_0 \geq \tau$ $V(t_0, y(t_0)) = a(\varepsilon/2)$ и $V(t, y(t)) > a(\varepsilon/2)$ при значениях $t > t_0$, достаточно близких к t_0 . Обозначим $y^0 = y(t_0)$ и покажем, что $V(t_0 + T, y(t_0 + T)) < a(\varepsilon/2)$, где $T \geq T_0$ – не зависящая от t_0 и y^0 постоянная. При этом $y(t) \in B_\varepsilon$ на промежутке $t \in [t_0, t_0 + T]$. Отсюда сразу будет следовать искомая равномерная устойчивость.

Оценим изменение функции V на отрезке $[t_0, t_0 + T]$. Пусть $x(t) = x(t; t_0, y^0)$, $z(t) = z(t; t_0, y^0)$ – решения невозмущенной системы (1) и линеаризации (3), соответственно, выходящие из одной и той же точки (t_0, y^0) . Предполагая, что $t \in [t_0, t_0 + T]$, из (8) – (9) получим

$$V(t, y(t)) \leq V(t_0, y^0) + \int_{t_0}^t \Phi(s, y(s)) ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} W_k(y^k) \leq \\ \leq V(t_0, y^0) + \int_{t_0}^t \Phi(s, z(s)) ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} W_k(z^k) + \\ + \int_{t_0}^t |\Phi(s, y(s)) - \Phi(s, z(s))| ds + \sum_{t_0 < \tau_k < t} |W_k(y^k) - W_k(z^k)|. \quad (13)$$

В конце предыдущего раздела мы уже отмечали, что на конечном промежутке $J = [t_0, t_0 + T]$ справедливы оценки

$$|y(t; t_0, y^0) - x(t; t_0, y^0)| \leq \|y - x\|_J = o(|y^0|), \quad \text{при } |y^0| \rightarrow 0, \quad (14)$$

$$|x(t; t_0, y^0) - z(t; t_0, y^0)| \leq \|x - z\|_J = o(|y^0|), \quad \text{при } |y^0| \rightarrow 0, \quad (15)$$

$$|y(t; t_0, y^0) - z(t; t_0, y^0)| \leq \|y - z\|_J = o(|y^0|), \quad \text{при } |y^0| \rightarrow 0. \quad (16)$$

При этом оценки равномерны относительно $t_0 \geq 0$ и y^0 из заданной окрестности нуля и зависят только от величины T . Используя условия теоремы, из этих оценок на основании неравенства (10), нетрудно вывести следующий результат: найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при условии $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в момент $t_1 = t_0 + T$ будет выполнено неравенство

$$V(t_1, y(t_1)) \leq V(t_0, y^0) - \delta|y^0|^d T < V(t_0, y^0). \quad (17)$$

Кроме того, благодаря (6) и (11) при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ траектория решения возмущенного уравнения будет оставаться в ε -окрестности начала при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Мы рассмотрели случай, когда $t_0 \in \mathcal{T}$. Если t_0 совпадает с моментом импульсного воздействия, т.е. $V(t_0, y(t_0)) \leq a(\varepsilon/2)$, а $V(t_0+0, y(t_0+0)) > a(\varepsilon/2)$, то оценки (11)–(13) сохраняются, поскольку $|r_k(x)| = o(|x|)$ при $|x| \rightarrow 0$, и все выводы останутся в силе.

Обозначим $t_p = t_0 + pT$, $p = 1, 2, \dots$. Благодаря равномерности всех полученных выше оценок относительно $t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $y^0 \in B_{\varepsilon_0}$ для произвольного p имеет место неравенство

$$V(t_{p+1}, y(t_{p+1})) \leq V(t_p, y(t_p)) - \delta|y(t_p)|^d T < V(t_p, y(t_p)).$$

Следовательно

$$0 < V(t_{p+1}, y(t_{p+1})) \leq V(t_0, y(t_0)) - \delta T \sum_{l=0}^p |y(t_l)|^d < V(t_0, y(t_0)). \quad (18)$$

Поэтому $|y(t_l)| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. В силу равномерной устойчивости нулевого решения возмущенной системы это означает, что $y(t) \rightarrow 0$.

Подчеркнем, что из наших рассуждений следует, что η_0 -окрестность, где $\eta_0 = b^{-1}(a(\varepsilon_0/2))$, находится в области притяжения нулевого решения, т.е.

$$y(t; t_0, y^0) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{для любого } t_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ и } y^0 \in B_{\eta_0}.$$

□

Формулировку условий теоремы можно слегка упростить, если положить $d_1 = d_2 = d > 1$.

Как возмущения правой части R , так и возмущения скачков решения r_k существенно влияют на поведение решений системы (2). Если $d_1 < d_2$, то доминировать будет R , если $d_2 < d_1$, то доминировать будут r_k в сложном взаимодействии с h_k и решением линеаризации (3).

Функция Ляпунова, удовлетворяющая, например, теореме 18.1 об асимптотической устойчивости из [1, стр. 132], удовлетворяет и требованиям нашей теоремы (при выполнении неравенств (5)), т.к. монотонно убывает вдоль решений возмущенной системы (2). Поэтому доказанная теорема является обобщением ряда известных теорем об асимптотической устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Условия устойчивости формулируются в терминах свойств функции Ляпунова, которая допускает немонотонное изменение вдоль разрывного решения импульсной системы. Таким образом существенно расширяется класс подходящих функций Ляпунова и облегчается построение таких функций для конкретных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев, Вища школа, 1987. – 288 с.
2. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations // World Scientific, Singapore – New Jersey – London, 1989.
3. *Bainov D. D., Simeonov P. S.* Systems with impulse effect: stability, theory and applications. – N.-Y., Halsted Press, 1989.
4. *Haddad W. M., Chellaboina V., Nersisov S. G.* Impulsive and hybrid dynamical systems: stability, dissipativity, and control // Princeton University Press, Princeton, 2006.
5. *Перестюк Н. А., Плотников В. И., Самойленко А. М., Скрипник Н. В.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 428 с.
6. *Борисенко С. Д., Косолапов В. И., Оболенский А. Ю.* Устойчивость процессов при непрерывных и дискретных возмущениях. – К.: Наук. думка, 1988. – 200 с.
7. *Мильман В. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. матем. журнал. – 1060. – Т.1, №2. – С. 233-237.
8. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. – Л.-М.: ОНТИ, 1935. – 386 с.
9. *Akhmetov M. U., Zafer A.* Stability of the zero solution of impulsive differential equations by the Lyapunov second method // J. Math. Anal. Appl. – 2000. – Vol.248. – P. 69–82.
10. *Игнатъев А. О.* Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Матем. сборник. – 2003. – Т.194, №10. – С. 117-132.
11. *Гладиллина Р. И., Игнатъев А. О.* О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем // Укр. матем. журнал. – 2003. – Т.55, №8. – С. 1035-1043.
12. *Гладиллина Р. И., Игнатъев А. О.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости импульсных систем // Укр. матем. журнал. – 2003. – Т.55, №8. – С. 1035-1043.
13. *Гладиллина Р. И., Игнатъев А. О.* Об устойчивости периодических импульсных систем // Матем. заметки. – 2004. – Т.76, №1. – P. 44-51.
14. *Gladilina R. I., Ignatyev A. O.* On Retention of Impulsive System Stability under Perturbations // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol.68, No.8. – P. 1364–1371.
15. *Мартынюк А. А., Слышко В. И.* Об устойчивости движения нелинейной импульсной системы // Прикл. механика. – 2004. – Vol.40, No.2. – С. 134-144.
16. *Perestyuk M. O., Chernikova O. S.* Some modern aspects of the theory of impulsive differential equations // Ukrainian Math. J. – 2008. – Vol.60, No.1. – P. 91-107.
17. *Ignatyev A. O.* On the stability of invariant sets of systems with impulse effect // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – 2008. – Vol.69, No.1. – P. 53-72.
18. *Ignatyev A. O., Ignatyev O. A., Soliman A. A.* On the asymptotic stability and instability of solutions of systems with impulse effect // Math. Notes. – 2006. – Vol.80, No.4. – P. 516–525.

19. *Игнатъев А. О.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных решений систем с импульсным воздействием // Сиб. матем. журнал. – 2008. – Т.49, No.1. – С. 125–133.
20. *Игнатъев А. О.* О существовании функции Ляпунова в виде квадратичной формы для линейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. матем. журнал. – 2010. – Vol.62, No.11. – С. 1451–1458.
21. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
22. *Хапаев М. М.* Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний. – М.: Высшая школа, 1988. – 184 с.
23. *Анашкин О. В.* Об устойчивости в системах с импульсными воздействиями, содержащих возмущения // Тез. конф. «Моделирование и исследование устойчивости физич. процессов». – К.: Об-во «Знание». – 1990. – С. 3-4.

Статья поступила в редакцию 01.12.2010

О КЛАССИФИКАЦИИ ПАРЫ q -КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© Ахрамович М.В., Муратов М.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: *mustafa_muratov@mail.ru fromen@bk.ru*

Abstract. We prove that the problem of classification (up to a similarity transformation) the pair of nilpotent operators (A, B) , $A^3 = B^3 = 0$ with condition of q -commutation $BA = qAB$, where $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, is "wild".

ВВЕДЕНИЕ

В работах И. М. Гельфанда, В. Ф. Пономарева [1] и С. А. Кругляка [2] (см. также [3]) было показано, что задача о каноническом виде пары коммутирующих линейных операторов A и B в конечномерном комплексном линейном пространстве \mathbf{V} относительно преобразования подобия содержит задачу о классификации любого конечного числа произвольных некоммутирующих линейных операторов A_1, A_2, \dots, A_k . Поэтому попытка непосредственного нахождения канонического вида пары коммутирующих операторов (A, B) , с точностью до преобразования подобия, не имеет смысла, т.е. является «дикой» (см. [4],[5]). В данной заметке мы показываем, что «дикой» является и задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных операторов (A, B) , $A^3 = B^3 = 0$, связанных соотношением q -коммутиации: $BA = qAB$, где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим конечное семейство (A_1, A_2, \dots, A_m) операторов из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$. Такое семейство при $m \geq 1$ будем называть также m -кой или *набором операторов* в \mathbf{V} .

Определение 1. m -ка (A_1, A_2, \dots, A_m) операторов из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ называется *неразложимой*, если векторное пространство \mathbf{V} нельзя представить в виде прямой суммы нетривиальных подпространств

$$\mathbf{V} = \mathbf{M} \dot{+} \mathbf{N},$$

инвариантных относительно каждого оператора A_k , $k = 1, 2, \dots, m$.

Имеет место следующий критерий неразложимости.

Предложение 1. m -ка (A_1, A_2, \dots, A_m) операторов из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ является неразложимой тогда и только тогда, когда из условия:

$$RA_k = A_k R, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad R^2 = R$$

следует, что $R = 0$ или $R = I$.

Определение 2. Пусть \mathbf{V} и \mathbf{W} два векторных пространства. Наборы операторов (A_1, A_2, \dots, A_m) в \mathbf{V} и (B_1, B_2, \dots, B_m) в \mathbf{W} называются подобными, если существует обратимый оператор $S: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ такой, что

$$SA_kS^{-1} = B_k, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Подобие наборов операторов (A_1, A_2, \dots, A_m) и (B_1, B_2, \dots, B_m) будем обозначать

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) \sim (B_1, B_2, \dots, B_m)$$

или

$$(A_1, A_2, \dots, A_m) \stackrel{S}{\sim} (B_1, B_2, \dots, B_m)$$

2. q -КОММУТИРУЮЩИЕ ПАРЫ ОПЕРАТОРОВ

Пусть (A, B) — произвольная пара операторов из $\mathcal{B}(\mathbf{V})$. Рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{k=1}^4 \mathbf{V}_k, \quad \mathbf{V}_k = \mathbf{V}, \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

и пару операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{B}(\mathcal{V})$:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $q \in \mathbf{C}$, $q \neq 0$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Предложение 2. Операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} удовлетворяют соотношениям:

- 1) $\mathcal{B}\mathcal{A} = q\mathcal{A}\mathcal{B}$;
- 2) $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0$.

Допустим, что имеется две пары операторов (A, B) в пространстве \mathbf{V} и (\tilde{A}, \tilde{B}) в пространстве $\tilde{\mathbf{V}}$. Построим, как и выше, операторы $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в пространстве $\mathcal{V} = \bigoplus_{k=1}^4 \mathbf{V}_k$, $\mathbf{V}_k = \mathbf{V}$, $k = 1, 2, 3, 4$ и операторы $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ в пространстве $\tilde{\mathcal{V}} = \bigoplus_{k=1}^4 \tilde{\mathbf{V}}_k$, $\tilde{\mathbf{V}}_k = \tilde{\mathbf{V}}$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{S} : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$ — такой оператор, что

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}, \quad \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}.$$

Тогда оператор \mathcal{S} имеет вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 0 & S & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & S & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть оператор \mathcal{S} имеет вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\mathcal{A} &= \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & S_{11} & S_{12}A + S_{13} \\ 0 & 0 & S_{21} & S_{22}A + S_{23} \\ 0 & 0 & S_{31} & S_{32}A + S_{33} \\ 0 & 0 & S_{41} & S_{42}A + S_{43} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tilde{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{I} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ \tilde{A}S_{41} & \tilde{A}S_{42} & \tilde{A}S_{43} & \tilde{A}S_{44} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{S}\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & qS_{11} & 0 & S_{12}B + S_{13}A \\ 0 & qS_{21} & 0 & S_{22}B + S_{23}A \\ 0 & qS_{31} & 0 & S_{32}B + S_{33}A \\ 0 & qS_{41} & 0 & S_{42}B + S_{43}A \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}\mathcal{S} &= \begin{pmatrix} 0 & q\tilde{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{B} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} qS_{21} & qS_{22} & qS_{23} & qS_{24} \\ \tilde{B}S_{41} & \tilde{B}S_{42} & \tilde{B}S_{43} & \tilde{B}S_{44} \\ \tilde{A}S_{41} & \tilde{A}S_{42} & \tilde{A}S_{43} & \tilde{A}S_{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Так как

$$\mathcal{S}A = \tilde{A}\mathcal{S}, \quad \mathcal{S}B = \tilde{B}\mathcal{S},$$

то имеем следующие системы равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = S_{31} \\ 0 = S_{32} \\ S_{11} = S_{33} \\ S_{12}A + S_{13} = S_{34} \\ 0 = \tilde{A}S_{41} \\ 0 = \tilde{A}S_{42} \\ S_{21} = \tilde{A}S_{43} \\ S_{22}A + S_{23} = \tilde{A}S_{44} \\ 0 = S_{41} \\ 0 = S_{42} \\ S_{31} = S_{43} \\ S_{32}A + S_{33} = S_{44} \\ S_{41} = 0 \\ S_{42}A + S_{43} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = qS_{21} \\ qS_{11} = qS_{22} \\ 0 = qS_{23} \\ S_{12}B + S_{13}A = qS_{24} \\ 0 = \tilde{B}S_{41} \\ qS_{21} = \tilde{B}S_{42} \\ 0 = \tilde{B}S_{43} \\ S_{22}B + S_{23}A = \tilde{B}S_{44} \\ 0 = \tilde{A}S_{41} \\ qS_{31} = \tilde{A}S_{42} \\ 0 = \tilde{A}S_{43} \\ S_{32}B + S_{33}A = \tilde{A}S_{44} \\ qS_{41} = 0 \\ S_{42}B + S_{43}A = 0. \end{array} \right.$$

Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{21} = S_{23} = 0 \\ S_{31} = S_{32} = 0 \\ S_{41} = S_{42} = S_{43} = 0 \\ S_{11} = S_{22} = S_{33} = S_{44} = S. \end{array} \right.$$

Таким образом, оператор \mathcal{S} имеет вид

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 0 & S & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & S & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\begin{cases} S_{12}A + S_{13} &= S_{34} \\ S_{12}B + S_{13}A &= qS_{24} \\ SA &= \tilde{A}S \\ SB &= \tilde{B}S. \end{cases}$$

□

Теорема 1. Пары операторов (A, B) и (\tilde{A}, \tilde{B}) подобны тогда и только тогда, когда подобны пары операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(A, B) \stackrel{S}{\sim} (\tilde{A}, \tilde{B})$. Тогда $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$, где оператор \mathcal{S} имеет вид

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

Достаточность. Если $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$, где

$$\mathcal{S} : \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}},$$

такой невырожденный оператор, что

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}, \quad \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}.$$

В силу леммы 1, оператор \mathcal{S} имеет вид:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} S & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ 0 & S & 0 & S_{24} \\ 0 & 0 & S & S_{34} \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix}.$$

При этом,

$$\begin{cases} SA &= \tilde{A}S \\ SB &= \tilde{B}S. \end{cases}$$

Следовательно, $(A, B) \stackrel{S}{\sim} (\tilde{A}, \tilde{B})$.

□

Теорема 2. Пара операторов (A, B) неразложима в пространстве \mathbf{V} тогда и только тогда, когда пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве \mathcal{V} .

Доказательство. Необходимость. Пусть пара операторов (A, B) неразложима в пространстве \mathbf{V} . Допустим, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ разложима в пространстве \mathcal{V} . Тогда, в силу утверждения 1, существуют идемпотенты \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 такие, что

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2\mathcal{P}_1 = 0, \quad [\mathcal{P}_j, \mathcal{A}] = [\mathcal{P}_j, \mathcal{B}] = 0, \quad j = 1, 2.$$

В силу леммы 1, операторы \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 имеют вид:

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Так как $\mathcal{P}_j^2 = \mathcal{P}_j$, то

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \\ P_j S_{12}^{(j)} + S_{12}^{(j)} P_j = S_{12}^{(j)} \\ P_j S_{13}^{(j)} + S_{13}^{(j)} P_j = S_{13}^{(j)} \\ P_j S_{14}^{(j)} + S_{12}^{(j)} S_{24}^{(j)} + S_{13}^{(j)} S_{34}^{(j)} + S_{14}^{(j)} P_j = S_{14}^{(j)} \\ P_j S_{24}^{(j)} + S_{24}^{(j)} P_j = S_{24}^{(j)} \\ P_j S_{34}^{(j)} + S_{34}^{(j)} P_j = S_{34}^{(j)}. \end{cases}$$

Так как $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \tilde{I}$, то

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I \\ S_{12}^{(1)} + S_{12}^{(2)} = 0 \\ S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} = 0 \\ S_{14}^{(1)} + S_{14}^{(2)} = 0 \\ S_{24}^{(1)} + S_{24}^{(2)} = 0 \\ S_{34}^{(1)} + S_{34}^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Из условий $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 = 0$ следует, что

$$\begin{cases} P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0 \\ P_1 S_{12}^{(2)} + S_{12}^{(1)} P_2 = P_2 S_{12}^{(1)} + S_{12}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{13}^{(2)} + S_{13}^{(1)} P_2 = P_2 S_{13}^{(1)} + S_{13}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{14}^{(2)} + S_{12}^{(1)} S_{24}^{(2)} + S_{13}^{(1)} S_{34}^{(2)} + S_{14}^{(1)} P_2 = \\ = P_2 S_{14}^{(1)} + S_{12}^{(2)} S_{24}^{(1)} + S_{13}^{(2)} S_{34}^{(1)} + S_{14}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{24}^{(2)} + S_{24}^{(1)} P_2 = P_2 S_{24}^{(1)} + S_{24}^{(2)} P_1 = 0 \\ P_1 S_{34}^{(2)} + S_{34}^{(1)} P_2 = P_2 S_{34}^{(1)} + S_{34}^{(2)} P_1 = 0. \end{cases}$$

Так как $[\mathcal{P}_j, \mathcal{A}] = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_j & S_{12}^{(j)} A + S_{13}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j A \\ 0 & 0 & 0 & P_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathcal{P}_j &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & AP_j \\ 0 & 0 & 0 & P_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{cases} S_{12}^{(j)}A + S_{13}^{(j)} = S_{34}^{(j)} \\ P_jA = AP_j, \end{cases}$$

Наконец, так как $[\mathcal{P}_j, \mathcal{B}] = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j\mathcal{B} &= \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & qP_j & 0 & S_{12}^{(j)}B + S_{13}^{(j)}A \\ 0 & 0 & 0 & P_jB \\ 0 & 0 & 0 & P_jA \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}\mathcal{P}_j &= \begin{pmatrix} 0 & qI & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & A \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_j & S_{12}^{(j)} & S_{13}^{(j)} & S_{14}^{(j)} \\ 0 & P_j & 0 & S_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & P_j & S_{34}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & qP_j & 0 & qS_{24}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & BP_j \\ 0 & 0 & 0 & AP_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

то

$$\begin{cases} S_{12}^{(j)}B + S_{13}^{(j)}A = qS_{24}^{(j)} \\ P_jB = BP_j \\ P_jA = AP_j, \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \neq 0 \\ P_1 + P_2 = I \\ P_1P_2 = P_2P_1 = 0 \\ P_jB = BP_j \\ P_jA = AP_j, \end{cases}$$

и, значит, пара операторов (A, B) разложима в пространстве \mathbf{V} , вопреки предположению. Противоречие показывает, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве \mathcal{V} .

Достаточность. Допустим, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ неразложима в пространстве \mathcal{V} . Если пара операторов (A, B) разложима в пространстве \mathbf{V} , то, в силу утверждения 1, существуют идемпотенты P_1 и P_2 такие, что

$$\begin{cases} P_j^2 = P_j \neq 0 \\ P_1 + P_2 = I \\ P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0 \\ P_j B = B P_j \\ P_j A = A P_j. \end{cases}$$

Тогда для операторов

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_j \end{pmatrix}, j = 1, 2.$$

имеют место соотношения:

$$\mathcal{P}_j^2 = \mathcal{P}_j \neq 0, \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = \mathcal{I}, \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1 = 0, [\mathcal{P}_j, \mathcal{A}] = [\mathcal{P}_j, \mathcal{B}] = 0, j = 1, 2.$$

Это означает, что пара операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ разложима в пространстве \mathcal{V} , вопреки предположению. Противоречие показывает, что пара операторов (A, B) неразложима в пространстве \mathbf{V} . \square

Таким образом, задача о классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных линейных операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0$, связанных соотношением q -коммутирования $\mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A}$, является «дикой».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной статьи является утверждение, что задача классификации пары нильпотентных операторов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, $\mathcal{A}^3 = \mathcal{B}^3 = 0$, удовлетворяющих соотношению

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A}, q \neq 0,$$

а значит, и задача классификации произвольной пары q -коммутирующих операторов, содержат задачу классификации пары операторов без дополнительных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве, *Функциональный анализ и его приложения*, 3, вып. 4, С. 81-82 (1969).
2. Кругляк С.А. О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p . *ДАН СССР*, 1963, 153, №6, С. 1253-1256.
3. Гудивок П.М. Представления конечных групп над коммутативными локальными кольцами. Ужгородский национальный университет, Ужгород, 2003. – 118 стр.
4. Donovan P., Freislich M.R. The representation theory of finite graphs and associated algebras. *Carleton Math. Lecture Notes*, 5, P. 1-119.
5. Дрозд Ю.А. Ручные и дикие матричные задачи. Представления и квадратичные формы. Сборник научных трудов Института математики НАН Украины, Киев, С. 39-74.

Статья поступила в редакцию 29.11.2010

ДИНАМИКА ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ОТРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

© Белан Е.П.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: belan@crimea.edu

Abstract. The properties of the stationary structures in a nonlinear optical resonator with lateral inversions transformer in feedback are investigated. The mathematical description of optical structures is based on the scalar parabolic equation with inversion spatial arguments and Neumann's condition on the segment. We determine the forms of stationary structures and investigate its stability as the diffusion coefficient decrease. parabolic equation, bifurcation, stationary structure, stability, center manifold.

ВВЕДЕНИЕ

Оптические системы с двумерной обратной связью [1, 2] демонстрируют широкие возможности по исследованию процессов зарождения и развития диссипативных структур. Формирование и развитие оптических структур является ярким примером самоорганизации в диссипативной системе [3, 4, 5]. Богатое разнообразие как стационарных, так и вращающихся оптических структур наблюдалось уже при простейших преобразованиях (поворот, отражение).

Математической моделью оптических систем с двумерной обратной связью являются полулинейные параболические уравнения с преобразованиями пространственных переменных. Математическое обоснование наблюдаемых автоволновых явлений на основе теории бифуркации Андронова-Хопфа проведено в [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]. Исследованию динамики бегущих волн, стационарных структур для параболического уравнения с поворотом одномерного аргумента и малой диффузии посвящены работы [14, 15, 16, 4, 17, 18]

Теория бифуркации позволяет исследовать условия возникновения вращающихся волн, стационарных структур. Однако на вопрос об их эволюции при удалении от точки бифуркации локальная теория бифуркации ответа не даёт. Согласно же экспериментальным данным и численным расчетам в нелинейном интерферометре с зеркальным отражением поля имеет место многообразие оптических структур. Количество их растет при уменьшении коэффициента диффузии [1, 20, 21, 22].

Следуя [5], в работе автора [19] для теоретического обоснования указанной динамики стационарных структур была построена иерархия упрощенных моделей. Их анализ привёл, в частности, к следующему выводу. Стационарные структуры с индексом неустойчивости 1, ответвляющиеся от пространственно однородного стационарного решения, при уменьшении коэффициента диффузии обретают устойчивость. В данной работе изучается вопрос о характере указанной бифуркации.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ рассмотрим краевую задачу [1, 20, 21]

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) = D\partial_{xx}u(x, t) + K(1 + \gamma \cos u(-x, t)), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\partial_x u\left(-\frac{\pi}{2}, t\right) = \partial_x u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) моделирует динамику фазовой модуляции $u(x, t)$ световой волны, прошедшей тонкий слой нелинейной среды керровского типа с преобразованием отражения координат в двумерной обратной связи в одномерном приближении. Здесь $D > 0$ – эффективный коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \leq 1$ – видность (контрастность) интерференционной картины, $K > 0$ – коэффициент, пропорциональный интенсивности светового потока. Отметим, что родственная задача рассматривалась в [23, 2].

Обозначим $H = L_2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ гильбертово пространство измеримых на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ функций. Шкалу пространств, порожденную оператором $-\Delta$ (Δ – одномерный оператор Лапласа) при граничных условиях (2) обозначим H^s , $s \in \mathbb{Z}_+$. Норма в пространстве H^s , $s \in \mathbb{Z}_+$, определяется формулой $\|u\|_s^2 = \langle (-\Delta)^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$. Здесь $\langle *, * \rangle$ – скалярное произведение в гильбертовом пространстве H .

В данной работе рассматриваются вопросы существования, формы и устойчивости в метрике пространства H^1 пространственно неоднородных стационарных решений задачи (1), (2), бифурцирующих из пространственно однородных решений $u(t, x) = w$, т.е. из решений уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \quad (3)$$

Согласно [16], [4, см.12.] с ростом K количество сосуществующих корней этого уравнения неограниченно растет, причем при $K \rightarrow \infty$ их состав постоянно обновляется: рождаются новые состояния равновесия и исчезают старые. В этой связи фиксируем какую-либо гладкую ветвь решений

$$w = w(K), \quad 1 + K\gamma \sin w(K) \neq 0 \quad (4)$$

уравнения (3). Затем линеаризуем задачу (1), (2) на $w(K)$:

$$\dot{u} + \mathfrak{L}u = 0,$$

где

$$\mathfrak{L} = 1 - D\Delta - \Lambda Q, \quad Qu(x) = u(-x), \quad \Lambda = \Lambda(K) = -K\gamma \sin w(K). \quad (5)$$

Линейный оператор \mathfrak{L} с областью определения H^2 , рассматриваемый как неограниченный оператор в пространстве H , является самосопряженным оператором. Методом Фурье устанавливается

Лемма 1. *Оператор \mathfrak{L} в пространстве H имеет полную ортогональную систему собственных функций*

$$1, \sin x, \cos 2x, \sin 3x, \dots,$$

соответствующих собственным значениям

$$\lambda_0 = 1 - \Lambda, \quad \lambda_1 = 1 + D + \Lambda, \quad \lambda_2 = 1 + 4D - \Lambda, \quad \lambda_3 = 1 + 9D + \Lambda, \dots$$

Выберем теперь K таким образом, чтобы выполнялось следующее условие.

Условие 1. $\Lambda = \Lambda(K) < -1$.

Проблема реализуемости этого условия исследована в [16], [4, см.12.].

Пусть $D > D_1 = -(1 + \Lambda)$. Тогда, в силу леммы 1 и условия 1, $w = w(K)$ – устойчивое решение задачи (1), (2). При убывании параметра D и его прохождении через значение D_1 решение $w = w(K)$ теряет устойчивость. Обозначим $D_{2k+1} = (2k + 1)^{-2}D_1$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Если $D_3 < D < D_1$, то индекс неустойчивости [24, см. гл. 6. 4] решения $w = w(K)$ равен 1. При уменьшении D и его прохождении через D_{2k+1} , $k = 1, 2, 3, \dots$, индекс неустойчивости решения w всякий раз повышается на единицу. Далее в качестве бифуркационного примем параметр D . Чтобы подчеркнуть зависимость \mathfrak{L} , λ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, от параметра D будем иногда обозначать их $\mathfrak{L}(D)$, $\lambda_k(D)$ соответственно.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Преобразование $u = w + v$ приводит задачу (1), (2) к виду

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(D)v = \mathfrak{R}(Qv). \quad (6)$$

Справедливо следующее равенство

$$\mathfrak{R}(v) = \frac{1}{2}\Lambda_1 v^2 - \frac{1}{6}\Lambda v^3 + O(v^4), \quad \Lambda_1 = -\Lambda \operatorname{ctg} w. \quad (7)$$

В качестве фазового пространства уравнения (6), т.е. его пространства начальных условий, примем пространство H^1 .

Отметим, что уравнение (6) в пространстве H^1 порождает непрерывную полугруппу [2, см. гл. 3]. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что задача (1), (2) имеет при $0 < D_1 - D < \delta$ два стационарных пространственно неоднородных решения $u_1^\pm(x, D) = w + v_1^\pm(x, D)$, где

$$\begin{aligned} v_1^\pm(x, D) = & \pm \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{\frac{1}{2}} \sin x + \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right) \frac{\Lambda_1}{4} \left((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} - (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \cos 2x \right) \pm \\ & \pm \frac{1}{24} \left(\frac{\lambda_1(D)}{c_1(D)} \right)^{\frac{3}{2}} \left(3\Lambda_1^2 (\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} - \Lambda (\lambda_3 - 3\lambda_1)^{-1} \right) \sin 3x + r^\pm(x, D). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $r^\pm(x, D) = O((D_1 - D)^{3/2})$,

$$c_1(D) = -\frac{1}{4}\Lambda_1^2 \left((\lambda_0 - 2\lambda_1)^{-1} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - 2\lambda_1)^{-1} \right) + \frac{1}{8}\Lambda. \quad (9)$$

Решения $u_1^\pm(x, D)$ – экспоненциально устойчивы.

Доказательство теоремы опирается на метод центральных многообразий [25, 26, 27] и проводится по схеме, примененной в [19, 12].

При уменьшении параметра D и его прохождении через D_{2k+1} от w всякий раз ответвляются пары u_{2k+1}^\pm , $k = 1, 2, \dots$, пространственно неоднородных стационарных решений задачи (1), (2).

Следующее равенство (**принцип подобия** [4])

$$u_{(2k+1)}^{\pm}(x, D) = u_1^{\pm}((2k+1)x, (2k+1)^2 D), k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

позволяет упростить процесс построения решений $v_{(2k+1)}^{\pm}(x, D)$, $k = 1, 2, 3, \dots$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $v_1^{\pm}(x, D)$

Рассмотрим вопрос о форме $v_1^{\pm}(x, D)$ при углублении параметра D в область надкритичности. Будем далее предполагать, что $\Lambda_1 = 0$. Исследование этого случая приводит к следующей модельной задаче

$$\dot{v} + \mathfrak{L}(D)v = (Qv)^3. \quad (11)$$

Для анализа динамики $v_1^{\pm}(x, D)$ при уменьшении D от D_1 построим галеркинские аппроксимации уравнения (11) в виде

$$v = \sum_{k=0}^4 z_{2k+1} \sin(2k+1)x. \quad (12)$$

В результате получим градиентную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{2k+1} = -\frac{\partial G_{1,0}(z, D)}{\partial z_{2k+1}}, k = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (13)$$

где $z = (z_1, z_3, \dots, z_9)$,

$$\begin{aligned} G_1(z, D) = & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^4 \lambda_{2k+1}(D) z_{2k+1}^2 + \frac{3}{16} \sum_{k=0}^4 z_{2k+1}^4 + \frac{1}{4} (z_1^3 z_3 + z_3^3 z_9) + \\ & + \frac{3}{4} \sum_{k=0}^4 z_{2k+1}^2 \sum_{s=k+1}^4 z_{2s+1}^2 - \frac{3}{4} z_1^2 (z_3 z_5 + z_5 z_7 + z_7 z_9) + \\ & + \frac{3}{4} z_1 (z_3^2 z_5 - z_3^2 z_9 + z_3 z_5 z_7 - z_3 z_5 z_9 + z_3 z_7 z_9) + \frac{3}{4} z_3 (z_5^2 z_7 + 2z_5 z_7 z_9). \end{aligned}$$

Потенциальная функция $G_1(z, D)$ ограничена снизу. Следовательно, решения системы (13) ограничены на положительной полуоси. Аттракторами системы (13) являются её стационарные точки. Как известно, стационарные точки градиентных систем – узлы и седла.

Перейдем теперь к анализу системы (13). Из её нулевого решения при $D = D_1$ в результате надкритической бифуркации типа *вилки* ответвляется пара устойчивых стационарных решений $\tilde{z}^{\pm}(D) = \pm(\tilde{z}_1(D), \dots, \tilde{z}_9(D))$, $\tilde{z}_1(D) > 0$. Непрерывная ветвь $\tilde{z}^+(D)$ существует на $(0, D_{1,0})$. Отметим её следующие особенности: $\tilde{z}_1(D) > \tilde{z}_3(D) > \dots > \tilde{z}_9(D) > 0$ для всех $D \in (0, D_{1,0})$; $\tilde{z}_{2s+1}(D)$, $s = 0, 1, \dots, 4$, – монотонно убывающие ограниченные функции D .

Родившись устойчивыми, стационарные точки $\tilde{z}^{\pm}(D)$ сохраняют устойчивость при убывании D от D_1 . При этом прослеживается тенденция к сближению точек спектра семейства $\tilde{z}^+(D)$ и отходе наибольшей её точки от нуля при уменьшении D .

Из изложенного выше следует, что имеет место следующее приближенное равенство

$$v_1^\pm(x, D) \approx \pm \sum_{k=0}^4 \tilde{z}_{2k+1}(D) \sin(2k + 1)x. \quad (14)$$

4. ОБРЕТЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ $v_3^\pm(x, D)$

Обратимся теперь к вопросу о характере бифуркации семейства уравнений (13) в окрестности точки $(D_3, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^5$. Как и выше, в результате надкритической бифуркации типа *вилки* из нулевого решения системы (13) ответвляется пара стационарных решений $\tilde{z}^\pm(D) = \pm(0, \hat{z}_3(D), 0, 0, \hat{z}_9(D))$ с индексом неустойчивости 1. Матрица устойчивости точек $\hat{z}^\pm(D)$ – блочно-диагональная. Один из её блоков – матрица

$$M(D) = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda} - D - 3/2\hat{r}_3^2 & -(3/4)\hat{z}_3^2 + 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 & 3/4\hat{z}_3^2 - 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 \\ -(3/4)\hat{z}_3^2 + 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 & \hat{\Lambda} - 25D - 3/2\hat{r}_3^2 & -(3/2)\hat{z}_3\hat{z}_9 \\ 3/4\hat{z}_3^2 - 3/2\hat{z}_3\hat{z}_9 & -(3/2)\hat{z}_3\hat{z}_9 & \hat{\Lambda} - 49D - 3/2\hat{r}_3^2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $\hat{r}_3^2 = \hat{z}_3^2 + \hat{z}_9^2$, $\hat{\Lambda} = -1 - \Lambda$. У нее при малых $D_3 - D$ два отрицательных и одно положительное собственное значение. При уменьшении D от D_3 положительное собственное значение убывает и переходит при $D = \check{D}_3$ на отрицательную полуось. Пара стационарных решений $\hat{z}^\pm(D)$ обретает устойчивость в результате транскритической бифуркации (*обмена устойчивостью*). Перейдем далее к анализу указанного типа бифуркации.

Вначале, для простоты, положим в системе (13) $z_5 = 0$, $z_7 = 0$, $z_9 = 0$. В результате получим следующее однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений на плоскости

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_1 \left(\hat{\Lambda} - D - \frac{3}{4}(z_1^2 - z_1 z_3 + 2z_3^2) \right), \\ \dot{z}_3 &= z_3 \left(\hat{\Lambda} - 9D - \frac{3}{4}(2z_1^2 + 2z_3^2) \right) + \frac{1}{4}z_1^3 \end{aligned} \quad (16)$$

В системе (16) при уменьшении параметра D и его прохождении через D_3 от нулевого решения системы (13) ответвляется пара стационарных решений $\pm(0, \check{z}_3(D))$, где $\check{z}_3(D) = 2 \left(\frac{\hat{\Lambda} - 9D}{3} \right)^{1/2}$. Решения $\pm(0, \check{z}_3(D))$ рождаются, разумеется, неустойчивыми с индексом неустойчивости 1. Индекс неустойчивости решений $\pm(0, \check{z}_3(D))$ сохраняется при $D \in \left(\frac{\hat{\Lambda}}{17}, \frac{\hat{\Lambda}}{9} \right)$. Рассматриваемые ветви стационарных точек обретают устойчивость при $\hat{D}_3 = \frac{\hat{\Lambda}}{17}$ и сохраняют её при дальнейшем уменьшении D . Для анализа характера бифуркации системы (16) в точке бифуркации $(\hat{D}_3, 0, \check{z}_3)$ выполним в системе (15) преобразование сдвига $z_1 = \xi_1$, $z_3 = \check{z}_3(D) + \xi_3$. В результате имеем

следующее семейство уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \mu(D)\xi_1 + \frac{3}{4}(\check{z}_3(D) + \xi_3)\xi_1^2 - \frac{3}{2}(2\check{z}_3(D) + \xi_3)\xi_1\xi_3 - \frac{3}{4}\xi_1^3, \\ \dot{\xi}_3 &= -\frac{3}{2}\check{z}_3(D)^2\xi_3 - \frac{3}{2}\check{z}_3(D)\xi_1^2 + O(\|\xi_1, \xi_3\|^3).\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь $\mu(D) = -\hat{\Lambda} + 17D$. Это семейство уравнений в окрестности точки $(\check{D}_3, 0, 0)$ имеет центральное многообразие, представимое в виде $\xi_3 = -\frac{1}{\check{z}_3(D)}\xi_1^2 + O(\xi_1^3)$. Ограничение системы (17) на указанном многообразии принимает вид

$$\dot{\xi}_1 = \mu(D)\xi_1 + \frac{3}{4}\check{z}_3(D)\xi_1^2 + \frac{9}{4}\xi_1^3 + O(\xi_1^4).\quad (18)$$

Очевидно, что в этом семействе уравнений в окрестности $(\check{D}_3, 0)$ имеет место транскритическая бифуркация. При этом нулевое решение однопараметрического семейства уравнений (18) при уменьшении параметра D и его прохождении через \hat{D}_3 обретает устойчивость, а семейство стационарных точек $-\frac{4}{3\check{z}_3(D)}\mu(D) + O(|D - \hat{D}_3|^2)$ устойчивость теряет. Согласно принципу сведения [26] в семействе уравнений (17) при $D = \hat{D}_3$ имеет место транскритическая бифуркация. При уменьшении параметра D и его прохождении через \hat{D}_3 нулевое решение системы (17) обретает устойчивость и становится устойчивым узлом, а

$$\left(-\frac{4}{3\check{z}_3(D)}\mu(D) + O(|D - \hat{D}_3|^3), -\frac{16}{9\check{z}_3(D)}\mu^2(D) + O(|D - \hat{D}_3|^3)\right)$$

переходит в ветвь седловых точек.

Перейдем теперь к вопросу о характере рождения ветви

$$\left(-\frac{4}{3\hat{z}_3(D)}\mu(D) + O(|D - \hat{D}_3|^3), -\frac{16}{9\hat{z}_3(D)}\mu^2(D) + O(|D - \check{D}_3|^3)\right)$$

стационарных решений семейства уравнений (17). Далее приведем результаты численного анализа этой задачи. Примем для определенности $\Lambda = -1,85$. Тогда бифуркационным является значение параметра $D = 0,05$, а $\{0, 0, 730\}$ – особая точка типа *седло-узел*. Её спектр – $\{0, -, 0, 8\}$. Особая же точка $(-0, 207, 0, 665)$ является седлом, а её спектр – $\{-0, 924, 0, 0954\}$. При $D = 0,04$ особая точка $(0, 0, 808)$ – устойчивый узел со спектром $\{-0, 17, -, 0, 98\}$. Точки же $(0, 178, 0, 770)$, $(-0, 362, 0, 604)$ – седловые со спектрами $\{-1, 029, 0, 193\}$, $\{-1, 203, 0, 315\}$ соответственно. Бифуркация рождения седло-узловой точки имеет место при $D \approx 0,053$. При $D = 0,053$ система (16) имеет две особые точки $(-0, 109', 0, 702)$, $(-0, 108', 0, 701)$, спектры которых равны $\{-0, 824, -, 0, 005\}$, $\{-0, 8123, 0, 002\}$ соответственно. Отметим, что $(0, 0, 705)$ – особая точка при $D = 0,053$, а $\{-0, 745, 0, 051\}$ – её спектр.

Проведенные численные эксперименты дают основания для следующего заключения. Существует такое $D^*(\Lambda)$, $D^*(L) < \hat{D}(\Lambda)$, что в системе (17) при $D = D^*(\Lambda)$ имеет место седло-узловая бифуркация. При уменьшении D от $D^*(\Lambda)$ ветвь устойчивых узловых точек $(z_1^s(D), z_3^s(D))$ приближается к точке $(0, \check{z}_3(D))$ и передает ей

при $D = \check{D}_3$ устойчивость. Ветвь же $(z_1^s(D), z_3^s(D))$ переходит затем в гладкую ветвь седловых точек. Качественно различные фазовые портреты однопараметрического семейства систем уравнений (16) схематически отражены на рис. 1–4.

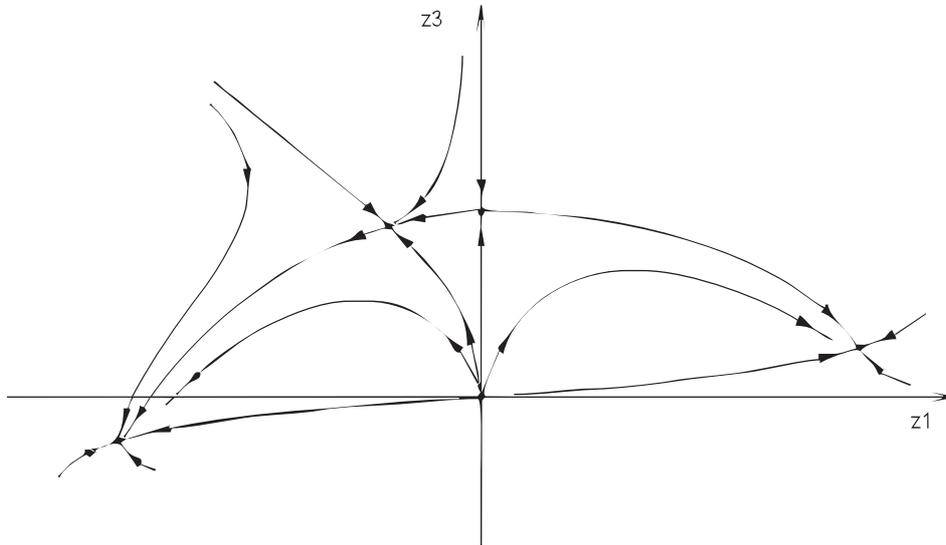


Рис. 1

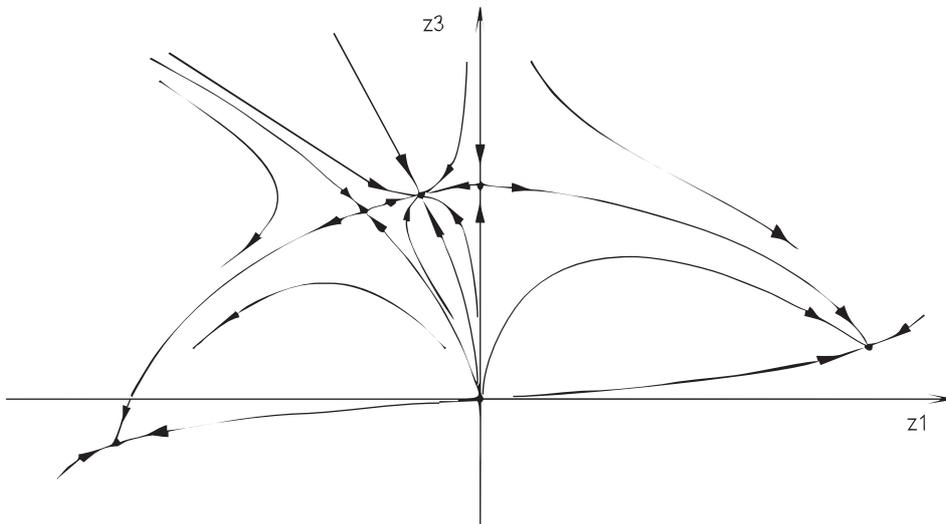


Рис. 2

Положим теперь в системе (13) $z_7 = 0, z_9 = 0$. В результате получим следующее семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_1 \left(\hat{\Lambda} - D + \frac{3}{4} (-x_1^2 + x_1 x_3 - 2x_3^2 + 2x_3 x_5 - 2x_5^2) \right) - \frac{3}{4} x_3^2 x_5,$$

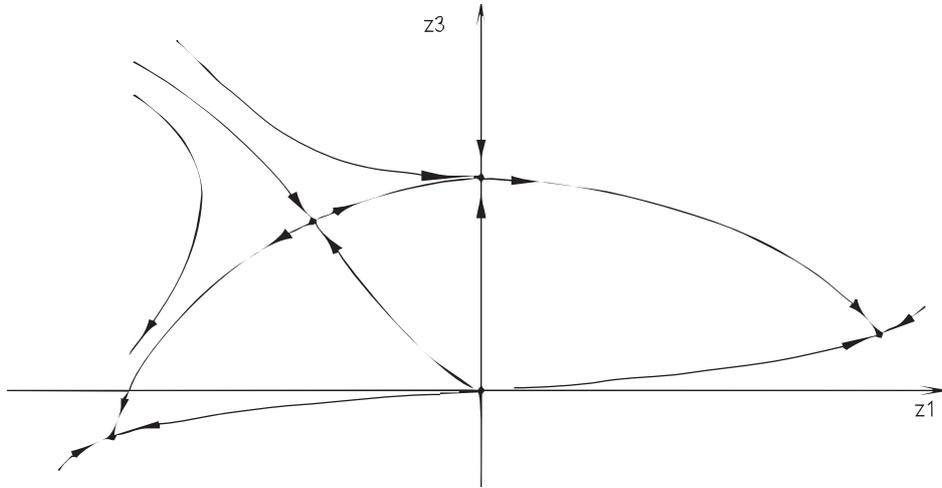


Рис. 3

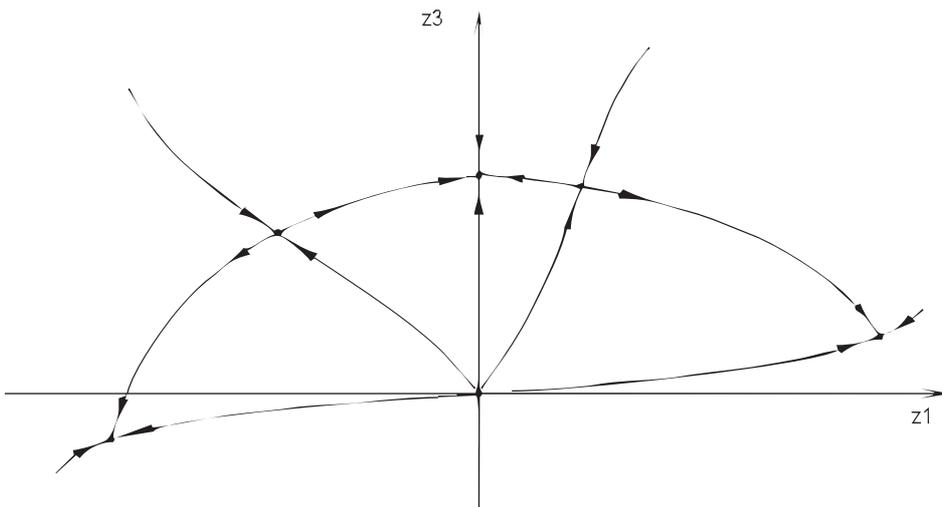


Рис. 4

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_3 \left(\widehat{\Lambda} - 9D + \frac{3}{4} (-2x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_5 - 2x_5^2) \right) + \frac{1}{4} (x_1^3 + 3x_1^2x_5), \\ \dot{x}_5 &= x_5 \left(\widehat{\Lambda} - 25D + \frac{1}{3} 4 (-2x_1^2 - 2x_3^2 - x_5^2) \right) + \frac{3}{4} (x_1^2x_3 - x_1x_3^2) \end{aligned} \quad (19)$$

В системе (19) при уменьшении параметра D и его прохождении через D_3 из нулевого решения ответвляется пара стационарных решений $\pm(0, \tilde{z}_3(D), 0)$ с индексом неустойчивости 1. Индекс неустойчивости $\pm(0, \tilde{z}_3(D), 0)$ сохраняется на промежутке $\left(\frac{\widehat{\Lambda}}{25}, \frac{\widehat{\Lambda}}{9}\right)$ изменения параметра D . Рассматриваемые ветви обретают устойчивость при $\widehat{D}_3 = \frac{\widehat{\Lambda}}{25}$ и сохраняют её при дальнейшем уменьшении D .

Метод центральных многообразий приводит, как и выше, к следующему заключению. При $D = \hat{D}_3 = \frac{\hat{\Lambda}}{25}$ в точках $\pm(0, \hat{z}_3(D), 0)$ имеет место обмен устойчивостью. Указанной бифуркации предшествует по параметру D седло-узловая бифуркация. Приведем в этой связи результаты численного анализа системы (19) при $\Lambda = -1,85$. В этом случае $\hat{D}_3 = 0,34$, точка $(0, 0, 837, 0)$ является седло-узловой, а точка $(0, 211, 0, 810, -0, 073)$ – седлом. Бифуркация рождения седло-узловой точки имеет место при $D \approx 0,036$. Она рождается вблизи точки $(0, 0665, 0, 833, -0, 029)$. При $D = 0,033$ точка $(0, 0, 859, 0)$ – устойчивая особая точка системы (19), а её особые точки $(0, 236, 0, 807, -0, 078)$, $(-0, 017, 0, 858, 0, 009)$ – седловые с индексом неустойчивости 1.

Положим теперь в системе (13) $z_9 = 0$. В полученной системе при уменьшении параметра D и его прохождении через \check{D}_3 от нулевого решения ответвляется пара стационарных решений $\pm(0, \check{z}_3(D), 0, 0)$ с индексом неустойчивости 1. Матрица устойчивости этой пары совпадает с определенной в (15) матрицей $M(D)$, в которой $\check{z}_3(D) = \hat{z}_3(D)$, $\hat{z}_9 = 0$. Согласно выполненному анализу у этой симметричной матрицы одно собственное значение при уменьшении параметра D остаётся на положительной полуоси. Таким образом, индекс неустойчивости $\pm(0, \hat{z}_3(D), 0, 0)$ не меняется.

Обратимся теперь к системе (13). Уже отмечалось, что пара её гладких ветвей стационарных решений $\hat{z}^\pm(D) = \pm(0, \hat{z}_3(D), 0, 0, \hat{z}_9(D))$ при уменьшении параметра D обретает при $D = \check{D}_3$ устойчивость в результате транскритической бифуркации. Пусть, как и выше, $\Lambda = -1,85$. Тогда $\check{D}_3 \approx 0,029$. При $D = 0,029$ справедливо равенство $\check{z}^+ = (0, 0, 916, 0, 0, 0, 070)$. Бифуркация рождения седло-узловой точки имеет место при $D \approx 0,032$. Седло-узловая точка рождается вблизи точки $(-0, 133, 0, 880, 0, 068, -0, 034, 0, 054)$. От неё при уменьшении параметра D ответвляются две ветви стационарных точек. Устойчивая ветвь приближается к $\check{z}^+(D)$ и обменивается с ней при $D = \check{D}_3$ устойчивостью. Если $D = 0,028$, то стационарные точки $(0, 085, 0, 918, -0, 039, 0, 029, 0, 069)$, $(-0, 255, 0, 865, 0, 153, -0, 052, 0, 040)$ – седловые с индексом неустойчивости 1, а стационарная точка $(0, 0, 924, 0, 0, 0, 073)$ $(0, 0, 893, 0)$ – устойчивый узел. Отметим, что $\{-1,707, -1,243, -0,0168\}$ – спектр матрицы $M(0,028)$.

Анализ матрицы $M(D)$ приводит к следующему заключению. Имеет место совместное воздействие стационарных структур $v_1^+(x, D)$, $v_5^+(x, D)$, $v_7^+(x, D)$ на стационарную структуру $v_3^+(x, D)$. Совместное воздействие стационарных структур $v_1^+(x, D)$, $v_5^+(x, D)$, $v_7^+(x, D)$, $v_{11}^+(x, D)$, $v_{13}^+(x, D)$ на стационарную структуру $v_3^+(x, D)$ приводит к матрице, имеющей при $D = 0,028$ следующий спектр: $\{-5,2575, -3,8278, -1,9431, -1,3870, -0,0004\}$.

Отметим теперь, что стационарные решения $\check{z}^\pm(D)$ сохраняют устойчивость при дальнейшем уменьшении D от $D = \check{D}_3$.

Выполненный выше анализ даёт веские основания для следующего заключения. Стационарные решения $v_3^\pm(x, D)$ в процессе уменьшения D меняют индекс неустойчивости. Дополнительным основанием для этого заключения являются приводимые далее результаты по эволюции структуры $v_3^+(x, D)$ при уменьшении параметра D .

5. О ПРЕДСТАВЛЕНИИ $v_3^+(x, D)$

Рассмотрим теперь вопрос об эволюции структуры $v_3^+(x, D)$ при уменьшении параметра D от критического значения $\tilde{D}_3 = \tilde{D}_3(\Lambda)$, при котором $v_3^+(x, D)$ входит в класс устойчивых структур. Приведем в этой связи результаты численного анализа для случая $\Lambda = -1,85$. Тогда $\tilde{D}_3 \approx 0,029$, а $v_3^+(x, 0,029)$ аппроксимируется функцией

$$0,916 \sin 3x + 0,070 \sin 9x \quad (20)$$

Отметим, что трехмодовой аппроксимацией $v_3^+(x, 0,029)$ является функция

$$0,917 \sin 3x + 0,071 \sin 9x + 0,004 \sin 15x \quad (21)$$

На рис. 5 графики функций (20), (21) неразличимы.

На рис. 5 имеется график функции

$$1,076 \sin 3x + 0,333 \sin 9x + 0,043 \sin 15x. \quad (22)$$

Эта функция является трехмодовой аппроксимацией решения $v_3^+(x, 0,01)$. Общая же тенденция в эволюции $v_3^+(x, D)$ при уменьшении параметра D от критического значения \tilde{D}_3 состоит в том, что рост амплитуды $v_3^+(x, D)$ по существу прекращается и имеет место расширение областей изменения переменной x , на которых функция $v_3^+(x, D)$ практически не меняется, сохраняя на них минимальное и максимальное значения. Сказанное иллюстрируют на рис.5. и графики функций

$$\begin{aligned} &1,150 \sin 3x + 0,333 \sin 9x + 0,152 \sin 15x, \\ &1,160 \sin 3x + 0,354 \sin 9x + 0,180 \sin 15x + 0,100 \sin 21x + 0,050 \sin 27x, \end{aligned}$$

Указанные функции являются аппроксимациями $v_3^+(x, 0,001)$ порядка 3, 5 соответственно. Волнистость этих графиков означает, что значение параметра $D = 0,001$ принадлежит той области изменения параметра D , где функция $v_3^+(x, D)$ ведет подобно функции $(-1 - L)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$. При аппроксимации функции $v_3^+(x, D)$ полиномами Фурье по системе $\sin 3x, \sin 9x, \dots, \sin 3(2k + 1)x, \dots$ наблюдается явление Гиббса. Отметим теперь, что функция $(-1 - L)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ является решением уравнения

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) = Lu(-x, t)u^3(-x, t), \quad t > 0,$$

в инвариантном подпространстве $\operatorname{span}\{\sin x, \sin 3x, \dots, \sin(2k + 1)x, \dots\}$ пространства H . Согласно [19], решение $(-1 - L)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$ в указанном пространстве – экспоненциально устойчиво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован вопрос о характере обретения устойчивости пары пространственно неоднородных стационарных решений уравнения (11), бифурцирующих из нулевого решения с индексом неустойчивости 1. Механизм обретения устойчивости каждого решения из этой пары реализуется по одному сценарию. В этой связи речь, для определенности, пойдет о ветви $v_3^+(x, D)$. На первом этапе уменьшения

коэффициента диффузии от бифуркационного значения имеет место рост амплитуды $v_3^+(x, D)$. Изменение формы структуры $v_3^+(x, D)$ носит здесь фактически линейный характер – вдоль моды $\sin 3x$. На втором этапе уменьшения D вступает в силу синхронизм и изменение структуры $v_3^+(x, D)$ определяется семейством функций $z_3(D) \sin 3x + z_9(D) \sin 9x$. Это обеспечивает структуре $v_3^+(x, D)$ лучшие условия для преодоления совместного воздействия трех структур $v_1^+(x, D)$, $v_5^+(x, D)$, $v_7^+(x, D)$. Преодолевая указанное воздействие, структура $v_3^+(x, D)$ обретает устойчивость. Переход структуры $v_3^+(x, D)$ в класс устойчивых режимов осуществляется по следующему сценарию. Реализуется седло-узловая бифуркация. Возникающая при этом устойчивая ветвь стационарных решений уравнения (11) обменивается устойчивостью с ветвью стационарных решений $v_3^+(x, D)$ при соответствующем значении D . Учитывая, что промежуток изменения D от рождения седло-узловой точки до обрыва устойчивостью относительно мал, естественно считать, что характер обретения устойчивости $v_3^+(x, D)$ определяется связкой: седло-узловая бифуркация – транскритическая бифуркация.

На следующем этапе уменьшения D решение $v_3^+(x, D)$ определяется тремя параметрами и представимо в виде $z_3(D) \sin 3x + z_9(D) \sin 9x + z_{15}(D) \sin 15x$. Рост амплитуды $v_3^+(x, D)$ практически прекращается. К совместному давлению на структуру $v_3^+(x, D)$ подключаются $v_{11}^+(x, D)$, $v_{13}^+(x, D)$. Однако указанная эволюция структуры $v_3^+(x, D)$ позволяет ей не только сохранять устойчивость, но и расширять, по видимому, область влияния. Отметим теперь, что при $D \rightarrow 0$ по норме пространства H имеет место $v_3^+(x, D) \rightarrow (-1 - \Lambda)^{1/2} \operatorname{sgn}(\sin 3x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю.* Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей // Новые принципы оптической обработки информации – М.: Наука. – 1990. – С. 263-325.
2. *Разгулин А. В.* Нелинейные модели оптической синергетики М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, МАКС Пресс, 2008. – 201 с.
3. *Накен Г.* Синергетика— М.: Мир. – 1980. – 404 с.
4. *Мищенко Е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.
5. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* Структуры и хаос в нелинейных средах – М.: Физматлит. – 2007. – 485 с.
6. *Разгулин А. В.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // ЖВММФ. – 1993. – Т. 33. N. 1. – С. 69-80.
7. *Разгулин А. В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // ЖВММФ.— 1993. – Т. 33. N. 10. – С. 1499-1508.
8. *Разгулин А. В.* Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5, №4. – С. 105-119.
9. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. – 1998. – V. 12 No. 2. – P. 261 – 278.
10. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. N.10. – С. 1394-1401.

11. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, N.5, – С. 645-654.
12. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференциальные уравнения. – 2004. – Т. 40, N.10, – С. 1348-1357.
13. Белан Е. П., Лыкова О. Б. Бифуркации вращающихся структур в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Нелінійні коливання. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 155-169.
14. Кащенко С. А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // ЖВММФ. – 1991. – Т. 31, №. 3. – С. 467-473.
15. Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physika D. – 1999. – V. 125. – P. 123-141.
16. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // Теор. и мат. физика. – 2004, – Т. 140, N 1, – С. 14-28.
17. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Ж. мат. физ., анализ, геом. – 2005. – Т. 1, № 1. – С. 3-34.
18. Белан Е. П. Оптическая буферность стационарных структур // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Т. 44, № 5. – С. 61-75.
19. Белан Е. П. Динамика стационарных структур в параболической задаче с отражением пространственной переменной // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – Т. 46, № 5. – С. 95-111.
20. Vorontsov M. A., Zheleznykh N. I., Ivanov V. Yu. Transverse interaction in 2-D feedback non-linear optical systems // Opt. and Quant. Electron. – 1988. – Т.22. – P. 301-318.
21. Воронцов М. А., Железных Н. И. Поперечная бистабильность и мультистабильность в нелинейных оптических системах с обратной связью // Мат. моделирование. – 1990. – Т.2, №2. – С. 31-38.
22. Железных Н. И. Исследование нелинейных управляемых оптических систем с обратной связью дисс. канд. физ.-мат. наук 05.13.16. – Москва. – 1991 – 115 с..
23. Чушкин В. А., Разгулин А. В. Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отраженным аргументом // Вестн. Моск. ун-та. – сер. 15, вычисл. матем. и киберн. – 2003, №2 – С. 13-20.
24. Бабин А. В., Вишик М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М. : Наука. – 1989. – 294 с.
25. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. – М.: Мир. – 1980. – 368 с.
26. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – М.: Мир, 1985. – 376 с.
27. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркация рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

Статья поступила в редакцию 14.11.2010

МОДЕЛЬ ПЛАНИРОВАНИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДЕНЕЖНЫХ РЕСУРСОВ, ПОСТУПАЮЩИХ ПО ИНВЕСТИЦИОННЫМ КОНТРАКТАМ

© Блыщик В.Ф., Донской Д.В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: *donskoy2_simf@mail.ru*

Abstract. The mathematical model of the optimum planning of the use of monies facilities acting from investors is represented in the article, with the purpose of implementation of some great number of projects providing the receipt of income. By the decision of tasks proper to this model, there is the optimum sequence of start of the chosen projects in time, providing a maximum of income.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наиболее общий случай функционирования экономического объекта, ведущего предпринимательскую деятельность, сводится к учету и планированию финансовых потоков. Абстрагируясь от конкретных видов экономической деятельности предприятия, можно говорить, что предприятие – формальный объект, который получает денежные ресурсы, расходует их и извлекает прибыль. Указанные действия происходят последовательно во времени.

Получение денежных ресурсов обычно называют инвестированием – вложением капитала с целью получения дохода. Инвестирование влечет денежные расходы, определяемые вложениями и согласованной прибылью инвесторов. Прибыль определяется аналогично: она возникает, когда само предприятие – объект управления – является инвестором.

Задача, рассматриваемая в статье, состоит в построении динамической модели оптимизации прибыли предприятия, работающего с инвесторами и являющегося инвестором для других предприятий. Модель должна учитывать движение только денежных ресурсов.

1. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Будем рассматривать временной промежуток планирования $(0; T]$, разбивая его на T интервалов $(0; 1]; (1; 2]; \dots; (j - 1; j]; \dots; (T - 1; T]$ условной длины, равной единице.

Инвесторы, сотрудничающие с предприятием, предоставляют ему определенные денежные средства. Эти средства, вместе с другими имеющимися у предприятия активами, составляют начальную сумму S_0 , которой предприятие обладает к началу планирования (временной промежуток $(0; 1]$). Согласно договорам с инвесторами, предприятие должно выплачивать инвесторам суммы V_j , $j \in \overline{1, T}$, в промежутках планирования $(j - 1; j]$.

Суммы V_j известны и определены согласно договорам инвестирования. В эти суммы входят дивиденды. Согласно договорам определен срок выплат, который и

определяет номер j полуинтервала $(j - 1; j]$ в промежутке планирования. Таким образом известна величина V_j и, собственно, индекс j .

Модель должна обеспечить покрытие исходной суммой средств S_0 и суммой денежных поступлений за период планирования всех суммарных выплат за этот период. При этом необходимо, чтобы все выплаты инвесторам были произведены своевременно (по известным индексам j в суммах V_j).

Введем следующие обозначения.

$A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$ – проекты (экономические мероприятия, в которых данное предприятие может выступить инвестором в промежутке планирования с целью извлечения прибыли);

$\Pi_1, \dots, \Pi_i, \dots, \Pi_m$ – прибыль по этим проектам;

$C_1, \dots, C_i, \dots, C_m$ – затраты денежных средств по этим проектам;

$R_1, \dots, R_i, \dots, R_m$ – возвращаемые суммы: $R_i = C_i + \Pi_i$;

$\tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_m$ – время оборота денег: через τ_i единиц времени затраты C_i «вернутся» с прибылью Π_i , обеспечивая вклад R_i ;

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-ый проект начат в промежутке планирования } j; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Потребуем выполнения следующих ограничений

1. Каждый проект в промежутке планирования может быть реализован не более одного раза:

$$\sum_{j=1}^T x_{ij} \leq 1, \quad i = \overline{1, m}. \quad (1)$$

2. Некоторые проекты с номерами из множества $I^* \subset \{1, 2, \dots, m\}$ являются обязательными для реализации. Множество I^* , вообще говоря, может быть и пустым.

$$\sum_{j=1}^T x_{ij} = 1, \quad i \in I^*. \quad (2)$$

Для формализации дальнейших ограничений будем использовать обозначение

$$Sg^+(a) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } a \geq 0; \\ 0, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Тогда $Sg^+(t - j - \tau_i) = 1$, если проект с номером i завершится в промежутке времени $(t - 1; t]$ возвращением суммы $R_i = C_i + \Pi_i$; здесь j определяет промежуток $(j - 1; j]$ начала проекта A_i , если он будет выбран для реализации.

Сумма

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t R_i x_{ij} Sg^+(t - j - \tau_i)$$

определяет объем денежных средств, которые будут возвращены от начала планирования до промежутка $(t - 1; t]$ включительно.

Сумма

$$\sum_{j=1}^t V_j$$

определяет денежные средства, которые согласно обязательствам должны быть выплачены инвесторам данного предприятия за время $(0; t]$. Сумма

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t C_i x_{ij}$$

определяет суммарные затраты на запуск проектов за время $(0; t]$.

Объем выплат за время от 0 до t составит

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t C_i x_{ij} + \sum_{j=1}^t V_j$$

3. Условие, обеспечивающее возможность всех выплат по договорам с инвесторами, приводит к T неравенствам

$$S_0 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t R_i S g^+(t - j - \tau_i) x_{ij} - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^t C_i x_{ij} - \sum_{j=1}^t V_j \geq 0, \quad t = \overline{1, T} \quad (3)$$

Требуется максимизировать линейную целевую функцию от $m \times T$ булевых переменных

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^T \Pi_i x_{ij} \rightarrow \max, \quad (4)$$

что соответствует максимизации прибыли за период планирования $(0; T]$, при одновременном выполнении ограничений (1), (2) и (3).

2. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СЕМЕЙСТВА ЗАДАЧ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ МОДЕЛЬЮ (1)-(4), И ИХ РЕШЕНИЕ

Значения $S g^+(t - j - \tau_i)$, входящие в левые части неравенств (3) заранее вычислить невозможно, поскольку для проекта A_i начало его выполнения, которое определяется номером j промежутка $(j - 1; j]$, неизвестно.

Этот номер становится известным, когда получено решение $\{x_{ij}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, T}\}$. Выражения $S g^+(t - j - \tau_i)$ вносят в ограничения (3) нелинейность, и рассматриваемое семейство задач, которое будет далее обозначаться $Z_{(1)-(4)}$, вообще говоря, является нелинейным. Следовательно, вычислительная проблема $Z_{(1)-(4)}$ не менее сложна чем $Z_{\text{ЦЛП}}$ с $\{0, 1\}$ -переменными, т.е. задачи,

определяемые соотношениями (1)-(4), в целом не менее сложны, чем задачи целочисленного линейного программирования. Поэтому проблема $Z_{(1)-(4)}$ является по меньшей мере NP-трудной [1] и для решения задач, определяемых моделью (1)-(4), целесообразно использование алгоритма типа «GREEDY» [2].

Алгоритм решения задачи состоит в следующем.

$$1^\circ \quad x_{ij} := 0, \quad i = \overline{1, m};$$

упорядочить номера проектов по убыванию прибыльности:

$$\frac{p_{i_1}}{c_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2}}{c_{i_2}} \geq \dots \geq \frac{p_{i_m}}{c_{i_m}}.$$

Полученный начальный нулевой набор значений переменных может не быть допустимым решением: ограничение (3), вообще говоря, может быть не выполненным из-за недостатка выбранных проектов.

- 2° В двойном цикле по $i = i_1, i_2, \dots, i_m$ и $j = 1, 2, \dots, T$ осуществляется присваивание $x_{ij} := 1$, $i \notin I^*$, пока не будут удовлетворены все ограничения (1)-(3), и далее, пока выбранное решение остается допустимым.

Согласно приведенному алгоритму, в процессе его выполнения предикат «решение является допустимым» может принимать значение «0», затем – «1», а потом – снова «0», что является условием окончания решения. В частности может оказаться, что этот предикат в силу ограничения (2) сразу же примет значение «1», а затем, обратившись в «0», определит момент окончания алгоритма.

Очевидно, что сложность алгоритма не превышает $O(m^2T^3)$, т.е. он является полиномиальным, что является свойством «GREEDY» алгоритмов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная в статье модель адекватно описывает процесс оптимального планирования использования денежных средств, поступающих по инвестиционным контрактам, для реализации проектов, обеспечивающих прибыль. Предполагается, что эта модель будет использоваться регулярно, так что промежутки планирования будут следовать непосредственно друг за другом.

Соответствующая построенной модели вычислительная проблема $Z_{(1)-(4)}$ по крайней мере не менее сложна, чем проблемы класса «NP» [1]. Поэтому для ее решения разработан приближенный алгоритм типа «GREEDY», имеющий полиномиальную сложность (принадлежащий классу «PTIME»).

Алгоритм успешно используется одной из фирм, осуществляющей коммерческую деятельность.

В дальнейшем целесообразно провести исследование модификации приведенного в статье алгоритма, учитывающую «надежность» p_i партнера по проекту A_i , $i = \overline{1, m}$, и применения в пункте 1° упорядочения

$$\frac{p_{i_1} \Pi_{i_1}}{C_{i_1} \tau_{i_1}} \geq \frac{p_{i_2} \Pi_{i_2}}{C_{i_2} \tau_{i_2}} \geq \dots \geq \frac{p_{i_m} \Pi_{i_m}}{C_{i_m} \tau_{i_m}}.$$

Такое упорядочение дает предпочтение надежным, быстрым в реализации, высокоприбыльным проектам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 1988. – 213 с.

Статья поступила в редакцию 15.11.2010

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО
УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ

© Ибрагимов Н.С.

БАКИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ИНФОРМАТИКИ
УЛ. АКАДЕМИКА ЗАХИД ХАЛИЛОВА 23, БАКУ, АЗЕРБАЙДЖАНСКАЯ РЕСПУБЛИКА
E-MAIL: *ns.ibragimov@gmail.com*

Abstract. In this paper we study the identification problem of determining the complex-valued coefficient for non-stationary equation quasi optics. In this case we prove existence and uniqueness of the solution of identification problem. In addition, the necessary condition for solution of identification problem of the variational inequality type is established.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики часто возникают в нелинейной оптике при изучении процессов распространения светового пучка в неоднородной среде, в которых неизвестными функциями обычно являются показатели преломления и поглощения среды, а также начальная фаза излученной волны [1]. Отметим, что ранее задачи идентификации об определении фазы излученной волны для стационарного уравнения квазиоптики изучены, например, в работах [1–3] и др., а задачи идентификации об определении вещественнозначного коэффициента, то есть коэффициента преломления среды в стационарном уравнении квазиоптики, другими словами, в нестационарном уравнении Шредингера ранее исследованы, например, в работах [4–10] и др.

В данной работе рассматривается задача идентификации об определении комплекснозначного коэффициента нестационарного уравнения квазиоптики, где вещественная часть комплексного коэффициента является показателем преломления, а мнимая часть является показателем поглощения неоднородной нелинейной среды. Следует отметить, что задача идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики впервые была изучена в работах [11, 12], которая по постановке и по классу решений начально-краевой задачи для уравнения квазиоптики отличается от настоящей работы. Поэтому исследование задачи идентификации об определении комплекснозначного коэффициента в нестационарном уравнении квазиоптики в настоящей работе представляет немалый интерес.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть D – ограниченная область n -мерного евклидова пространства E^n , Γ – граница области D , которая предполагается достаточно гладкой, например, $\Gamma \subset C^2$, $T > 0$, $L > 0$ – заданные числа, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq z \leq L$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – произвольная точка области D , $\Omega_t = D \times (0, t)$, $\Omega_z = D \times (0, z)$, $\Omega_{tz} = D \times (0, t) \times (0, z)$, $\Omega = \Omega_{TL}$, $S_{tz} = \Gamma \times (0, t) \times (0, z)$, $S = S_{TL}$, $C^k([0, T], B)$ – банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций

на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B , $L_p(D)$ – лебегово пространство функций, суммируемых в области D со степенью $p \geq 1$; $W_p^k(D)$, $W_p^{k,m}(Q)$, $p \geq 1, k \geq 0, m \geq 0$ – соболевы пространства, которые определены, например, в [13]; $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x, t, z)$ из $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ из пространства $L_2(\Omega)$, скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(u_1 \bar{u}_2 + \frac{\partial u_1}{\partial t} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial z} \right) dx dt dz,$$

$$\|u\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}} < +\infty;$$

$W_2^{2,0,0}(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из всех элементов $u = u(x, t, z)$ пространства $L_2(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, $j = \overline{1, n}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_p}$, $j, p = \overline{1, n}$, из пространства $L_2(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в нем определяются равенствами:

$$(u_1, u_2)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(u_1 \bar{u}_2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_1}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_j} + \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_j \partial x_p} \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial x_j \partial x_p} \right) dx dt dz,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{(u, u)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}};$$

$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega)$; $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ – подпространство пространства $W_2^{2,1,1}(\Omega)$, элементы которого обращаются в нуль на $S = \Gamma \times (0, T) \times (0, L)$; символ $\overset{\circ}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через c_j , $j = 0, 1, 2, \dots$.

Рассмотрим процесс, состояние которого описывается следующим нестационарным линейным уравнением квазиоптики [1]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_p} \right) + a(x) \psi + v_0(x, t, z) \psi + i v_1(x, t, z) \psi = f(x, t, z), \quad (x, t, z) \in \Omega, \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\psi = \psi(x, t, z)$ – волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля световой волны (светового пучка), распространяющейся вдоль оси z , $a_0 > 0$ – заданное число, a_{jp} , $j, p = \overline{1, n}$, $a(x)$ – заданные вещественнозначные измеримые ограниченные функции с измеримыми ограниченными производными $\frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l}$, $j, p, l = \overline{1, n}$, удовлетворяющие условиям:

$$a_{jp}(x) = a_{pj}(x), \quad j, p = 1, 2, \dots, n, \quad \mu_0 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \leq \sum_{j,p=1}^n a_{jp}(x) \xi_j \bar{\xi}_p \leq$$

$$\leq \mu_1 \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2, \quad \forall \xi_j \in \mathbf{C}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \forall x \in D, \quad \mu_0, \mu_1 = \text{const} > 0; \quad (2)$$

$$\left| \frac{\partial a_{jp}(x)}{\partial x_l} \right| \leq \mu_2, \quad \forall x \in D, \quad j, p, l = \overline{1, n}, \quad \mu_2 = \text{const} > 0; \quad (3)$$

$$0 \leq a(x) \leq \mu_3, \quad \forall x \in D, \quad \mu_3 = \text{const} > 0; \quad (4)$$

$f(x, t, z)$ – комплекснозначная измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$f \in W_2^{0,1,1}(\Omega), \quad (5)$$

$v_0(x, t, z), v_1(x, t, z)$ – неизвестные коэффициенты или показатели преломления и поглощения среды распространения световых волн. Пусть для уравнения (1) заданы следующие начальное и краевое условия:

$$\psi(x, 0, z) = \varphi_0(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad (6)$$

$$\psi(x, t, 0) = \varphi_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (7)$$

$$\psi|_S = 0, \quad (8)$$

где $\varphi_0(x, z)$ – начальная комплексная амплитуда электрического поля световой волны, $\varphi_1(x, t)$ – начальный фазовый профиль световой волны, которые удовлетворяют условиям:

$$\varphi_0 \in \dot{W}_2^{2,1}(\Omega_L), \quad \varphi_1 \in \dot{W}_2^{2,1}(\Omega_T). \quad (9)$$

Наша цель заключается в определении неизвестных коэффициентов $v_0(x, t, z), v_1(x, t, z)$ на основе получения заданного распределения $y_0 = y_0(x, z)$ световых волн в момент времени $t = T$, то есть на основе дополнительной информации:

$$\psi(x, T, z) = y_0(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad (10)$$

или на основе получения заданного распределения $y_1 = y_1(x, t)$ световых волн на поверхности области исследования, расположенного на расстоянии $z = L$ от поверхности передающего объекта, то есть на основе дополнительной информации:

$$\psi(x, t, L) = y_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (11)$$

где $y_0(x, z), y_1(x, t)$ – заданные комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям:

$$y_0 \in L_2(\Omega_L), \quad y_1 \in L_2(\Omega_T). \quad (12)$$

Пусть функция $v = (v_0, v_1)$, $v_0 = v_0(x, t, z)$, $v_1 = v_1(x, t, z)$, будет отыскана на множестве:

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), \quad v_m \in W_2^{0,1,1}(\Omega), \quad |v_m(x, t, z)| \leq b_m, \right. \\ \left. \left| \frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} \right| \leq d_m, \quad \left| \frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial z} \right| \leq c_m, \quad m = 0, 1, \quad \forall (x, t, z) \in \Omega \right\},$$

где $b_m > 0, d_m > 0, c_m > 0, m = 0, 1$ – заданные числа. Множество V будем называть множеством допустимых элементов. Определение $v = (v_0, v_1)$ из множества V при

условиях (1), (6)–(8), (10) или (11) является обратной задачей или задачей идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики (1). Вариационная постановка этой задачи заключается в минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \beta_0 \|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (13)$$

на множестве V при условиях (1), (6)–(8), где $\alpha \geq 0$ – заданное число, $\beta_0 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ – заданные числа такие, что $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$, $\omega = (\omega_0, \omega_1) \in H$ – заданный элемент, $H \equiv W_2^{0,1,1}(\Omega) \times W_2^{0,1,1}(\Omega)$. Ниже будем изучать задачу о минимизации функционала (13) на множестве V при условиях (1), (6)–(8), которую будем называть задачей идентификации (1), (6)–(8), (13).

При каждом $v \in V$ задачу об определении функции $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ из условий (1), (6)–(8), будем называть прямой задачей для нестационарного уравнения квазиоптики (1). Под решением прямой задачи (1), (6)–(8) при каждом $v \in V$ будем понимать функцию $\psi(x, t, z)$ из пространства $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям (1), (6)–(8) для почти всех $(x, t, z) \in \Omega$, то есть уравнению (1) для $\overset{\circ}{\forall} (x, t, z) \in \Omega$, условиям (6), (7) для $\overset{\circ}{\forall} (x, z) \in \Omega_L$, $\overset{\circ}{\forall} (x, t) \in \Omega_T$, соответственно, и краевому условию (8) для $\overset{\circ}{\forall} (\xi, t, z) \in S$.

Следует отметить, что прямая задача типа (1), (6)–(8) ранее была предметом исследования в работе [11], где было доказано существование и единственность слабого обобщенного решения из пространства $C^0([0, T], L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$ при более слабых условиях. В настоящем случае класс решений прямой задачи (1), (6)–(8) является пространством $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и данные задачи являются более гладкими функциями. Поэтому для изучения задачи идентификации (1), (6)–(8), (13) нам необходимо сначала изучить вопрос разрешимости прямой задачи (1), (6)–(8) при каждом $v \in V$ в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$. С этой целью, используя теорию вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве [14, 15] и метод Галеркина, можем установить справедливость утверждения:

Теорема 1. Пусть функции $a_{jp}(x)$, $j, p = \overline{1, n}$, $a(x)$, $f(x, t, z)$, $\varphi_0(x, z)$, $\varphi_1(x, t)$ удовлетворяют условиям (2)–(5), (9) соответственно, а граница области D достаточно гладкая. Тогда прямая задача (1), (6)–(8) при каждом $v \in V$ имеет единственное решение из пространства $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi\|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi_0\|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right), \quad (14)$$

где $c_0 > 0$ – постоянная, не зависящая от φ_0 , φ_1 и f .

Из этой теоремы и из вложения пространства $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ в пространство $C^0([0, T], L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$ следует, что функционал (13) имеет смысл в рассматриваемом классе решений прямой задачи (1), (6)–(8) при каждом заданном $v \in V$.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Сначала установим, что задача идентификации (1), (6)–(8), (13) имеет единственное решение при $\alpha > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, функции $y_0(x, z)$, $y_1(x, t)$ удовлетворяют условиям (12), а $\omega \in H$ – заданный элемент. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача идентификации (1), (6)–(8), (13) имеет единственное решение.

Доказательство. Сперва докажем непрерывность функционала

$$J_0(v) = \beta_0 \|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \tag{15}$$

на множестве V . Пусть $\Delta v \in B \equiv W_\infty^{0,1,1}(\Omega) \times W_\infty^{0,1,1}(\Omega)$ – приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v + \Delta v \in V$ и $\Delta\psi = \Delta\psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v + \Delta v) - \psi(x, t, z; v)$, где $\psi(x, t, z; v)$ – решение прямой задачи (1), (6)–(8) при $v \in V$. Из условий (1), (6)–(8) следует, что $\Delta\psi = \Delta\psi(x, t, z)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \Delta\psi}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_p} \right) + a(x) \Delta\psi + \\ & + (v_0(x, t, z) + \Delta v_0(x, t, z)) \Delta\psi + i(v_1(x, t, z) + \Delta v_1(x, t, z)) \Delta\psi = \\ & = -\Delta v_0(x, t, z) \psi - i \Delta v_1(x, t, z) \psi, \quad (x, t, z) \in \Omega, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\Delta\psi(x, 0, z) = 0, \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad \Delta\psi(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T, \tag{17}$$

$$\Delta\psi|_S = 0. \tag{18}$$

Оценим решение этой задачи. С этой целью обе части уравнения (16) умножим на функцию $\Delta\bar{\psi} = \Delta\bar{\psi}(x, t, z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_{tz} . В результате, из полученного равенства вычитая его комплексное сопряжение, имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial t} |\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial z} |\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta = -2 \int_{\Omega_{tz}} (v_1 + \Delta v_1) |\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta - \\ & -2 \int_{\Omega_{tz}} \text{Im}(\Delta v_0 \psi \Delta\bar{\psi}) dx d\tau d\theta - 2 \int_{\Omega_{tz}} \text{Re}(\Delta v_1 \psi \Delta\bar{\psi}) dx d\tau d\theta, \quad \forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]. \end{aligned}$$

Из этого равенства с помощью оценки (14) и принятых условий можем установить справедливость оценки:

$$\|\Delta\psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_1 \left(\|\Delta v_0\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_\infty(\Omega)}^2 \right), \tag{19}$$

для $\forall t \in [0, T], \forall z \in [0, L]$.

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v \in V$. Используя формулу (15), приращение функционала можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta J_0(v) &= J_0(v + \Delta v) - J_0(v) = \\ &= -2\beta_0 \int_{\Omega_L} \operatorname{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\Delta\bar{\psi}(x, T, z)]dx dz + \\ &\quad + 2\beta_1 \int_{\Omega_T} \operatorname{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t))\Delta\bar{\psi}(x, t, L)]dx dt + \\ &\quad + \beta_0 \|\Delta\psi(\cdot, T, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, L)\|_{L_2(\Omega_T)}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда в силу оценок (15), (19) и неравенства:

$$\|\psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_2 \|\psi\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \quad (21)$$

для $\forall t \in [0, T]$, $\forall z \in [0, L]$ получим справедливость неравенства:

$$|\Delta J_0(v)| \leq c_3 (\|v_0\|_{L_\infty(\Omega)} + \|v_1\|_{L_\infty(\Omega)} + \|v_0\|_{L_\infty(\Omega)}^2 + \|v_1\|_{L_\infty(\Omega)}^2).$$

Из этого неравенства получим следующее предельное соотношение:

$$|\Delta J_0(v)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|\Delta v\|_B \rightarrow 0 \quad (22)$$

для $\forall v \in V$. Из этого предельного соотношения следует непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V . Ввиду $J_0(v) \geq 0, \forall v \in V$, получим снизу ограниченность $J_0(v)$ на множестве V . Кроме того, нетрудно доказать, что множество V является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством равномерно выпуклого пространства $H \equiv W_2^{0,1,1}(\Omega) \times W_2^{0,1,1}(\Omega)$ [16, стр.182]. Тогда можем утверждать, что выполняются все условия теоремы о существовании и единственности решения в задачах невыпуклой оптимизации, известной из работы [17]. Поэтому в силу утверждения этой теоремы заключаем, что существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача идентификации (1), (6)-(8), (13) имеет единственное решение. Теорема 2 доказана. \square

Эта теорема указывает на то, что задача идентификации (1), (6)-(8), (13) при $\alpha > 0$ имеет решение не для всякого $\omega \in H$. Следующее утверждение показывает, что задача идентификации имеет хотя бы одно решение при $\alpha \geq 0$ для любого $\omega \in H$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда существует хотя бы одно решение задачи идентификации (1), (6)-(8), (13) при $\alpha \geq 0$ для любого $\omega \in H$.

Доказательство этой теоремы проводится методикой работы [18] с установлением слабой полунепрерывности снизу функционала $J_\alpha(v)$ на множестве v при $\alpha \geq 0$.

3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В этом разделе будем изучать вопрос необходимого условия для решения задачи идентификации (1), (6)–(8), (13). Пусть $\phi = \phi(x, t, z)$ является решением следующей сопряженной задачи:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + ia_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} - \sum_{p,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_p} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + a(x)\phi + v_0(x, t, z)\phi - iv_1(x, t, z)\phi = 0, \quad (x, t, z) \in \Omega, \quad (23)$$

$$\phi(x, T, z) = -2i\beta_0(\psi(x, T, z) - y_0(x, z)), \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad (24)$$

$$\phi(x, t, L) = -\frac{2i\beta_1}{a_0}(\psi(x, t, L) - y_1(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (25)$$

$$\phi|_S = 0, \quad (26)$$

где $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ – решение прямой задачи при $v \in V$.

Под решением сопряженной задачи будем понимать функцию $\phi = \phi(x, t, z)$ из пространства $B_0 \equiv C^0([0, T], L_2(\Omega_L)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$, удовлетворяющую следующему интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \left(-i \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} - ia_0 \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial z} - \sum_{j,p=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{jp}(x) \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x_p} \right) + \right. \\ & \left. + a(x)\bar{\eta}_1 + v_0(x, t, z)\bar{\eta}_1 - iv_1(x, t, z)\bar{\eta}_1 \right) dxdt dz = \\ & = -2\beta_0 \int_{\Omega_L} (\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\bar{\eta}_1(x, T, z) dx dz - \\ & - 2\beta_1 \int_{\Omega_T} (\psi(x, t, L) - y_1(x, t))\bar{\eta}_1(x, t, L) dx dt + \\ & + i \int_{\Omega_L} \phi(x, 0, z)\bar{\eta}_1(x, 0, z) dx dz + ia_0 \int_{\Omega_T} \phi(x, t, 0)\bar{\eta}_1(x, t, 0) dx dt \end{aligned} \quad (27)$$

для любой функции $\eta_1 = \eta_1(x, t, z)$ из пространства $\overset{\circ}{W}{}^{2,1,1}(\Omega)$.

С помощью замены $\tau = T - t$, $\theta = L - z$ сопряженную задачу (23)–(26) можно свести к начально-краевой задаче, которая является комплексно сопряженной прямой задаче (1), (6)–(8). Поэтому, используя методику сглаживания данных и теорему 1, можем установить справедливость утверждения о том, что сопряженная задача (23)–(26) имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\phi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\phi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq$$

$$\leq c_4 \left(\|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \right), \quad (28)$$

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L].$$

Для установления необходимого условия в задаче идентификации (1), (6)–(8), (13) сначала необходимо найти формулу для первой вариации функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любой функции $w = w(x, t, z)$ из B и любого элемента $v \in V$ существует первая вариация функционала $J_\alpha(v)$ и справедливо следующее выражение для первой вариации:

$$\begin{aligned} \delta J_\alpha(v, w) = & \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) w_0(x, t, z) dx dt dz - \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) w_1(x, t, z) dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 (v_m(x, t, z) - \omega_m(x, t, z)) w_m(x, t, z) dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial t} \right) \frac{\partial w_m(x, t, z)}{\partial t} dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial w_m(x, t, z)}{\partial z} dx dt dz, \quad (29) \end{aligned}$$

где $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ – решение прямой, а $\phi = \phi(x, t, z) \equiv \phi(x, t, z; v)$ – решение сопряженной задачи при $v \in V$, $w = (w_0, w_1) = (w_0(x, t, z), w_1(x, t, z))$.

Доказательство. Используя формулу (13) и (20) приращение функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$ можем представить в виде:

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(v) = & J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) = \\ = & 2\beta_0 \int_{\Omega_L} \operatorname{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z)) \Delta \bar{\psi}(x, T, z)] dx dz + \\ & + 2\beta_1 \int_{\Omega_T} \operatorname{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t)) \Delta \bar{\psi}(x, t, L)] dx dt + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 (v_m(x, t, z) - \omega_m(x, t, z)) \Delta v_m(x, t, z) dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial t} \right) \frac{\partial \Delta v_m(x, t, z)}{\partial t} dx dt dz + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \Delta v_m(x, t, z)}{\partial z} dx dt dz + \\
 &+ \beta_0 \|\Delta \psi(\cdot, T, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\Delta \psi(\cdot, \cdot, L)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \alpha \|\Delta v\|_H^2, \quad (30)
 \end{aligned}$$

где $\Delta \psi = \Delta \psi(x, t, z)$ – решение начально-краевой задачи (16)–(18).

Используя сопряженную задачу и начально-краевую задачу (16)–(18), можно установить справедливость равенства:

$$\begin{aligned}
 &2\beta_0 \int_{\Omega_L} \operatorname{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\Delta \bar{\psi}(x, T, z)] dx dz + \\
 &+ 2\beta_1 \int_{\Omega_T} \operatorname{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t))\Delta \bar{\psi}(x, t, L)] dx dt = \\
 &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}[(\psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z))\Delta v_0(x, t, z)] dx dt dz - \\
 &- \int_{\Omega} \operatorname{Im}[(\psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z))\Delta v_1(x, t, z)] dx dt dz + \\
 &+ \int_{\Omega} \operatorname{Re}[(\Delta \psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z))\Delta v_0(x, t, z)] dx dt dz - \\
 &- \int_{\Omega} \operatorname{Im}[(\Delta \psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z))\Delta v_1(x, t, z)] dx dt dz. \quad (31)
 \end{aligned}$$

С учетом этого приращение функционала $J_{\alpha}(v)$ можем написать в виде:

$$\begin{aligned}
 \Delta J_{\alpha}(v) &= \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z))\Delta v_0(x, t, z) dx dt dz - \\
 &- \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi(x, t, z)\bar{\phi}(x, t, z))\Delta v_1(x, t, z) dx dt dz + \\
 &+ 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 (v_m(x, t, z) - \omega_m(x, t, z))\Delta v_m(x, t, z) dx dt dz + \\
 &+ 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial t} \right) \frac{\partial \Delta v_m(x, t, z)}{\partial t} dx dt dz + \\
 &+ 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial z} \right) \frac{\partial \Delta v_m(x, t, z)}{\partial z} dx dt dz + R(\Delta v), \quad (32)
 \end{aligned}$$

где $R(\Delta v)$ определяется формулой:

$$R(\Delta v) = \beta_0 \|\Delta \psi(\cdot, T, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\Delta \psi(\cdot, \cdot, L)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \alpha \|\Delta v\|_H^2 + \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\Delta \psi \bar{\phi}) \Delta v_0 dx dt dz - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\Delta \psi \bar{\phi}) \Delta v_1 dx dt dz. \quad (33)$$

Отсюда в силу оценок (14), (19), (3) имеем:

$$|R(\Delta v)| \leq c_5 \|\Delta v\|_B^2, \quad (34)$$

где постоянная $c_5 > 0$ не зависит от Δv .

Используя формулу (32) и неравенство (34), с помощью методики работы [19] можем установить формулу (29) для первой вариации функционала $J_{\alpha}(v)$ на любом элементе $v \in V$. Теорема 4 доказана. \square

Наконец, сформулируем необходимое условие для решения задачи идентификации в виде вариационного неравенства.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 2. Пусть, кроме того, $V_* \equiv \left\{ v^* \in V : J_{\alpha}(v^*) = J_{\alpha^*} = \inf_{v \in V} J_{\alpha}(v) \right\}$ – множество решений задачи идентификации (1), (6)–(8), (13). Тогда для любого элемента $v^* \in V_*$ необходимо выполнение неравенства:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \operatorname{Re}(\psi^*(x, t, z) \bar{\phi}^*(x, t, z))(v_0(x, t, z) - v_0^*(x, t, z)) dx dt dz - \\ & - \int_{\Omega} \operatorname{Im}(\psi^*(x, t, z) \bar{\phi}^*(x, t, z))(v_1(x, t, z) - v_1^*(x, t, z)) dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 (v_m^*(x, t, z) - \omega_m(x, t, z))(v_m(x, t, z) - v_m^*(x, t, z)) dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m^*(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial t} - \frac{\partial v_m^*(x, t, z)}{\partial t} \right) dx dt dz + \\ & + 2\alpha \int_{\Omega} \sum_{m=0}^1 \left(\frac{\partial v_m^*(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial \omega_m(x, t, z)}{\partial z} \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial v_m(x, t, z)}{\partial z} - \frac{\partial v_m^*(x, t, z)}{\partial z} \right) dx dt dz \geq 0, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\psi^*(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v^*)$, $\phi^*(x, t, z) \equiv \phi(x, t, z; v^*)$ – соответственно решения прямой и сопряженной задач при $v^* \in V$.

Доказательство этой теоремы проводится с помощью формулы (29) для первой вариации функционала $J_{\alpha}(v)$, определенного на множестве V .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты:

- Доказаны теоремы о существовании и единственности решения прямой задачи идентификации (1), (6) –(8), (13) в пространстве $W_2^{2,1,1}(\Omega)$.
- Установлена формула для первой вариации функционала $J_\alpha(v)$.
- Сформулировано необходимое условие для решения задачи идентификации (1), (6) –(8), (13) в виде вариационного неравенства (35).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен И.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985. – 335 с.
2. Шамеева Т.Ю. Об оптимизации в задаче о распространении светового пучка в неоднородной среде // Вестн. Московск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. – 1985, №1. – С. 12 –19.
3. Потанов И.М., Разгулин А.В., Шамеева Т.Ю. Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для уравнения типа Шредингера // Вестн. Московск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. – 1987, №1. – С. 8-18.
4. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала // ДАН СССР. – 1988, т.303, №5. – С. 1044-1048.
5. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантовомеханическими системами // Автоматика и телемехан. – 1989, №12. – С. 27-38.
6. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного уравнения Шредингера // Изв. АН Азерб. Сер. физ-техн. и матем. наук. – 1994, т.XV, №5-6. – С. 58-61.
7. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера // Дифференц. уравнения. – 1997, т.33, № 12. – С. 1691-1698.
8. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление квантовомеханическим потенциалом // Труды ИММ АНА. – 1998, т. XVIII. – С. 75-80.
9. Искендеров А.Д. Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управления». – Баку, 2001. – С. 6-36.
10. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского гос. ун-та. – 2007. – С. 3-56.
11. Ягубов Г.Я., Ибрагимов Н.С. Задача оптимального управления для нестационарного уравнения квазиоптики // В сб.: «Проблемы матем. модел. и опт. управление». – Баку, 2001. – С. 49-57.
12. Yildiz B., Kılıçoğlu O., Yağubov G. Optimal control problem for nonstationary Schrodinger equation // Numerical methods for partial differential equations. – 2009, 25. – Pp. 1195-1203.
13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 408 с.
14. Гохберг И.Н., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967.
15. Нижник Л.П. Обратная нестационарная задача рассеяния. – Изд-во «Наукова Думка», Киев, 1973. – 182 с.
16. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
17. Goebel M. On existence of optimal control // Math. Nachr. – 1979, vol.93. – Pp. 67 –73.
18. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.
19. Мину М. Математическое программирование. – М.:Наука, 1990. – 488 с.

Статья поступила в редакцию 27.10.2010

ПОИСК МАКСИМАЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ОБЛАСТИ ПРИЗНАКОВОГО ПРОСТРАНСТВА В ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ

© Ильченко А.В.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: *ilch@crimea.edu*

Abstract. The properties of characteristic vector families for intervals of the feature space are under investigation. The search algorithms for the closed characteristic vectors and vectors generating the maximum intervals of the specified feature space region are considered in the paper.

ВВЕДЕНИЕ

Алгоритмы и методы кластерного анализа во многом составляют основу приложений анализа данных. Рост объёма данных, подлежащих обработке, предъявляет ряд требований к используемым алгоритмам кластеризации: возможность находить кластеры в пространствах большой размерности, наглядность, лёгкость интерпретации полученных результатов, отсутствие необходимости приведения исходных данных к какому-либо каноническому виду и так далее.

В некоторых случаях выполнение многих из этих требований могут обеспечить алгоритмы и методы анализа формальных понятий [1, 2, 6], сеточные методы.

Целью статьи является рассмотрение понятия индикаторного вектора интервала признакового пространства, изучение свойств семейства таких векторов, построение и обоснование алгоритма поиска замкнутых индикаторных векторов и индикаторных векторов, порождающих максимальные интервалы заданной области признакового пространства.

1. МАКСИМАЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ОБЛАСТИ ПРИЗНАКОВОГО ПРОСТРАНСТВА

$\{A_0, A_1, \dots, A_{n-1}\}$ – семейство множеств, каждое из которых конечно и линейно упорядоченно. Прямое произведение множеств семейства A определяет n -мерное признаковое пространство S :

$$S = A_0 \times A_1 \times \dots \times A_{n-1}.$$

Иногда на обозначение A_j ссылаются как на измерение (атрибут, домен) признакового пространства. Поскольку множество значений по каждому A_j линейно упорядоченно, можно говорить о положительном и отрицательном направлениях по соответствующему измерению.

$n_i = |A_i|$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ – мощность домена A_i .

Элементы домена A_i можно перенумеровать и, в дальнейшем, всегда считать, что $A_i = \{0, 1, \dots, n - 1\}$.

Пусть $H \subseteq S$ – некоторая область признакового пространства S . Интервал I , содержащийся в области H , называется максимальным интервалом области H , если не существует его собственного надинтервала, содержащегося в области H .

Множество всех максимальных интервалов области H называется сокращенной интервальной структурой этой области [4]. Каждую область H признакового пространства S можно представить в виде объединения интервалов ее сокращенной интервальной структуры.

Удобно точки области H называть единичными точками (1-точки) так, как если бы была задана индикаторная функция этой области, а интервалы области H называть 1-интервалами. Те точки признакового пространства, которые не содержатся в области H , будем называть 0-точками признакового пространства.

2. ВЕКТОРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ

У пространства S , размерность которого n , имеется $2n$ направлений. В каждом измерении по два направления: отрицательное и положительное. Любой интервал может быть получен из интервала, представляющего пространство S , удалением некоторого числа значений из доменов, по соответствующим направлениям.

Для описания интервала будет использоваться вектор длины $2n$:

$$A = (a_0, a_1, \dots, a_{2i}, a_{2i+1}, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}) \quad (1)$$

Компоненты такого вектора рассматриваются парами. Каждая пара соответствует одному из измерений признакового пространства. Каждая компонента такой пары отвечает одному из направлений соответствующего измерения.

Пара a_{2i}, a_{2i+1} соответствует i -му измерению.

Компонента a_{2i} отвечает отрицательному направлению i -го измерения.

Компонента a_{2i+1} – положительному направлению.

Значение каждой компоненты такой пары – число значений, удалённых из домена A_i по соответствующему направлению.

Такой вектор будем называть индикаторным вектором интервала или векторным описанием интервала.

Если вектор A является индикаторным вектором интервала I , то удобно говорить, что вектор A порождает интервал I (обозначение $A(I)$), а интервал I порождается вектором A (обозначение $I(A)$).

Когда вектор A является описанием непустого интервала, то для каждого измерения признакового пространства сумма компонент по этому измерению меньше мощности домена значений этого измерения:

$$a_{2i} + a_{2i+1} < n_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2)$$

Если для какого-либо из измерений $a_{2i} + a_{2i+1} \geq n_i$, это означает, что такой вектор является описанием пустого подмножества.

Примечание 1. Для нас представляют интерес непустые интервалы. Поэтому вектора-описания, в которых хотя бы для одного измерения выполняется условие

$a_{2i} + a_{2i+1} \geq n_i$, исключаются из рассмотрения. Если всё же потребуются использовать пустое подмножество, то в качестве индикаторного вектора будет использоваться вектор, в котором значение каждой компоненты равно мощности домена по соответствующему измерению признакового пространства, то есть вектор, в котором

$$a_{2i} = a_{2i+1} = n_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

3. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК НА МНОЖЕСТВЕ ИНДИКАТОРНЫХ ВЕКТОРОВ

Определение 1. Пусть A, B – индикаторные вектора. Вектор A лексически предшествует вектору B , если существует направление k такое, что $a_k < b_k$, а по всем направлениям, предшествующим направлению k , значения компонент векторов A и B совпадают:

$$A \lesssim B \Leftrightarrow \exists k(a_k < b_k, \forall j < k(a_j = b_j)). \quad (4)$$

Для сокращения записи будет использоваться следующее обозначение:

$$A \lesssim_k B \Leftrightarrow a_k < b_k, \forall j < k(a_j = b_j). \quad (5)$$

Тогда, определение лексического порядка запишется в виде

$$A \lesssim B \Leftrightarrow \exists k(A \lesssim_k B). \quad (6)$$

Удобно индикаторные вектора перебирать в лексическом порядке, начиная с вектора $(0, 0, \dots, 0, 0)$, который является индикаторным вектором признакового пространства S .

Алгоритм вычисления вектора, непосредственно лексически следующим за текущим вектором, основан на следующих соображениях.

Лексический порядок – порядок линейный. Поэтому вектора, расположенные в лексическом порядке, можно пронумеровать числами $0, 1, \dots$, начиная с вектора $(0, 0, \dots, 0, 0)$. Тогда переход от текущего вектора, к вектору непосредственно лексически следующим за текущим, осуществляется прибавлением единицы к номеру текущего вектора и записи векторного представления полученного числа. То есть, индикаторный вектор можно рассматривать как позиционную запись неотрицательного целого числа.

Отличия от обычного позиционного представления чисел заключаются в следующем:

1. Для каждой пары позиций, соответствующих одному из измерений, используется своё основание, которое совпадает с мощностью домена этого измерения.
2. Для каждой пары позиций, соответствующих одному из измерений, должно выполняться ограничение (2), что позволяет исключить из рассмотрения пустые интервалы.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕПОСРЕДСТВЕННО ЛЕКСИЧЕСКИ СЛЕДУЮЩЕГО ИНДИКАТОРНОГО ВЕКТОРА

Псевдокод алгоритма.

Вход. A – текущий индикаторный вектор;

Выход. $A + 1$ – индикаторный вектор, непосредственно лексически следующий за вектором A .

Метод.

- 1) $i = n - 1$
- 2) **while** $i \geq 0$
- 3) $a_{2i+1} = a_{2i+1} + 1$
- 4) **if** $a_{2i} + a_{2i+1} < n_i$ **then return** A
- 5) $a_{2i+1} = 0$
- 6) $a_{2i} = a_{2i} + 1$
- 7) **if** $a_{2i} < n_i$ **then return** A
- 8) $a_{2i} = 0$
- 9) $i = i - 1$
- 10) **end while**
- 11) **return** A

Приведенный псевдокод основан на соображениях предшествующего раздела.

В дальнейшем, вычисление вектора, непосредственно лексически следующего за текущим вектором A , будет обозначаться $A + 1$.

5. ЗАМКНУТЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ПРИЗНАКОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Пусть $A \subseteq S$ – некоторое подмножество точек признакового пространства.

Обозначим $[A]$ наименьший интервал пространства S , содержащий подмножество точек A (интервальное замыкание, интервальная оболочка множества A).

Операция интервального замыкания обладает обычными свойствами операции замыкания [5]:

$$A \subseteq B \Rightarrow [A] \subseteq [B], \quad (7)$$

$$A \subseteq [A], \quad (8)$$

$$[[A]] = [A]. \quad (9)$$

Обозначим $I(S)$ – семейство всех интервалов признакового пространства S .

$I \in I(S)$ – фиксированный интервал из этого семейства.

$I \cap H$ – подмножество точек области H , содержащихся в интервале I (1-точки пространства S , содержащиеся в интервале I).

$[I \cap H]$ – наименьший интервал пространства S , содержащий подмножество $I \cap H$ (интервальное замыкание подмножества 1-точек пространства S , содержащихся в интервале I).

Определение 2. Интервал $I \in I(S)$ называется замкнутым (относительно области H), если $[I \cap H] = I$.

Утверждение 1. *Каждый 1-интервал является замкнутым интервалом.*

Доказательство. Пусть $I \in I(S)$ и $I \subseteq H$.

Так как $I \subseteq H$, то $I \cap H = I$ и, следовательно, $[I \cap H] = [I]$.

Это, с учётом очевидного равенства $[I] = I$, позволяет сделать вывод, что $[I \cap H] = I$. \square

Примечание 2. В силу утверждения 1, максимальные 1-интервалы имеет смысл искать среди замкнутых интервалов.

Примечание 3. Замкнутые интервалы интересны и сами по себе. Например, в анализе формальных понятий [1], [2] их можно рассматриваться как содержания «интервальных» формальных понятий. В задачах распознавания образов замкнутые интервалы могут быть использованы для построения различных гипотез [6].

6. РЕШЁТКА ИНТЕРВАЛОВ И РЕШЁТКА ИНДИКАТОРНЫХ ВЕКТОРОВ

Для семейства $I(S)$ выполняется свойство замыкания [3] относительно операции пересечения. Поэтому $I(S)$, упорядоченное отношением включения \subseteq , является полной решёткой.

Обозначим $A(S)$ семейство всех индикаторных векторов признакового пространства S .

Между множествами $I(S)$ и $A(S)$ существует взаимно-однозначное соответствие (с учётом примечания 1):

$$I(A) \leftrightarrow A(I).$$

На векторах семейства $A(S)$ следующим образом определяется отношение предшествования \leq :

$$A \leq B \Leftrightarrow I(B) \subseteq I(A). \quad (10)$$

Так определённое отношение предшествования является отношением порядка, двойственным к порядку, определяемому отношением включения \subseteq на множестве $I(S)$. Поэтому, множество $A(S)$, упорядоченное отношением \leq , является двойственным к решётке $\langle I(S), \subseteq \rangle$ и, следовательно, является полной решёткой.

С использованием введенного отношения предшествования, определяются отношения строгого $<$ и непосредственного \prec предшествования.

$$A < B \Leftrightarrow A \leq B \text{ и } A \neq B.$$

$$A \prec B \Leftrightarrow A < B \text{ и } \exists C \in A(S) : A < C < B.$$

Утверждение 2. *Пусть $A, B \in A(S)$.*

$$A \leq B \Leftrightarrow a_j \leq b_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (11)$$

Доказательство. $A \leq B \Leftrightarrow I(B) \subseteq I(A)$

\Leftrightarrow по каждому из $2n$ направлений признакового пространства, в интервале $I(A)$ удалено не больше значений, чем удалено по соответствующим направлениям в интервале $I(B)$

$$\Leftrightarrow a_j \leq b_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad \square$$

Из утверждения 2 следует

Утверждение 3. Решёточный порядок \leq на множестве индикаторных векторов с сохранением порядка вложен в лексический порядок \lesssim :

$$A \leq B \Rightarrow A \lesssim B. \quad (12)$$

Так же, из утверждения 2 следует

Утверждение 4.

$$A \prec B \Leftrightarrow \exists! k(a_k + 1 = b_k, \forall j \neq k(a_j = b_j)). \quad (13)$$

7. ОПЕРАТОР ЗАМКНУТИЯ НА РЕШЕТКЕ ИНДИКАТОРНЫХ ВЕКТОРОВ

Пусть $H \subseteq S$ – область пространства S . На множестве $A(S)$ определим оператор $''$, который каждому индикаторному вектору A ставит в соответствие индикаторный вектор A'' , порождающий наименьший интервал, содержащий те же 1-точки, что и интервал, порождаемый исходной вектором A .

Результат действия оператора $''$, удобно представить в виде следующей последовательности шагов:

$$A \Rightarrow I(A) \Rightarrow I(A) \cap H \Rightarrow [I(A) \cap H] \Rightarrow A''.$$

В силу своего определения, оператор $''$ обладает следующими свойствами, аналогичными свойствам (7) – (9):

$$A \leq B \Rightarrow A'' \leq B'', \quad (14)$$

$$A \leq A'', \quad (15)$$

$$(A'')'' = A'', \quad (16)$$

и, следовательно, является оператором замыкания [3] на множестве $A(S)$.

Вектор A'' называется замыканием вектора A .

Определение 3. Индикаторный вектор A называется замкнутым, если он совпадает со своим замыканием, то есть, если $A'' = A$.

В силу определения оператора замыкания, именно замкнутые индикаторные вектора порождают интересующие нас замкнутые интервалы.

Если у вектора A его компоненты обозначены как a_j , $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$, то соответствующие компоненты вектора A'' будут обозначаться a_j'' , $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$.

В силу монотонности оператора замыкания (14) и утверждения 2, компоненты векторов A и A'' удовлетворяют условию

$$a_j \leq a_j'', \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1. \quad (17)$$

Пусть $A \in A(S)$ и $A \lesssim_m A + 1$. В этом случае

$$A = (a_0, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_{2n-1}) \text{ и } A + 1 = (a_0, \dots, a_m + 1, 0, \dots, 0), \text{ где}$$

$$m = \max\{j : a_j \neq 0, j = 0, 1, \dots, 2n - 1, \} \quad (18)$$

то есть, m – наибольшее направление признакового пространства, по которому компонента a_j вектора $A + 1$ отлична от нуля.

Обозначим M – подмножество всех векторов, которым вектор A предшествует по компоненте m :

$$M = \{D \in A(S) \mid A \lesssim_m D\}. \quad (19)$$

Любой вектор $C \in A(S)$ такой, что $A \lesssim_k C$ и $k < m$ находится лексически дальше от вектора A , чем каждый из векторов подмножества M . Поэтому, именно среди векторов подмножества M следует искать замкнутый вектор, лексически ближайший к вектору A . И только, если в подмножестве M искомого вектора не окажется, переходить к векторам, которым вектор A лексически предшествует по направлениям, меньшим направления m .

В множестве $A(S)$, упорядоченном отношением лексического порядка, подмножество M является интервалом. Обозначим этот интервал $[B, B++]$. Нижняя граница этого интервала B – вектор, непосредственно лексически следующий за вектором A , то есть, $B = A + 1$. Вектор $B++$ определяется по вектору $A + 1$ и соответствующему измерению m (18).

Утверждение 5. $\forall A \in A(S) : A \lesssim (A + 1)''$.

Утверждение 6. Пусть $A \in A(S)$. Если $A \lesssim_m A + 1$, D – замкнутый вектор такой, что $A \lesssim_m D$, то $(A + 1)'' \leq D$ и, следовательно, $(A + 1)'' \lesssim D$.

Утверждение 7. Пусть $A \in A(S)$. Если $A \lesssim_m A + 1$, D – замкнутый вектор такой, что $A \lesssim_m D$, то $A \lesssim_m (A + 1)''$.

Из утверждений 6 и 7 вытекают следующие утверждения.

Утверждение 8. Если $A \lesssim_m A + 1$ и $A \lesssim_m (A + 1)''$, то $(A + 1)''$ – лексически наименьший замкнутый вектор среди замкнутых индикаторных векторов, лексически следующих за вектором A .

Утверждение 9. Если $(A + 1)''$ не является лексически наименьшим замкнутым вектором среди замкнутых индикаторных векторов, лексически следующих за вектором A , то не выполняется условие $A \lesssim_m (A + 1)''$.

Последнее утверждение позволяет сформулировать условие проверки, является ли вектор $(A + 1)''$ искомым индикаторным вектором.

Утверждение 10. Пусть

$$k = \min\{j \mid a_j'' \neq a_j, j = 0, 1, \dots, 2n - 1\}, \quad (20)$$

то есть, k – наименьшее направление признакового пространства, по которому компоненты векторов A и $(A + 1)''$ не совпадают. Тогда, если $k < m$, то $(A + 1)''$ не является искомым вектором.

Таким образом, если выполняются условия утверждения 10, интервал $[B, B++]$, где $B = A + 1$, не содержит замкнутых векторов и его элементы следует пропустить. Для этого следует перейти к вектору, непосредственно лексически следующему за вектором $B++$.

Интервал $[B, B++]$ удобно называть исключаемым интервалом незамкнутых векторов.

8. АЛГОРИТМ ПОИСКА ЛЕКСИЧЕСКИ СЛЕДУЮЩЕГО ЗАМКНУТОГО ИНДИКАТОРНОГО ВЕКТОРА

Алгоритм $lexicalNextClose(A)$ – алгоритм поиска лексически наименьшего замкнутого индикаторного вектора, следующего за вектором A .

Псевдокод алгоритма $lexicalNextClose(A)$.

Вход. A – текущий замкнутый индикаторный вектор;

Выход. C – лексически наименьший замкнутый индикаторный вектор, следующий за вектором A .

Метод.

- 1) $B = A + 1$
- 2) $C = A''$
- 3) **repeat**
- 4) $m = \max\{j \mid b_j \neq 0, j = 0, 1, \dots, 2n - 1\}$
- 5) $k = \min\{j \mid b_j \neq c_j, j = 0, 1, \dots, 2n - 1\}$
- 6) **if** $k < m$ **then begin**
- 7) $B = B + +$
- 8) $B = B + 1$
- 9) $C = B''$
- 10) **end**
- 11) **until** $k < m$
- 12) **return** C

Пояснения к псевдокоду алгоритма $lexicalNextClose(A)$.

Шаг 1. B – вектор, непосредственно лексически следующий за A .

Шаг 2. C – замыкание вектора B .

Шаги 3 - 11. Цикл, осуществляющий вычисление искомого вектора.

Шаг 4. m – наибольшее измерение признакового пространства, по которому компонента вектора B отлична от нуля.

Шаг 5. k – наименьшее измерение признакового пространства, по которому компоненты векторов B и C не совпадают.

Шаг 6. Проверка, является ли вычисленное C искомым вектором. Если условие выполняется, то – не является.

Шаг 7. Пропуск лексического интервала незамкнутых векторов, следующих за текущим вектором B .

Шаг 8. Замена текущего значения вектора B на вектор, непосредственно лексически следующий за вектором $B + +$.

Шаг 9. C – замыкание вектора B .

Шаг 11. Проверка, найден ли искомым вектор.

Шаг 12. Возврат найденного вектора C .

9. ИСКЛЮЧАЕМЫЙ ИНТЕРВАЛ

Пусть $A \in A(S)$ – 1-вектор, $I(A)$ – порождаемый им интервал.

$$A_{\leq}^{\Delta} = \{D \in A(S) \mid A \leq D\}. \quad (21)$$

Элементы подмножества A_{\leq}^{Δ} – это 1-вектора, порождающие подинтервалы интервала $I(A)$.

$$A_{\lesssim}^{\Delta} = \{D \in A(S) \mid A \lesssim D\}. \quad (22)$$

Элементы подмножества A_{\lesssim}^{Δ} – все вектора, лексически следующие за вектором A .

В силу линейности лексического порядка \lesssim , подмножество A_{\lesssim}^{Δ} – цепь в упорядоченном множестве $\langle A(S), \lesssim \rangle$, начинающаяся с вектора A .

Рассмотрим на подмножестве A_{\lesssim}^{Δ} подцепочку максимальной длины, начальный элемент которой вектор A , и состоящую из элементов подмножества A_{\leq}^{Δ} , непосредственно лексически следующих друг за другом.

Такая подцепочка образует некоторый интервал $[A, B]$ подмножества A_{\lesssim}^{Δ} . Вектор A – нижняя грань этого интервала. Вектор B – это вектор из подмножества A_{\leq}^{Δ} такой, что непосредственно лексически следующий за ним вектор (вектор $B + 1$) уже не является элементом подмножества A_{\leq}^{Δ} .

1-интервалы, порождаемые векторами из интервала $[A, B]$, не являются максимальными (за исключением, может быть, вектора A), и, следовательно, могут быть исключены из рассмотрения (пропущены). Таким образом, от вектора A можно сразу перейти к вектору B .

Интервал $[A, B]$ будем называть исключаемым интервалом 1-векторов.

Вычисление вектора B по заданному вектору A осуществляется следующим образом.

Пусть $A = (a_0, \dots, a_{2n-1})$ и

$$m = \max\{i \mid a_{2i} \neq 0 \vee a_{2i+1} \neq 0, i = 0, 1, \dots, n-1\}. \quad (23)$$

то есть, m – наибольшее измерение признакового пространства S , в котором хотя бы по одному из направлений есть отличная от нуля компонента.

Различаются два случая: $a_{2m+1} = 0$ и $a_{2m+1} \neq 0$.

Каждый из этих случаев рассмотрим отдельно.

Случай 1). $a_{2m+1} = 0$.

Здесь вектора A и B имеют следующий вид:

$$A = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, 0, \dots, 0), \quad (24)$$

$$B = (a_0, \dots, a_{2m-1}, b_{2m}, b_{2m+1}, \dots, b_{2n-1}), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} b_{2m} &= (n_m - 1), & b_{2m+1} &= 0, \\ b_{2m+2} &= (n_{m+1} - 1), & b_{2m+3} &= 0, \\ &\dots & & \\ b_{2n-2} &= (n_{n-1} - 1), & b_{2n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для компонент векторов A и B выполняются условия покомпонентного предшествования:

$$a_0 = b_0, \dots, a_{2m-1} = b_{2m-1}, a_{2m} \leq b_{2m}, \dots, a_{2n-1} \leq b_{2n-1}.$$

Отсюда, в силу (11), $A \leq B$ и, следовательно, $B \in A_{\leq}^{\Delta}$.

Кроме того, так как $A \leq B$, то $A \lesssim B$, а значит, $[A, B]$ – интервал в A_{\lesssim}^{Δ} .

Каждый вектор $D \in [A, B]$ имеет вид:

$$D = (a_0, \dots, a_{2m-1}, d_{2m}, d_{2m+1}, \dots, d_{2n-1}),$$

и для его компонент выполняются условия

$$a_j \leq d_j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1.$$

Поэтому $A \leq D$ и, следовательно, $D \in A_{\leq}^{\Delta}$.

Таким образом, $[A, B] \subseteq A_{\leq}^{\Delta}$.

Покажем, что вектор, непосредственно лексически следующий за вектором B , не принадлежит подмножеству A_{\leq}^{Δ} .

Пусть $C = B + 1$ – вектор, непосредственно лексически следующий за вектором B .

В векторе C компонента $c_{2m} = 0$. Так как $a_{2m} \neq 0$, то $c_{2m} \not\leq a_{2m}$ и, следовательно, $A \not\leq C$, то есть, $C \notin A_{\leq}^{\Delta}$.

Случай 2). $a_{2m+1} \neq 0$.

Здесь вектора A и B имеют следующий вид:

$$A = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, a_{2m+1}, 0, \dots, 0), \quad (27)$$

$$B = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, b_{2m+1}, \dots, b_{2n-1}), \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} b_{2m} &= a_{2m}, & b_{2m+1} &= (n_m - 1) - a_{2m}, \\ b_{2m+2} &= (n_{m+1} - 1), & b_{2m+3} &= 0, \\ &\dots & & \\ b_{2n-2} &= (n_{n-1} - 1), & b_{2n-1} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Для этого случая обоснование почти полностью повторяет предыдущий вариант, за исключением того, что в векторе C теперь компонента $c_{2m+1} = 0$.

Таким образом, по заданному 1-вектору A , используя (26) или (29), можно вычислить исключаемый интервал 1-векторов $[A, B]$.

10. РАСШИРЕНИЕ ИСКЛЮЧАЕМОГО ИНТЕРВАЛА

A^- – вектор, непосредственно предшествующий вектору A по направлению $2m + 1$.

Так как

$$A = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, a_{2m+1}, 0, \dots, 0), \text{ то, с учётом (13),}$$

$$A^- = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m}, a_{2m+1} - 1, 0, \dots, 0).$$

$A^- \leq A$ и, следовательно, $I(A) \subseteq I(A^-)$ и $A^- \lesssim A$.

Вектор A^- – это не 1-вектор. Если бы вектор A^- порождал 1-интервал, то $[A^-, B]$ был бы исключаемым интервалом 1-векторов, $A \in [A^-, B]$ и, поэтому, вектор A был бы исключён из рассмотрения.

Рассмотрим интервал J , определяемый следующим образом:

$$J = I(A^-) \setminus I(A). \quad (30)$$

Так как, $I \cap I(A) = \emptyset$ и $I(A^-) = J \cup I(A)$, то интервалы J и $I(A)$ порождают разбиение интервала A^- .

$I(A)$ – 1-интервал, $I(A^-)$ – не 1-интервал. Следовательно, именно интервал J , является интервалом, содержащим хотя бы одну 0-точку признакового пространства. Поэтому, любой интервал, содержащий интервал J , – не 1-интервал.

Индикаторный вектор интервала J :

$$A(J) = (a_0, \dots, a_{2m-1}, (n_m - 1) - (a_{2m+1} - 1), a_{2m+1} - 1, 0, \dots, 0). \quad (31)$$

Пусть $[A, B]$ – исключаемый интервал 1-векторов, порождаемый вектором A .

Рассмотрим следующие два шага.

Шаг 1).

$$B + 1 = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m} + 1, 0, \dots, 0). \quad (32)$$

Так как, $B + 1 \leq A(J)$, то $I(A(J)) \subseteq I(B + 1)$ и, следовательно, $B + 1$ – не 1-интервал.

$$C = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m} + 1, a_{2m+1} - 1, (n_{m+1} - 1), 0, \dots, (n_{n-1} - 1), 0). \quad (33)$$

Так как, $C \leq A(J)$, то $I(A(J)) \subseteq I(C)$ и, следовательно, C – не 1-интервал.

Далее, $B + 1 \lesssim C$ и $\forall D \in [B + 1, C] : D \leq C$. Следовательно, $I(C) \subseteq I(D)$ и D – не 1-вектор. Поэтому, $[B + 1, C]$ можно исключить из рассмотрения, тем самым расширив интервал $[A, B]$ до интервала $[A, C]$.

Шаг 2).

$$C + 1 = (a_0, \dots, a_{2m-1}, a_{2m} + 1, a_{2m+1}, 0, 0, \dots, 0, 0). \quad (34)$$

Так как, $A \leq C + 1$, то $I(C + 1) \subseteq I(A)$ и, следовательно, $[C + 1, (C + 1) + +] \subseteq A \stackrel{\Delta}{\leq}$. Поэтому, интервал $[C + 1, (C + 1) + +]$ можно исключить из рассмотрения, расширив интервал $[A, C]$ до интервала $[A, (C + 1) + +]$.

Обозначим $B = (C + 1) + +$ и расширенный таким образом исключаемый интервал снова запишем в виде $[A, B]$.

Шаги 1) и 2) повторять до тех пор, пока компоненты вектора B станут равными

$$b_{2m} = (n_m - 1) - a_{2m+1}, \quad b_{2m+1} = a_{2m+1}. \quad (35)$$

Примечание 4. Расширение исходного интервала $[A, B]$ проводилось только для случая $a_{2m+1} \neq 0$. Если $a_{2m+1} = 0$, то выражения (29) и (35) совпадут. Поэтому выражение (35) рассматривается как обобщение выражений (29) и (35).

Примечание 5. Вектор B , полученный в результате указанных вычислений будем обозначать $A + +t$, тем самым подчёркивая, что для его вычисления использован вектор A и информация по измерению t этого вектора (23).

11. АЛГОРИТМ ПОИСКА 1-ВЕКТОРОВ, ПОРОЖДАЮЩИХ МАКСИМАЛЬНЫЕ 1-ИНТЕРВАЛЫ

Алгоритм *listMinAntichains* – алгоритм поиска всех 1-векторов, порождающих максимальные 1-интервалы.

Псевдокод алгоритма *listMinAntichains*.

Вход. Нет;

Выход. B – список всех 1-векторов, порождающих максимальные 1-интервалы.

Метод.

- 1) **if** $(0, \dots, 0)$ – 1-вектор **return** $\{(0, \dots, 0)\}$
- 2) $B = \emptyset$
- 3) $A = (0, \dots, 0)''$
- 4) **repeat**
- 5) **if** $(A - 1)$ – 1-вектор **then begin**
- 6) **if** $\exists D \in B : D < A$ **then** $B = B \cup \{A\}$
- 7) $m = \max\{i \mid a_{2i} \neq 0 \vee a_{2i+1} \neq 0, i = 0, 1, \dots, n - 1\}$
- 8) $A = A + +m$
- 9) **end**
- 10) $A = \text{lexicalNextClose}(A)$
- 11) **until** $A \neq (0, \dots, 0)''$
- 12) **return** B

Пояснения к псевдокоду алгоритма *listMinAntichains*.

- Шаг 1. Если вектор, порождающий признаковое пространство, – 1-вектор, то он порождает единственный максимальный 1-интервал.
- Шаг 2. Изначально множество B искомых 1-векторов пусто.
- Шаг 3. A – текущий замкнутый вектор – замыкание вектора, порождающего признаковое пространство.
- Шаги 4 - 11. Цикл, осуществляющий вычисление искомого множества векторов.
- Шаг 6. Если текущий 1-вектор A – это максимальный 1-вектор, то включить его в множество B .
- Шаг 7. m – наибольшее измерение признакового пространства S , по которому хотя бы по одному из направлений есть отличная от нуля компонента.
- Шаг 8. Перейти к правой границе исключаемого интервала.
- Шаг 10. Найти замкнутый вектор, лексически следующий за текущим вектором A .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты: Определено понятие интервала, замкнутого относительно заданной области признакового пространства и показано, что искомые максимальные интервалы являются замкнутыми. Введено понятие индикаторного вектора интервала, как способа представления интервалов признакового пространства. На множестве таких векторов определён оператор замыкания, порождающий замкнутые индикаторные вектора, реализующие замкнутые интервалы. Предложен алгоритм поиска в лексикографическом порядке всех замкнутых индикаторных векторов. Предложен алгоритм поиска в лексикографическом порядке всех индикаторных векторов, порождающих максимальные интервалы области признакового пространства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ganter, B., Wille, R.* Formal Concept Analysis – Mathematical Foundations. Springer-Verlag, Berlin., 1999.
2. *Gugisch, R.* Lattice Contexts – a Generalization in Formal Concept Analysis. Handout to ICCS 2000, Darmstadt(2000) <http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/ralfg/papers/diplom.ps.gz>.
3. *Биркгоф Г.* Теория решёток: Пер. с англ. – М.: Наука, 1984. – 568 с.
4. *Ильченко А.В.* Компактная компонентная и сокращённая интервальная структуры признакового пространства, порождаемые эмпирическими данными // Сб.Таврический вестник информатики и математики. – 2005. – №2. – С. 126-142.
5. *Колмогоров А.К., Фомин С.В.* Элементы теории функция и функционального анализа. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1989. – 624 с.
6. *Кузнецов С.О.* Автоматическое обучение на основа анализа формальных понятий // Автоматика и телемеханика. – 2001. – №10. – С. 3-27.

Статья поступила в редакцию 10.12.2010

UDC 517.983

ON CONTINUOUS SPECTRUM OF TRANSPORT OPERATOR

© Cheremnikh E. V., Ivasyk G.V.

NATIONAL UNIVERSITY "LVIVSKA POLITECHNIKA"
12, S.BANDERY STREET, 79013, LVIV, UKRAINE
E-MAIL: *Ivasyk-G@yandex.ru*

Abstract. It is proved that the point $\zeta = 0$ in difference of other points of continuous spectrum is point of branchement of logarithmic type of the resolvent of transport operator.

INTRODUCTION

We consider partial case of so-called "equation of transmission". There is much literature concerning (during many years) different problems in this direction. One of such problems, namely the problem of neutron transport, leads to the operator

$$Lf(x, \mu) = -i\mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + c(x) \int_{-1}^1 f(x, \mu') d\mu' \quad (1)$$

in the space $L^2(D)$, where $D = R \times [-1, 1]$. In [1] in the case

$$c(x) = \begin{cases} c, & |x| < a \\ 0, & |x| > a, c = \text{const} \end{cases}$$

it was obtained that continuous spectrum of the operator L coincides with real axis R and that the set of eigen-values is finite. In [2] in the case $c \in L^\infty(R)$, $\text{supp } c \subset [-a, a]$, $c(x) \geq 0$ well-known functional model is applied.

1. STATEMENT OF THE PROBLEM

Among other publications we mention only several of them, which are the closest to our problem. In [3] the authors use Friedrichs' model to study the operator L . In the case of exponentially decreasing potential the sufficient condition of finiteness of point spectrum was obtained. The methods of this work were used in [4] in more general case of the operator

$$Lf(x, \mu) = -i\mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + a(x) \int_{-1}^1 b(\mu') f(x, \mu') d\mu'. \quad (2)$$

As it was proved in [4] the value $\zeta = 0$ only can be the point of accumulation of point spectrum of the operator L if the following conditions hold:

a) the function $a(x)$ is locally integrable and satisfies the estimate

$$|a(x)| \leq Me^{-|x|}, \quad x \in R, \quad (3)$$

where $\varepsilon > 0$, $M > 0$ are some constants;

b) the function $b(\mu)$, $\mu \in (-1, 1)$ admits analytic prolongation $b(z)$ into the circle $|z| < 1 + \varepsilon$.

In that work it was proved that resolvent has analytic prolongation over the semi-axis $(-\infty; 0)$ and $(0, \infty)$. But in this work the point of spectrum $\zeta = 0$ remains to be unstudied.

Our aim is to prove that the point $\zeta = 0$ is the point of branchment of the resolvent. Apropos in a similar situation in the work [3] it was proved that the point $\zeta = 0$ was spectral singularity of considered operator. Like [3-4] we use unitary equivalence of the operator L to the operator of Friedrichs' model.

2. PRELIMINARY

Here we give some notations and results from [4].

Let H be Hilbert space of the functions on two variables $\varphi(s, \mu)$, $(s, \mu) \in D$ with norm

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_R \int_{-1}^1 |\varphi(s, \mu)|^2 \frac{1}{|\mu|} ds d\mu$$

and let $G = L^2(R)$. We denote by (\cdot, \cdot) , $(\cdot, \cdot)_H$ scalar product in the spaces G and H respectively. We denote by $S : H \rightarrow H$ the operator of multiplication by independent variable $(S\varphi)(\tau, \mu) \equiv \tau\varphi(\tau, \mu)$, $\tau \in R$ with maximal domain of definition. Using Fourier transformation it was proved in [4] that the operator $L : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ is unitary equivalent to the operator $T = S + A^*B : H \rightarrow H$ (Friedrich's model) with bounded operators $A^* : G \rightarrow H$, $B : H \rightarrow G$ under the form

$$A^*c(s, \mu) = \frac{1}{2\pi} \int_R a_1(y)c(y)e^{-iy\frac{s}{\mu}} dy, \quad (4)$$

and

$$B\varphi(x) = a_2(x) \int_R e^{ix\tau} \left(\int_{-1}^1 b(\mu')\varphi(\tau\mu', \mu') d\mu' \right) d\tau. \quad (5)$$

We use the traditional form of perturbation A^*B , that's why we don't need the operator $A : H \rightarrow G$ itself. The representations (4)-(5) contain the factors $a_{1,2}(x)$ of arbitrary factorization such that

$$a(x) = \overline{a_1(x)}a_2(x), \quad |a_1(x)| = |a_2(x)|.$$

The relation between the resolvents $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ and $S_\zeta = (S - \zeta)^{-1}$ of the operators T and S is the following $T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} B S_\zeta$, where $K(\zeta) = 1 + B S_\zeta A^*$.

3. ESTIMATE OF THE OPERATOR $K(\zeta)$, $\zeta \rightarrow 0$

It is shown in [3] that

$$((K(\zeta) - 1)c)(x) = \int_R k(x, y, \zeta)c(y)dy, \quad \text{where} \quad k(x, y, \zeta) = \frac{1}{2\pi} a_2(x) \overline{a_1(y)} I(x - y, \zeta) \quad (6)$$

and

$$I(u, \zeta) = \int_R l(\tau, \zeta) e^{i u \tau} d\tau, \quad u = x - y, \quad \text{where} \quad l(\tau, \zeta) = \int_{-1}^1 \frac{b(\mu')}{\tau \mu' - \zeta} d\mu', \quad \text{Im}(\zeta) \neq 0. \quad (7)$$

Let δ be arbitrary value such that $0 < \delta < \varepsilon$ (see (3)) and $\Omega_{\pm}(\delta) = \{\zeta : |\zeta| < \delta, \pm \text{Im} \zeta > 0\}$. By $\ln \zeta$ we denote the branch of logarithmic function which is continuous in the domain $\zeta \notin [0, \infty)$ and such that $\ln(-1) = \pi i$.

If $b(\mu) \equiv 1$ then we denote by $I_0(u, \zeta)$ the expression $I(u, \zeta)$ (see [3])

$$I_0(u, \zeta) = \gamma(\zeta) + R_0(u, \zeta), \quad \zeta \in \Omega_{\pm}(\delta), \quad (8)$$

where

$$\gamma(\zeta) = -\pi i \text{ sign } \nu \cdot \ln \zeta, \quad \nu = \text{Im} \zeta \quad (9)$$

and the term $R_0(u, \zeta)$ admits the estimate

$$|R_0(u, \zeta)| \leq M \left[\frac{1}{|u|^{\frac{1}{\varepsilon}}} + |u| \right], \quad p > 1, \quad \zeta \in \Omega_{\pm}(\delta), \quad M = \text{const}, \quad (10)$$

which is independent of ζ . Underline that $\gamma(\zeta) \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow 0$ and the decomposition like (8) is not unique. Let us introduce the following notation

$$\|b\|_{C^1} = \sup_{|z| < 1 + \varepsilon} |b(z)| + \sup_{|z| < 1 + \varepsilon} |b'(z)| \quad \text{and} \quad N_0(\delta) = \sup_{\zeta \in \Omega_{\pm}(\delta)} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{|t - \zeta|^q} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (11)$$

Lemma 1. *The function $I(u, \zeta)$, defined in the relations (6)-(7), can be represented in the form*

$$I(u, \zeta) = b(0)\gamma(\zeta) + R(u, \zeta), \quad (12)$$

where

$$|R(u, \zeta)| \leq N_1(\delta) \left[\frac{1}{|u|^{\frac{1}{\varepsilon}}} + |u| \right], \quad p > 1, \quad \zeta \in \Omega_{\pm}(\delta), \quad (13)$$

where $N_1(\delta) = CN_0(\delta) \|b\|_{C^1}$ and C denote some constant, which is independent of δ, ζ and also of the function $b(\mu)$.

Proof. Let us denote $b_1(z) \equiv b(z) - b(0)$. We substitute in (7) the decomposition $b(z) = b_1(z) + b(0)$, separating $I_0(u, \zeta)$ (what correspond to with $b(z) \equiv 1$) in the right part of (7) and taking into account the decomposition $I_0(u, \zeta)$ itself (8), we obtain for $\zeta \in \Omega_{\pm}(\delta)$

$$I(u, \zeta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{t - \zeta} f_{-\omega, 1}(t|u|) dt - \int_0^{\infty} \frac{1}{t + \zeta} f_{\omega, 1}(t|u|) dt + b(0)\gamma(\zeta) + b(0)R_0(u, \zeta), \quad (14)$$

where

$$f_{-\omega, 1}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{y} \left[b_1\left(\frac{\tau}{y}\right) e^{i\omega y} + b_1\left(-\frac{\tau}{y}\right) e^{-i\omega y} \right] dy. \quad (15)$$

Integrating by parts, we get the estimate

$$|f_{-\omega,1}(\tau)| \leq \begin{cases} 2 \|b\|_{C^1}, & \tau \in (0, 1) \\ 4 \|b\|_{C^1} / \tau, & \tau \in (1, \infty). \end{cases} \quad (16)$$

It follows from here that the interval of integrations $(0, \infty)$ in (14) can be changed by the interval $(0, \varepsilon)$ (the value of ε see in (3)) and the difference between the integrals will have the estimate like (13). In the integral (15) we put $\tau = t|u|$ and make the change of variable $\frac{y}{|u|} = \theta$, then in view that $u = \text{sign } u \cdot |u| = \omega |u|$ we have:

$$f_{-\omega,1}(t|u|) = \int_t^\infty \frac{1}{\theta} \left[b_1 \left(\frac{t}{\theta} \right) e^{iu\theta} + b_1 \left(-\frac{t}{\theta} \right) e^{-iu\theta} \right] d\theta. \quad (17)$$

According to (14) we need the value $t < \varepsilon$. It's easy to verify that in (17) the interval of integrating (t, ∞) can be changed by (t, ε) and therefore we can consider the integrals

$$g_{\pm}(t, u) = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\theta} \cdot b_1 \left(\pm \frac{t}{\theta} \right) e^{\pm iu\theta} d\theta. \quad (18)$$

In the right part of (14) it remains to consider the sum $I_+(u, \zeta) + I_-(u, \zeta)$, where

$$I_{\pm}(u, \zeta) = \int_0^\varepsilon \frac{g_{\pm}(t, u)}{t - \zeta} dt - \int_0^\varepsilon \frac{g_{\pm}(t, -u)}{t + \zeta} dt. \quad (19)$$

□

Theorem 1. *Let $\delta < \varepsilon$, then*

$$K(\zeta) - 1 = \frac{b(0)}{2\pi} \gamma(\zeta)(\bullet, a_1)a_2 + Q(\zeta), \quad \zeta \in \Omega_{\pm}(\delta), \quad (20)$$

where the elements a_1, a_2 are defined by the factorization $a(x) = \overline{a_1(x)}a_2(x)$, $|a_1(x)| = |a_2(x)|$ and the operator $Q(\zeta) : L^2(R) \rightarrow L^2(R)$ is compact with the norm bounded uniformly with respect to ζ , namely

$$\|Q(\zeta)\| \leq M \|a\|_{\delta}, \quad \|a\|_{\delta}^2 \equiv \int_R |a(x)|^2 e^{2\delta|x|} dx, \quad \zeta \in \Omega_{\pm}(\delta). \quad (21)$$

Proof. According to (6) and (12), we have

$$k(x, y, \zeta) = \frac{b(0)}{2\pi} \gamma(\zeta) a_2(x) \overline{a_1(y)} + \frac{1}{2\pi} a_2(x) \overline{a_1(y)} R(x - y, \zeta),$$

what proves the decomposition (20). Further

$$\|Q(\zeta)\|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_R \int_R |a_2(x)|^2 |a_1(y)|^2 |R(x - y, \zeta)|^2 dx dy.$$

Due to the relations $|a_2(x)|^2 = |a(x)|$, $|a_1(y)|^2 = |a(y)|$, we obtain

$$\begin{aligned} \|Q(\zeta)\|^2 &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int_R \int_R |a(x)| |a(y)| e^{\delta|x|} e^{\delta|y|} [e^{-\delta(|x|+|y|)} |R(x-y, \zeta)|^2] dx dy \leq \\ &\leq M_0^2 \left(\int_R \int_R |a(x)|^2 |a(y)|^2 e^{2\delta|x|} e^{2\delta|y|} dx dy \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= M_0^2 \left(\left(\int_R |a(x)|^2 e^{2\delta|x|} dx \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = M_0^2 \|a\|_\delta^2, \end{aligned} \tag{22}$$

where due to the estimate (13) under the condition $p > 2$ the value

$$M_0^2 = \left(\int_R \int_R e^{-2\delta(|x|+|y|)} |R(x-y, \zeta)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

is finite. Theorem is proved. □

We substitute (18) in (19), change the order of integrating and we make the change of variable $\frac{t}{\theta} = \tau$, then in the case of sign „+“

$$I_+(u, \zeta) = \int_0^1 b_1(\tau) \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{iu\theta}}{\theta\tau - \zeta} d\theta \right) d\tau.$$

By integrating by parts, we have the decomposition

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{iu\theta}}{\theta\tau - \zeta} d\theta = \frac{1}{\tau} \left[e^{iu\varepsilon} \ln(\varepsilon\tau - \zeta) - e^{-iu\varepsilon} \ln(-\varepsilon\tau - \zeta) - iu \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{iu\theta} \ln(\theta\tau - \zeta) d\theta \right], \tag{22}$$

which leads us to the estimate $|I_+(u, \zeta)| \leq C \|b\|_{C^1} [|u| + 1]$, $\zeta \in \Omega_{\pm}(\delta)$, $C = \text{const}$. The value $I_-(u, \zeta)$ has analogic estimate. Really (let us consider $b_1(\tau) \equiv 1$),

the value $\int_0^1 \ln(\varepsilon\tau - \zeta) d\tau$ is bounded for $\zeta \in \Omega_{\pm}(\delta)$ if the integral

$$G(\zeta) \equiv \int_0^1 [\ln(\varepsilon\tau - \zeta) - \ln\varepsilon\tau] d\tau = \int_0^1 \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon\tau}\right) d\tau$$

is bounded too. If $\tau = |\zeta|s$, then

$$G(\zeta) = |\zeta| \int_0^{\frac{1}{|\zeta|}} \ln\left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon|\zeta|} \cdot \frac{1}{s}\right) ds$$

and using the inequality $\left| \ln \left(\left(1 - \frac{\zeta}{\varepsilon|\zeta|} \cdot \frac{1}{s} \right) \right) \right| \leq \frac{M}{s}$, $s > 1$, $M = \text{const}$, we obtain $|G(\zeta)| \leq C |\zeta| \ln \frac{1}{|\zeta|}$ or $|G(\zeta)| \leq C$, $\zeta \in \Omega_{\pm}(\delta)$. Lemma is proved.

Now we consider $\zeta = 0$ as the point of the spectrum of the operator L (or the operator T).

Statement 1. *The value $\zeta = 0$ is not eigen-value of the operator L .*

Proof. If (see(2))

$$-i\mu \frac{\partial f}{\partial x}(x, \mu) + a(x) \int_{-1}^1 b(\mu') f(x, \mu') d\mu' \equiv 0, \quad f \in L^2(D).$$

then integrating from 0 to x gives

$$-i\mu(f(x, \mu) - f(0, \mu)) = B(x),$$

where the function

$$B(x) = - \int_0^x a(t) \left(\int_{-1}^1 b(\mu') f(t, \mu') d\mu' \right) dt$$

has not limit value $\lim_{x \rightarrow +\infty} B(x) = B_{\infty}$. Then $i\mu f(0, \mu) = B_{\infty}$ and

$$-i\mu f(x, \mu) + B_{\infty} = B(x). \quad \text{But } f(x, \mu) = (B(x) - B_{\infty})/(-i\mu) \notin L^2(D),$$

what proves Statement. □

Statement 2. *The value $\zeta = 0$ is point of branchment of linear form of the resolvent $(T_{\zeta}\varphi, \psi)$, where φ, ψ are smooth elements.*

Proof. We consider the functions $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, which admit analytic prolongation in the band $|\text{Im}\zeta| < \varepsilon$. According to (20)

$$|K_+(\tau)| = c |\ln |\tau|| + O(1), \quad \tau \rightarrow 0.$$

So, the function $K_+(\zeta)$ is not bounded if $\zeta \rightarrow 0$. By the same way $\zeta = 0$ is not pole of the function $K_+(\zeta)$ what proves the statement. □

CONCLUSION

As a result in this work it was obtained: the point $\zeta = 0$ in difference of other points of continuous spectrum is point of branchment of logarithmic type of the resolvent of transport operator. The operators which are more general than (1) are interesting in different applications so the same problem will be actual for such operators.

REFERENCES

1. *Lehner I.* The spectrum of neutron transport operator for the infinit slab // I.Math. Mech. 11(1962), n.2, P. 173-181.
2. *Kuperin Yu.A., Naboko S.N., Romanov R.V.* Spectral analysis of a one speed transmission operator and functional model, *Funct. anal. and its appl.* (1999), v.33, n.2, P. 47-58 (Russian).
3. *Diaba F., Cheremnikh E.V.* On the point spectrum of transport operator, *Math. Func, Anal. and Topology*, v.11, n.1, 2005, P. 21-36.
4. *Ivasyk G.V., Cheremnikh E.V.* Friedrich's model for transport operator, *Journal of National University "Lvivska Politechnika", Phys. and math. sciences*, v.643, n.643, 2009, P. 30-36 (Ukrainian).
5. *Latrach K.* On an averaging result for transport equations. *C.R.Acad. Sci Paris*, t.333, Serie I, 2001, P. 433-438.

Стаття поступила в редакцію 07.10.2010

Анашкин О.В., Довжик Т.В., Митько О.В. *Прямой метод Ляпунова в задаче об устойчивости систем с импульсным воздействием* // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – №2. – С. 9-16.

УДК 517.925.51

Розглядається задача про стійкість нульового розв'язку нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу. У припущенні, що система лінійного наближення неасимптотическі стійка, отримані достатні умови рівномірної асимптотичної стійкості повної системи.

Рассматривается задача об устойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным возмущением в фиксированные моменты времени. В предположении, что система линейного приближения неасимптотически устойчива, получены достаточные условия равномерной асимптотической устойчивости

Ахрамович М.В., Муратов М.А. *О классификации пары q -коммутирующих операторов в конечномерном линейном пространстве* // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – №2. – С. 17-25.

УДК 519.4

У даній роботі доведено, що задача класифікації, з точністю до перетворення подібності, пари нільпотентних операторів (A, B) , $A^3 = B^3 = 0$, пов'язаних співвідношенням q -комутації: $BA = qAB$, де $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, є «дикою».

В настоящей работе доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных операторов (A, B) , $A^3 = B^3 = 0$, связанных соотношением q -коммутиации: $BA = qAB$, где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, является «дикой».

Белан Е.П. *Динамика диссипативных структур в параболической задаче с преобразованием отражения пространственной переменной* // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – №2. – С. 27-38.

УДК 517.9+530.1

Досліджено динаміку стаціонарних структур у нелінійному оптичному резонаторі з перетворенням відображення у двомірному зворотному зв'язку. Математичною

моделлю системи є скалярне параболічне рівняння з відображеним простором аргументом та умовами Неймана на проміжку. Досліджено еволюцію форм та стійкість структур, коли коефіцієнт дифузії зменшується.

Рассматриваются стационарные структуры в нелинейном оптическом резонаторе с преобразованием отражения в двумерной обратной связи. Математической моделью системы является скалярное параболическое уравнение на отрезке с преобразованием отражения пространственной переменной. В работе строятся стационарные решения и исследуется их устойчивость при уменьшении коэффициента диффузии.

Блыщик В.Ф., Донской Д.В. Модель планирования использования денежных ресурсов, поступающих по инвестиционным контрактам // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – №2. – С. 39-43.

УДК 519.86

У статті представлено математична модель оптимального планування використання грошових коштів, що поступають від інвесторів, з метою виконання деякої безлічі проектів, що забезпечують отримання прибутку. Рішенням задач, відповідних цій моделі, є оптимальна послідовність запуску вибраних проектів в часі, що забезпечує максимум прибули.

В статье представлена математическая модель оптимального планирования использования денежных средств, поступающих от инвесторов, с целью выполнения некоторого множества проектов, обеспечивающих получение прибыли. Решением задач, соответствующих этой модели, является оптимальная последовательность запуска выбранных проектов во времени, обеспечивающая максимум прибыли.

Ибрагимов Н.С. Задача идентификации для нестационарного уравнения квазиоптики // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – №2. – С. 45-55.

УДК 517.97

В даній роботі вивчається задача ідентифікації про визначення комплексозначного коефіцієнта нестационарного рівняння квазиоптики. При цьому доводяться теореми існування та єдиності розв'язку задачі ідентифікації. Крім того, для розв'язку задачі ідентифікації встановлюється необхідна умова у вигляді варіаційної нерівності.

В данной работе изучается задача идентификации об определении комплекснозначного коэффициента нестационарного уравнения квазиоптики. При этом доказываются теоремы существования и единственности решения задачи идентификации. Кроме того, для решения задачи идентификации устанавливается необходимое условие в виде вариационного неравенства.

Ильченко А.В. *Поиск максимальных интервалов области признакового пространства в лексикографическом порядке* // Таврический вестник информатики и математики. – 2010. – №2. – С. 57-69.

УДК 517.9

У статті вивчаються властивості індикаторних векторів інтервалів ознакового простору, розглядаються алгоритми пошуку замкнених індикаторних векторів і індикаторних векторів, що породжують максимальні інтервали заданої області простору ознак.

В статье изучаются свойства индикаторных векторов интервалов признакового пространства, рассматриваются алгоритмы поиска замкнутых индикаторных векторов и индикаторных векторов, порождающих максимальные интервалы заданной области признакового пространства.

Cheremnikh E. V., Ivasyk G. V. *On continuous spectrum of transport operator* // Таврический вестник информатики и математики. –2010. – №2. – С. 71-77.

UDC 517.983

У роботі доведено, що точка $\zeta = 0$ на відміну від інших точок неперервного спектру є точкою розгалуження логарифмічного типу резольвенти транспортного оператора.

В работе доказано, что точка $\zeta = 0$ в отличие от других точек непрерывного спектра есть точкой разветвления логарифмического типа резольвенты транспортного оператора.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

- Анашкин Олег Васильевич** д. ф.-м. н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: oanashkin@yandex.ru
- Ахрамович Максим Вячеславович** аспирант кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: fromen@bk.ru
- Белан Евгений Петрович** д. ф.-м. н., профессор кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: belan@crimea.edu
- Блыщик Владимир Федорович** к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
e-mail: veb@land.ru
- Донской Дмитрий Владимирович** к. э. н., старший преподаватель кафедры государственного и регионального управления факультета управления Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
donskoy2_simf@mail.ru
- Довжик Татьяна Владимировна** старший преподаватель Рязанского государственного радиотехнического университета, Россия
- Ибрагимов Натик Сохраб оглы** к. ф.-м. н., доцент кафедры экономической информатики Бакинского Государственного Университета, Баку, Азербайджан
ns.ibragimov@gmail.com
- Ильченко Анатолий Васильевич** старший преподаватель кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
ilch@crimea.edu
- Ивасик Галина Володимирівна** ассистент кафедры вищої математики НУ «Львівська політехніка», Украина
Ivasyk-G@yandex.ru

*Митько Ольга
Владимировна*

ассистент кафедры дифференциальных уравнений и геометрии факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина

*Муратов Мустафа
Абдурешитович*

д. ф.-м. н., профессор кафедры математического анализа факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
mustafa_muratov@mail.ru

*Черемних Євген
Васильович*

д. ф.-м. н., доцент кафедри вищої математики НУ «Львівська політехніка», Украина

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі "Таврійський вісник інформатики і математики" приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Файл статті на дискеті 3,5" або надісланий електронною поштою за адресою редакції.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. **Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор

Невирішені раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття

Формулювання цілей статті (постановка задачі)

У висновку з данного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом)

результати дослідження та перспективи подальших розвідок у цьому напрямку

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або абрєвіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2000, №2.

6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету `twim.sty`, який можна отримати за адресою www.tvim.info.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надіслати електронною поштою, а також у вигляді "твердої" копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м.Симферопіль, Крим, Україна, 95007, e-mail: article@tvim.info**
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

**ПОСТАНОВА
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ
від 15.01.2003 р. №7-05/1**

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України

В.В.Скопенко

Вчений секретар

Л.М.Артюшин

Подписано к печати 24.12.2010. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 4.5 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, 95007, Украина