# ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

**№2 ' 2009**

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

**ОСНОВАН В 2002 ГОДУ**

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ №7826 від 04.09.2003

**Згідно до постанови ВАК України від 30 червня 2004 р. 3—05/7, перелік №4,журнал "Таврійський вісник информатики та математики" внесено до переліку журналів ВАК України, у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів кандидата й доктора наук за спеціальностями "Теоретичні основи інформатики та кібернетики", "Математичне моделювання та обчислювальні методи", "Математичне і програмне забезпечення обчислювальних машин і систем", "Системний анализ і теорія оптимальних рішень".**

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК**
**И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**
**ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**



**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**
Крымский научный центр Национальной Академии наук
и Министерства образования и науки Украины
пр-т Вернадского, 2, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**
Факультет математики и информатики ТНУ
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, Крым, 95007, Украина

| | |
|---|---|
| Тел. гл.редактора: | (0652) 63-75-42 |
| Тел. редакции: | (0652) 602-466 |
| e-mail (гл.редактор): | donskoy@ccssu.crimea.ua |
| e-mail (для переписки): | twim_taurida@mail.ru |
| сайт журнала: | www.twim.crimea.edu |

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи**
**по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

- Функциональный анализ и его приложения
- Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы
- Нелинейный анализ и его применение
- Спектральные и эволюционные задачи
- Математические проблемы гидродинамики
- Дискретная оптимизация
- Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений
- Математические модели и методы прогнозирования
- Машинное обучение и извлечение закономерностей
- Дедуктивные системы и базы знаний
- Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
- Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
- Вычислительная математика
- Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов

**Печатается по решению научно технического Совета**
**КНЦ НАН и Министерства образования и науки Украины**
**Протокол №7 от 15 октября 2009 г.**

## СОДЕРЖАНИЕ

**УДК 004.93**

# ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ МОДЕЛІ НАВЧАННЯ ТА ЯКОСТІ РОБОТИ МЕТРИЧНИХ КЛАСИФІКАТОРІВ

**© Капустій Б.О., Русин Б.П., Таянов В.А.**

Національний університет «Львівська політехніка»
кафедра теоретичної радіотехніки та радіовимірювань ІТРЕ
вул. С. Бандери, 12, м. Львів, 79013, Україна

Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України
відділ методів та систем обробки, аналізу та ідентифікації зображень
вул. Наукова, 5, м. Львів, 79601, Україна
e-mail: *vtayanov@ipm.lviv.ua*

**Abstract**. In this paper the full conception of the probabilistically combinatorial approach has been presented. This conception is the result of previous long preliminary works. The approach gives the possibility to establish the reasons of recognition algorithms overtraining, to define the possible ways of it reduction and to build the most precise estimates of the recognition probability. The combinatorial approach works with determined data of the recognition process and the probabilistic one determines the probability of these results existence. The most usefulness of the combinatorial approach consists in the possibility to determine the training set variation influence on the different algorithms and select the most appropriate one from these algorithms or algorithm composition. The probabilistic part of this approach determines the probability of results obtained on the basis of combinatorial approach.

## Вступ

Усі класифікуючі алгоритми можуть бути поділені на три групи: алгоритми з навчанням, із самонавчанням та алгоритми, що не використовують навчання як такого. Найбільш важливими і цікавими є алгоритми, що використовують навчання. Ці алгоритми є об'єктом дослідження в рамках теорії машинного навчання (Theory of Machine Learning), яка доволі швидко й успішно розвивається на протязі останніх десяти років [7]. У рамках цієї теорії розглядаються такі важливі питання, як визначення оптимального складу навчаючої вибірки, навчання класифікаторів та побудова оптимальної композиції класифікаторів, що задовольняє певним умовам, а також генерація та селекція найбільш інформативних ознак. Алгоритми, що дозволяють певною мірою вирішувати ці питання, носять назви Bagging, Boosting та Random Space Method (RSM). Аналіз цих алгоритмів встановлює одну спільну їх рису, спрямовану на зменшення надлишковості та неінформативності як у самих даних (визначення оптимального складу навчаючої вибірки та набору найбільш інформативних ознак), так і надлишковості (складності) самого апарату класифікації, а, власне, класифікуючих алгоритмів. Тому потрібно спочатку визначити вплив навчаючих даних на процес розпізнавання з тим, щоб потім провести генерування та селекцію найбільш інформативних ознак та налаштування параметрів класифікатора таким чином, щоб мінімізувати перенавчання алгоритмів і досягти найбільшого значення ймовірності правильного розпізнавання.

У даній роботі розглядаються метричні класифікатори. Серед усіх метричних класифікаторів найбільш часто для побудови практичних цільових систем, що застосовуються в різних галузях діяльності людини, застосовуються класифікатори типу $k$NN, які використовують ідею класифікації на основі найближчого сусідства. Переваги простих метричних алгоритмів типу $k$NN є такими:

- *Простота реалізації та можливість введення різноманітних модифікацій;*
- *Можливість інтерпретації розпізнавання шляхом пред'явлення користувачу найближчого об'єкта або декількох. «Прецедентна» логіка роботи алгоритму є добре зрозумілою експертам з таких предметних областей, як медицина, біометрія, юриспруденція, металофізика, робототехніка та ін.*

## 1. Проблеми теорії машинного навчання класифікуючих алгоритмів

В сучасній теорії машинного навчання існують дві серйозні проблеми: отримання точних верхніх оцінок ймовірності такого негативного явища, як перенавчання, та способів боротьби з ним. На даний момент найбільш точні з відомих оцінок значно завищені. Експериментально вдалося встановити основні причини завищення оцінок. У порядку зменшення впливу, вони є наступними:

1. *Нехтування ефектом розшарування або локалізації сімейства алгоритмів. Дана проблема обумовлюється тим, що залежно від виду задачі використовується не все сімейство алгоритмів, а лише певна його частина. Коефіцієнт завищеності знаходиться в межах від декількох десятків до сотень тисяч.*
2. *Нехтування схожістю алгоритмів. Коефіцієнт завищеності становить для цього фактора від декількох сотень до десятків тисяч. Цей фактор завжди присутній і менш залежний від виду задачі, ніж перший.*
3. *Експоненційна апроксимація «хвоста» гіпергеометричного розподілу. В цьому випадку коефіцієнт завищеності може складати декілька десятків.*
4. *Верхня оцінка профіля різноманітності представляється одним скалярним коефіцієнтом різноманітності. Коефіцієнт завищеності часто порядку одиниці, однак у деяких випадках може досягати декількох десятків.*

Причина ефекту перенавчання обумовлюється тим, що використовуються алгоритми з мінімальним числом помилок на навчаючій вибірці, тобто відбувається однобічне налаштування цих алгоритмів. Перенавчання буде тим більшим, чим більшу композицію з алгоритмів ми використовуємо для класифікації, якщо алгоритми беруться з розподілу випадково і незалежно. У випадку залежності алгоритмів (в реальній ситуації вони, як правило, такими і є) перенавчання зменшиться. Отже, при виборі навіть одного з двох алгоритмів може виникнути перенавчання. Розшарування алгоритмів за числом помилок та збільшення їхньої подібності зменшують ймовірність перенавчання. Розглянемо для прикладу дуплет «вибірка-алгоритм». Кожний алгоритм покриває певну частину об'єктів навчаючої вибірки. Якщо використовувати внутрішні критерії [6] (наприклад, у випадку метричних класифікаторів), то можна оцінити стійкість цього покриття і звузити число покритих об'єктів згідно із заданим рівнем стійкості. Таким чином, для того щоб покрити більшу кількість, потрібно застосувати більшу кількість алгоритмів. Ці алгоритми мають бути схожими і мати різний рівень помилок. Однак, якщо використовуються тестові дані, до яких композиція алгоритмів неадаптована, то помилка класифікації може досить сильно відрізнятися від мінімальної, отриманої на навчаючих даних. З іншого боку, цікавою представляється задача по визначенню кількості надлишкової інформації у навчаючих даних. Доцільність у зменшенні навчаючих даних полягає в тому, що для кожного конкретного випадку зменшується також і кількість об'єктів інших класів, що заважають класифікації. При цьому потрібно оцінити середнє значення розміру класу, що забезпечує потрібний рівень частоти помилок. Зменшення кількості навчаючих даних також означає зменшення розміру класів на етапі тестування. Оцінка ефекту від пониження розміру навчаючих даних дає можливість визначити структуру цих даних, тобто співвідношення між еталонними об'єктами та об'єктами-викидами, пороговими або неінформативними. Крім того, чим менший розмір класу, тим менший час, потрібний для прийняття рішення. Однак найбільшою цінністю даного підходу є те, що він дозволяє детальніше вивчити і глибше зрозуміти явище перенавчання алгоритмів.

## 2. Підходи до оцінки якості роботи класифікаторів

Якість роботи класифікаторів прийнято характеризувати через поняття відступу (margin), що представляє відстань об'єкта від розділювальної гіперплощини. Чим більший відступ, тим кращим вважається класифікатор. Однак якщо всі об'єкти або переважна їх більшість мають приблизно однаковий відступ і групуються один біля одного, то в цьому випадку різко падає їх інформативність. Це означає, що замість всіх об'єктів можна залишити один або декілька, що використовуються для навчання. Такий підхід породжує одну з основних причин, що обумовлюють ефект перенавчання. Однобічне налаштування алгоритма розпізнавання на основі близької за суттю навчаючої інформації приводить до того, що на контрольній вибірці він може часто помилятись, навіть якщо він не помилявся на навчаючій вибірці. Дійсно, ймовірність того, що в умовах навчаючої вибірки зустрінеться така ж ситуація, є близькою до нуля.

Тому для навчання прийнято використовувати несхожі і «важкі» для алгоритма об'єкти з малими значеннями відступу. Ця ідея використана, зокрема, у методі опорних векторів (Support Vector Machine) або методі зваженого голосування. Застосуємо узагальнений підхід для характеристики класифікаторів на основі поняття відступу. Результатом роботи метричних класифікаторів є ранжовані дані (посортовані за ступенем подібності до тестового об'єкти бази даних). Для таких класифікаторів поняття відступу представляється наступним чином. Вводиться еквівалентна до класичного відступу характеристика, яка для даного об'єкта може бути представлена як відносна відстань між його відстанями від тестового об'єкта та від усередненого об'єкта бази даних або останнього об'єкта з однорідної (стратегічної) [3] послідовності «своїх» об'єктів. Передбачається, що хоча б частина «своїх» об'єктів розташовуються на початку списку можливих претендентів. Таким чином, гарантується коректність даного означення.

2.1. **Характеристика метричних класифікаторів.** Для більш строгого означення даної характеристики потрібно ввести поняття розподілу відстаней між об'єктами. Оскільки значення відстаней може бути довільним, то процедура непараметричного оцінювання розподілу неусіченими ядерними функціями буде коректною. Якщо оцінене математичне сподівання нормального закону розподілу рівне $\widehat{\mu}$, а дисперсія – $\widehat{\sigma^2}$, то відносна відстань може бути оцінена через параметр $z$ у вигляді $\widehat{z} = \frac{x-\widehat{\mu}}{\widehat{\sigma}}$. Тоді нормальний закон розподілу відстаней представляється як $p(\widehat{z}) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\widehat{z}^2}{2}}$. На практиці більшу користь має не саме значення параметру $\widehat{z}$, а функція розподілу $P(\widehat{z}) = \int_{-\infty}^{\widehat{z}} p(\widehat{z})d\widehat{z}$. Функція розподілу в даному випадку є однозначною характеристикою відокремлення «свого» об'єкта від сукупності «чужих» об'єктів. Оскільки гіперплощина у випадку порогових класифікаторів виконує роль границі між класами, то еквівалентна їй характеристика для метричних класифікаторів визначає, наскільки добре об'єкти «свого» класу відокремлюються від сукупності «чужих» об'єктів. Ця характеристика має строге математичне обґрунтування і є функцією розподілу ймовірностей [6].

Задача збільшення відступу у випадку метричних класифікаторів на основі навчаючої вибірки вирішується наступним чином. Першим стратегічним напрямком є зменшення дисперсії густини розподілу відстаней між об'єктами, а також збільшення середнього значення цього розподілу. В рамках теорії послідовного аналізу це означає, що може бути збільшена база даних, а ймовірність правильного розпізнавання залишатиметься на тому самому рівні. Другий стратегічний напрямок полягає в тому, що потрібно прагнути, щоб розподіл відстаней був якомога ближчим до нормального. Ця ідея обґрунтовується наступним чином.

Розглянемо розподіл ознак у лінійному багатовимірному або відстаней між об'єктами в одновимірному просторі та проведемо його аналіз. Ймовірність помилки розпізнавання для $\mu = 0$ може бути представлена як $\int\limits_{|x|\geq\theta} p(x)\,dx$, де $\theta$ – поріг. Згідно з нерівністю Чебишева [5] отримаємо $\int\limits_{|x|\geq\theta} p(x)\,dx \leq \frac{\sigma^2}{\theta^2}$. Розглянемо випадок рівності середніх значень та дисперсій розподілу $p(x)$. Верхня межа для одномодального розподілу з модою $\mu_0$ обчислюється за допомогою нерівності Гауса наступним чином [4]:

$$P\Big(|x-\mu| \geq \lambda\tau\Big) \leq \frac{4}{9\lambda^2}, \tag{1}$$

де $\tau^2 \equiv \sigma^2 + (\mu - \mu_0)^2$.

Нехай $\mu = \mu_0 = 0$ та $\tau \equiv \sigma$, тоді поріг $\theta = \lambda\sigma$, а $\lambda = \frac{\theta}{\sigma}$. Таким чином, нерівність Гауса для порогу $\theta$ може бути представлена у вигляді

$$\int\limits_{|x|\geq\theta} p(x)\,dx \leq \frac{4\sigma^2}{9\theta^2}. \tag{2}$$

Як видно з (2), оцінка Гауса зверху для одномодального закону розподілу є в 2.25 разів кращою, ніж оцінка Чебишева для довільних розподілів, що підтверджує суттєвий вплив виду розподілу ознак на ймовірність правильної класифікації. Нормальний закон розподілу ймовірностей має однакові моду, медіану та математичне сподівання. Крім цього, на практиці цей закон є одним із найпоширеніших. З іншого боку, нормальний закон розподілу характеризується максимальним значенням ентропії при однакових значеннях перших моментів. А це означає, що отримується мінімальна помилка класифікації для нормально розподілених класів.

Розглянемо способи обчислення відстаней. Один із способів полягає в застосуванні різних метрик, серед яких у першу чергу можна відзначити узагальнену метрику Мінковського та косинусну метрику. Інший спосіб обчислення відстаней передбачає використання ядерних функцій. Найчастіше вживаними ядерними функціями є три. Це – радіальна базисна функція, сигмоїдальна та поліноміальна функції. Найбільш поширеною і вживаною серед них є радіальна базисна функція. Спільною рисою обох способів обчислення відстаней є використання зважених ознак, що є головною задачею, яку вирішує той чи інший метод обчислення відстаней. Зважування ознак дозволяє коректувати напрям гіперплощини в гіперпросторі таким чином, щоб найбільш оптимально розділяти класи. Для певного набору ознак вибираються такі ваги, які для переважної більшості об'єктів є оптимальними.

Розглянемо, як приклад, представлення мір відстаней між векторами ознак **x** та **y** через міру Манхетена – просту лінійну міру із зваженими коефіцієнтами $a_i$ :

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i - y_i|, \tag{3}$$

де $d(x, y)$ — довільна міра відстаней між векторами **x** та **y**

Міру відстаней Мінковського, як найбільш узагальнену міру, що використовується в теорії розпізнавання образів, можна представити у вигляді

$$d(x, y) = \Big( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}} = C(p) \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i - y_i|, \tag{4}$$

де $C(p) = \Big( \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i - y_i| \Big)^{\frac{1-p}{p}}$; $a_i = (|x_i - y_i|)^{p-1}$; $p > 0$.

Таким же чином визначаються коефіцієнти в косинусній метриці, метриці Канбера та інших метриках для класифікаторів типу $k$NN, а також параметри трьох згаданих ядерних функцій для інших типів класифікаторів. Ці задачі вирішуються на основі конкретної навчаючої вибірки. Таким чином, проблема полягає не у виборі найбільш оптимальної метрики, а у визначенні ваг ознак для того чи іншого конкретного випадку. Один із способів обчислення ваг є використання функцій відстані у вигляді метрик або ядерних функцій. Цей спосіб є найбільш простим, математично добре обґрунтованим та зрозумілим. Вагові коефіцієнти ознак дискретно згортаються з певним видом функцій (наприклад, ядерними функціями), що в результаті дає відстань. Якщо використовуються ядерні функції, то метрика буде результатом непараметричного оцінювання відстані між двома векторами ознак. Точність оцінювання оптимальної відстані буде визначатися кількістю та набором ознак. Це підтверджує, наприклад, порівняння результатів непараметричного оцінювання густини розподілу на основі класичного методу вікна Парзена та методу опорних векторів В. Вапніка [8, 9], в якому використовується процедура оптимізації шляхом розв'язку задачі квадратичного програмування. Хоч непараметричне оцінювання відбувається за допомогою лише невеликої частини опорних векторів, однак результати оцінювання є більш точними від методу Парзена. Звідси випливає, що використання порогових і метричних класифікаторів є абсолютно еквівалентним, а задача полягає лише у знаходженні відповідних параметрів, що максимізують (мінімізують) той чи інший функціонал штрафу за помилку класифікації.

2.2. **Аналіз процесу класифікації при використанні метричних класифікаторів.** Під метричним класифікатором розуміють відображення виду

$$a(u; X^\ell) = \arg\max_{y \in Y} \underbrace{\sum_{i=1}^{\ell} [y_{i,u} = y] w(i, u)}_{\Gamma_y(u, X^\ell)} .$$

Дія такого класифікатора проявляється в тому, що рішення про клас приймається на основі максимальної сумарної ваги $\Gamma_y(u) \equiv \Gamma_y(u, X^\ell)$. Ще одною перевагою метричних класифікаторів, крім їх простоти, є те, що рішення, прийняте цими класифікаторами, не залежить від порогу. Разом з тим метричні класифікатори мають достатню кількість ступенів свободи для їх налаштування і є, як правило, більш стійкими до впливу зовнішніх факторів, ніж порогові класифікатори, за рахунок їх інтегрального характеру. Серед метричних класифікаторів за ступенем збільшення складності можна виділити наступні:

- $w(i, u) = [i = 1]$ — алгоритм найближчого сусіда;
- $w(i, u) = [i \le k]$ — алгоритм $k$ найближчих сусідів;
- $w(i, u) = [i \le k] q^i$ — зважений алгоритм $k$ найближчих сусідів;
- $w(i, u) = K\left(\frac{\rho(u, x_{i,u})}{h}\right)$ — парзеновське вікно фіксованої ширини;
- $w(i, u) = K\left(\frac{\rho(u, x_{i,u})}{\rho(u, x_{k+1,u})}\right)$ — парзеновське вікно змінної ширини;
- метод потенційних функцій.

У випадку алгоритму найближчого сусіда $k = 1$. Для алгоритму $k$ найближчих сусідів ваги рівні 1. Для випадку зваженого алгоритму $k$ найближчих сусідів чим далі об'єкт знаходиться від початку списку можливих претендентів, тим менша його вага. Постає питання про відношення між вагами двох сусідніх об'єктів $(\frac{w_i}{w_{i+1}})$ у списку можливих претендентів. Покажемо, що воно повинно бути в межах $1 \le \frac{w_i}{w_{i+1}} \le 2$. При $\frac{w_i}{w_{i+1}} = 1$ маємо звичайний $k$NN алгоритм, при $1 < \frac{w_i}{w_{i+1}} < 2$ – зважений $k$NN алгоритм, а при $\frac{w_i}{w_{i+1}} \ge 2$ – алгоритм найближчого сусіда або 1NN. Якщо вага об'єкта пропорційна до ймовірності його незаміщення в списку можливих претендентів об'єктами інших класів, то відбувається поєднання рангового голосування та методу Парзена, що в результаті представляється як віконний метод Парзена. Основна ідея методу вікна Парзена полягає в тому, що вага об'єкта задається не його рангом, а на основі функції відстані і обчислюється за допомогою ядерних функцій із постійним або змінним вікном $h_i$, а центр ядра знаходиться в самому класифікованому об'єкті. Оскільки у методі Парзена ваги об'єктів визначаються не рангом, а відстанями класифікованого об'єкта від навчаючих, то відносна відстань, оцінена за параметром $\hat{z}$, та функція розподілу ймовірностей $P(\hat{z})$, між якими є однозначна відповідність, повністю визначають даний алгоритм. Якщо використовувати в якості ядра радіальну базисну функцію, то дисперсія нормального розподілу відстаней відіграє роль вікна $h_i$ у класичному методі Парзена. Перевага такого підходу порівняно з класичним полягає в тому, що розмір вікна автоматично задається складом навчаючої вибірки і «зашитий» у параметрі $\hat{z}$, а також функції $P(\hat{z})$. Метод потенційних функцій є модифікацією алгоритму Парзена, основна відмінність якого полягає в тому, що центр ядра знаходиться не в класифікованому об'єкті, а в навчаючих, тобто використовується набір ядер з різними розмірами вікон $h_i$. Передбачається, що ядра в обох методах є фінітні, оскільки в протилежному випадку для класифікації об'єкта доведеться використовувати всю навчаючу вибірку. Оскільки розподіл відстаней між класифікованим об'єктом і навчаючими в силу оптимальності повинен бути нормальним [6]), то обидва підходи (класичний та ймовірнісно-комбінаторний) є абсолютно еквівалентні щодо задачі класифікації. Принципова відмінність полягає в тому, що параметри ядер у ймовірнісно-комбінаторному підході визначаються на основі навчаючої вибірки, а також є функціями процесу відбору ознак, способу обчислення відстаней тощо.

## 3. Суть імовірнісно-комбінаторного підходу

Основна мета поєднання двох підходів полягає в тому, щоб досягнути більшої точності та коректності у побудові оцінок ймовірності розпізнавання при зменшенні розміру навчаючих даних. Оцінки ймовірності правильного розпізнавання для малих вибірок розглянуті в [2].

Представимо результати розпізнавання у вигляді двійкової послідовності посортованих за мінімумом відстані об'єктів, де 1 ставиться у відповідність «своїм» образам, а 0 – «чужим». Приклад такої послідовності показаний на рис. 1.

$$\underbrace{\underbrace{1111}_{l_1}\underbrace{000}_{m_1}\underbrace{111}_{l_2}\underbrace{00}_{m_2}\underbrace{1111}_{l_3}\underbrace{000}_{m_3}\underbrace{111}_{l_4}\ldots\underbrace{000}_{l_n}\ldots\underbrace{111}_{m_n}}_{\{l,m\}}\ldots$$

*Рис.* 1. Результати розпізнавання у вигляді двійкової послідовності ($k$NN алгоритм)

Розглянемо випадок $ENT(\frac{k}{2})+1 \leq s^*$. Визначимо ймовірності того, що серед послідовності образів «свого» класу заданої довжини $s$ будуть вибрані комбінаторним способом $s^*$ образів. Такі ймовірності носять довірчий характер і характеризують ступінь накриття нестиснутого класу послідовністю з $|\bigcup_i \ell_i|$ образів, серед яких вибирається $s^*$. Крім них, знайдемо також імовірності того, що не будуть вибрані відповідним способом певні образи з «чужих» класів. Ймовірність коректної роботи $k$NN класифікатора є добутком цих імовірностей. Визначимо ймовірність помилкової класифікації, обумовленої образами з «чужих» класів:

$$q_j = \frac{1}{C_s^{s^*}} \sum_{j=ENT(\frac{k}{2})+1}^{s^*} C^j_{|\bigcup_{i,j} m_{i+j-1}|} C^{s^*-j}_{s-|\bigcup_{i,j} m_{i+j-1}|}; |\bigcup_{i,j} m_{i+j-1}| > ENT(\frac{k}{2})+1. \quad (5)$$

Обчислимо довірчу ймовірність для довільної послідовності з образів «свого» класу:

$$P_(q_j) = \frac{1}{C_s^{s^*}} \sum_{j=ENT(\frac{k}{2})+1}^{s^*} C^j_{|\bigcup_i \ell_i|} C^{s^*-j}_{s-|\bigcup_i \ell_i|}. \quad (6)$$

Ймовірність правильного розпізнавання при застосуванні $k$NN класифікатора визначається добутком імовірності (6) та доповнення до ймовірності (5):

$$P_j = P(q_j)(1-q_j) = \frac{1}{C_s^{s^*}} \sum_{j=ENT(\frac{k}{2})+1}^{s^*} C^j_{|\bigcup_i \ell_i|} C^{s^*-j}_{s-|\bigcup_i \ell_i|} -$$

$$-\frac{1}{(C_s^{s^*})^2} \Big( \sum_{j=ENT(\frac{k}{2})+1}^{s^*} C^j_{|\bigcup_i \ell_i|} C^{s^*-j}_{s-|\bigcup_i \ell_i|} \Big) \Big( \sum_{j=ENT(\frac{k}{2})+1}^{s^*} C^j_{|\bigcup_{i,j} m_{i+j-1}|} C^{s^*-j}_{s-|\bigcup_{i,j} m_{i+j-1}|} \Big). \quad (7)$$

Роль імовірнісної частини в імовірнісно-комбінаторному підході полягає у тому, що необхідно обчислити ймовірність існування однорідних послідовностей виду $\{0\}$ або $\{1\}$. Обчислення ймовірності існування послідовностей змішаного типу не має сенсу, оскільки для великих розмірів послідовностей вона оберненопропорційна до величини $2^{|\ell+m|}$, де $|\ \ell+m\ |$ — розмір послідовності. Ймовірність існування однорідної послідовності з образів «свого» класу $\{1\}$ обчислюється на основі ймовірності заміщення останнього образа «свого» класу у цій послідовності. Це означає, що розмір однорідної послідовності вказаного виду визначається найбільш «слабким» образом. Отже, потрібно обчислити ймовірність існування заданого розміру послідовності образів «свого» класу або для заданого рівня ймовірності обчислити максимальний розмір послідовності, який забезпечить цю ймовірність. Для двійкової послідовності сума ваг молодших розрядів завжди на 1 менша від ваги наступного старшого розряду, тобто заміщення довільного образа «свого» класу у списку еквівалентне почерговому заміщенню всіх попередніх. Мінімальний цілий порядок системи числення, що володіє цією властивістю, рівний 2. Отже, потрібно обчислити ваги положень образів «свого» класу і порівняти їх з двійковими розрядами. Таке представлення дозволяє спростити обчислення ймовірності заміщення в послідовності образів зі «свого» класу образами з «чужих» класів. З іншого боку, довільні ваги можна виразити через показник ступеня 2, що також спрощує представлення та обчислення цих імовірностей. Таким чином, ймовірність існування однорідної послідовності з образів «свого» класу обчислюється на основі розподілу відстаней і є функцією від параметрів алгоритму розпізнавання. Приймається така послідовність, для якої ймовірність існування є достатньою.

Відтак застосовується комбінаторна частина підходу, яка дозволяє обчислити ступінь впливу пониження розміру класів на ймовірність правильного розпізнавання. Оскільки ймовірнісна частина підходу визначається параметрами алгоритму розпізнавання, то поєднання ймовірнісної та комбінаторної частин дозволяє більш точно описати ефект від зменшення кількості навчаючих даних.

Наприкінці розглянемо покроково приклад швидкого обчислення ймовірності заміщення «свого» образу з послідовності, де співвідношення між вагами об'єктів є цілий ступінь числа 2. Нехай, наприклад, ваги задаються наступним чином: $w = \{2^9, 2^6, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0\}$. Як відомо, ймовірність заміщення «свого» об'єкта з послідовності «чужим» об'єктом, коли відомо, що заміщення відбулося, оберненопропорційна до ваги об'єкта «свого» класу. Знайдемо ймовірність заміщення об'єкта з вагою $2^9$ порівняно із об'єктом з вагою $2^6$. Оскільки невідомо, заміщення якого об'єкта відбулося, то сумарна вага того, що це не будуть об'єкти з вагою $2^6$ і нижче, дорівнюватиме: $2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0$. У долях ваги $2^6$ це з точністю до 1 рівне $2^6 * (1 + 0.5) = 1.5 * 2^6$. У випадку великих послідовностей ця 1 мало впливає на точність. Співвідношення між $2^9$ та $2^6$ рівне 8. У випадку повної групи подій отримаємо $8\lambda + 1.5\lambda = 1$, звідки коефіцієнт пропорційності $\lambda$ приблизно рівний 0.11. Таким чином, ймовірність незаміщення об'єкта з вагою $2^9$ рівна $8 * 0.11 = 0.88$, а об'єкта з вагою $2^6$ — відповідно $1 - 0.88 = 0.12$. Оскільки у нашому випадку точно відомо, що заміщення відбулося, а останній об'єкт має вагу 1, то поправка на точність, рівна 1, вносить потрібну корекцію.

Оскільки такий параметр, як кількість найближчих сусідів, визначає надійність роботи kNN метричних класифікаторів як в імовірнісній частині запропонованого підходу, так і в комбінаторній, то він дає можливість визначити різницю між різними алгоритмами розпізнавання на основі методу $k$NN. Ця різниця має ймовірнісний характер і, як очікується, несе більше інформації для прогнозування ефекту перенавчання, ніж відомі підходи [1].

## Висновки

На основі проведених досліджень встановлено, що поєднання ймовірнісного та комбінаторного підходів дає можливість отримати більш коректні оцінки ймовірності правильного розпізнавання за логікою їх побудови при скороченні розміру навчаючої вибірки, ніж використання лише комбінаторного підходу.

## Список литературы


1. *Воронцов К.В.* Комбинаторный подход к оценке качества обучаемых алгоритмов // Математические вопросы кибернетики / Под ред. О. Б. Лупанов.—М.: Физматлит, 2004. — Т. 13. — С. 5–36.
2. *Гуров, С.И.* Оценка надежности классифицирующих алгоритмов.— М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2002. — 45с.
3. *Капустій Б.О., Русин Б.П., Таянов В.А.* Комбінаторна оцінка впливу зменшення інформаційного покриття класів на узагальнюючу властивість 1NN алгоритмів класифікації.— Штучний інтелект.—2008.—№1.—С.49-54.
4. Математическая Энциклопелия: Гл. ред. И.М. Виноградов, т. 5. Слу—Я—М., «Советская Энциклопедия», 1984.—1248 стб., ил.
5. *Шлезингер М., Главач В.* Десять лекций по статистическому и структурному распознаваниюю—Киев: Наукова думка, 2004.—545 с.
6. *Kapustii B.E., Rusyn B.P. and Tayanov V.A.* Features in the design of optimal recognition systems. Automatic Control and Computer Sciences.—2008. —Vol.42.—№2.— Pp.64-70.
7. *Skurichina M., Duin R.P.W.* Limited bagging, boosting and random subspace method for linear classifiers. Pattern Analysis and Applications.—2002.—№5.—Pp.121-135.
8. *Vapnik V.* The nature of statistical learning theory.—2 edition.—Springer-Verlag, New York, 2000.
9. *Webb A.* Statistical Pattern Recognition, John Wiley and Sons Inc, 2nd ed., New York, 2002.


***Статья поступила в редакцию 14.01.2009***

**УДК 519.233.22, 519.233.24**

# ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НИ РАЗУ НЕ НАБЛЮДЕННОГО СОБЫТИЯ

**© Гуров С.И.**

Ф-т ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова,
119992, г. Москва, Ленинские горы, МГУ, 2-й уч. корпус, ВМиК,
e-mail: *sgur@cs.msu.ru*

**Abstract**. Point and interval estimators of probability of the event never observed in a series of tests under the scheme Bernoulli for which classical statistical methods give in practice often unacceptable zero estimator are offered and proved. Bibl. 7.

*При испытаниях одного изделия произошёл один отказ. Какова вероятность безотказной работы изделия?*

Занаучный юмор. М.: МФТИ, 2000.

## Введение. Постановка проблемы

Рассматривается оценивание неслучайной, но неизвестной вероятности $p$ осуществления некоторого случайного события $X$ в единичном испытании. В $n > 0$ испытаниях по схеме Бернулли случайная величина числа успехов $m \in \{0, 1, \ldots, n\}$ имеет биномиальное распределение $Bi_m(n, p) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}, \quad p \in \Theta$, где $\Theta = (0,1)$ – пространство изменения параметра $p$ (в данном случае – открытый одномерный интервал).

Точечная оценка $\widehat{p}_{ml}$ максимального правдоподобия величины $p$ даётся элементарной формулой

$$\widehat{p}_{ml} = \arg\max_{p \in \overline{\Theta}} L(p, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Здесь

—: $L(p, x) = p^m (1-p)^{n-m}$ – функция правдоподобия величины $p$ для биномиальной статистической модели;

—: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – выборка, полученная в результате проведения $n$ элементарных экспериментов по наблюдению события $X$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$, причём в $x$ имеется $m$ значений 1 и $n - m$ значений 0;

—: $\overline{\Theta} = [0, 1]$ – замыкание множества $\Theta$.

Данная оценка является является несмещенной, эффективной и состоятельной. Несмещенная функция оценки её дисперсии есть

$$\frac{m\,(n-m)}{n^3}. \tag{2}$$

При $m = 0$ говорят, что имеет место *0-событие*. В том случае формула (1) даёт нулевую точечную оценку вероятности наблюдения $X$, а формула (2) – нулевое оценочное значение её дисперсии. Всё это приводит к тому, что на практике оценка $\widehat{p} = 0$ часто неприемлема. В этом и состоит *основная проблема* оценки вероятности некоторого ни разу не наблюдённого события. Автору неизвестны *публикации* по данной проблеме.

*Целью работы* является предложение и обоснование ненулевой точечной оценки некоторого случайного события при осуществлении 0-события.

## 1. Доверительное оценивание

**Частотный подход**. В случае 0-события классические методы частотного подхода к решению задач математической статистики [1, 5] определяют нижнюю границу $p^-(n)$ доверительного интервала при коэффициенте доверия $\eta$ как нулевую, а верхнюю $p^+(n)$ – как решение (относительно $x$) уравнения

$$I_x(1, n) \,=\, \eta\,.$$

Здесь $I_x(\cdot,\cdot)$ – отношение неполной B(бетта)-функции к полной B-функции с соответствующими параметрами. Для практических целей обычно достаточно считать $\eta = 0.95$ или $\eta = 0.99$. Таким образом, имеем

$$I_x(1, n) \,=\, n\int\limits_0^x (1-t)^{n-1}dt \,=\, 1-(1-x)^n \,=\, \eta\,,$$

откуда

$$p^+(n) \,=\, 1-\sqrt[n]{1-\eta}\,.$$

Так, при $\eta = 0.95$ получаем $p^+(10) = 0,2589$ и $p^+(100) = 0,0295$[1]. Для $n > 50$ можно считать $p^+(n) \approx 3/n$.

Использование $p^+(n)$ в качестве точечной оценки $p$, как правило, является неоправданным, дающим слишком завышенное значение вероятности: с достоверностью $\eta$ будем иметь $p \leqslant p^+$. Однако от точечной оценки не требуется, чтобы отклонение её значения от истинного было односторонним почти всегда.

**Бейесовский подход**. При использования бейесовского подхода к решению статистических задач встаёт вопрос о конкретизации априорного распределения.

Будем рассматривать наиболее интересную ситуацию отсутствия результатов аналогичных экспериментов, проводимых ранее, т.е. когда использование того или иного метода восстановления априорного распределения (эмпирический бейесовский подход) невозможно. В этих случаях обычно прибегают к закону недостаточного

[1]как обычно, значения приводятся с точностью до последнего знака

основания Лапласа, который устанавливает, что если ничего не известно о параметре и он изменяется на конечном интервале, то в качестве априорного распределения принимают равномерное. Равномерное априорное распределение представим B-распределением

$$Be_p(a,\, b) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, p^{a-1}(1-p)^{b-1} \tag{3}$$

с параметрами $a = b = 1$ ( $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция). Плотность вероятности апостериорного распределения будет равняться $Be_p(1,\, n+1) = (n+1)(1-p)^n$, его математическое ожидание $\mu = 1/(n+2)$, а медиана – $med = 1 - 1/\sqrt[n]{2}$.

Бейесовскую точечную оценку определяемой величины обычно полагают равной математическому ожиданию или медиане апостериорного распределения, как доставляющие минимумы среднеквадратических потерь и среднего отклонения соответственно. Таким образом, имеем две оценки

$$\widehat{p}_{B_\mu}(n) \;=\; \frac{1}{n+2} \quad \text{и} \quad \widehat{p}_{B_{med}}(n) \;=\; 1 - \sqrt[n]{0.5}\,.$$

Поскольку $1 - \sqrt[n]{0.5} \to \ln 2/n$ при $n \to \infty$, то $\widehat{p}_{B_{med}}(n) \simeq 1/(1,443\, n)$. Отметим, что оценка по медиане имеет бóльшую практическую ценность, как более робастная [7].

В любом случае ясно, что обе данные оценки являются завышенными, поскольку основаны на предположении о равномерном априорном распределении $p$ на интервале $[0,1]$, что мало согласуется с фактом 0-события при не слишком малых $n$.

## 2. Оценка $\widehat{p}_0$

0-событие имеет место, кода в результате проведения $n$ элементарных экспериментов по наблюдению события $X$ получают выборку $x^0 = (0,\, \ldots,\, 0)$ длины $n \geqslant 1$. Считаем, что любая другая информация о событии $X$ отсутствует и не может быть дополнительно получена.

Далее для оценки вероятности $p$ появления $X$ в единичном эксперименте будет использоваться понятие коэффициента доверия $\eta \in (0,1)$. Пусть $\widehat{p}$ – выбранная оценка вероятности $p$ события $X$, а $P(n,\widehat{p})$ – вероятность некоторого события, связанного с наблюдённым 0-событием, и на основании которого делаются те или иные выводы, относительно $X$. Будем считать значение $P = P(n,\widehat{p})$ превосходящим выбранный коэффициент доверия:

$$P \;\geqslant\; \eta\,. \tag{4}$$

При этом будет иметь место непривычная зависимость $P(n,\widehat{p}) \to 1$ при $\widehat{p} \to 0$, что связано с нулевой оценкой $p$ по (1). Поэтому здесь коэффициент доверия (не будем менять терминологию) выражает не степень достоверности некоторого события, а степень «уступки», на которую мы можем пойти для получения оценки, уклоняющийся от теоретически истинного, но неприемлемого для нас значения. В силу этого, интерес будет представлять оценка, максимально возможная при данных предположениях (наиболее удалённая от 0).

Построим две оценки вероятности 0-события, свободные от указанных выше недостатков и основанные на разных идеях.

**Оценка** $\widehat{p}_\eta$. При истинном значении оцениваемой вероятности $p$ вероятность $P$ наблюдённого 0-события есть $P = (1-p)^n$. По (4) полагаем

$$P = (1-p)^n \geqslant \eta ,$$

откуда

$$p \leqslant \widehat{p}_\eta = 1 - \sqrt[n]{\eta} \simeq \frac{\ln(1/\eta)}{n} .$$

**Оценка** $\widehat{p}_r$. Мы будем говорить, что некоторое случайное событие $X$, наблюдаемое в единичном эксперименте по схеме Бернулли с вероятностью $p \in [0,1]$, определяет случайный процесс $\mathfrak{X}_p$ с дискретным временем, который и порождает выборку $x^0$ как реализацию этого процесса.

Идея получения оценки $\widehat{p}_r(n)$ состоит в замене рассмотрения реализации $x^0$ процесса $\mathfrak{X}_p$ некоторой другой его реализацией $x^1$, которая содержит хотя бы одно значение 1.

Построим требуемую реализацию $x^1$. Рассмотрим процесс $\mathfrak{X}_q$ определяемый вероятностью $q$ наблюдения события $X$ в единичном эксперименте по схеме Бернулли и $x^1$ – реализация указанного процесса. Пусть объём выборки $x^1$ есть $N \geqslant 1$, из которых $M \geqslant 1$ значений нулевые. Далее воспользуемся оценкой (1). Определим допустимые значения $M$ и $N$ из достоверности совпадения параметров $p = q$ биномиальных распределений не менее $\eta$ и естественном требовании минимальности $N$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся точным критерием Фишера для сравнения вероятностей, лежащих в основе двух биномиальных распределений при малых объёмах выборок [5, п. 4.6.7]. Метод основан на анализе т.н. таблиц $2 \times 2$. В нашем случае имеем таблицу

| | | |
|---|---|---|
| 0 | n | n |
| M | N-M | N |
| M | N-M+n | N+n |

Применение данного критерия вызвано тем, что использования общего критерия анализа $2 \times 2$ таблиц возможно лишь при достаточно больших значениях элементов таблицы, что в нашем случае заведомо не имеет места, поскольку одно из таких значений нулевое.

Вероятность $P$ того, что таблица порождена одним значением вероятности, будет равна

$$P = \frac{n!\,N!\,M!\,(N-M+n)!}{(N+n)!} \cdot \frac{1}{n!\,M!\,(N-M)!} = \frac{N!\,(N-M+n)!}{(N-M)!\,(N+n)!} = \frac{\binom{N}{M}}{\binom{N+n}{M}} .$$

Известна (см., например, [2]) асимптотика

$$\frac{\binom{n-s}{k}}{\binom{n}{k}} \sim \exp\left\{-\frac{s\,k}{n} - \frac{s^2k + sk^2}{2\,n^2}\right\} ,$$

справедливая при $s+k=o(n^{3/4})$ и $n\to\infty$. В нашем случае это даёт

$$P \;=\; \frac{\binom{(N+n)-n}{M}}{\binom{N+n}{M}} \;\sim\; \exp\Big\{-\frac{n\,M}{N+n}\Big(1+\frac{M+n}{N+n}\Big)\Big\}$$

с сохранением условия представления (как легко показать, для $P\to\max$ должно выполняться $M^2=o(N)$ , откуда и $n+M=o((N+n)^{3/2})$ при $N\to\infty$, $n=const$). Тогда по (4) имеем

$$-\frac{n\,M}{N+n}\Big(1+\frac{M+n}{N+n}\Big) \;\lesssim\; \ln\eta\,,$$

а полагая по (1), что $\widehat{p}_r=\dfrac{M}{N}$ и считая $N\gg 1$, получим

$$n\,\widehat{p}_r\,(1+\widehat{p}_r) \;\gtrsim\; \ln\frac{1}{\eta}\,. \tag{5}$$

Отсюда, пренебрегая величиной $\widehat{p}_r^{\;2}$, получим $\widehat{p}_r\simeq\dfrac{\ln(1/\eta)}{n}=\widehat{p}_\eta$.

Таким образом обе построенные оценки практически совпадают. Данную оценку обозначим $\widehat{p}_0$:

$$\widehat{p}_0(n) \;=\; 1-\sqrt[n]{\eta} \;\simeq\; \frac{\ln(1/\eta)}{n} \;\simeq\; \frac{1-\eta^2}{2\,\eta\,n} \;\simeq\; \frac{1-\eta}{\eta\,n}\,. \tag{6}$$

Её и предлагается принимать как точечную оценку вероятности 0-события. Приведённые асимптотики (перечисленные в порядке понижения точности с завышением оценки) справедливы для практических значений $\eta$ и не слишком малых $n$.

Несколько более грубые рассуждения, основанные на фиксации определённого значения $N$, приводят, как следствие $P\to\max$, к

$$M \;=\; 1\,. \tag{7}$$

Тогда $P\;=\;N/(N+n)$. По (4) имеем

$$N \;=\; \Big]\frac{\eta\,n}{1-\eta}\Big[ \tag{8}$$

и по (1) сразу получаем

$$p \;\leqslant\; \widehat{p} \;=\; \frac{M}{N} \;=\; \frac{1-\eta}{\eta\,n}\,,$$

что совпадает с (6).

Ясно, что для реальных значений $\eta$ и $n>3$

$$\widehat{p}_0 \;<\; \widehat{p}_{B_{med}} \;<\; \widehat{p}_{B_\mu} \;<\; p^+\,.$$

## 3. Интервальное согласованное оценивание

Полученная точечная оценка $\widehat{p}_0$ даёт интервальную оценку $p$ на основе принципа согласованности [3, 4]. Данный принцип, основанный на идее Э. Лемана [6], позволяет в рамках бейесовского подхода конкретизировать априорное распределение оцениваемого параметра. Метод направлен именно на малые вероятности событий.

По принципу согласованности априорное распределение выбираться, в частности, из условия совпадения бейесовской и частотной точечных оценок определяемого параметра. При этом получаемое априорное распределение (укажем что оно есть $f_{a\_priori}(p) = Be_p(1, b)$, где значение $b$, определяемое по принципу согласованности, см. ниже) в большей степени, чем равномерное распределение, согласуется с наблюдённым 0-событием. Далее, по принципу согласованности, апостериорное распределение есть $f_{a\_post}(p) = Be_p(1, b + n)$ и верхняя граница $p_c^+$ доверительного интервала $(0,\, p_c^+)$ для оцениваемой вероятности $p$, имеющей точечную оценку $\widehat{p}$, есть решение уравнения

$$I_x(1,\, n + b - 1) \;=\; \eta\,.$$

Здесь параметр $b$ определяется из условия $\widehat{p} = 1/N = 1/(b + n + 1)$, и, таким образом, $b = N - n - 1$. Тогда уравнение для определения $x = \widehat{p}_c^+$ принимает вид

$$I_x(1,\, 1/\widehat{p} - 2) \;=\; \eta \quad \text{или} \quad I_x(1,\, N - 2) \;=\; \eta \tag{9}$$

и в последнем случае значение $N$ берётся из (8).

Например, при $\eta = 0.95$ и $n = 10$ имеем $N = 190$, $\widehat{p}_r = 0.0053$. Уравнение (9) конкретизируется как $I_x(1,\, 188) = 0.95$, откуда по Таблице 5.2 из [1] получим $\widehat{p}_c^+ \approx 0,016$. Для сравнения: классические методы для данных параметров $M$ и $N$ дают доверительный интервал $(0,\, 0.024)$.

## Заключение

Проблема оценки вероятности 0-события не решена окончательно. Предложенная оценка интуитивно кажется слишком заниженной при малых значениях $n$, когда факт 0-события не противоречит предположению о достаточно больших значениях вероятности $p$. *Перспективным дальнейшим исследованием* является обоснование точечной оценки вероятности 0-события для малых выборок.

## Список литературы

1. *Большев Л.Н., Смирнов Н.В.* Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1983. – 464 с.
2. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражения по дискретной математике. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 416 с.
3. *Гуров С.И.* Принцип согласованности и бейесовское интервальное оценивание // Таврический вестник информатики и математики, 2003, № 2. – С. 14-27.
4. *Гуров С.И.* Интервальное оценивание на основе принципа согласованности // Вестник Тверского гос. университета. Серия «Прикладная математика», №14 (74), вып. 9, 2008. – С. 77-93.
5. *Закс Л.* Статистическое оценивание. – М.: Статистика, 1976. – 560 с.
6. *Леман Э.* Теория точечного оценивания. – М.: Наука, 1991. –448 с.
7. *Смоляк С.А., Титаренко Б.П.* Устойчивые методы оценивания: (Статистическая обработка неоднородных совкупностей). – М.: Статистика, 1980. – 208 с.

***Статья поступила в редакцию 01.09.2009***

**УДК 519.68: 681.513.7**

# ОЦЕНКИ ЧИСЛОВЫХ ПАРАМЕТРОВ В ДНФ СЛУЧАЙНЫХ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

**© Г.А. Махина**

Таврический национальный университет им.В.И.Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *gmakhina@yandex.ru*

**Abstract.** A number of Pattern Recognition problems can be reduced to the construction of prime, irredundant, or shortest disjunctive normal forms for partial Boolean functions. Knowledge of considered function metrical properties can facilitate finding optimal decision. The paper is devoted to numerical parameter estimates of partial Boolean functions taking values 0 and 1 with probabilities $p$ и $q$ correspondingly. The lower and upper bounds on the length of the shortest DNF representation of such functions are obtained in the paper.

## Введение

Применение дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) в распознавании образов связано с понятием отделимости (см. [1]) и с идеей построения простейшего логического отделителя двух подмножеств вершин $n$-мерного единичного куба. Задача нахождения простейшего логического отделителя представляет собой по сути задачу минимизации ДНФ частичных булевых функций (ЧБФ). Исследование метрических свойств таких функций позволяет оценить трудоемкость и качество процедур распознавания и тем самым ускорить поиск оптимальных решений. Обзоры по оценкам метрических параметров для почти всех функций алгебры логики можно найти в работах [2, 3, 4]. В статье [4] получена нижняя оценка среднего значения сложности тупиковой ДНФ частичной булевой функции. В работе [5] были рассмотрены частичные булевы функции $f$, принимающие каждое из значений $0, 1, -$ с вероятностью $1/3$. Для таких функций были найдены верхние и нижние асимптотические оценки числа $k$-мерных интервалов, длины и сложности кратчайших и минимальных д.н.ф. В данной работе получен более общий результат в предположении, что частичная булевая функция принимает значения 0 и 1 с вероятностями $p$ и $q$ соответственно.

## 1. Вспомогательные результаты и определения

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ – конечное множество, $\phi$ – функция, ставящая в соответствие каждому $a \in A$ неотрицательное число $\phi(a)$. Будем обозначать через

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(A) = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} \phi(a)$$

среднее значение функции $\phi$ на множестве $A$.

**Лемма 1.** *Пусть $\theta > 0$ и $\delta_\theta$ – доля тех $a \in A$, для которых $\phi(a) \geq \theta\bar{\phi}$. Тогда $\delta_\theta \leq \frac{1}{\theta}$.*

*Доказательство.*

$$\bar{\phi} = \frac{1}{s}\sum_{a\in A}\phi(a) \geq \frac{1}{s}\sum_{a\,:\,\phi(a)\geq\theta\bar{\phi}}\phi(a) \geq \frac{1}{s}s\delta_\theta\theta\bar{\phi} = \delta_\theta\theta\bar{\phi},$$

откуда и получаем утверждение леммы. □

Обозначим через $\sigma_{\mathscr{F}}(v)$ число ребер из $\mathscr{F}$, содержащих вершину $v$.

**Лемма 2.** *Пусть $H = (V, \mathscr{E})$ – гиперграф с $n$ вершинами. Пусть $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$, $\mathscr{F} \leq m$, а $Y \subseteq V$ – множество всех вершин $v$, для которых $\sigma_{\mathscr{F}}(v) \geq s$. Пусть $\epsilon \geq 0$ таково, что $|Y| \geq (1-\epsilon)n$. Тогда длина всякого градиентного покрытия гиперграфа $H$ не превосходит*

$$1 + \epsilon n + \frac{m}{s}\ln\frac{nse}{m}.$$

Доказательство данной леммы можно найти в [3].

## 2. Оценки среднего значения и дисперсии интервалов размерности $k$

Пусть функция $f : B^n \to \{0, 1, -\}$ на каждом наборе принимает независимо единичное значение с вероятностью $p$ и нулевое значение – с вероятностью $q$. Класс таких функций обозначим через $\widetilde{P}_{npq}$.

*Интервалом* функции называется грань куба, не содержащая нулей, но содержащая по крайней мере одну единицу. Обозначим через $i_k(f)$ число интервалов размерности $k$ функции $f$, а через $\bar{i}_k = M[i_k(f)]$ – математическое ожидание величины $i_k(f)$.

**Утверждение 1.** *Справедливо равенство*

$$\bar{i}_k = \binom{n}{k}2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - (1-q-p)^{2^k}\right).$$

*Доказательство.* Пусть $\mathscr{G}_k^n = \left\{I_j, j = \overline{1, \binom{n}{k}2^{n-k}}\right\}$ – множество всех граней размерности $k$ куба $B^n$. Пусть $P(I)$ — вероятность того, что некоторая грань $I \in \mathscr{G}_k^n$ является интервалом функции $f \in \widetilde{P}_n$. Из определения интервала следует, что

$$P(I) = (1-q)^{2^k} - (1-q-p)^{2^k}.$$

Так как $|\mathscr{G}_k^n| = \binom{n}{k}2^{n-k}$, то

$$\bar{i}_k = \binom{n}{k}2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - (1-q-p)^{2^k}\right),$$

что и требовалось доказать. □

**Утверждение 2.** *Пусть* $Di_k(n) = M[i_k^2(f)] - (M[i_k(f)])^2$ *– дисперсия параметра* $i_k(f)$. *Тогда*

$$Di_k = t^{2^{k+1}} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} 2^{n-j} \binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j} \cdot \left( \left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^{k+1}} \left((1-q)^{-2^j} - 1\right) - \right.$$
$$\left. - 2\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^k} \left((1-q)^{-2^j} - 1\right) + t^{-2^j} - 1 \right),$$

*где* $t = 1 - p - q$.

*Доказательство.* Пусть $\mathscr{G}_k^n$ – множество $k$-мерных граней куба $B^n$.

Для того чтобы оценить математическое ожидание величины $i_k^2(f)$, найдем вероятность $P(I, I')$ того, что два интервала $I$ и $I'$, такие что $I, I' \in \mathscr{G}_k^n$, одновременно принадлежат функции $f \in \widetilde{P}_{npq}$. Имеем два случая.

1. Если $|I \cap I'| = 2^j$, то

$$P(I, I') = (1-q)^{2^{k+1}-2^j} - 2(1-p-q)^{2^k}(1-q)^{2^k-2^j} + (1-p-q)^{2^{k+1}-2^j} = P_j;$$

2. Если $|I \cap I'| = 0$, то

$$P(I, I') = (1-q)^{2^{k+1}} - 2(1-p-q)^{2^k}(1-q)^{2^k} + (1-p-q)^{2^{k+1}} = P_\varnothing$$

Найдем $M[i_k^2(f)]$. Имеем:

$$M[i_k^2(f)] = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} P_j +$$
$$+ \left( \left( \binom{n}{k} 2^{n-k} \right)^2 - \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} \right) P_\varnothing =$$
$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} 2^{n-j} \binom{n-j}{k-j} \binom{n-k}{k-j} (P_j - P_\varnothing) + \left( \binom{n}{k} 2^{n-k} \right)^2 P_\varnothing =$$
$$= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{k} 2^{n-j} \binom{k}{j} \binom{n-k}{k-j} (P_j - P_\varnothing) + \left( \binom{n}{k} 2^{n-k} \right)^2 P_\varnothing$$

Здесь было использовано равенство $\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{k}\binom{k}{j}$.

Заметим, что

$$\left( \binom{n}{k} 2^{n-k} \right)^2 P_\varnothing = \left( \binom{n}{k} 2^{n-k} \right)^2 \left( (1-q)^{2^k} - (1-q-p)^{2^k} \right)^2 = (M[i_k(f)])^2$$

Обозначим через $t = 1 - p - q$ и преобразуем выражение

$$P_j - P_\varnothing = (1-q)^{2^{k+1}-2^j} - 2\,t^{2^k}(1-q)^{2^k-2^j} + t^{2^{k+1}-2^j} -$$

$$
-(1-q)^{2^{k+1}} - 2\,t^{2^k}(1-q)^{2^k} + t^{2^{k+1}} = t^{2^{k+1}}\left(\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^{k+1}}\left((1-q)^{-2^j}-1\right) - \right.
$$
$$
\left. - 2\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^k}\left((1-q)^{-2^j}-1\right) + t^{-2^j} - 1\right).
$$

Подставляя найденные значения, получаем

$$
Di_k = \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k} 2^{n-j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}(P_j - P_\varnothing) =
$$
$$
= t^{2^{k+1}}\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k} 2^{n-j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}\cdot\left(\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^{k+1}}\left((1-q)^{-2^j}-1\right) - \right.
$$
$$
\left. - 2\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^k}\left((1-q)^{-2^j}-1\right) + t^{-2^j} - 1\right),
$$

что и требовалось доказать. □

**Теорема 1.** *Пусть $\Psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ из класса $\widetilde{P}_{npq}$ число $k$-мерных интервалов удовлетворяет неравенствам:*

$$
\binom{n}{k}\left(2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - t^{2^k}\right) - \Psi(n)\sqrt{2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - t^{2^k}\right)}\right) < i_k(f) <
$$
$$
< \binom{n}{k}\left(2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - t^{2^k}\right) + \Psi(n)\sqrt{2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - t^{2^k}\right)}\right) \quad (2.1)
$$

*где $t = 1 - p - q$.*

*Доказательство.* Пусть $t = 1 - p - q$. Воспользуемся неравенством Чебышева, положив $\theta = \Psi(n)\binom{n}{k}\sqrt{2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - t^{2^k}\right)}$. Необходимо показать, что $\frac{Di_k(n)}{\theta^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Заметим, что $Di_k(n) = t^{2^{k+1}} 2^n \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j} a_j$, где

$$
a_j = 2^{-j}\left(\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^{k+1}}\left((1-q)^{-2^j}-1\right) - 2\left(\frac{1-q}{t}\right)^{2^k}\left((1-q)^{-2^j}-1\right) + t^{-2^j} - 1\right).
$$

Величина $a_j > 0$, так как $a_j \geq 2^{-j}\left((1-q)^{-2^j}-1\right)\left(\frac{1-q}{t}-1\right)^2$.

Покажем, что $a_j$ возрастает по $j$.

$$
\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{1}{2}\left((1-q)^{-2^j} + 1 + \frac{\left(t^{-2^j} - (1-q)^{-2^j}\right)\left(t^{-2^j} - 1\right)}{a_j\, 2^j}\right).
$$

Т.к. $\left(t^{-2^j} - (1-q)^{-2^j}\right)\left(t^{-2^j} - 1\right) > 0$, то $\frac{a_{j+1}}{a_j} > 1$, а значит $a_j$ возрастает по $j$.

Следовательно,

$$Di_k \le \binom{n}{k} 2^n a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j} \le \binom{n}{k}^2 2^{n-k}\left((1-q)^{2^k} - t^{2^k}\right).$$

Отсюда $\frac{Di_k(n)}{\theta^2} \le \frac{1}{\Psi^2(n)} \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

**Следствие 1.** *У почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ из $\widetilde{P}_{npq}$ нет интервалов размерности большей, чем $\lceil \log_2(n\log_{1/(1-q)} 2)\rceil$.*

Положим $k_0 = \lceil \log_2(n\log_{1/(1-q)} 2)\rceil$ и пусть $\Psi(n) = n$ Тогда

$$i_{k_0+1} <$$
$$< \binom{n}{k_0+1}\left(2^{n-k_0-1}\left((1-q)^{2^{k_0+1}} - t^{2^{k_0+1}}\right) + \Psi(n)\sqrt{2^{n-k_0-1}\left((1-q)^{2^{k_0+1}} - t^{2^{k_0+1}}\right)}\right)$$
$$< \binom{n}{k_0+1}\left(2^{n-k_0-1}(1-q)^{2^{k_0+1}} + \Psi(n)\sqrt{2^{n-k_0-1}(1-q)^{2^{k_0+1}}}\right)$$

Данное выражение стремится к нулю с ростом $n$. Следовательно, у почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ нет интервалов размерности $\lceil \log_2(n\log_{1/(1-q)} 2)\rceil$, а значит, и интервалов большей размерности.

**Следствие 2.** *Для почти всех функций*

$$2^n p - n\sqrt{2^n p} \le |N_f| \le 2^n p + n\sqrt{2^n p}$$

Заметим, что $|N_f| = i_0(f)$. Тогда утверждение вытекает из Теоремы 1, если положить в ней $\Psi(n) = n$.

**Следствие 3.** *Пусть $k_1 = \lceil \log_2 \log_{1/(1-q)} n + \log_2 \log_2 \log_{1/(1-q)} n\rceil$, а $Q_{k_1}(f)$ – число вершин $\tilde{\alpha} \in N_f$, содержащихся хотя бы в одном интервале функции $f$ размерности, большей чем $k_1$. Тогда у почти всех функций*

$$Q_{k_1}(f) \le n^{-(1-\delta_n)\log_2 \log_{1/(1-q)} n} \cdot 2^n,$$

*где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

В самом деле, пусть $Q'_{k_1}(f)$ – число вершин $\tilde{\alpha} \in N_f$, содержащихся хотя бы в одном интервале функции $f$ размерности, равной $k_1 + 1$. Ясно, что $Q_{k_1}(f) = Q'_{k_1}(f) \le 2^{k_1+1} i_{k_1+1}(f)$, но у почти всех функций

$$i_{k_1+1}(f(\tilde{x}^n)) < \bar{i}_{k_1+1}(n)\left(1 + \frac{\Psi(n)}{\sqrt{2^{n-k_1-1}\left((1-q)^{2^{k_1+1}} - t^{2^{k_1+1}}\right)}}\right).$$

Полагая $\Psi(n) = n$, получим для произвольного $\varepsilon$ и достаточно больших $n$

$$Q_{k_1}(f) \le 2^{k_1+1}\binom{n}{k_1+1} 2^{n-k_1-1}\left((1-q)^{2^{k_1+1}} - t^{2^{k_1+1}}\right)(1+\varepsilon) \le$$

$$\leq 2^n \binom{n}{k_1+1}(1-q)^{2^{k_1+1}}(1+\varepsilon) \leq$$
$$\leq (1+\varepsilon)2^n n^{k_1+1}(1-q)^{2\log_{1/(1-q)} n \log_2 \log_{1/(1-q)} n} \leq 2^n n^{-(1-\delta_n)\log_2\log_{1/(1-q)} n},$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

**Следствие 4.** *Пусть* $k_2 = \lfloor \log_2 \log_{1/(1-q)} n \rfloor$, $i(f)$ *– число всех интервалов функции* $f$. *Тогда для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$

$$i(f) = \left( \binom{n}{k_2} 2^{n-k_2} \left( (1-q)^{2^{k_2}} - (1-q-p)^{2^{k_2}} \right) + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{k_2+1} 2^{n-k_2-1} \left( (1-q)^{2^{k_2+1}} - (1-q-p)^{2^{k_2+1}} \right) \right)(1+\delta_n),$$

*где* $\delta_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Рассмотрим отношение

$$\lambda_k = \frac{\bar{i}_{k+1}(n)}{\bar{i}_k(n)} = \frac{(n-k)}{2(k+1)} \left( (1-q)^{2^k} + (t)^{2^k} \right) = \frac{(n-k)}{2(k+1)}(1-q)^{2^k} \left( 1 + \left( \frac{t}{1-q} \right)^{2^k} \right),$$

где $t = 1-q-p$.

Ясно, что $\lambda_k \to \infty$ при $k < k_2$ и $\lambda_k \to 0$ при $k > k_2$. Для достаточно больших $n$ имеем $\lambda_k > 1$ при $k < k_2$ и $\lambda_k < 1$ при $k \geq k_2$. Поэтому $\max_k \bar{i}_k(n)$ достигается либо при $k = k_2$ либо при $k = k_2 + 1$.

Полагая в (2.1) $\Psi(n) = n$, получим, что для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ и $k < \lceil \log_2(n \log_{1/(1-q)} 2) \rceil$

$$\bar{i}_k(n)(1-\delta_n) < i_k(n) < \bar{i}_k(n)(1+\delta_n),$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Суммируя эти неравенства по $k$, $0 \leq k \leq \lceil \log_2(n \log_{1/(1-q)} 2) \rceil$ и учитывая, что $\lambda_k > n^c$, $c > 0$ при $k < k_2$ и $\lambda_k < (\log_2 \log_{1/(1-q)} n)^{-1}$ при $k \geq k_2$, получим, что для почти всех функций

$$\left( \bar{i}_{k_2}(n) + \bar{i}_{k_2+1}(n) \right)(1-\delta'_n) < i(f) < \left( \bar{i}_{k_2}(n) + \bar{i}_{k_2+1}(n) \right)(1+\delta'_n),$$

где $\delta'_n \to 0$ при $n \to \infty$.

**Следствие 5.** *Для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$

$$i(f) = n^{(1-\delta_n)\log_2\log_{1/(1-q)} n}\, 2^n,$$

*где* $\delta_n = O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right)$.

Вытекает из предыдущего следствия.

**Следствие 6.** *Для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$ *число максимальных интервалов не превосходит* $n^{(1-o(1))\log_2\log_{1/(1-q)} n}\, 2^n$.

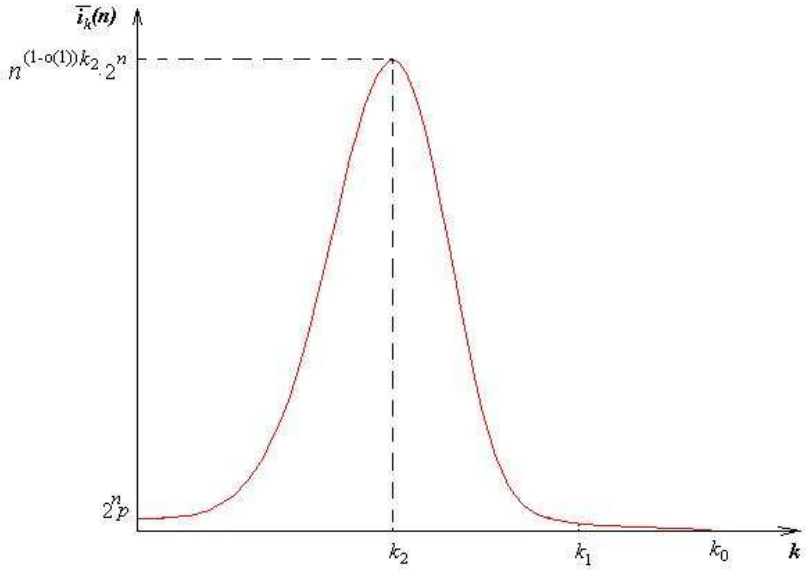



*Рис.* 1. Зависимость $\bar{i}_n(k)$ от $k$.

На рисунке 1 показана зависимость $\bar{i}_n(k)$ от $k$. Из теоремы 1 вытекает, что для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ параметр $i_k(f)$ зависит от $k$ подобным же образом.

**Следствие 7.** *Пусть $l^M(f)$, $l(f)$ – длины, а $L(f)$, $L^K(f)$ – сложности минимальной и кратчайшей д.н.ф. функции $f$ соответственно. Тогда для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$*

$$l^M(f) = l(f)(1+\delta_n),\ L^k(f) = L(f)(1+\delta'_n),\ L(f) = n\,l(f)(1+\delta''_n),$$

*где $\delta_n, \delta'_n, \delta''_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

В силу следствия 1 имеем:

$$(n - \lceil\log_2(n\log_{1/(1-q)} 2)\rceil)\, l(f) \leq$$
$$\leq (n - \lceil\log_2(n\log_{1/(1-q)} 2)\rceil)\, l^M(f)) \leq L(f) \leq L^k(f) \leq n\, l(f).$$

Отсюда и вытекает утверждение.

Таким образом, для получения асимптотических оценок параметров $l^M(f)$, $l(f)$, $L(f)$, $L^K(f)$ достаточно найти асимптотическую оценку одного из этих параметров, например, $l(f)$.

**Теорема 2.** *Для почти всех функций $f(\tilde{x}_n)$*

$$L(f) \geq \frac{c\,n2^n p}{\log_{1/(1-q)} n\, \log_2 \log_{1/(1-q)} n}, \qquad l(f) \geq \frac{c\,2^n p}{\log_{1/(1-q)} n\, \log_2 \log_{1/(1-q)} n},$$

*где* $1/2 < c < 1$.

*Доказательство.* Рассмотрим множество $\widetilde{P}'_n$ функций $f \in \widetilde{P}_n$, обладающих следующими свойствами:

1. $|N_f| \geq 2^n\,p - n\sqrt{2^n\,p}$;
2. $Q_{k_1}(f) \leq n^{-(1+o(1))\log_2 \log_{1/(1-q)} n}\,2^n$.

Из следствий 1–3 вытекает, что $\lim_{n\to\infty} |P'_n| 2^{-2^n} = 1$.

Покажем, что для всякой функции $f \in P'_n$ любое покрытие множества $N_f$ интервалами имеет мощность, большую $\frac{c\,2^n p}{\log_{1/(1-q)} n \log_2 \log_{1/(1-q)} n}$. В самом деле, из свойств (1) и (2) вытекает, что по меньшей мере $2^n p(1 - o(1))$ вершин множества $N_f$ покрываются лишь интервалами размерности не большей, чем $k_1 = \lceil \log_2 \log_{1/(1-q)} n + \log_2 \log_2 \log_{1/(1-q)} n \rceil$. Отсюда

$$l(f) \geq \frac{|N_f| - Q_{k_1}(f)}{2^{k_1}} \geq \frac{c\,2^n p}{\log_{1/(1-q)} n \log_2 \log_{1/(1-q)} n}$$

□

Оценим сверху длину кратчайшей д.н.ф. для почти всех функций $f \in \widetilde{P}_{npq}$.

Пусть $\widetilde{P}_{npq}(\widetilde{\alpha})$ – множество всех функций $f \in \widetilde{P}_{npq}$, таких, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, и пусть $\mathscr{G}^n_k(\widetilde{\alpha})$ – множество $k$-мерных граней куба $B^n$, содержащих вершину $\widetilde{\alpha}$. Обозначим через $v_k(\widetilde{\alpha}, f)$ число $k$-мерных интервалов функции $f$ из $\widetilde{P}_{npq}(\widetilde{\alpha})$, содержащих вершину $\widetilde{\alpha}$, через $\bar{v}_k(n)$ – математическое ожидание величины $v_k(\widetilde{\alpha}, f)$, $\bar{v}_k(n) = M[v_k(\widetilde{\alpha}, f)]$, и через $Dv_k(n)$ – дисперсию параметра $v_k(\widetilde{\alpha}, f)$, $Dv_k(n) = M[v_k^2(\widetilde{\alpha}, f)] - (M[v_k(\widetilde{\alpha}, f)])^2$.

**Утверждение 3.**

$$\bar{v}_k(n) = \binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1},$$

$$Dv_k(n) \leq \bar{v}_k^2(n)\left(\frac{k^3}{n(1-q)} + \frac{k}{\binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1}}\right).$$

*Доказательство.* Очевидно, что вероятность $P(I)$ того, что некоторая грань $I \in \mathscr{G}^n_k(\widetilde{\alpha})$ является интервалом функции $f \in \widetilde{P}_{npq}(\widetilde{\alpha})$, равна

$$P(I) = (1-q)^{2^k-1}.$$

Поскольку общее число граней ранга $n-k$ в $B^n$, содержащих заданную вершину, равно $\binom{n}{k}$, то получаем, что

$$\bar{v}_k(n) = \binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1}.$$

Оценим сверху дисперсию $Dv_k(n) = M[v_k^2(\widetilde{\alpha}, f)] - (M[v_k(\widetilde{\alpha}, f)])^2$. Чтобы оценить $M[v_k^2(\widetilde{\alpha}, f)]$, найдем вероятность того, что грани $I, I'$ из $\mathscr{G}^n_k(\widetilde{\alpha})$ одновременно являются интервалами функции $f$ из $\widetilde{P}_{npq}(\widetilde{\alpha})$. Рассмотрим два случая

1. $|I \cap I'| = \{\widetilde{\alpha}\}$:
$$P(I, I') = (1-q)^{2^{k+1}-2};$$
2. $|I \cap I'| \neq \widetilde{\alpha}$:
Пусть интервалы $I, I'$ из $\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$ пересекаются по грани размерности $j$, тогда
$$P(I, I') = (1-q)^{2^{k+1}-2^j-1}.$$

Обозначим через
$$S_1 = \binom{n}{k}\binom{n-k}{k}(1-q)^{2^{k+1}-2}$$
и
$$S_2 = \sum_{j=1}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{k-j}(1-q)^{2^{k+1}-2^j-1}.$$

Поскольку $S_1 \leq \left(\binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1}\right)^2 = \bar{v}_k^2(n)$, то имеем
$$Dv_k(n) = S_1 + S_2 - \bar{v}_k^2(n) \leq S_2.$$

Преобразуем $S_2$
$$S_2 = \binom{n}{k}(1-q)^{2^{k+1}-1}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}(1-q)^{-2^j}.$$

Положим $a_j = \binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}(1-q)^{-2^j}$. Рассмотрим отношение
$$d = \frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{(k-j)^2(1-q)^{-2^j}}{(j+1)(n-2k+j+1)}.$$
Имеем $d < 1$ при $j < \lfloor \log_2 \log_{1/(1-q)} n \rfloor$ и $d > 1$ при $k > j \geq \lfloor \log_2 \log_{1/(1-q)} n \rfloor$. Поэтому
$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leq k(a_1 + a_k) \leq k\left(k\binom{n-1}{k-1}(1-q)^{-2} + (1-q)^{-2^k}\right).$$

Таким образом, получаем
$$S_2 \leq \binom{n}{k}(1-q)^{2^{k+1}-1}k\left(k\binom{n-1}{k-1}(1-q)^{-2} + (1-q)^{-2^k}\right) =$$
$$= \binom{n}{k}^2(1-q)^{2^{k+1}-2}\left(\frac{k^3}{n(1-q)} + \frac{k}{\binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1}}\right) =$$
$$= \bar{v}_k^2(n)\left(\frac{k^3}{n(1-q)} + \frac{k}{\binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1}}\right)$$
и
$$Dv_k(n) \leq \bar{v}_k^2(n)\left(\frac{k^3}{n(1-q)} + \frac{k}{\binom{n}{k}(1-q)^{2^k-1}}\right).$$

□

**Следствие 1.** *Если* $k \le k_1 - 1 = \lceil \log_2 \log_{1/(1-q)} n + \log_2 \log_2 \log_{1/(1-q)} n \rceil - 1$, *то* $Dv_k(n) \le \frac{c \log_2 n}{n} \bar{v}_k^2(n)$, *где* $c$ *– константа.*

**Утверждение 4.** *Пусть* $1 \le k \le k_1 - 1$. *Тогда доля* $\delta_n$ *тех функций* $f \in \widetilde{P}_{npq}(\widetilde{\alpha})$, *для которых* $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \frac{1}{\log_2 n} \bar{v}_k(n)$, *не превосходит* $\frac{c \log_2^3 n}{n}$.

*Доказательство.* В силу неравенства Чебышева доля $\delta_n$ функций $f \in \widetilde{P}_{npq}(\widetilde{\alpha})$, для которых $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \theta$, удовлетворяет неравенству $\delta_n \le \frac{Dv_k(n)}{\theta^2}$. Положив $\theta = \frac{\bar{v}_k(n)}{\log_2 n}$, получаем требуемое утверждение. □

**Утверждение 5.** *Пусть* $f \in \tilde{P}_{npq}$ *и* $b_k(f)$ *– число тех вершин* $\tilde{\alpha} \in N_f$, *для которых* $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \frac{1}{\log_2 n} \bar{v}_k(n)$. *Пусть* $\delta'_n$ *– доля тех функций, у которых* $b_k(f) \le \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$. *Тогда* $\delta'_n \ge 1 - \frac{c}{\log_2 n}$.

*Доказательство.* Обозначим через $P(\widetilde{\alpha})$ – вероятность того, что вершина $\widetilde{\alpha} \in N_f$, где $f \in \widetilde{P}_{npq}$, и $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \frac{\bar{v}_k(n)}{\log_2 n}$. Тогда математическое ожидание величины $b_k(f)$ равно $\bar{b}_k(n) = \sum_{\widetilde{\alpha} \in B^n} P(\widetilde{\alpha})$. Заметим, что $P(\widetilde{\alpha}) = p\,\delta_n \le p \frac{c \log_2^3 n}{n}$. Отсюда получаем $b_k(f) \le \frac{c \log_2^3 n}{n} 2^n$.

В силу леммы 1 доля тех функций $f \in \widetilde{P}_{npq}$, для которых $b_k(f) \ge \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$, не превосходит $\frac{c}{\log_2 n}$. Значит, доля тех функций $f$, для которых $b_k(f) \le \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$, больше, чем $1 - \frac{c}{\log_2 n}$, что и требовалось доказать. □

**Теорема 3.** *Для почти всех функций* $f \in \widetilde{P}_{npq}$ *существует д.н.ф.* $D$ *длины* $l(D) \le \frac{c 2^n}{\log_{1/(1-q)} n}$ *и сложности* $L(D) \le \frac{c n 2^n}{\log_{1/(1-q)} n}$

*Доказательство.* Рассмотрим подмножество $\widetilde{P}''_{npq} \subset \widetilde{P}_{npq}$ всех функций $f(\tilde{x}^n)$, обладающих следующими свойствами:

1. $|N_f| \le 2^n p + n\sqrt{2^n p}$;
2. $b_k(f) \le \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$ для всех $k \le k_1 - 2$;
3. $i_{k_1-2}(f) = \binom{n}{k_1-2} 2^{n-k_1+2} \left( (1-q)^{2^{k_1-2}} - (1-q-p)^{2^{k_1-2}} \right) (1+\delta_n)$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из следствия 1 и утверждения 5 вытекает, что почти все функции обладают свойствами 1 и 2.

Свяжем теперь с каждой функцией $f \in \widetilde{P}''_{npq}$ гиперграф $H_f = (V, \mathscr{E})$, в котором $V = N_f$, а $\mathscr{E}$ совпадает с множеством всех интервалов функции $f$. Пусть $\mathscr{F}$ – множество всех интервалов размерности $k = \lceil \log_2 \log_{1/(1-q)} n + \log_2 \log_2 \log_{1/(1-q)} n \rceil - 2$, а $Y$ – множество тех $\widetilde{\alpha} \in N_f$, для которых $v_k(\widetilde{\alpha}, f) \geq \bar{v}_k(n)\left(1 - \frac{1}{\log_2 n}\right)$. Положим $\epsilon = \frac{\log_2^4 n}{p\,n}$. Ясно, что условия Леммы 2 выполняются. Поэтому длина всякого градиентного покрытия гиперграфа $H$ не превосходит

$$1 + \frac{\log_2^4 n}{n}\,2^n + 2^{n-k_1+2}(1+\delta_n)\ln\left(\frac{1}{p}\,e\,2^{k_1-2}(1+\delta'_n)\right) \sim k_1 2^{n-k_1+2} \sim \frac{c2^n}{\log_{1/(1-q)} n}.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы. □

Таким образом, у почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ из класса $\widetilde{P}_{npq}$ длина кратчайшей д.н.ф. удовлетворяет неравенствам

$$\frac{c\,p\,2^n}{\log_{1/(1-q)} n\,\log_2 \log_{1/(1-q)} n} \leq l(f) \leq \frac{c2^n}{\log_{1/(1-q)} n}.$$

## Заключение

В работе получены нижние и верхние оценки кратчайших днф почти всех частичных булевых функций, принимающих значения 0 и 1 с вероятностями $p$ и $q$ соответственно.

Автор выражает признательность проф. Сапоженко А. А. за постановку задачи и внимание к работе.

## Список литературы

1. *Журавлев Ю. И.* Об отделимости подмножеств вершин n-мерного единичного куба. // Труды МИАН, 1958 г., том LI, 143-157.
2. *Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.* Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм. Сб. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974, С. 99-206.
3. *Сапоженко А. А.* Дизъюнктивные нормальные формы. - М.: Изд-во Московского университета, 1975.
4. *Сапоженко А. А., Чухров И. П.* Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники, Теория вероятностей, мат. статистика, теоретическая кибернетика, т. 25, М.: ВИНИТИ, 1987, 68-116.
5. *Махина Г. А.* Числовые характеристики ДНФ случайных частичных булевых функций. // Таврический вестник информатики и математики. Симферополь, ТНУ, 2008. том 2, С. 68-79.
6. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. - М.: Физматлит, 2004 г. 416 с.
7. *Сапоженко А.А.* Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. - М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2005. 124 с.
8. *O'Connor L.* A new lower bound on the expected size of irredundant forms for Boolean functions // Information Processing Letters, Volume 53, Number 6, 24 March 1995 , pp. 347-353(7).

***Статья поступила в редакцию 19.09.2009***

УДК 519.21

# СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

**© Нікітін А.В.**

Чернівецький національний університет ім. Ю. Федьковича
факультет прикладної математики
вул. Коцюбинського, 2, м. Чернівці, 58012, Україна
e-mail: *nik_tol@rambler.ru*

**Abstract**.We obtain conditions of asymptotical stability in mean square of solutions of systems of stohastic Ito-Skorochod differential equations in space of Hilbert.

## Вступ

Асимптотичні задачі для стохастичних диференціальних рівнянь виникали і розв'язувалися одночасно з виникненням теорії стохастичних диференціальних рівнянь, оскільки засновник цієї теорії Й.І. Гіхман розглядав задачі про асимптотичну поведінку як первинні. Самі стохастичні диференціальні рівняння будувалися Й.І. Гіхманом для того, щоб можна було не тільки строго сформулювати асимптотичні задачі, але й їх розв'язувати. Можна виділити такі напрямки дослідження асимптотичних властивостей динамічних систем з випадковими збуреннями:

1) дослідження поведінки динамічної системи при $t \to \infty$;
2) дослідження системи, що залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$ при його прямуванні до 0;
3) дослідження системи при одночасному прямуванні $\varepsilon$ до 0, а $t$ до $+\infty$.

При розгляді асимптотичної поведінки динамічної системи дослідників цікавить стабілізація цієї системи. Терміном "стабілізація"системи можна характеризувати деяку закономірність, яка притаманна поведінці системи. Найбільш грубим характером такої стабілізації є обмеженість за ймовірністю, з якої випливає ергодичність динамічної системи. Ця властивість найбільш точно характеризує поведінку системи на проміжку $[0, +\infty)$. При вивченні поведінки динамічних систем на $[0, +\infty)$ природно виникають питання про асимптотичну стійкість цієї системи в околі стану рівноваги чи її нестійкість. Для стохастичних систем при певних припущеннях із стійкості випливає асимптотична стійкість. Особливу зацікавленість представляють собою лінійні системи, для яких фазова нульова точка є єдиною точкою рівноваги. Такі системи або стійкі, або нестійкі, при цьому система або прямує до безмежності, або осцилює. Перенесення результатів, що стосуються стохастичних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах на безмежновимірний випадок далеко не тривіальне. Вивчення стохастичних лінійних систем призвело до поняття стохастичної півгрупи, яке ввів А.В. Скороход. Середньоквадратична стійкість розв'язків лінійних лінійних стохастичних диференціальних рівнянь пов'язана зі стійкістю вже невипадкових півгруп у банаховому просторі лінійних операторів, що діють у гільбертовому просторі. Дана робота продовжує ці дослідження і присвячена аналізу стійкості систем стохастичних диференціальних рівнянь з пуассоновими збуреннями у гільбертовому просторі у нескінченновимірному випадку.

## 1. Перший розділ

Нехай $X$ – гільбертовий простір над $\mathbb{R}$ із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_X$ і нормою $\|\cdot\|_X$;. Розглянемо випадковий процес $\{x(t)\equiv x(t,\omega), t\leq t_0\}\subset R^n$, заданий на ймовірнісному просторі $(\Omega,F,P)$ як сильний розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$dx(t)=Ax(t)dt+\sum_{i=1}^{\infty}[B_ix(t)dW_i(t)+\int\limits_U C_i(u)x(t)\tilde{\nu}_i(dt,du)],\ t>t_0, \tag{1}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{2}$$

де $\{W_1(t)\},\{W_2(t)\},...$ – стандартні вінерівські процеси; $\tilde{\nu}_1(dt,du),\tilde{\nu}_r(dt,du),...$ – центровані пуассонівські міри; $A,B_i,i=1,2,...$ – дійсні матриці розміру $n\times n$; $\{C_j(u)\}$, $j=1,2,...$ – матриці-функції такі, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_U |C_j(u)|^2\Pi_j(du)<+\infty.$$

Вивчимо питання асимптотичної поведінки розв'язку системи (1), (2) на нескінченному інтервалі часу.

**Теорема 1.** (критерій асимптотичної стійкості у середньому квадратичному) *Тривіальний розв'язок $x(t)\equiv 0$ задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні умови:*

*1) матриця $A$ гурвіцева;*

*2) існує розв'язок $H\equiv H^T>0_{n\times n}$ узагальненого матричного рівняння Сільвестра*

$$A^TH+HA+\sum_{i=1}^{\infty}[B_i^THB_i+\int\limits_U C_i^T(u)HC_i(u)\Pi_i(du)]=-G, \tag{3}$$

*де $G\equiv G^T>0_{n\times n}$.*

*Доведення.* Оскільки система (1) лінійна і автономна, то потрібну функцію Ляпунова слід шукати серед додатно визначених квадратичних форм вигляду

$$v(x)=x^THx, \tag{4}$$

де невідому матрицю $H\equiv H^T>0_{n\times n}$ визначимо далі.

Перевіримо умови, якими повинна володіти функція Ляпунова, щоб розвязок системи був асимптотично стійким у середньому квадратичному:

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2\leq v(x)=x^THx\leq\lambda_{\max}(H)|x|^2,$$

Обчислимо оператор $Lv(x)$ на розв'язках системи (1):

$$Lv(x) = (\nabla v(x), Ax) + \frac{1}{2} sp \sum_{i=1}^{\infty} \nabla^2 v(x) B_i x (B_i x)^T +$$

$$+ \int_U v(x + \sum_{i=1}^{\infty} C_i(u)x) - v(x) - (\nabla v(x), \sum_{i=1}^{\infty} C_i(u)x(t))\Pi_i(du) =$$

$$= x^T A^T H x + x^T H A x + \sum_{i=1}^{\infty} [x^T B_i^T H B_i x + \int_U x^T C_i^T(u) H C_i(u) x \Pi_i(du)] =$$

$$= x^T [A^T H + HA + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H B_i + \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]] x.$$

Оператор $Lv(x)$ буде від'ємним тоді і тільки тоді, коли матриця

$$A^T H + HA + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H B_i + \int_U C_i^T(u) H C_i(u) \Pi_i(du)]$$

буде від'ємно визначеною, що, у свою чергу, можливо тоді і тільки тоді, коли матриця $H \equiv H^T > 0_{n \times n}$ знаходиться як розв'язок (3). Теорему доведено. □

Розглянемо функцію Ляпунова у вигляді квадратичної форми

$$v(x) = x^T H_0 x, \tag{5}$$

де $H_0 \equiv H_0^T > 0_{n \times n}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$A^T H_0 + H_0 A = -G, \tag{6}$$

де $G \equiv G^T > 0_{n \times n}$. Рівняння (6) виникає з рівняння (3) при відсутності випадкових збурень.

**Теорема 2.** *Для гурвіцевої матриці $A$ розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному тоді, коли виконується нерівність*

$$A^T H_0 + H_0 A + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H_0 B_i + \int_U C_i^T(u) H_0 C_i(u) \Pi_i(du)] < 0_{n \times n},$$

*де $H_0 \equiv H_0^T > 0_{n \times n}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова (6).*

Доведення теореми 2 здійснюється повторенням ходу доведення теореми 1 стосовно функції Ляпунова (5).

**Теорема 3.** *Розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) з невиродженими матрицями $B_i$ та $C_i(u)$, $i = 1, 2, ...$ асимптотично стійкий у середньому квадратичному, якщо матриця $A$ гурвіцева і виконується матрична нерівність*

$$\sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T (H_{00} - I) B_i + \int_U C_i^T(u)(H_{00} - I) C_i(u) \Pi_i(du)] \le 0_{n \times n},$$

*де* $H_{00} \equiv H_{00}^T > 0_{n\times n}$ *– розв'язок матричного рівняння Ляпунова*

$$A^T H_{00} + H_{00} A = -\sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T B_i + \int_U C_i^T(u) C_i(u) \Pi_i(du)]. \tag{7}$$

*Доведення.* Оскільки у випадку невиродженості матриць $B_i$ та $C_i(u)$, $i = 1, 2, ...$, виконуються нерівності

$$\sum_{i=1}^{\infty} B_i^T B_i > 0_{n\times n}, \ \sum_{i=1}^{\infty} \int_U C_i^T(u) C_i(u) \Pi_i(du) > 0_{n\times n},$$

то функцією Ляпунова для збуреної задачі (1), (2) може бути квадратична форма фазових змінних

$$v(x) = x^T H_{00} x, \tag{8}$$

де $H_{00} \equiv H_{00}^T > 0_{n\times n}$ – розв'язок матричного рівняння Ляпунова (7).

Оскільки вимагається від'ємність $Lv(x)$ на розв'язках задачі (1), (2), то виконується нерівність

$$A^T H_{00} + H_{00} A + \sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T H_{00} B_i + \int_U C_i^T(u) H_{00} C_i(u) \Pi_i(du)] < 0_{n\times n},$$

звідки, враховуючи (7), отримуємо твердження теореми 3. □

**Теорема 4.** *Для стійкої матриці* $A$ *і невироджених матриць* $B_i$ *та* $C_i(u)$, $i = 1, 2, ...$, *достатньою умовою асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язку* $x(t) \equiv 0$ *задачі (1), (2) є виконання для сліду матриці* $H_{00}$ *нерівності*

$$tr H_{00} < 1. \tag{9}$$

*Доведення.* Згідно твердження теореми 3, достатньою умовою асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язку $x(t) \equiv 0$ задачі (1), (2) є виконання нерівності

$$\sum_{i=1}^{\infty} [B_i^T (H_{00} - I) B_i + \int_U C_i^T(u) (H_{00} - I) C_i(u) \Pi_i(du)] \le 0_{n\times n},$$

яка справедлива тоді і тільки тоді, коли від'ємно визначеною є матриця $H_{00} - I$. Звідси випливає, що всі власні значення додатно визначеної матриці $H_{00}$ повинні бути менші за одиницю, тобто $\lambda(H_{00}) < 1$. Достатньою умовою того, щоб $\lambda(H_{00}) < 1$ є нерівність (9) для сліду матриці $H_{00}$ [3]. Теорему 4 доведено. □

## Заключення

*У роботі одержані наступні результати: встановлені необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків ЛСДР Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.*

## Список літератури

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
2. *Нікітін А.В.* Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язків систем лінійних диференціально-різницевих рівнянь з векторним вінерівським процесом та пуассонівськими перемиканнями // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки, В.3, 2001. – С. 312-319.
3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

***Статья поступила в редакцию 04.04.2009***

УДК 519.6

# КОНСЕРВАТИВНА КІНЦЕВО-РІЗНИЦЕВА СХЕМА ЗАДАЧІ СТЕФАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІї

© Славко Г.В.

Кременчуцький державний політехнічний університет
им. Михайла Остроградського
факультет електроніки і комп'ютерної інженерії
вул. Першотравнева, 20, м. Кременчук, 39600, Україна
e-mail: *emath@mail.ru*

**Abstract**. Conservative finit-difference solution's scheme of an equation of diffusion with a free boundary is adapted for a software realization in MathCAD. Developed program allows to research solutions for arbitrary function which determines a free boundary.

## Вступ

Метод кінцевих різниць – найбільш розповсюджений числовий метод розв'язання рівнянь з частинними похідними. Класичним прикладом є застосування цього методу для розв'язання рівняння дифузії – одновимірного по просторовій координаті рівняння параболічного типу. Задачі кристалізації вимагають побудови алгоритму розв'язання таких рівнянь, за умови вільної межі, що визначається деякою функцією, та граничних умов третього роду [1]. Специфіка мов програмування сучасних математичних програм Maple, MathCad, Matlab та інших потребує адаптації відомих алгоритмів кінцево-різницевих схем у відповідності з їх семантикою з урахуванням особливостей накопичення похибки обчислень [2]. Безперечні переваги застосування цих програм визначаються швидкістю програмування та наочністю подання отриманих результатів і компенсують витрати часу на розробку таких алгоритмів. Тим не менше безпосереднє програмування у цих програмах в більшості випадків виявляється більш ефективним, ніж використання вбудованих функцій.

## 1. Задача Стефана у загальному вигляді

Особливістю задачі (1)-(4) є вільна межа, що визначається функцією $s(t)$ та граничні умови третього роду (комбінація шуканої функції та її похідної по просторовій координаті) за наявності похідної $ds/dt$ функції, що визначає вільну границю. Таким чином, маємо задачу типу Стефана:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=f(t), s\left(t\right)<x<L,\ t>0, \tag{1.1}$$

граничні умови:

$$\alpha\frac{\partial u\left(s\left(t\right),t\right)}{\partial x}+\beta u\left(s\left(t\right),t\right)=\varphi_0\left(t\right),x=s(t),t>0, \tag{1.2}$$

$$\gamma\frac{\partial u\left(L,t\right)}{\partial x}+\delta u\left(L,t\right)=\varphi_L\left(t\right),x=L,t>0, \tag{1.3}$$

початкові умови:

$$u\left(x,0\right)=\psi\left(x\right),s\left(0\right)\le x\le L,t=0. \tag{1.4}$$

Граничні умови задачі дозволяють побудувати явну кінцево-різницеву схему. Її перевагою безумовно є можливість отримання значень шуканої сіткової функції на наступному часовому шарі через відомі значення попереднього шару, а тому програмна реалізації проста (без розв'язання систем лінійних рівнянь). Але, як відомо, застосування цієї схеми обмежується вимогою умової стійкості $a^2\tau\Big/\left(h^k\right)^2 \leq 1/2$ , яка визначає можливі крокові характеристики сітки $\tau,\ h^k$. Наявність вільної межі обумовлює зміну для часових кроків просторових кроків, а це в свою чергу накладає більш жорсткі вимоги до сітки. Таким чином, явну різницеву схему за критеріями збіжності слід вважати неприйнятною для розв'язання цієї задачі. Тому будуватимемо неявну схему, яка хоч і призводить до необхідності розв'язання системи лінійних рівнянь, але є абсолютно стійкою, що особливо важливо для змінної сітки. Зазначимо тут, що для неявної схеми чисельний розв'язок у разі його зростання є завищеним, а у разі спадання – заниженим. Це відбувається за рахунок того, що числовий розв'язок за неявною схемою визначається значеннями сіткової функції на верхньому часовому шарі.

## 2. Побудова консервативної різницевої схеми

Для побудови різницевої схеми для задачі (1)-(4) скористаємося методикою роботи [3]. Побудуємо для області

$$s\left(t\right) < x < L, 0 \leq t \leq T, T < \infty$$

кінцево-різницеву сітку

$$t^k = k\cdot\tau,\ k = \overline{0,M}, j = \overline{0,N},$$

$$\omega_{h\tau} = \left\{x_j^k = s^k + j\cdot h_k,\ h^k = \left(L - s^k\right)/N,\ s^k = s\left(t^k\right)\ \right\}.$$

Наведемо деякі пояснення. Крок за часом $\tau$ є незмінним для всіх шарів сітки $\tau = T/M$, де $M$ – кількість часових інтервалів, а просторовий крок $h^k$ змінюється у відповідності з виразом $h^k = \left(1 - s^k\right)/N$, де $N$ – кількість просторових інтервалів. Зміна просторового кроку на кожному часовому кроці призводить до залежності просторових координат $x_j^k$ вузлів сітки від часового шару. Часові шари визначаються виразом $t^k = k\cdot\tau$. Таким чином, будемо мати сітку, яка адаптується до зміни межі часово-просторової області. У вузлах сітки визначатимемо шукану функцію задачі $u_j^k = u\left(x_j^k, t^k\right)$ . Диференційні оператори апроксимуємо відношенням кінцевих різниць для $k$ -го та $k+1$ часових шарів:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^{k+1} = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O\left(\tau\right), \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{\left(h_{k+1}\right)^2} + O\left(\left(h^{k+1}\right)^2\right). \tag{2.2}$$

Підставимо (5),(6) в (1), отримаємо для внутрішніх вузлів сітки:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2\frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{\left(h_{k+1}\right)^2} + f\left(t^{k+1}\right) + O\left(\tau + \left(h^{k+1}\right)^2\right). \tag{2.3}$$

Якщо похідні першого порядку, що присутні в граничних умовах апроксимувати відношеннями правих і лівих кінцевих різниць:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j=0}^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h^{k+1}} + O\left(h^{k+1}\right), \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{j=N}^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h^{k+1}} + O\left(h^{k+1}\right), \tag{2.4}$$

то апроксимація буде наближенням першого порядку і загальний порядок апроксимації схеми буде першим, не зважаючи на те, що в інших вузлах порядок апроксимації по просторовим змінним другий. Таким чином, для збереження другого порядку апроксимації, в граничних вузлах розкладемо $u_1^{k+1}$ в околі точки $x = s\left(t^{k+1}\right)$ в ряд Тейлора за змінною $x$ до третьої похідної включно, а $u_{N-1}^{k+1}$ в такий же ряд в околі точки $x = L$ . За умови, що функція $u\,(x,t)$ в граничних вузлах має перші похідні за часом і другі по $x$ , матимемо:

$$u_1^{k+1} = u\left(s^{k+1} + h^{k+1}, t^{k+1}\right) = u_0^{k+1} + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0^{k+1} h^{k+1} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_0^{k+1} \frac{\left(h^{k+1}\right)^2}{2} + O\left(\left(h^{k+1}\right)^3\right), \tag{2.5}$$

$$u_{N-1}^{k+1} = u\left(L - h^{k+1}, t^{k+1}\right) = u_N^{k+1} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_N^{k+1} h^{k+1} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_N^{k+1} \frac{\left(h^{k+1}\right)^2}{2} + O\left(\left(h^{k+1}\right)^3\right). \tag{2.6}$$

З (9) і (10) отримаємо:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h^{k+1}} - \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_0^{k+1} \frac{h^{k+1}}{2} + O\left(\left(h^{k+1}\right)^2\right), \tag{2.7}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_N^{k+1} = \frac{u_N^{k+1} - u_{N-1}^{k+1}}{h^{k+1}} + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_N^{k+1} \frac{h^{k+1}}{2} + O\left(\left(h^{k+1}\right)^2\right). \tag{2.8}$$

Із (1) матимемо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + f(t)\right). \tag{2.9}$$

Переходячи в (13) до граничних вузлів, отримаємо:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{j=0,N}^{k+1} = \frac{1}{a^2}\left(\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{j=0,N}^{k+1} + f\left(t^{k+1}\right)\right). \tag{2.10}$$

Враховуючи апроксимацію (5) запишемо (14) у вигляді:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_0^{k+1} = \frac{1}{a^2}\frac{u_0^{k+1} - u_0^k}{\tau} + \frac{f\left(t^{k+1}\right)}{a^2} + O\left(\tau\right), \tag{2.11}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_N^{k+1} = \frac{1}{a^2}\frac{u_N^{k+1} - u_N^k}{\tau} + \frac{f\left(t^{k+1}\right)}{a^2} + O\left(\tau\right). \tag{2.12}$$

Підставимо (15) і (16) у (11) і (12), відповідно:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_0^{k+1} = \frac{u_1^{k+1} - u_0^{k+1}}{h^{k+1}} - \frac{h^{k+1}}{2a^2}\frac{u_0^{k+1} - u_0^k}{\tau} - \frac{f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}}{2a^2} + O\left(\left(h^{k+1}\right)^2 + \tau\right), \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{N}^{k+1}=\frac{u_N^{k+1}-u_{N-1}^{k+1}}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{2a^2}\frac{u_N^{k+1}-u_N^{k}}{\tau}+\frac{f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}}{2a^2}+O\left(\left(h^{k+1}\right)^2+\tau\right). \quad (2.14)$$

Таким чином, отримали апроксимацію другого порядку і будемо використовувати її, а не апроксимацію (8) першого порядку. Зазначимо тільки, що шар $(j=0)$ відповідає лівій (вільній) межі області $\left(x_0^k=s^k\right)$, а $(j=N)$ – правій $\left(x_N^k=L\right)$. Підставимо (17) у (2), отримаємо для граничних вузлів сітки:

$$\alpha\frac{u_1^{k+1}-u_0^{k+1}}{h^{k+1}}-\alpha\frac{h^{k+1}}{2a^2}\frac{u_0^{k+1}-u_0^{k}}{\tau}-\alpha\frac{f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}}{2a^2}+\beta u_0^{k+1}=\varphi_0\left(t^{k+1}\right).$$

Після перетворень:

$$\left(\frac{\alpha h^{k+1}}{2a^2\tau}+\frac{\alpha}{h^{k+1}}-\beta\right)u_0^{k+1}+\left(\frac{-\alpha}{h^{k+1}}\right)u_1^{k+1}=\frac{\alpha h^{k+1}}{2a^2\tau}u_0^k-\varphi_0\left(t^{k+1}\right)-\alpha\frac{f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}}{2a^2},\text{ або}$$

$$\left(\frac{2a^2}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{\tau}-\frac{2a^2\beta}{\alpha}\right)u_0^{k+1}+\left(\frac{-2a^2}{h^{k+1}}\right)u_1^{k+1}=\frac{h^{k+1}}{\tau}u_0^k-\varphi_0\left(t^{k+1}\right)\frac{2a^2}{\alpha}-f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}.$$

Введемо позначення:

$$a_0=0, b_0=\frac{2a^2}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{\tau}-\frac{2a^2\beta}{\alpha}, c_0=\frac{-2a^2}{h^{k+1}},$$

$$d_0=\frac{h^{k+1}}{\tau}u_0^k-\varphi_0\left(t^{k+1}\right)\frac{2a^2}{\alpha}-f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}, \quad (2.15)$$

тоді

$$b_0u_0^{k+1}+c_0u_1^{k+1}=d_0, j=0. \quad (2.16)$$

Тепер підставимо (18) у (3) і виконаємо аналогічні перетворення:

$$\left(\frac{-\gamma}{h^{k+1}}\right)u_{N-1}^{k+1}+\left(\frac{\gamma}{h^{k+1}}+\frac{\gamma h^{k+1}}{2a^2\tau}+\delta\right)u_N^{k+1}=\varphi_L\left(t^{k+1}\right)+\frac{\gamma h^{k+1}}{2a^2\tau}u_N^k-\gamma\frac{f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}}{2a^2},$$

$$\left(\frac{-2a^2}{h^{k+1}}\right)u_{N-1}^{k+1}+\left(\frac{2a^2}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{\tau}+\frac{2a^2\delta}{\gamma}\right)u_N^{k+1}=\frac{2a^2}{\gamma}\varphi_L\left(t^{k+1}\right)+\frac{h^{k+1}}{\tau}u_N^k-f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}.$$

Введемо позначення:

$$a_N=\frac{-2a^2}{h^{k+1}}, b_N=\frac{2a^2}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{\tau}+\frac{2a^2\delta}{\gamma}, c_N=0,$$

$$d_N=\frac{2a^2}{\gamma}\varphi_L\left(t^{k+1}\right)+\frac{h^{k+1}}{\tau}u_N^k-f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}. \quad (2.17)$$

З урахуванням позначень, отримаємо:

$$a_Nu_{N-1}^{k+1}+b_Nu_N^{k+1}=d_N, j=N. \quad (2.18)$$

Таким чином, маємо апроксимацію граничних умов третього роду на вільній і правій границях з тим же порядком, що й апроксимація (7) диференційного рівняння (1). Перепишемо (7) у вигляді:

$$\left(\frac{-a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2}\right)u_{j-1}^{k+1}+\left(\frac{1}{\tau}+\frac{2a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2}\right)u_j^{k+1}+\left(\frac{-a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2}\right)u_{j+1}^{k+1}=\frac{u_j^k}{\tau}+f\left(t^{k+1}\right).$$

Після введення позначень, будемо мати:

$$a_j=\frac{-a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2},b_j=\frac{1}{\tau}+\frac{2a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2},c_j=\frac{-a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2},d_j=\frac{u_j^k}{\tau}+f\left(t^{k+1}\right) \tag{2.19}$$

$$a_ju_{j-1}^{k+1}+b_ju_j^{k+1}+c_ju_{j+1}^{k+1}=d_j, j=\overline{1,N-1} \tag{2.20}$$

Остаточно, отримаємо шукану неявну різницеву схему:

$$u_j^0=\psi\left(x_j^0\right), j=\overline{0,N}, (\text{початкова умова});$$

$$b_0u_0^{k+1}+c_0u_1^{k+1}=d_0, j=0, (\text{вільна границя});$$

$$a_ju_{j-1}^{k+1}+b_ju_j^{k+1}+c_ju_{j+1}^{k+1}=d_j, j=\overline{1,N-1}, (\text{внутрішнівузли});$$

$$a_Nu_{N-1}^{k+1}+b_Nu_N^{k+1}=d_N, j=N, (\text{права границя});$$

$$\omega_{h\tau}=\left\{x_j^k=s^k+j\cdot h_k,\ h^k=\left(L-s^k\right)/N,\ s^k=s\left(t^k\right)\ \right\},$$

$$j=\overline{0,N};\ t^k=k\cdot\tau,\ k=\overline{0,M};$$

$$a_0=0, b_0=\frac{2a^2}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{\tau}-\frac{2a^2\beta}{\alpha}, c_0=\frac{-2a^2}{h^{k+1}},$$

$$d_0=\frac{h^{k+1}}{\tau}u_0^k-\varphi_0\left(t^{k+1}\right)\frac{2a^2}{\alpha}-f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1},$$

$$a_j=\frac{-a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2},b_j=\frac{1}{\tau}+\frac{2a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2},c_j=\frac{-a^2}{\left(h_{k+1}\right)^2},d_j=\frac{u_j^k}{\tau}+f\left(t^{k+1}\right),$$

$$a_N=\frac{-2a^2}{h^{k+1}}, b_N=\frac{2a^2}{h^{k+1}}+\frac{h^{k+1}}{\tau}+\frac{2a^2\delta}{\gamma}, c_N=0,$$

$$d_N=\frac{2a^2}{\gamma}\varphi_L\left(t^{k+1}\right)+\frac{h^{k+1}}{\tau}u_N^k-f\left(t^{k+1}\right)h^{k+1}.$$

Маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трьох діагональною матрицею, яка може бути розв'язана, наприклад, методом прогонки.

## 3. Програмна реалізація різницевої схеми

Отриману кінцево-різницеву схему реалізуємо засобами програмування MathCad (рис.1). Результатом обчислень буде двомірний масив Z, який відповідає значенням шуканої функції $u_j^k = u\left(x_j^k, t^k\right)$ у вузлах сітки.

$$
Z = \left|
\begin{array}{l}
\text{for } i \in 0..N \\
\quad U_{i,0} \leftarrow \psi\left(S(0) + i \cdot \dfrac{L - S(0)}{N}\right) \\
\text{for } k \in 0..N-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
\left[ t \leftarrow \tau \cdot (k+1) \quad h \leftarrow \dfrac{L - S(t)}{N} \right] \\
\left( a_0 \leftarrow 0 \quad c_N \leftarrow 0 \right) \\
\left( b_0 \leftarrow \dfrac{2 \cdot A^2}{h} + \dfrac{h}{\tau} - \dfrac{2 \cdot A^2 \cdot \beta(t)}{\alpha} \quad c_0 \leftarrow \dfrac{-2 \cdot A^2}{h} \quad d_0 \leftarrow \dfrac{h \cdot U_{0,k}}{\tau} - \dfrac{\phi 0(t) \cdot 2 \cdot A^2}{\alpha} - f(t) \cdot h \right) \\
\left( a_N \leftarrow \dfrac{-2 \cdot A^2}{h} \quad b_N \leftarrow \dfrac{2 \cdot A^2}{h} + \dfrac{h}{\tau} + \dfrac{2 \cdot A^2 \cdot \delta}{\gamma} \quad d_N \leftarrow \dfrac{2 \cdot A^2 \cdot \phi L(t)}{\gamma} + \dfrac{h \cdot U_{N,k}}{\tau} - f(t) \cdot h \right) \\
\text{for } j \in 1..N-1 \\
\quad \left( a_j \leftarrow \dfrac{-A^2}{h^2} \quad b_j \leftarrow \dfrac{1}{\tau} + \dfrac{2 \cdot A^2}{h^2} \quad c_j \leftarrow \dfrac{-A^2}{h^2} \quad d_j \leftarrow \dfrac{U_{j,k}}{\tau} + f(t) \right) \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad \text{for } j \in 0..N \\
\quad \quad R_{i,j} \leftarrow 0 \\
\left( R_{0,0} \leftarrow b_0 \quad R_{0,1} \leftarrow c_0 \quad R_{N,N-1} \leftarrow a_N \quad R_{N,N} \leftarrow b_N \right) \\
\text{for } p \in 1..N-1 \\
\quad \left( R_{p,p-1} \leftarrow a_p \quad R_{p,p} \leftarrow b_p \quad R_{p,p+1} \leftarrow c_p \right) \\
F \leftarrow \text{lsolve}(R, d) \\
\text{for } p \in 0..N \\
\quad U_{p,k+1} \leftarrow F_p
\end{array}
\right. \\
\text{return } U
\end{array}
\right.
$$

*Рис.* 1. Програма різницевої неявної схеми (MathCad)

Зауважимо, що реалізація неявної схеми, обумовила використання квадратної сітки ($N = M$), що не впливає на збіжність та стійкість алгоритму. Збільшення кількості кроків сітки збільшує точність отримуваного результату. Надамо пояснення використаним (рис.1) позначенням: $N$– число кроків сітки по просторовій координаті (довжині); $M$– число кроків сітки по часовій координаті ($N = M$); $L$– межа області по просторовій координаті ($x = L$); $T$– максимальне значення часу ($t \leq T < \infty$); $A$– коефіцієнт $a$ в рівнянні дифузії (визначається властивостями середовища); $\tau = T/M$– постійний часовий крок сітки; $f\left(t\right)$– функція правої частини рівняння (1); $S\left(t\right)$– функція вільної лівої межі; $\psi\left(x\right)$– функція початкової умови (4); $\phi 0\left(t\right)$– функція $\varphi_0\left(t\right)$ правої частини умови на вільній межі (2); $\phi L\left(t\right)$ – функція $\varphi_L\left(t\right)$ правої частини умови на правій межі (3); $\alpha, \beta$– відповідні коефіцієнти граничних умов (2); $\gamma, \delta$– відповідні коефіцієнти граничних умов (3).

## 4. Приклад застосування програми

У якості приклада, розв'язуватимемо наступну задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, s\left(t\right) < x < 1\ ,\ t > 0;$$

$$\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x} = \pm\left(u_1 - u\right)\frac{ds}{dt}, x = s(t), s\left(t\right) = 0.5 - t^2/8, t > 0, u_1 = 1;$$

$$\frac{\partial u\left(1,t\right)}{\partial x} = 0, x = 1, t > 0; u\left(x,0\right) = 0, s\left(0\right) \leq x \leq 1, t = 0.$$

У відповідності з позначеннями у програмі, для цього прикладу матимемо:

$$f\left(t\right) = 0, L = 1, T = 2, A = 1, \psi\left(x\right) = 0,$$

$$S\left(t\right) = 0.5 - t^2/8, \alpha = 1, \beta = \beta\left(t\right) = dS\left(t\right)/dt, \phi 0\left(t\right) = dS\left(t\right)/dt,$$

$$\gamma = 1, \delta = 0, \phi L\left(t\right) = 0.$$

На рис.2 наведено результати розрахунків з урахуванням нормалізації значень для просторової сітки. Слід зауважити, що можливості системи MathCad дозволяють побудувати комбінацію ліній рівня та простровоï сітки, що підвищує наглядність подання отриманих результатів. Крім наведених залежностей, вбудовані можливості MathCad дозволяють побудувати відповідні поверхні та функціональні залежності. Програма дозволяє швидко змінювати функцію, що визначає характер вільної межі, отримувати відповідні розподіли та контролювати збіжність отриманого розв'язку. Наведена на рис.1 програма, може бути реалізована будь якою мовою програмування, за умови програмної реалізації функції розв'язання системи рівнянь.

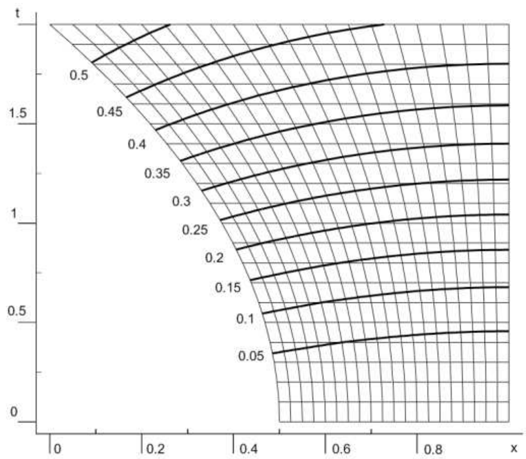



*Рис.* 2. Лінії рівня на різницевій сітці

## Висновки

Кінцево-різницеву схему для задачі Стефана побудовано так, що порядок апроксимації рівняння зберігається і для апроксимації граничних умов. Такий підхід не тільки вирівнює та підвищує порядок апроксимації (однорідна апроксимація), але й робить кінцево-різницеву схему консервативною. Таким чином, враховуються усі види енергії, що використовувалися під час отримання рівняння. Побудований алгоритм, дозволяє знаходити розв'язок для різних функцій, що визначають вільну границю. Результати обчислень легко візуалізувати для будь-яких залежностей. Зазначимо додатково, що викладений метод може бути застосований до рівняння (1) за наявності конвективних членів (пропорційних похідній $\partial u/\partial x$ ) та членів пропорційних шуканій функції.

## Список литературы

1. *В.А. Кудинов, Э.М. Карташов, В.В. Калашников.* Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: учебное пособие.- М.: Высшая школа, 2005.– 429с.
2. *Гурский Д.А., Турбина Е.С.* Вычисления в Mathcad 12. — СПб.: Питер, 2006. — 544 с.
3. *Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л.* Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400с.

***Статья поступила в редакцию 30.11.2008***

UDC 519.8

# EVOLUTIONARY FRAGMENTARY ALGORITHM FOR PERMUTATION FLOW SHOP PROBLEM

© Bondarenko O.S., Kozin I.V.

Zaporizhzhya National University
The Department of Economics
The Chair of Economic Cybernetics
Zhukovsky str., 66, Zaporizhzhya, 69600, Ukraine
e-mail: *buenasdiaz@gmail.com*

**Abstract**. The article tackles the strongly $\mathcal{NP}$-hard permutation flow shop problem. The fragmentary structure of the problem is pointed out. The evolutionary fragmentary approach for optimal solution is proposed. The testing of evolutionary fragmentary algorithm on instances' set from the ORLib [1] library is conducted.

## Introduction

In 1954 Selmer Martin Johnson proposed an algorithm for finding optimal solution to a problem [2], which has been known since as flow shop problem.

Suppose that $n$ jobs $J_i(i = 1, \dots, n)$ are to be executed on $m$ machines $M_j(j = 1, \dots, m)$. Each job consists of $m$ operations $O_{i1}, \dots, O_{im}$. Each operation $O_{ij}$ is associated with the processing time $p_{ij}$. Every job is processed on all machines in the order of the machine indexing. It means that the execution of the operation $O_{ij+1}$ is not allowed until the execution of the operation $O_{ij}$ is finished. By the schedule we mean the mapping from the set of the job numbers $(i, j)$ to the completion times set $C_{ij}$. In the given problem, we are supposed to find such a schedule in which comletion time of the last job on the last machine is minimized. Preemption, processing more than one job on one machine at a time, and execution one job on more than one machine at a time are not allowed.

According to the notation [3] the problem under consideration is denoted $F||C_{max}$. The problem has $(n!)^m$ feasible solutions, hence, in the literature the easier case is studied, which admits $n!$ schedules with the same order of processing on all machines (permutation schedules) and is denoted $F|prmu|C_{max}$. The latter case is considered in the following.

The exact algorithm proposed by Johnson solves the problem to optimality for $m = 2$ case and for special case with $m = 3$. All the efforts to find exact polynomial algorithm for $m > 2$ were unsuccessfull. With the advent of the first results in the early 70-s [4, 5, 6] in computational complexity theory that fact had obtained an explanation. $\mathcal{NP}$-hardness in the strong sense was proved in [7]. Since then researchers' efforts have been focused on approximation and heuristic algorithms design.

Some time after that it has become clear that some problems are hard not only for solving to optimality but are hard for approximating. It was proved [8] for considered problem there is no $(1 + \epsilon)$-approximation algorithm for $1 + \epsilon < 5/4$. Furthermore, so far the problem whether there exist polynomial approximation scheme for $Fm||C_{max}$ where $m$

is fixed is open. Hence, the design of algorithms with no theoretical bounds and worst-case ratios, which solve complex practical problems, is now urgent. As such we consider stochastic local search [9] algorithms: evolutionary algorithms, taboo search, simulated annealing, ant colony systems, variable neighbourhood search.

The survey of local search algorithms for flow shop problem can be found in [10]. The comparative analysis of the most efficient local search methods from the literature, called also metaheuristics, was conducted in [11].

*The goal of the paper* is the inquiry of the new solution approach to combinatorial problems based on the combination of the evolutionary and the fragmentary approaches.

## 1. The Fragmentary Structure

**Definition 1.** Fragmentary structure [12] is tuple $(\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{R})$, where $\mathscr{X}$ – a finite set of the fragments, $\mathscr{Y}$ – a family of subsets of $\mathscr{X}$, $\mathscr{R}$ – a combining rule, i.e. the decision rule for recognizing whether a union of subsets of $\mathscr{X}$ is a feasible set of $\mathscr{Y}$.

$F||C_{max}$ can be considered as the fragmentary structure. By fragmments we will have any tuples of jobs, respectively by the elementary fragments we will mean jobs. The rule of combination – no job repetition in the combined tuples. Maximal by inclusion fragment will be a feasible solution the problem under consideration. So the feasible solution can be considered as certain fixed permutation of jobs.

In the papers [12, 13] it has been showed that the search of feasible solutions can considered in the fragmentary structure framework. For the costruction of feasible solutions the fragmentary algorithm $\mathscr{F}$ is applied. In the general case, the input of $\mathscr{F}$ algorithm are a tuple $I = (i_1, \ldots, i_n)$ and the empty solution set $\mathscr{S}$. The input is looked through by $\mathscr{F}$ in the machine indexing order. On every step in the tuple $\mathscr{I}$ the first element is looked for which the combining rule is fulfilled. The found elementary fragment is added into $\mathscr{S}$. The procedure is repeated until the maximal by inclusion fragment is built.

## 2. The Evolutionary Fragmentary Algorithm

The fragmentary algorithm allows to obtain only some feasible solutions for the optimization problem. For finding optimal solution of $F|prmu|C_{max}$ the combination evolutionary and fragmentary approaches is proposed. A few analogous approaches grounded on the evolutionary mechanism and performance evaluation of such approaches are considered in [14, 15].

The description of evolutionary fragmentary algorithm (EVF algorithm), explored in the work, is the following. The feasible solutions of the problem are presented by job number permutations, which form the set of all permutations $I_1, \ldots, I_{n!}$. Each permutation will be treated as chromosome. The search can be described as the following.

`Stage 1.` *Initialization.*

The initial population, consisting of N chromosomes, is generated at random.

`Stage 2.` *Selection.*

Select K pairs of parents from the current population for reproduction. The selection is random without replacement.

`Stage 3.` *Recombination.*

The recombination in the EVF algorithm is implemented by the following $n$-step procedure. All the pairs of chromosome-parents' $I$-tuples are being looked through. On every step the minimal element from the first two elements of $I$-tuples' pair is chosen and is inserted into tuple-offspring. The inserted element is deleted from both tuples-parents. For instance, in the case with $m = 5$ chromosome-parents [12543] and [53142] yield the chromosome-offspring [12534].

`Stage 4.` *Mutaion.*

The mutation is implemented by transposition of jobs' indexes from two randomly selected positions in chromosome.

`Stage 5.` *Replacement.*

The chromosomes-offsprings are added in the current population. The shrinking of the current population to predefiened size is provided by sequential deletion of chromosomes with maximal criterion's values, where the criterion's value is computed by the following recursive formula: $C_{i,j} = max\{C_{i-1,j}, C_{i,j-1}\} + p_{i,j}$

`Stage 6.` *Termination.*

If predefiened termination criterion is achieved, then stop the algorithm, otherwise go to the second stage. The termination criterion, used by authors, is the number of generations in evolution, i.e. the number of the search stages repetitions.

## 3. The Test Results

The necessity of test conduction is explained by the difficulties and, sometimes, by imposibility of theoretical estimation of stochastic local search algorithms performance derivaton in general, and of evolutionary algorithms, in particular.

For the EVF algorithm performance verification the test was being conducted on well-known in the Taillard's [16] problem set. The problem set comprises twelve groups consisting of ten instances each with the numbers of jobs from 20 to 500 and the number of machines from five to 20. It is the most used in the literature for $F|prmu|C_{max}$ testing. Thus, there appears an opportunity for the comparison of the proposed algorithm with already existing and tested ones on the given set.

EVF algorithm was tested against random search (RS) algorithm as well as NEH algorithm [17], which is curently considered the best performing deterministic heuristic.

All the three algorithms were implemented in Visual Basic for Applications and run on computer with Celeron procesor 1800 Mhz and 256 MB of the main memory. The termination criterion was chosen to be the number of generations. achieved by the algorithm during its run.

The algorithms' performance was measured by relative deviance (RD) from optimum (OPT) or the least known upper bound [18] of the value (A) found by given algorithm: $RD = \frac{A-OPT}{OPT} \cdot 100$.

In Table 1 each group of problems is denoted as $n \times m$, where $n$ is the number of jobs, $m$ is the number of machines. In it RD for each instance is averaged on the group size. For EVF algorithm in the table in the parentheses the number of generations during which it

| Group of problems | RS | NEH | EVF |
|---|---|---|---|
| $20 \times 5$ | 6.95 | 2.46 | 1.25 (300) |
| $20 \times 10$ | 10.29 | 4.88 | 2.86 (300) |
| $20 \times 20$ | 8.52 | 3.72 | 3.28 (300) |
| $50 \times 5$ | 5.18 | 0.81 | 0.92 (300) |
| $50 \times 10$ | 14.39 | 5.23 | 4.51 (300) |
| $50 \times 20$ | 16.71 | 6.21 | 5.85 (300) |
| $100 \times 5$ | 4.14 | 0.67 | 0.73 (500) |
| $100 \times 10$ | 10.74 | 2.45 | 2.4 (500) |
| $100 \times 20$ | 16.85 | 5.72 | 6.08 (500) |
| $200 \times 10$ | 8.74 | 1.8 | 1.52 (1000) |
| $200 \times 20$ | 15.66 | 4.66 | 4.95 (1000) |
| $500 \times 20$ | 11.79 | 2.41 | 3.74 (1000) |
| Average | 10.83 | 3.42 | 3.17 |

*Таблица* 1. The Test Results for $F|prmu|C_{max}$

was run is pointed out. From Table 1 it can be concluded that in the average *evolutionary fragmentary algorithm has showed the higher results than other two tested algorithms.*

## Conclusion

The basic result of the paper is the new approach to scheduling problems solution. The fragmentary structure has been showed which allows the application of EVF algorithm. The testing of the algorithm on the standard problem set is fulfilled.

From the test results, represented in Table 1, it appears promising to apply the proposed aproach to scheduling problems solution.

## Список литературы

1. *Beasley J. E.* ORLib - Operations Research Library. http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/files/flowshop2.txt, 2008.
2. *Johnson S. M.* Optimal Two and Three-Stage Production Schedules with Setup Times Included // Naval Research Logistics Quarterly. – 1954. – Vol. 1, No. 1. – P. 61–68.
3. *Graham R. L.* Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey / R. L. Graham, E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan // Discrete Optimization II / P.L. Hammer, E.L. Johnson and B.H. Korte (eds.). – Amsterdam : North-Holland, 1979. – (Annals of Discrete Mathematics ; Vol. 5.). – P. 287–326.
4. *Cook S. A.* The complexity of theorem-proving procedures / Stephen A. Cook // STOC '71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing. – New York : ACM, 1971. – P. 151–158.
5. *Karp R.* Reducibility among Combinatorial Problems // Complexity of Computer Computations / R. E. Miller and J. W. Thatcher (eds.). – New York : Plenum Press, 1972. – P. 85–104.
6. *Левин Л. А.* Универсальные задачи перебора / Л. А. Левин // Проблемы передачи информации. – 1973. – Т. 9, № 3. – С. 115-116.

7. *Garey M. R.* The Complexity of Flow Shop and Job Shop Scheduling / M. R. Garey, D. S. Johnson, R. Sethi // Mathematics of Operations Research. – 1976. – Vol. 1, No. 2. – P. 117–129.
8. *Williamson D. P.* Short shop schedules / D. P. Williamson, L. A. Hall, J. A. Hoogeveen, C. A. J. Hurkens, J. K. Lenstra, S. V. Sevastianov, D. B. Shmoys // Operations Research. – 1997. – Vol. 45, No. 2. – P. 288–294.
9. *Hoos H. H.* Stochastic Local Search : Foundations and Applications / Hoos H. H., Stuetzle T. – San Francisco : Morgan Kaufmann Publishers, 2004. – 660 p. – ISBN 1-55860-872-9.
10. *Ruiz R. A* comprehensive review and evaluation of permutation flowshop heuristics / R. Ruiz, C. Maroto // European Journal of Operational Research. – 2005. – Vol. 165. – P. 479–494.
11. *Ruiz R.* A simple and effective iterated greedy algorithm for the permutation flowshop scheduling problem / R. Ruiz, T. Stuetzle// European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 177. – P. 2033–2049.
12. *Козин И. В.* Фрагментарные алгоритмы в системах поддержки принятия решений // Питання прикладної математики і математичного моделювання, збірник наукових праць. - Дніпропетровськ. – 2006. – С. 131–137.
13. *Козин И. В.* Фрагментарный алгоритм для задачи симметричного размещения // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2005. – № 1. – С. 76–83.
14. *Ruiz R.* Two new robust genetic algorithms for the flowshop scheduling problem / R. Ruiz, C. Maroto, J. Alcaraz // OMEGA, the International Journal of Management Science. – 2006. – Vol. 34. – P. 461–476.
15. *Nagano M. S.* A Constructive Genetic Algorithm for permutation flowshop scheduling / M. S. Nagano, R. Ruiz, L. A. N. Lorena // Computers & Industrial Engineering. – 2008. – Vol. 55. – P. 195–207.
16. *Taillard E.* Benchmarks for basic scheduling problems // European Journal of Operational Research. – 1993. – Vol. 64, No. 2. – P. 278-285.
17. *Nawaz M.* A heuristic algorithm for the m-machine, n-job flow-shop sequencing problem / M. Nawaz, E. E. Enscore Jr., I. Ham // OMEGA, The International Journal of Management Science. – 1983. – Vol. 11, No. 1. – P. 91–95.
18. *Taillard E.* Summary of best known lower and upper bounds of Taillard's instances. http://ina2.eivd.ch/Collaborateurs/etd/problemes.dir/ordonnancement.dir/flowshop.dir/best_lb_-up.txt, 2008.


***Статья поступила в редакцию 15.08.2009***

УДК 519.68

# ЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛИМИНАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ОБРАБОТКИ ЗАПРОСОВ В БАЗАХ ДАННЫХ[1]

© Щербина О.А.

University of Vienna
Fakultaet fuer Mathematik
Nordbergstr., 15, Vienna, 1090, Austria
e-mail: *oleg.shcherbina@univie.ac.at*

**Abstract**. The applying local elimination algorithms (LEA) for processing queries in relational databases is considered. The special features of realization of local algorithm using only a forward part are discussed.

## Введение

Использование локальной информации [1] при изучении сложных дискретных систем, при разработке методов декомпозиции для решения больших разреженных дискретных задач является весьма актуальным, причем упомянутые задачи принадлежат как области дискретной оптимизации (ДО) [2], [3], так и области искусственного интеллекта (ИИ) [4], баз данных [5], линейной алгебры (мультифронтальные методы решения разреженных систем линейных уравнений [6], [7], имеющие декомпозиционный характер).

При изучении сложных дискретных систем не всегда возможно получить (или вычислить) глобальную информацию об объекте, поэтому представляет интерес получение информации об объекте, рассматривая его по частям, т.е. локально, используя предложенные *Ю.И. Журавлевым* локальные алгоритмы вычисления информации [1].

Важной особенностью локальных алгоритмов является вычисление и использование именно *локальной информации* (т.е. информации об элементах окрестности элемента) при решении разреженных дискретных задач. В [8] предложен общий класс локальных элиминационных алгоритмов вычисления информации для решения дискретных разреженных задач, позволяющих осуществлять вычисление *глобальной информации* о решении задачи с помощью *локальных вычислений* на основе анализа окрестностей элементов задачи. Локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА) вычисления информации относятся к графовым декомпозиционным подходам. Алгоритмическая схема ЛЭА представляет собой бесконтурный орграф, вершинами которого являются локальные подзадачи, соответствующие окрестностям элементов, а дуги – выражают информационную зависимость подзадач друг от друга. В [9] показано, что указанный орграф является *элиминационным деревом* [10]. Графовой интерпретацией ЛЭА является *элиминационная игра* (Parter [11]).

В [12] рассмотрено решение (неоптимизационной) задачи удовлетворения ограничений, структура которой задается графом взаимосвязей переменных, с помощью ЛЭА [8].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке австрийского фонда FWF, грант No. P20900-N13

В настоящей статье анализируются возможности применения локальных элиминационных алгоритмов к решению задач обработки запросов в реляционных базах данных (БД).

## 1. Основные понятия реляционной теории управления базами данных

Теория БД включает широкий круг вопросов, относящихся к теоретическим проблемам БД и системам управления БД (СУБД), в том числе создание языков запросов, теорию финитных моделей, теорию проектирования БД, теорию зависимостей и др. СУБД предназначены для организации хранения, поиска и манипулирования большими объемами данных.

### 1.1. Реляционные базы данных.

Основы реляционной модели данных были впервые изложены в статье *Кодда* [13] в 1970 г. Эта работа послужила стимулом для большого количества исследований, в которых реляционная модель получила дальнейшее развитие. Сам термин «реляционное представление данных», впервые введенный *Коддом* [13], происходит от термина *relation* – *отношение*, поскольку в основе всей реляционной теории баз данных лежит понятие отношения, а БД в этой модели является конечным множеством отношений.

Введем необходимые понятия. Имеется конечное множество атрибутов $U = \{x_1, \ldots, x_m\}$ с соответствующими доменами $D_1, \ldots, D_m$. *Реляционной схемой* $R$ называется подмножество $U$. *Схемой БД* называется множество реляционных схем $D = \{R_1, \ldots, R_n\}$. Отношением $r_i$ с реляционной схемой $R_i$ называется множество $R_i$-кортежей, где $R_i$-кортеж – отображение атрибутов из $R_i$ на их домены. База данных $d$ со схемой $D$ – множество $\{r_1, \ldots, r_n\}$ отношений. Реляционную схему $R$ (т.е. множество атрибутов) отношения $r$ будем называть также *диапазоном отношения* $r$.

Отношение можно описать различными способами, однако в реляционных базах данных лучше всего использовать табличный способ. Отношение $r$ может быть задано в виде таблицы, в которой каждый столбец озаглавлен *атрибутом*. Количество атрибутов называется *степенью* отношения. Фактически данными являются строки таблицы (*кортежи*). Количество кортежей отношения называется *мощностью отношения*. Порядок столбцов и строк в таблице несущественен.

Каждому отношению $r$ степени $n$, определенному на диапазоне $R$, можно поставить в соответствие некоторый $n$-местный предикат $p(R)$, определяющий, будет ли кортеж принадлежать отношению (этот предикат принимает значение «истина» для всех кортежей $r$). Этот предикат называют *предикатом отношения*. Говорят, что кортеж $f$ на диапазоне $R$ удовлетворяет $p(R)$, если $p(R)$ принимает значение «истина» для этого кортежа. Это записывается в форме $f \models p(R)$. В свою очередь, каждый $n$-местный предикат $p(R)$ задает некоторое $n$-арное отношение на домене $R$, состоящее из всех кортежей, для которых $p(R)$ истинен, т.е. $\{f \in E_R : f \models p(R)\}$ ($E_R$ – множество всех $R$-кортежей).

Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между $n$-арными отношениями и $n$-местными предикатами.

Если пользователю необходимо найти определенные данные из БД, он запрашивает их с помощью *запроса*, в котором выражены условия, связывающие атрибуты отношений, входящих в БД. СУБД обрабатывает запрос, находит требуемые данные и посылает их пользователю. Процесс запрашивания данных и получения результата называется запросом к базе данных.

**Пример 1** ([15])**.** Реляционная БД состоит из следующих отношений.

Таблица 1.
**Отношение** $r_1(a,\ i)$

| автор $a$ | место жительства $i$ |
|---|---|
| Edmonds | Waterloo |
| Cook | Toronto |

Таблица 2.
**Отношение** $r_2(a,\ p)$

| автор $a$ | публикация $p$ |
|---|---|
| Edmonds | P |
| Cook | NP |
| Shakespeare | P или NP |

Таблица 3.
**Отношение** $r_3(p,\ s)$

| публикация $p$ | тема $s$ |
|---|---|
| P | алгоритмы |
| NP | сложность |
| P или NP | драма |

Таблица 4.
**Отношение** $r_4(p,\ j,\ y)$

| публикация $p$ | журнал $j$ | год $y$ |
|---|---|---|
| P | Can. J. Math. | 1965 |
| NP | Am. J. Math. | 1971 |

**Пример 2** (Реляционная алгебра и реляционное исчисление)**.** Известны два эквивалентных способа манипулирования реляционными данными – *реляционная алгебра* и *реляционное исчисление.*

Фактическим стандартом доступа к реляционным данным стал язык запросов SQL (Structured Query Language), который представляет собой смесь операторов реляционной алгебры и выражений реляционного исчисления, использующий ключевые слова на английском языке и расширенный дополнительными возможностями, отсутствующими в реляционной алгебре и реляционном исчислении.

Фундаментальный результат, известный как *теорема Кодда* [16], устанавливает эквивалентность реляционной алгебры и реляционного исчисления в том смысле, что для любого запроса, заданного в терминах одного языка, можно эффективно построить (за полиномиальное время) запрос на другом языке, который эквивалентен, т.е. производит тот же ответ для любого наполнения БД.

Этот результат по сути дела означает, что мы можем декларативно задать, что мы хотим найти, а СУБД автоматически находит, как вычислить запрос с помощью реляционных операторов.

1) *Реляционное исчисление* похоже на исчисление предикатов первого порядка. Формулы здесь строятся из элементарных формул вида $x_1 = x_2$ и $p(R_i(x_1, \ldots, x_m))$ (где $x_i$ – переменные или константы из соответствующих доменов), использующие операторы $\wedge$, $\vee$, $\neg$ булевой алгебры и квантификаторы $\forall$, $\exists$. Формула $\varphi$ со свободными параметрами $y_1, \ldots, y_k$ задает *запрос* $\{y_1, \ldots, y_k \mid \varphi(y_1, \ldots, y_k)\}$; для данной

БД $d$ результатом выполнения запроса является $k$-арное отношение, содержащее все кортежи $a_1, \dots, a_k$ такие, что $\varphi(a_1, \dots, a_k)$ истинна в $d$.

Например, запрос в описанном выше примере

$$\{j \mid (\exists a)(\exists p)\ p(R_1(a,\ Waterloo)) \wedge p(R_2(a,\ p)) \wedge p(R_4(p,\ j,\ 1965))\}$$

запрашивает журналы, в которых опубликовались авторы из Waterloo в 1965 г. (Здесь $p(R_i)$ – предикаты, соответствующие отношениям $r_i$ $(i = 1, 2, 4)$).

Реляционное исчисление является декларативным, то есть оно задает, *что* мы хотим вычислить, но не задает, *как* это сделать.

2) *Реляционная алгебра* представляет собой набор операторов, использующих отношения в качестве аргументов, и возвращающих отношения в качестве результата. Таким образом, реляционный оператор выглядит как функция с отношениями в качестве аргументов и определяется с помощью элементарных операций над отношениями.

Реляционная алгебра является *замкнутой*, т.к. в качестве аргументов в реляционные операторы можно подставлять другие реляционные операторы, подходящие по типу. Таким образом, в реляционных выражениях можно использовать вложенные выражения сколь угодно сложной структуры.

Согласно Кодду [13], определяют восемь реляционных операторов, объединенных в следующие две группы.

*Теоретико-множественные операторы*: объединение, пересечение, вычитание, декартово произведение.

*Специальные реляционные операторы*: выборка, проекция, соединение, деление.

Не все эти операторы являются независимыми, т.к. операторы соединения, пересечения и деления могут быть выражены через другие реляционные операторы. Остальные реляционные операторы (объединение, вычитание, декартово произведение, выборка, проекция) являются примитивными операторами – их нельзя выразить друг через друга.

Рассмотрим некоторые *операторы реляционной алгебры.*

(1) *выборка* или селекция, обозначаемая $\sigma_F(r)$, находит кортежи отношения $r$, удовлетворяющие заданному условию $F$. Смысл операции выборки – выбрать кортежи отношения, удовлетворяющие некоторому условию. Таким образом, операция выборки дает «горизонтальный срез» отношения по некоторому условию.

(2) *проекция* $\pi_X(r)$ ограничивает отношение $r$ подмножеством $X$ атрибутов. Операция проекции дает «вертикальный срез» отношения, в котором удалены все возникшие при таком срезе дубликаты кортежей.

(3) *естественное соединение* $r_1 \bowtie r_2$ образует отношение над объединением атрибутов двух отношений $r_1$ и $r_2$ путем сочетания каждого кортежа $t_1$ отношения $r_1$ с каждым кортежем $t_2$ отношения $r_2$, которое согласуется по общим атрибутам отношений. Заметим, что если $R_1 = R_2$, то $r_1 \bowtie r_2 = r_1 \cap r_2$. Если все $R_i$ различны, то $\bowtie r_i = \times r_i$.

(4) *соединение по условию* $F$: $r \underset{F}{\bowtie} s = \{(x, y) \in r \times s\ :\ F(x, y) =\ \textit{истина}\}$.

(5) *переименование* $\varrho_{A|B}(r)$, изменяющее имя атрибута $A$ на $B$.

(6) *объединение* $r_1 \cup r_2$ и *разность* $r_1 - r_2$ двух отношений над одним множеством атрибутов (в обычном теоретико-множественном смысле).

Отметим следующие свойства операторов реляционной алгебры: коммутативность и ассоциативность соединений, коммутативность выборки и проекции, коммутативность выборки и естественного соединения [14].

**Пример 3.** Запрос о журналах, в которых опубликовались авторы из Waterloo в 1965 г., записан ниже с помощью операторов реляционной алгебры: $\pi_j \sigma_{i=Waterloo} \sigma_{y=1965}(r_1 \bowtie r_2 \bowtie r_4)$. Обработка этого запроса с помощью операторов реляционной алгебры возможна различными способами, характеризующимися различной эффективностью. «Алгебраическая» оптимизация запросов [14] использует, в частности, правило как можно более раннего вычисления выборки (до соединения), поскольку вычисление соединения требует большой вычислительной работы.

Так, более эффективно выполнить выборку $y = 1965$ для отношения $r_4$ перед соединением его с $r_2$ (это сопряжено с меньшим объемом вычислений!). Выборка $\sigma_{i=Waterloo} r_1(a,\ i)$ достигается путем вычеркивания из таблицы отношения $r_1$ строк, в которых $i \neq Waterloo$.

Таблица 5.
$r_4(p,\ j,\ 1965)$**: Выборка отношения** $r_4^{'}(p,\ j,\ y) = \sigma_{y=1965} r_4(p,\ j,\ y)$

| публикация $p$ | журнал $j$ | год $y$ |
|---|---|---|
| P | Can. J. Math. | 1965 |

Таблица 6.
$r_1(a,$ **'Waterloo'): Выборка отношения** $r_1^{'}(a,\ i) = \sigma_{i='Waterloo'} r_1(a,\ i)$

| автор $a$ | место жительства $i$ |
|---|---|
| Edmonds | Waterloo |

## 2. Запросы в базах данных

Оптимизация запросов является одним из наиболее важных и интересных направлений исследований в теории баз данных. Важность этого направления определяется тем, что от качества оптимизации запросов существенно зависит общая производительность СУБД. Обработка большинства запросов в реляционных базах данных может быть выполнена с помощью двух операторов: проекции и соединения.

2.1. ***Задачи удовлетворения ограничений и базы данных.*** Задачи удовлетворения ограничений (УО), известные в англоязычной литературе как constraint satisfaction problems (CSP) [12], широко используются при решении ряда практически важных задач ИИ, таких как составление расписаний, проектирование электронных схем, поддержка принятия решений.

**Определение 1** ([12])**.** Задача УО (ЗУО) определяется множеством дискретных переменных $x_1, \ldots, x_n$, для каждой из которых задана область определения или домен $D_j = \{d_j^{(1)}, \ldots, d_j^{(p_j)}\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, и множеством ограничений. *Ограничением* называется пара $(r, scope(r))$, где $r$ – отношение, определенное на диапазоне $scope(r)$.

*Решением* ЗУО называется присвоение значений всем переменным, которое удовлетворяет всем ограничениям. *Целью* решения ЗУО может быть нахождение одного или всех решений.

Укажем на весьма тесную связь между задачами удовлетворения ограничений и базами данных, что показано в следующей таблице [17]:

Таблица 1.
**Терминология удовлетворения ограничений и БД**

| Терминология удовлетворения ограничений | | Терминология БД |
|---|---|---|
| задача удовлетворения ограничений | $\equiv$ | база данных |
| переменная | $\equiv$ | атрибут |
| домен | $\equiv$ | домен атрибута |
| ограничение | $\equiv$ | отношение |
| диапазон отношения | $\equiv$ | реляционная схема |
| множество решений | $\equiv$ | соединение всех отношений |

Итак, поиск ответа на запрос в базе данных может быть сведен к решению задачи УО, которая может быть решена с помощью локального элиминационного алгоритма (ЛЭА) [12].

2.2. ***Графовые и гиперграфовые модели запросов.*** Графы и гиперграфы [18] используются для представления структуры запросов. Структура запроса в реляционной БД представляется в виде гиперграфа, вершины которого соответствуют атрибутам, а ребра – соответствуют реляционным схемам отношений $R_i$ в одном запросе (см. рис. 1 a)). Класс гиперграфов, называемых *ациклическими*, соответствует схемам со многими желательными свойствами [5]. Было доказано еще в 1981 г. (*Yannakakis* [19]), что для решения различных $NP$-полных задач на схемах БД с «простыми» (ациклическими) гиперграфами имеются полиномиальные алгоритмы.

Часто вместо гиперграфового представления структуры запроса в реляционной БД используется более наглядное представление с помощью *первичного* и *двойственного* графов. Первичный граф называется обычно *графом взаимосвязей* [20] или *графом Гайфмана* (*Gaifman* [21]) запроса БД. В графе Гайфмана вершины соответствуют атрибутам запроса и неориентированное ребро между двумя вершинами соответствует наличию отношения в запросе, содержащего эти атрибуты (см. рис. 1 b)). Будем называть такие атрибуты *взаимосвязанными*. В дальнейшем нам потребуется понятие *окрестности атрибута*: множество атрибутов, взаимосвязанных с атрибутом $x$ в графе взаимосвязей $G$, называется *окрестностью* $Nb(x)$ атрибута $x$ в графе $G$. *Двойственным графом* гиперграфа $H = (V, S)$ с множеством вершин $V$ и множеством ребер $S$ называется граф, вершины которого соответствуют ребрам гиперграфа, причем пара таких вершин соединяется ребром в двойственном графе, если они имеют общие вершины из $V$ (см. рис. 1 c)).

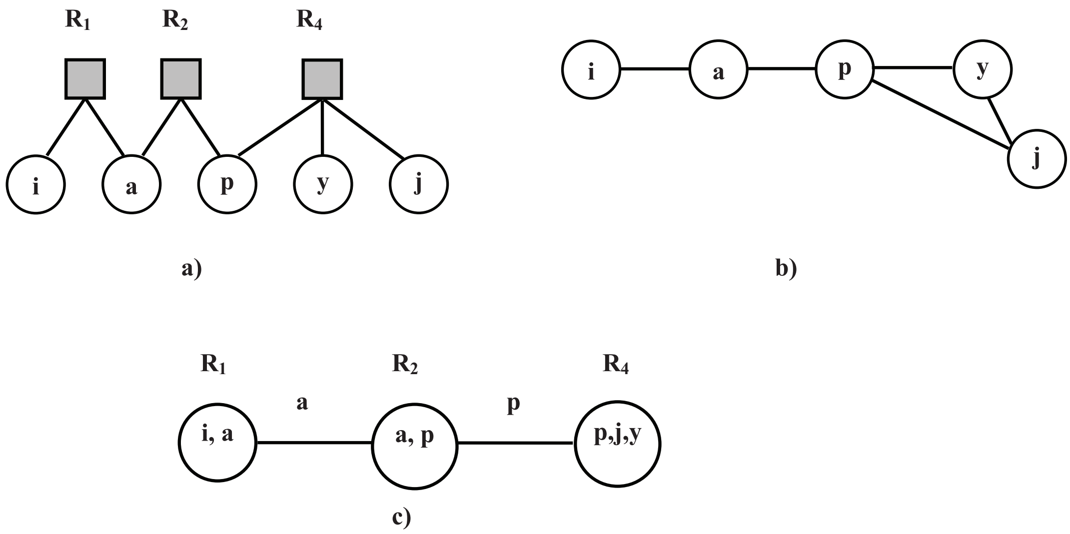



*Рис.* 1. Представление структуры запроса из примера 1: a) в виде гиперграфа; b) в виде графа Гайфмана (взаимосвязей атрибутов); c) в виде двойственного графа.

2.3. ***Обработка запросов в базах данных с помощью локального элиминационного алгоритма.*** Рассмотрим реляционную БД $d$, состоящую из множества отношений $\{r_1, \ldots, r_n\}$ с реляционными схемами $R_1, \ldots, R_n$. Запрос состоит в нахождении выборки $\sigma_F$ от соединения отношений, сопровождающейся проекцией на некоторую область $S$

$$\pi_S(\sigma_F(r_1 \bowtie \ldots \bowtie r_n)). \tag{2.1}$$

Отметим, что запросы такого вида эквивалентны так называемым *конъюнктивным запросам* [22], которые являются наиболее часто встречающимся типом запросов.

Рассмотрим метод поиска ответа на запрос вида (2.1), основанный на последовательной элиминации атрибутов с помощью ЛЭА, который вычисляет информацию о локальных элементах (атрибутах) задачи нахождения ответа на запрос в реляционной БД, задаваемой структурным графом, записывая локальную информацию об этих элементах в виде новых отношений, добавляемых к задаче, затем элиминируя просмотренные элементы и использованные отношения. При этом рассматриваются все отношения, содержащие некоторый атрибут. После нахождения соединения ($\bowtie$) этих отношений [12], атрибут элиминируется с помощью проекции полученного отношения на множество оставшихся атрибутов. Эти операции проделываются далее до тех пор, пока не останется лишь одно отношение, которое и является решением задачи – ответом на данный запрос. Если последнее отношение непусто, то ответ на запрос имеется, если же пусто – то ответа нет.

Для решения задачи выполнения запроса, описываемого системой отношений $r_1, \ldots, r_n$ с атрибутами $x_1, \ldots, x_m$, при заданном упорядочении $A_\pi$ атрибутов, ЛЭА выглядит следующим образом:

1. Выбрать очередной атрибут $x$ из схемы БД согласно упорядочению $A_\pi$. Найти соединение отношений, соответствующих окрестности $Nb(x)$ элемента $x$ в текущем структурном графе, сформировав новое отношение $r$ с диапазоном $(x,\ Nb(x))$.
2. Спроектировать полученное отношение на множество атрибутов, соответствующих окрестности $Nb(x)$ атрибута $x$. В результате получится новое отношение $r' = \pi_{Nb(x)} r(x)$ с диапазоном $Nb(x)$, добавляемое к отношениям задачи. Если отношение с тем же набором переменных уже имеется, найти их пересечение. Если пересечение пусто, то задача выполнения запроса решения не имеет.
3. Элиминировать атрибут $x$ вместе с соответствующими отношениями. Из элементов его окрестности $Nb(x)$ создается клика в структурном графе (эта клика соответствует отношению $r'$). Создание клик изменяет структурный граф и окрестности элементов.
4. Продолжать до тех пор, пока не останется нерассмотренных отношений.

Рассмотрим подробнее детали реализации ЛЭА при решении задачи выполнения запроса в БД в случае, когда структурный граф является *графом взаимосвязей* атрибутов [20], используя описанный выше пример.

После использования правила возможно более раннего вычисления выборок, описанный в примере запрос приобретает вид: $\pi_j((\sigma_{i=Waterloo} r_1(a,i)) \bowtie (r_2(a,p) \bowtie (\sigma_{y=1965} r_4(p,j,y))))$. Выборки $\sigma_{y=1965} r_4(p,j,y)$ и $\sigma_{i=Waterloo} r_1(a,i)$ являются отношениями, заданными соответственно таблицами 5 и 6.

Рассмотрим упорядочение $A_\pi = \{p, a\}$ для элиминации атрибутов. Для элиминации атрибута $p$ выделим взаимосвязанные с ним атрибуты: $Nb(p) = \{a\}$ (рис. 1 b)) и отношения, содержащие $p$: $r_2(a,p)$ и $r'_4(p,j,y) = \sigma_{y=1965} r_4(p,j,y)$. Вычислим соответствующее соединение $r_{2,4}(a,p,j,y) = r_2(a,p) \bowtie r'_4(p,j,y)$ (см. табл. 7) и проекцию его на $\{a,j,y\}$: $r'_{24}(a,\ j,\ y) = \pi_{\{a,j,y\}} r_{2,4}(a,p,j,y)$ (табл. 8). Для элиминации атрибута $a$ вычислим соответствующее соединение $r_{124}(a,\ i,\ j,\ y) = r'_1(a,i) \bowtie r'_{24}(a,\ j,\ y)$ (табл. 9), а затем найдем проекцию $r'_{124}(i,\ j,\ y) = \pi_{\{i,\ j,\ y\}} r_{124}(a,\ i,\ j,\ y)$ (табл. 10). Ответ на запрос $\pi_j r'_{124}(i,\ j,\ y)$ показан в табл. 11.

Таблица 7.
**Отношение** $r_{24}(a,\ p,\ j,\ y)$

| автор $a$ | публикация $p$ | журнал $j$ | год $y$ |
|---|---|---|---|
| Edmonds | P | Can. J. Math. | 1965 |

Таблица 8.
**Отношение** $r'_{24}(a,\ j,\ y)$

| автор $a$ | журнал $j$ | год $y$ |
|---|---|---|
| Edmonds | Can. J. Math. | 1965 |

Таблица 9.
**Отношение** $r_{124}(a,\ i,\ j,\ y)$

| автор $a$ | место жительства $i$ | журнал $j$ | год $y$ |
|---|---|---|---|
| Edmonds | Waterloo | Can. J. Math. | 1965 |

Таблица 10.
**Отношение** $r'_{124}(i,\ j,\ y)$

| место жительства $i$ | журнал $j$ | год $y$ |
|---|---|---|
| Waterloo | Can. J. Math. | 1965 |

Таблица 11.
**Отношение** $\pi_j r'_{124}(i,\ j,\ y)$

| журнал $j$ |
|---|
| Can. J. Math. |

Как видно из решения примера, обратная часть ЛЭА здесь не нужна, так как в таблице 11 найден ответ на запрос.

## Заключение

Локальный элиминационный алгоритм вычисления информации – перспективный подход, делающий возможным решение дискретных разреженных задач информатики. Использование графовых структур позволяет рационально построить вычислительную схему локального алгоритма. *Перспективными направлениями* дальнейших исследований являются разработка эффективных схем локального элиминационного алгоритма и использование соответствующих графовых структур при решении конкретных задач выполнения запросов в реляционных базах данных, обладающих специальной структурой.

## Список литературы


1. *Журавлев Ю.И.* Избранные научные труды. — М.: Магистр, 1998. — 420 с.
2. *Сергиенко И.В., Шило В.П.* Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. — К.: Наукова думка, 2003. — 162 с.
3. *Леонтьев В.К.* Дискретная оптимизация // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2007. — Т. 47. — С. 338–352.
4. *Dechter R.* Bucket elimination: A unifying framework for reasoning // Artificial Intelligence. — 1999. — V. 113. — P. 41–85.
5. *Beeri C., Fagin R., Maier D., Yannakakis M.* On the desirability of acyclic database schemes // J. ACM. — 1983. — V. 30. — P. 479–513.
6. *George A., Liu J.W.H.* Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc., 1981. — 324 p.
7. *Rose D.J.* A graph-theoretic study of the numerical solution of sparse positive definite systems of linear equations // Graph Theory and Computing /R.C. Read (ed.). — New York: Academic Press, 1972. — P. 183–217.
8. *Щербина О.А.* Локальные элиминационные алгоритмы решения разреженных дискретных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, N 1. — С. 161—177.
9. *Щербина О.А.* Роль графовых структур в теории локальных элиминационных алгоритмов) // Динамические системы. — 2008. — Вып 24. — С. 83–98.
10. *Liu J.W.H.* The role of elimination trees in sparse factorization // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 1990. — V. 11. — P. 134–172.
11. *Parter S.* The use of linear graphs in Gauss elimination // SIAM Review. — 1961. — V. 3. — P. 119–130.
12. *Щербина О.А.* Локальные элиминационные алгоритмы для задач удовлетворения ограничений // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №1. — С. 24–39.

13. *Codd E.F.* A relational model of data for large shared data banks // Commun. ACM. — 1970. — V. 13. — P. 377–387.
14. *Ullman J.* Principles of Database and Knowledge-Base Systems, 2 Volumes. — New York: Computer Science Press, 1988/89.
15. *Yannakakis M.* Graph-theoretic methods in database theory // Proc. 9th ACM PODS. — 1990. — P. 230–242.
16. *Codd E.F.* Relational Completeness of Data Base Sublanguages. IBM Research Report RJ987 (March 6th, 1972). — Republished in Randal J. Rustin (ed.), Data Base Systems: Courant Computer Science Symposia Series 6, Englewood Cliffs, N.Y.: Prentice-Hall, 1972.
17. *Pearson J., Jeavons P.* A survey of tractable constraint satisfaction problems. Technical Report CSD-TR-97-15, Royal Holloway University of London, 1997.
18. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
19. *Yannakakis M.* Computing the minimum fill-in is NP-complete // SIAM J. Alg. Disc. Meth. — 1981. — V. 2. — P. 77-–79.
20. *Bertele U., Brioschi F.* Nonserial Dynamic Programming. — New York: Academic Press, 1972. — 235 p.
21. *Gaifman H.* On local and non-local properties // Logic Colloquium ’81. — North Holland, 1982.
22. *Arnborg S., Proskurowski A.* Characterization and recognition of partial k-trees // SIAM J. Alg. Discr. Meth. — 1986. — V. 7. — P. 305-314.

***Статья поступила в редакцию 25.08.2009***

УДК 519.873

# ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ, ОБСЛУЖИВАЮЩЕЙ ДВА ПОТОКА ЗАЯВОК, С КОНЕЧНОЙ ОЧЕРЕДЬЮ


**© Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *svp54@mail.ru*



**Abstract**. Stationary characteristics of a single-server queueing system, alternating between two Poisson streams are obtained.


## Постановка задачи

Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одной линии и двух бункеров накопления конечных емкостей, предназначенных для заявок соответствующих типов. На систему поступают два независимых простейших потока заявок с интенсивностями $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Времена обслуживания заявок: $w_1$ и $w_2$ – произвольные непрерывные случайные величины с конечным математическими ожиданиями, интенсивности которых равны соответственно $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$. Требуется найти вероятностные характеристики состояний системы.

**Правила обслуживания предполагают:**

1. Поступающая на свободную систему заявка любого из двух типов начинает обслуживаться немедленно.
2. При непустых бункерах в момент окончания обслуживания линией заявки одного типа на обслуживание немедленно поступает одна из очередных заявок, при этом приоритетное право принадлежит заявке другого типа.
3. Система функционирует с потерями; поступающие на систему заявки в момент занятости линии и заполненности мест в бункерах, предназначенных для приема заявок соответствующего типа, теряются.

*В работе получены вероятности состояний системы, а также вероятности потери заявок в стационарном режиме.*

## 1. Математическое моделирование

Методику рассуждений проведем для случая одноместных бункеров накопления заявок.

Обозначим через $\gamma_k$, $k = 1, 2$ – время ожидания заявки $k-$го типа в соответствующем бункере.

Введем случайный процесс $\xi(t)$ ($t$ – время), фазовое пространство которого состоит из возможных состояний системы:

1. (0) – система свободна от заявок

2. $(k, m, n)$ – линия обслуживает заявку $k-$го типа
   $(k = 1, 2)$ и в бункерах содержится соответственно
   $m-$ заявок 1-го типа $(m = 0, 1)$ и
   $n-$ заявок 2-го типа $(n = 0, 1)$.

Таким образом, для системы возможны 9 различных состояний.
Граф переходов состояний выглядит следующим образом:

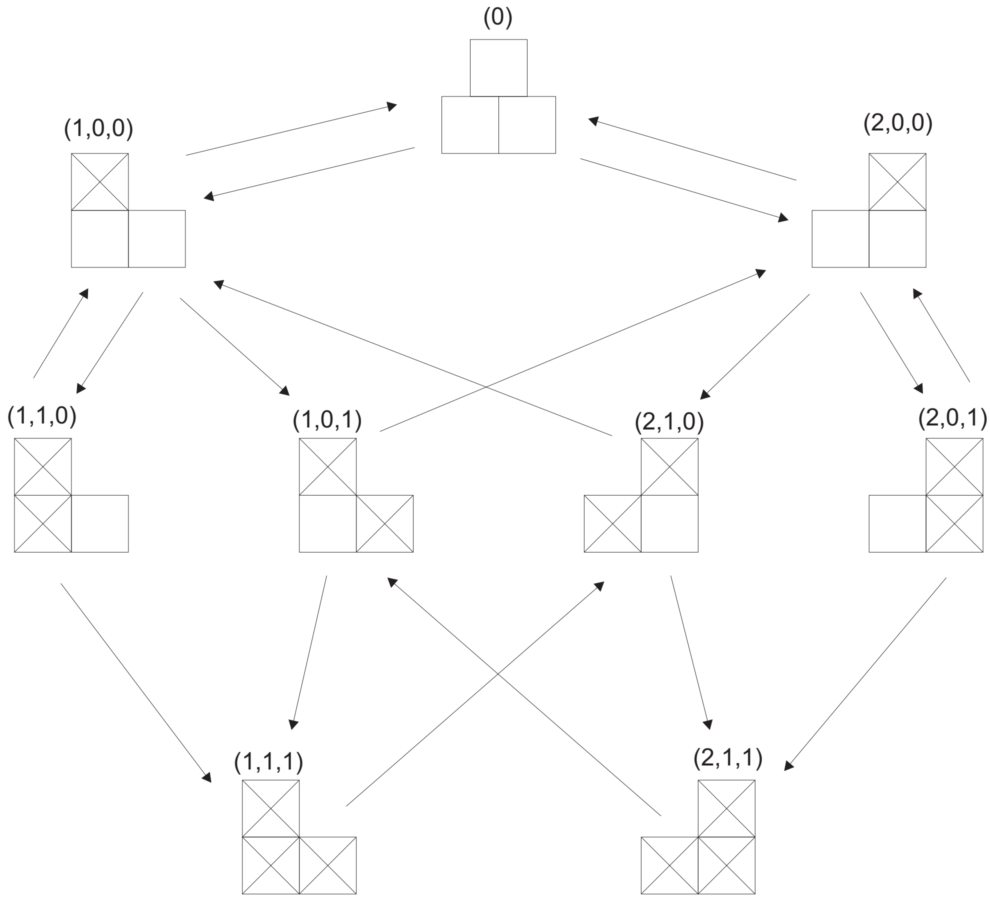



*Рис.* 1. Граф переходов состояний

Введем функции:

$P_0(t) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (0)\ , P_{k,m,n}(t) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, m, n)\}$,

$Q_{k,0,0}(t, x) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 0, 0), w_k < x\}, k = 1, 2, \quad q_{k,0,0}(t, x) = \dfrac{\partial Q_{k,0,0}}{\partial x}$,

$Q_{k,1,0}(t, x, y) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 1, 0), w_k < x, \gamma_1 < y\}, \quad q_{k,1,0} = \dfrac{\partial^2 Q_{k,1,0}}{\partial x \partial y}$,

$Q_{k,0,1}(t, x, z) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 0, 1), w_k < x, \gamma_2 < z\}, \quad q_{k,0,1}(t, x, z) = \dfrac{\partial^2 Q_{k,0,1}}{\partial x \partial z}$,

$Q_{k,1,1}(t, x, y) = \mathbb{P}\{\xi(t) = (k, 1, 1), a_k < x, \gamma_1 < y, \gamma_2 < z\}, \quad q_{k,1,1}(t, x, y, z) = \dfrac{\partial^3 Q_{k,1,1}}{\partial x \partial y \partial z}$.

Введем обозначения для функций в стационарном режиме:

$$P_0 = \lim_{t\to+\infty} P_0(t), \qquad P_{k,m,n} = \lim_{t\to+\infty} P_{k,m,n}(t)$$

$$g_{k,0,0}(x) = \lim_{t\to+\infty} q_{k,0,0}(t,x), \qquad g_{k,1,0} = \lim_{t\to+\infty} q_{k,1,0}(t,x,y),$$

$$g_{k,0,1}(x,z) = \lim_{t\to+\infty} q_{k,0,1}(t,x,z), g_{k,1,1}(x,y,z) = \lim_{t\to+\infty} q_{k,1,1}(t,x,y,z)$$

Заметим, что имеют место соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
P_{k,0,0} = \int_0^\infty g_{k,0,0}(x)dx, \quad k=1,2; \qquad P_{1,1,0} &= \int_0^\infty dy \int_y^\infty g_{1,1,0}(x,y)dx,\\
P_{2,1,0} = \int_0^\infty dx \int_0^\infty g_{2,1,0}(x,y)dy, \qquad P_{1,0,1} &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty g_{1,0,1}(x,z)dz\\
P_{2,0,1} = \int_0^\infty dz \int_z^\infty g_{2,0,1}(x,z)dx, \qquad P_{1,1,1} &= \int_0^\infty dy \int_y^\infty dx \int_0^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)dz\\
P_{2,1,1} &= \int_0^\infty dz \int_z^\infty dx \int_0^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)dy
\end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Проведя вероятностные рассуждения и предельные переходы, получим систему интегро-дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия к ним:

$$(\lambda_1+\lambda_2)P_0 = \int_0^\infty g_{1,0,0}(x)\mu_1(x)dx + \int_0^\infty g_{2,0,0}(x)\mu_2(x)dx \tag{1.1}$$

$$g'_{1,0,0}(x) + (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1(x))g_{1,0,0}(x) = 0 \tag{1.2}$$

$$g_{1,0,0}(0) = \lambda_1 P_0 + \int_0^\infty dy \int_y^\infty g_{1,1,0}(x,y)\mu_1(x)dx + \int_0^\infty dy \int_0^\infty g_{2,1,0}(x,y)\mu_2(x)dx$$

$$g'_{2,0,0}(x) + (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2(x))g_{2,0,0}(x) = 0 \tag{1.3}$$

$$g_{2,0,0}(0) = \lambda_2 P_0 + \int_0^\infty dz \int_0^\infty g_{1,0,1}(x,z)\mu_1(x)dx + \int_0^\infty dz \int_z^\infty g_{2,0,1}(x,z)\mu_2(x)dx$$

$$\frac{\partial g_{1,1,0}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1,1,0}}{\partial y} + (\lambda_2+\mu_1(x))g_{1,1,0}(x,y) = 0, \qquad 0\le y\le x$$

$$g_{1,1,0}(x,0) = \lambda_1 g_{1,0,0}(x) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial g_{2,1,0}}{\partial x} + \frac{\partial g_{2,1,0}}{\partial y} + (\lambda_2+\mu_2(x))g_{2,1,0}(x,y) = 0, \quad 0\le x, 0\le y$$

$$g_{2,1,0}(x,0) = \lambda_1 g_{2,0,0}(x), \quad g_{2,1,0}(0,y) = \int\limits_0^\infty dz \int\limits_y^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)\mu_1(x)dx \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial g_{1,0,1}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1,0,1}}{\partial z} + (\lambda_1 + \mu_1(x))g_{1,0,1}(x,z) = 0, \quad 0 \le x, 0 \le z$$

$$g_{1,0,1}(x,0) = \lambda_2 g_{1,0,0}(x), \quad g_{1,0,1}(0,z) = \int\limits_0^\infty dy \int\limits_z^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)\mu_2(x)dx \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial g_{2,0,1}}{\partial x} + \frac{\partial g_{2,0,1}}{\partial z} + (\lambda_1 + \mu_2(x))g_{2,0,1}(x,z) = 0, \quad 0 \le z \le x$$

$$g_{2,0,1}(x,0) = \lambda_2 g_{2,0,0}(x) \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial g_{1,1,1}}{\partial x} + \frac{\partial g_{1,1,1}}{\partial y} + \frac{\partial g_{1,1,1}}{\partial z} + \mu_1(x)g_{1,1,1}(x,y,z) = 0, \quad 0 \le y \le x, 0 \le z$$

$$g_{1,1,1}(x,0,z) = \lambda_1 g_{1,0,1}(x,z), \quad g_{1,1,1}(x,y,0) = \lambda_2 g_{1,1,0}(x,y) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial g_{2,1,1}}{\partial x} + \frac{\partial g_{2,1,1}}{\partial y} + \frac{\partial g_{2,1,1}}{\partial z} + \mu_2(x)g_{2,1,1}(x,y,z) = 0, \quad 0 \le z \le x, 0 \le y$$

$$g_{2,1,1}(x,0,z) = \lambda_1 g_{2,0,1}(x,z), \quad g_{2,1,1}(x,y,0) = \lambda_2 g_{2,1,0}(x,y) \tag{1.9}$$

Далее выписываем решение системы и получаем алгебраическую линейную систему уравнений относительно вероятностей состояний в стационарном режиме. Из (1.2) и (1.3) имеем:

$$g_{1,1,0}(x) = g_{1,0,0}(0)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x), \quad g_{2,0,0}(x) = g_{2,0,0}(0)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x) \tag{1.10}$$

где $\Phi_k(x) = e^{-\int\limits_0^x \mu_k(t)dt}$ – функции надежности случайных величин $w_k$, $\quad k = 1,2$. Введем обозначения для преобразования Лапласа: $\Phi_k^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\Phi_k(x)dx$, $\quad k = 1,2$.

Учитывая $(*)$, получаем:

$$P_{k,0,0} = g_{k,0,0}(0)\Phi_k^*(\lambda_1 + \lambda_2), \quad k = 1,2 \tag{1.11}$$

Из (1.4)–(1.7) имеем

$$g_{1,1,0}(x,y) = \lambda_1 g_{1,0,0}(x-y)e^{-\lambda_2 y}e^{-\int\limits_{x-y}^x \mu_1(t)dt}, \quad 0 \le y \le x \tag{1.12}$$

$$g_{2,1,0}(x,y) = \left[\begin{array}{ll} \lambda_1 g_{2,0,0}(x-y)e^{-\int\limits_{x-y}^x \mu_2(t)dt}e^{-\lambda_2 y}, & 0 \le y \le x \\ g_{2,1,0}(0,y-x)e^{-\int\limits_0^x \mu_2(t)dt}e^{-\lambda_2 y}, & 0 \le x \le y \end{array}\right. \tag{1.13}$$

$$g_{1,0,1}(x,z)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_2 g_{1,0,0}(x-z)e^{-\int\limits_{x-z}^{x}\mu_1(t)dt}e^{-\lambda_1 z}, & 0\le z\le x\\ g_{1,0,1}(0,z-x)e^{-\int\limits_{0}^{x}\mu_1(t)dt}e^{-\lambda_1 x}, & 0\le x\le z\end{array}\right. \tag{1.14}$$

$$g_{2,0,1}(x,z)=\lambda_2 g_{2,0,0}(x-z)e^{-\lambda_1 z}e^{-\int\limits_{x-z}^{x}\mu_2(t)dt}, \quad 0\le z\le x \tag{1.15}$$

Для соответствующих постоянных получаются выражения

$$P_{1,1,0}=\lambda_1 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 y}dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x+y)dx \tag{1.16}$$

$$P_{2,1,0}=\lambda_1 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 y}dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x+y)dx+$$
$$+\Phi_2^*(\lambda_2)\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty dz\int\limits_y^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)\mu_1(x)dx \tag{1.17}$$

$$P_{1,0,1}=\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 z}dz\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x+z)dx+$$
$$+\Phi_1^*(\lambda_1)\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty dy\int\limits_z^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)\mu_2(x)dx \tag{1.18}$$

$$P_{2,0,1}=\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 z}dz\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x+z)dx \tag{1.19}$$

Из (1.8)–(1.9) имеем:

$$g_{1,1,1}(x,y,z)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_2\lambda_1 g_{1,0,0}(0)\Phi_1(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-y)}\cdot e^{-\lambda_2(y-z)}, & 0\le z\le y\le x\\ \lambda_1\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\Phi_1(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-z)}\cdot e^{-\lambda_1(z-y)}, & 0\le y\le z\le x\\ \lambda_1 g_{1,0,1}(0,z-x)\Phi_1(x)e^{-\lambda_1(x-y)}, & 0\le y\le x\le z\end{array}\right. \tag{1.20}$$

$$g_{2,1,1}(x,y,z)=\left[\begin{array}{ll}\lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\Phi_2(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-z)}\cdot e^{-\lambda_1(z-y)}, & 0\le y\le z\le x\\ \lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\Phi_2(x)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)(x-y)}\cdot e^{-\lambda_2(y-z)}, & 0\le z\le y\le x\\ \lambda_2 g_{2,1,0}(0,y-x)\Phi_2(x)e^{-\lambda_2(x-z)}, & 0\le z\le x\le y\end{array}\right. \tag{1.21}$$

Учитывая $(*)$, вычисляем $P_{1,1,1}$ и $P_{2,1,1}$:

$$P_{1,1,1} = \lambda_1\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dz\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_1(x+y+z)dx+$$
$$+\lambda_1 A_2\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 x}\Phi_1(x+y)dx \quad (1.22)$$

$$P_{2,1,1} = \lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dz\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\Phi_2(x+y+z)dx+$$
$$+\lambda_2 A_1\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\Phi_2(x+y)dx, \quad (1.23)$$

где

$$A_1=\int\limits_0^\infty g_{2,1,0}(0,y)dy=\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty dz\int\limits_y^\infty g_{1,1,1}(x,y,z)\mu_1(x)dx$$
$$A_2=\int\limits_0^\infty g_{1,0,1}(0,z)dz=\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty dy\int\limits_z^\infty g_{2,1,1}(x,y,z)\mu_2(x)dx$$

Для $A_1$ и $A_2$ имеют место соотношения:

$$A_1 = \lambda_1\lambda_2 g_{1,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dz\,dy\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}f_1(x+y+z)dx+$$
$$+\lambda_1 A_2\int\limits_0^\infty dy\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 x}f_1(x+y)dx \quad (1.24)$$

$$A_2 = \lambda_1\lambda_2 g_{2,0,0}(0)\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty (e^{-\lambda_1 z}+e^{-\lambda_2 y})dy\,dz\int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}f_2(x+y+z)dx+$$
$$+\lambda_2 A_1\int\limits_0^\infty dz\int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 x}f_2(x+y)dx, \quad (1.25)$$

где $f_k=\mu_k(x)\Phi_k(x)$, $k=1,2$ – плотности распределения случайных величин $w_1$ и $w_2$.

Наконец, получаем соотношения для $g_{1,0,0}(0)$ и $g_{2,0,0}(0)$:

$$g_{1,0,0}(0) = \lambda_1 P_0 + \lambda_1 g_{1,0,0}(0) \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 y} dy \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_1(x+y)dx +$$

$$+ \lambda_1 g_{2,0,0}(0) \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_2 y} dy \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_2(x+y)dx + A_1 f_2^*(\lambda_2) \quad (1.26)$$

$$g_{2,0,0}(0) = \lambda_2 P_0 + \lambda_2 g_{2,0,0}(0) \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 y} dy \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_2(x+y)dx +$$

$$+ \lambda_2 g_{1,0,0}(0) \int\limits_0^\infty e^{-\lambda_1 y} dy \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x} f_1(x+y)dx + A_2 f_1^*(\lambda_1) \quad (1.27)$$

Постоянные величины: $P_0$; $P_{1,0,0}$; $P_{2,0,0}$; $P_{1,1,0}$; $P_{2,1,0}$; $P_{1,0,1}$; $P_{2,0,1}$; $P_{1,1,1}$; $P_{2,1,1}$; $A_1$; $A_2$; $g_{1,0,0}(0)$; $g_{2,0,0}(0)$ можно найти из алгебраической системы линейных однородных уравнений (1.11), (1.16)–(1.19), (1.22)–(1.27), добавив к ним нормировочное соотношение

$$P_0 + P_{1,0,0} + P_{2,0,0} + P_{1,1,0} + P_{2,1,0} + P_{1,0,1} + P_{2,0,1} + P_{1,1,1} + P_{2,1,1} = 1 \quad (1.28)$$

Полученное из (1.1) соотношение

$$(\lambda_1 + \lambda_2)P_0 = g_{1,0,0} f_1^*(\lambda_1 + \lambda_2) + g_{2,0,0}(0) f_2^*(\lambda_1 + \lambda_2)$$

можно использовать для проверки.

Вероятности потери заявки $k$-го типа $P_k, k = 1, 2$ в стационарном режиме выражаются следующим образом:

$$P_1 = P_{1,1,0} + P_{1,1,1} + P_{2,1,1}$$
$$P_2 = P_{2,1,0} + P_{1,1,1} + P_{2,1,1}$$

## Заключение

В работе получены вероятностные характеристики состояний системы в стационарном режиме, а также вероятности потери заявок 1-го и 2-го типов.

## Список литературы

1. *Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.* Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: «Выща школа», 1987. – 246 с.

2. *Беляев Ю.К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике – Вильнюс. 1962 – С. 309-323.

3. *Коваленко А.И., Стрыгина Н.З.* Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением // Автоматика и телемеханика – М: Российская АН, 1992. – №1. – С. 156-164.
4. *Коваленко А.И., Смолич В.П.* Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками // Динамические системы. – 2000. – Вып. 16 – С. 137-142.
5. *Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.* Исследование системы массового обслуживания M/G/1/1. // Учёные записки ТНУ, 2002, серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика», №2, С. 40-42.
6. *Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.* Стационарные характеристики системы M/G/2/0 с поочерёдным обслуживанием заявок двумя линиями // Динамические системы. – ТНУ, 2008. – Вып. 24 – С. 69-82.


***Статья поступила в редакцию 02.06.2009***

УДК 004.6

# TOWARDS EASIER QUERYING OF XML-BASED LINGUISTIC CORPORA

© Gladkova G.P., Drozd A.A.

Kiev National Taras Shevchenko University
Institute of Philology
Department of English Philology
01601 Taras Shevchenko Boulevard 14 Kiev, Ukraine
e-mail: *anna.gld@gmail.com*

Moscow State University (Sevastopol Branch)
Programming Department
99000 Geroev Sevastopolya 9, Sevastopol, Ukraine
e-mail: *alexander.drozd@gmail.com*

**Abstract**. The paper is devoted to evaluation of general-purpose XML querying tools in respect to linguistic corpora. A specialized pattern-based query language is suggested and implemented in XCorp software.

## Introduction

Corpus linguistics is one of the most actively developing trends in applied linguistics. Corpora are widely understood to be merely a "large bodies of machine-readable text containing thousands or millions of words" [6, p.48], and many popular tools for corpus analysis like Antony Lawrence's AntConc [2] presuppose the input to be simple plain text files. But current tasks in the spheres of phonology, semantics or syntax of a natural language require more complex annotation of linguistic data, not to mention issues in pragmatics and cognitive analysis of language. This leads to the problem of incorporating additional data in the text and complex querying of this information.

Corpora may be stored in a variety of formats, including the so-called vertical format and SGML. While these formats may be more advantageous for certain kinds of tasks, the most flexible solution remains to be XML, which is proved by the fact that many corpus projects have developed their own XML-based formats optimized for storage of task-specific information (well-known examples are generic TEI XML, TigerXML etc). Moreover, a great many utilities for tagging of the text on the levels of syntax and morphology can produce XML output. Yet while the XML format itself is flexible and may be tailored to meet the needs of a particular study with some basic knowledge of applied linguistics, querying the resulting data poses a more serious problem. The aim of this paper is to analyse the data model used in corpus linguistics and the applicability of the standard XML querying tools in this sphere, as well as to suggest a more convenient specialized querying tool.

The general issues of data retrieval from XML databases are discussed in variety of sources [4,5,11,12], but one can judge of the applicability of general XML queries for corpus linguistics by the fact that all major corpus projects generally develop their own tools for querying their data (e.g. Xaira for British National Corpus [3]). Therefore there exist a number of solutions developed for specialized annotation sets (e.g. TigerSearch for TigerXML). The problem of general applicability of standard tools is aggravated by the fact that they are all developed for specialists in IT and may be difficult to use for linguists.

## 1. General purpose tools for quiering XML

XML is claimed to be the universal format for data representation, and a great many universal solutions has been developed for querying XML data. However, as often is the case, universal solutions may be less suitable for specific tasks. First of all, XML itself, as well as the default XML querying tools, has been developed for usage in other information processing paradigm: its main purpose is storage and retrieval of structured data of database-like type, where all elements of the same level are considered equal and no importance is given to their consecutive order (employee profiles or movie collections are the typical examples in XML tutorials). In fact such XML files are merely an alternative format to a database, and typical queries for such files much resemble database requests (e.g. "find all the employees with salaries higher than 1000$").

However, linguistic corpora possess certain characteristics that make the standard XML querying tools less suitable for them. Elements of a text in a natural language are sequences of words that combine into phrases, sentences and paragraphs. The order of those elements is important for the researcher, and so is the distance between the elements. Sometimes linguists need to combine the annotation data with the patterns present in the plain text data in their search requests. For example, a study in alliteration may involve searching for sequences of words starting with the same consonant at a particular distance. A study in word-formation may require searching for roots and words derived from them occurring within one sentence or one paragraph. The register of letters may be important or not for a given task. Some of these difficulties may be solved by means of standard XML querying tools, but this might pose some difficulties even for an expert in IT sphere, while for an average linguist they turn into an unsolvable problem.

The standard means of querying XML data is XQuery language, developed by W3 Consortium as well as XML itself. However, the current version of XQuery is poorly suited for use with XML-annotated text corpora: typical tasks involving search for sequences of elements in a given order are very difficult or impossible to solve. The necessity of augmenting XQuery with text querying functionality is acknowledged by the fact that W3 Consortium itself started the work on development of XQuery tor better support of text searching (XQuery and XPath Full Text [12]). The suggested changes partly solve the problem of querying the XML data as a text in a natural language. However, the problem of complexity of XQuery for an expert in humanities is even aggravated by further sophistication of the language. Besides that, the aforementioned changes to XQuery are still in the draft stage, and it is hard to predict the time of new release of XQuery, not to mention the development of software tools to support the new search mechanisms.

Besides XQuery there exist a number of less well-known XML querying languages, but none of them meet the two aforementioned requirements at a time (simplicity and support for full-text search). For example, XML-QL [4] is simpler than XQuery, but it offers no support for regular expressions or searching for elements that occur at a given distance.

There also exist specialized software tools developed for specific corpus projects. The most famous example is Xaira [3], the successor of SGML-based SARA tool distributed with the British National Corpus. While its architecture is general, the drawbacks include complexity of corpus compilation, necessity of huge indices (sometimes five times as big as source XML files with heavy annotation), as well as instability in work. Alinea [7] is a parallel corpus tool which is somehow more difficult to use for single-language corpora. The problem with many programs of the type of UAM corpus tool [9] is that they have been implemented in script languages and are rather instable in work with large-scale corpora. Therefore this paper suggests a general tool for querying XML-based corpora that has been developed in view of the most common tasks in analysis of linguistic data that can be easily automated.

## 2. Sample Task in Corpus Analysis

It is worth stressing that even if particular a particular research project in linguistics has seemingly nothing to do with applied or computer linguistics, it is always based on a corpus of text data. Using electronic texts may considerably shorten the time spent on retrieving evidence of linguistic facts. The general scheme of a research project in linguistics is the following: at first a classification scheme or typology for some language phenomenon is developed. It is then applied to analysis of text data and then statistics is drawn to prove the preliminary hypothesis. Traditional approach with index cards for example is not only susceptible to mistakes, but is also difficult to follow in cases when each item to be analyzed has more then two parameters to be classified with (which is the case with all complex studies involving, e.g. analysis on the levels of semantics, syntax and pragmatics).

Let's analyze a sample task posed in a research on peculiarities of English abstract nouns ending in -ness [1]. While it is relatively easy to find such nouns in a text with regular expressions (though odd words like witness or governess have to be eliminated), the task involves analysis of semantics as well as syntactic and pragmatic behavior of such nouns in a corpus of classical British novels. Semantic analysis is brought down to defining of semantic domain of a particular noun (according to the nature of referent five general domains have been specified, four of which describe various qualities of people (physical, psychological, qualities, states of mind, and qualities denoting social behavior and attitudes) and one is reserved for other kinds of referents). Words belonging to these domains are further subdivided into a number of thematic groups. Syntactic behavior is analyzed in terms of the most common distribution models of syntactic groups including nouns ending in -ness. Pragmatics is studied in terms of who is the speaker and which character is the quality denoted by the -ness noun attributed to, as well as whether the quality denoted by the -ness noun is evaluated positively or negatively in the context of a novel. Therefore 5 units of information are to be added to each -ness noun in the corpus. Besides that, the corpus has to be tokenized, and part-of-speech information is to be added to every word in order to enable the distribution analysis. Thus a sentence from "Pride and Prejudice" by Jane Austen contained in a single line and incorporating all this information in XML format would look like this (the pos-tag information has been simplified for viewing purposes):

```
<paragraph  id="40">
  <sentence id="78">
   <w pos="noun">Mr.</w>
   <w pos="noun">Darcy</w>
   <w pos="link_verb">is</w> <w pos="adjective">all</w>
   <w pos="noun" semantics="social\_polite" evaluation="$+$"
      speaker="Elizabeth" qualified="Darcy">politeness</w>
     <w pos="verb">said</w> <w pos="noun">Elizabeth</w> <w pos="participle">smiling</w>
  </sentence>
</paragraph>
```

Performing such annotation enables the linguist to perform complex queries to check if some character is more likely to use words from a certain semantic domain, how he evaluates other characters and is characterized by them, whether words from one semantic domain are more likely appear more often in certain syntactic models and not in the others. It is possible to learn if several such nouns appear in consecutive sentences or in the same paragraph (which is of interest because -ness nouns used in groups in the same context or together with the words they are derived from produce stylistic effect).

## 3. XCorp Query Language

Since one of the problems of the standard XML querying languages is its excessive complexity for an average linguist, we suggest a query language based on patterns. It was developed in view of typical tasks and situations that professional linguists face when working with text corpora. The proposed tool offers a general querying functionality for XML corpora that covers and simplifies such typical tasks, that include finding segments of text matching certain criteria and gathering statistics. Suggested routines are implemented in a program called XCorp, currently released at http://sourceforge.net/projects/xcorp/. XCorp runs under Microsoft .NET framework, and can be used on any operating system supporting .NET framework.

First thing to be determined is the types of corpora to be supported. XML-based linguistic corpora generally store text as an hierarchy of structures like chapter
paragraph
sentence, and on the bottom level as a sequence of elements representing words with attributes for different linguistic categories, such as part of speech, word lemma, semantic class etc. This is the output model supported by the majority of tokenizers, lemmatizers, part-of-speech taggers and other corpus utilities. Since this is the most frequently used type of annotation, XCorp was developed primarily in its view. (More complex XML schemas with data model different from the aforementioned one are generally developed for specialized corpora like TigerCorpus that usually develop a specialized querying tool for their data). The level of nesting and names of specific nodes may be different in various corpora and thus need to be specified in the search request. Corpus texts are to

be stored in simple xml files, no indexing is required. The current version of Xcorp has command-line interface with the program file being executed on the request file, and the development of GUI with graphical query constructor is scheduled.

As search request can contain many parameters and can be rather complicated, we chose to represent it in XML format as well. The root element of the query configuration file is <config> that contains three sections. The first section of request ($< search\_scope >$) specifies the structure of corpus files and the search scope within them, i.e. how elements are nested and what elements contain target information. Target elements can be specified with XPath notation. Second section ($< search_{r}equest >$) specifies search criteria. As text is presented as a sequence of elements with words and certain attributes, XCorp software is developed to retrieve subsequences of those elements, matching certain criteria. User can specify a substring or regular expression for each element in chain as well as for each attribute. Also maximum distance between elements can be set. The last section of search request ($< search\_target >$) contains description of what kind of output is expected and how it is to be presented. Therefore searching an XML-annotated text file is reduced to filling in a template form, which should make the task considerably easier for linguists with no prior training in programming.

Currently XCorp enables the user to obtain information of four kinds. 1) basic statistics for retrieved items. XCorp computes the number of hits of target pattern for all the levels in which they are nested (e.g. those may be sentences or paragraphs containing the target item). This feature may be useful for checking the "density" of target sequence, for example, in texts of different genres, or in different sections of the same text. It simplifies searching for stylistic phenomena based on repetition, such as anaphora or epiphora. 2) KWIC (keyword-in-context) lists containing all the occurrences of the target item in the context in which they occur. The context may be specified to be a certain amount of characters to the right and to the left of the target pattern, which is the traditional way for concordancer software, or the context may be understood as the element within which the target pattern is found (e.g. sentences or paragraphs or syntactic groups within which the target pattern occurs). 3) wordlists, or rather, lists of occurrences of target pattern in every file constituting the corpus, and a general wordlist for the whole corpus. The default setting for wordlist order is the order in which they occur in the file, which may be useful for research involving linguistic analysis of fiction or newspaper discourse. The wordlist can also be sorted alphabetically. There is an option of generating a frequency list, in which all similar occurences of target pattern are merged and general statistics is given. 4) other information characterizing the target pattern and stored in xml format. This feature makes XCorp useful not only for hypothesis-driven research where one needs only to check for availability of predefined patterns, but also for discovering "clusters" of linguistic information that the user may not be aware of at the time of request. For example, if the corpus has morphological and semantic annotation, this feature may help the researcher to discover semantic patterns that correspond to the target syntactical pattern.

Let us consider a query designed for the above example from "Pride and Prejudice". To describe the way the author construes the relationship between Elizabeth and Darcy we need to know what the two characters think of each other. To learn that we can search for -ness nouns uttered by Elizabeth and concerning Darcy, together with their attributes. The request matching the above example will look like this:

```
<search_scope>
  <element name="//paragraph">
   <element name="sentence">
    <element name="w">
    </element>
   </element>
  </element>
</search_scope>
<search_request>
  <item mask="" distance="0">
   <attribute name="pos">adjective</attribute>
  </item>
  <item mask="\\wness" distance="">
   <attribute name="speaker">Elizabeth</attribute>
   <attribute name="qualified">Darcy</attribute>
  </item>
</search_request>
<search_target>
  <content sort="frequency" order="descending"/>
</search_target>
```

The adjective in the above example serves to increase the degree of Darcy's politeness so as to exaggerate it and let us feel the irony of Elizabeth, who in fact thinks him extremely rude. On the other hand, Mrs. Bennet talks of his "shocking rudeness", which is also an exaggeration, and this time it is the author who speaks ironically of her character. But as the novel progresses we witness Elizabeth starting to like Darcy and even acknowledging his "utmost politeness" in earnest.

## Conclusion

The presented paper analyses the applicability of general-purpose XML querying tools in the sphere of corpus linguistics. Two main problems have been identified: the standard querying tools do not currently support full-text search functionality, and the default querying language is too difficult for experts in humanities with no programming experience. Therefore the proposed query language is pattern-based. It is implemented in software program XCorp and can be applied for querying XML corpora with various kinds of annotation. The proposed solution is universal enough to work with different kinds of linguistic data, and at the same time it is as simplified as possible. XCorp has been successfully applied for solving some practical tasks in corpus linguistics. Further work includes the development of graphical user interface and inviting the linguistic community to produce more requirements, so as to make XCorp a more universal solution and to make the suggested query language more expressive.

## Список литературы


1. *Гладкова Г.П.* Особливості функціонування абстрактних іменників із суфіксом -ness у тексті роману Джейн Остін "Pride and Prejudice-/ Г.П. Гладкова // Мовні і концептуальні картини світу. – 2008. – Вип. 24. – Частина 1. – Київ: КНУ імені Т. Шевченка, 2008. – с. 180-186.
2. *Anthony, L.* AntConc: design and development of a freeware corpus analysis toolkit for the technical writing classroom / Lawrence Anthony // Professional Communication Conference, 2005. IPCC 2005. Proceedings. -pp. 729-737. - [Electronic resource]: http://www.antlab.sci.waseda.ac.jp/abstracts/ipcc05_pres_20050713/IPCC_05_Anthony_fin_handouts.pdf
3. *Aston G.* Introducing XAIRA: an XML-aware concordance program / Guy Aston, Lou Burnard. -Presentation at workshop held at TALC 2006. -[Electronic resource]: http://www.oucs.ox.ac.uk/rts/xaira/Talks/xaira-wkshop.odp.
4. A Query Language for XML / Alin Deutsch, Mary Fernandez, Daniela Florescu et al. [Electronic resource]. -http://www8.org/w8-papers/1c-xml/query/query.html.
5. *Buxton S.* Querying XML : XQuery, XPath, and SQL/XML in context / Jim Melton, Stephen Buxton. -San Francisco: Morgan Kaufmann, 2006. -845 p. -(The Morgan Kaufmann Series in Data Management Systems).
6. *Baker P. A* Glossary of Corpus Linguistics / Paul Baker, Andrew Hardie, Tony McEnery. - Edinburgh: Edinburgh University Press, 2006. -187 p.
7. Duchet, J.-L. Alinea: a language independant tool for bi-text processing / Jean-Louis Duchet, Oliever Kraif // JRC EU-Enlargement Workshop: Exploiting parallel corpora in up to 20 languages. JRC-Ispra, Italy, 26-27.09.2005. -[Electronic resource]: http://langtech.jrc.it/0509_EU-Enlargement-Workshop.html.
8. Kennedy, Graeme D. An Introduction to Corpus Linguistics / Graeme Kennedy. -London: Longman, 1998.
9. O'Donnell, M. The UAM CorpusTool: Software for corpus annotation and exploration / Michael O'Donnell // Proceedings of the XXVI Congreso de AESLA, Almeria, Spain, 3-5 April 2008. -[Electronic resource]. -http://www.wagsoft.com/Papers/AESLA08.pdf.
10. Stubbs M. Text and corpus analysis: computer-assisted studies of language and culture / Michael Stubbs. -Malden: Blackwell Publishers, 1996. -267 p. -(Volume 23 of Language in Society Series).
11. XQuery 1.0: An XML Query Language /Scott Boag, Don Chamberlin, Mary F. Fernandez et al. [Electronic resource]. -http://www.w3.org/TR/xquery/.
12. XQuery and XPath Full Text 1.0 / Sihem Amer-Yahia, Chavdar Botev, Stephen Buxton et al. [Electronic resource]. -http://www.w3.org/TR/xpath-full-text-10/.


***Статья поступила в редакцию 22.09.2009***

**УДК 519.766, 519.768**

# ФОРМАЛИЗАЦИЯ И ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА КРЫМСКОТАТАРСКОГО ЯЗЫКА

**© Адживелиева З.Д., Анафиев А.С., Заирова С.И.**

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *anafiyev@gmail.com*

**Abstract**. The basic features of Crimean-Tatar Language morphology for the purpose of construction the morphological analysis subsystem for the Crimean-Tatar Language understanding system are considered in this article.

## Введение

Автоматическая обработка естественно-языковых (ЕЯ) текстов – одно из приоритетных направлений в области новых информационных технологий. Область применения систем анализа ЕЯ-текстов довольно разнообразна. Сюда можно отнести поисковые системы, вопросно-ответные системы, системы автоматического машинного перевода.

В связи с изменением в последнее время демографической ситуации в Крыму, появлением крымскотатарских школ, ВУЗов, объектов культуры, с учетом развития крымскотатарской науки и искусства, а также для популяризации крымскотатарского языка и культуры представляется целесообразным приступить к созданию моделей и информационных систем понимания крымскотатарского языка и автоматического перевода с крымскотатарского и на крымскотатарский язык. В частности, «крымскотатарско-украинский-крымскотатарский» и «крымскотатарско-русский-крымскотатарский» системы автоматисекого перевода.

*Каждый язык на земле, это наибольшая ценность, которую нужно не только оберегать, но и развивать в правильном направлении для ее сохранения в современном мире.*

*Целью данной и последующих работ в этом направлении является построение математико-информационной модели понимания крымскотатарского языка с целью дальнейшего применения её в информационных системах регионального управления для автоматического перевода документов из крымскотатарского и на крымскотатарский язык.*

## 1. Лингвистический процессор

Как известно ядром любой естественно-языковой системы является лингвистический процессор – компонента системы, реализующая формальную лингвистическую модель и способная работать с ЕЯ во всем его объеме [1].

Основными функциями лингвистического процессора (ЛП) являются:

1. моделирования понимания (анализ);
2. моделирования производства текстов (синтез).

В ЛП различают три уровня пофразного представления текста – морфологический, синтаксический и семантический. Каждому уровню соответствует свой формальный образ – структура. Таким образом, выделяют морфологическую, синтаксическую и семантическую структуру предложения.

Под *морфологической структурой* понимают последовательность слов, входящих в анализируемое предложение, с указанием части речи и морфологических характеристик (падежа, числа, рода, одушевленности, вида и т.п.); под *синтаксической структурой* – дерево зависимостей, в узлах которого стоят слова данного естественного языка с указанием части речи и грамматических характеристик, а дуги соответствуют специфичным для данного естественного языка отношениям синтаксического подчинения; под *семантической структурой* – дерево зависимостей, в вершинах которого стоят либо предметные имена, либо слова универсального семантического языка, а ребра соответствуют универсальным отношениям семантического подчинения, таким, как аргументное, атрибутивное, конъюнкция, дизъюнкция, равенство, неравенство, больше, меньше, принадлежит и т.п. Для семантической структуры существенной информацией является информация о кореферентности узлов – информация о том, в каких случаях речь идет об одном и том же объекте, а в каких – о разных.

В целом лингвистический процессор должен обеспечивать выполнение следующих преобразований:

*предложение на ЕЯ* $\rightarrow$ *МорфСтрукт* $\rightarrow$ *СинтСтрукт* $\rightarrow$ *СемСтрукт* (анализ);
*СемСтрукт* $\rightarrow$ *СинтСтрукт* $\rightarrow$ *МорфСтрукт* $\rightarrow$ предложение *на ЕЯ* (синтез),

где МорфСтрукт – морфологическая, СинтСтрукт – синтаксическая и СемСтрукт – семантическая структуры предложения.

Таким образом, для построения ЛП, необходимо разработать:

1. формальные языки для записи (образов) предложений на морфологическом, синтаксическом, семантическом уровнях представления;
2. формальное понятие структуры предложения для каждого из этих уровней;
3. массивы правил для преобразования структур смежных уровней друг в друга;
4. морфологический, синтаксический и семантический словари, включив в них всю информацию о каждой лексеме, необходимую для осуществления соответствующего преобразования.

## 2. Морфологический анализ крымскотатарского языка

Стадия морфологического анализа (МА) является наиболее проработанным лингвистическим этапом процесса обработки естественного текста. Целью МА является определение морфологической информации словоформ для использования ее на последующих этапах обработки ЕЯ текста.

*Крымскотатарский язык является агглютинативным* [2]*, т.е. словоформы образуются только при помощи аффиксов (суффиксов), что делает, учитывая правила следования (порядок в слове) аффиксов различного типа, интересным построение* *иерархии классов аффиксов, которую будет удобно использовать для программной реализации морфологического анализатора.*

В данной работе будет рассмотрен морфологический анализ имен существительных. Как уже отмечалось, в крымскотатарском языке нет приставок и окончаний и, кроме этого, существительные в именительном падеже единственного числа являются корнем слова.

Образование словоформ происходит по следующей схеме:

1. корень, т.е. само слово
2. словообразующие аффиксы
3. формообразующие аффиксы[1]:
   - число
   - уменьшительно-ласкательные
   - обладания/лишения
4. словоизменяющие аффиксы[2]:
   - принадлежности
   - сказуемости
   - падежности

*Формообразующие аффиксы* [3]:

- *Число.* Для всех частей речи в крымскотатарском языке множественное число характеризуется наличием аффиксов -*лар*, -*лер* (правило сингармонизма [2]).

  *Например*, бала*лар* – дети, ел*лер* – ветра.

- *Уменьшительное-ласкательные.* Для существительных в крымскотатарском языке уменьшительно-ласкательная категория характеризуется наличием аффиксов -*чыкъ*, -*чик* (правило сингармонизма).

  *Например*, бала*чыкъ* – ребеночек, ель*чик* – ветерочек.

- *обладания/лишения.* Для существительных в крымскотатарском языке категория обладания (лишения) характеризуется наличием аффиксов -*лы* (-*сыз*), -*ли* (-*сиз*) (правило сингармонизма).

  *Например*, бала*лы* (бала*сыз*), ел*ли* (ель*сиз*).

*Словоизменяющие аффиксы* [3]:

[1]Формообразующие аффиксы могут использоваться как по отдельности, так и вместе, причем порядок зависит от контекста

[2]В данном случае порядок важен и аффиксы принадлежности с аффиксами сказуемости вместе не используются.

- *Принадлежности.* В зависимости от числа и лица используются различные аффиксы:

| Число | Лицо | Аффиксы принадлежности |
|---|---|---|
| Ед. | 1 | *-м, -ым, -им, -ум, -юм* |
| | 2 | *-нъ, -ынъ, -инъ, -унъ, -юнъ* |
| | 3 | *-сы, -си, -и, -у, -ю* |
| Множ. | 1 | *-мыз, -миз, -ымыз, -имиз, -умыз, -юмыз, (-лар)-мыз, (-лер)-имиз* |
| | 2 | *-нъыз, -нъиз, -ынъыз, -инъиз, -унъыз, -юнъиз (-лар)-нъыз, (-лер)-инъиз* |
| | 3 | *-сы, -си, -ы, -у, -ю, (-лар)-ы, (-лер)-и* |

- *Сказуемости.* В зависимости от числа и лица используются различные аффиксы:

| Число | Лицо | Аффиксы сказуемости |
|---|---|---|
| Ед. | 1 | *-м, -ым, -им* |
| | 2 | *-сынъ, -синъ* |
| | 3 | *-дыр, -дир, -тыр, -тир* |
| Множ. | 1 | *-мыз, -миз, (-лар)-мыз, (-лер)-миз* |
| | 2 | *-сыз (-сынъыз), -сиз (-синъиз)* |
| | 3 | *-(лар)-дыр, -(лер)-дир, -тыр, -тир* |

- *Падежности.*

| Падеж | Аффиксы |
|---|---|
| Именительный | - - |
| Родительный | *-нынъ, -нинъ* |
| Дательный | *-гъа, -къа, -ге, -ке* |
| Винительный | *-ны, -ни* |
| Местный | *-да, -де, -та, -те* |
| Исходный | *-дан, -ден, -тан, -тен* |

Учитывая агглютинативность крымскотатарского языка, представляется интересным сформировать иерархию классов аффиксов (суффиксов), которая имеет важное значение для морфологического анализа слов в предложении. Хотя и не всегда, основываясь только на информации об аффиксах и их иерархии, можно однозначно провести морфологический анализ слов, однако, можно попытаться сузить область неопределенности [4] и применить имеющуюся информацию о морфологии слова для дальнейшего сужения на последующих этапах обработки предложений.

Ниже приведем один из вариантов кода на языке Visual Prolog выше описанных идей для морфологического анализатора имен существительных крымскотатарского языка:

```
class facts
  affixType : (string TypeName, string ParentTypeName, string Caption, integer Priority).
  affix     : (string Title, string Morpho).
  word      : (string Word).

clauses
  % Описание иерархии типов аффиксов
  affixType("aftKelishlik", "", "Kelishlik", 0). % аффикса падежности
    affixType("aftBashKelishi", "aftKelishlik", "Bash Kelishi", 1). % именительный падеж
    affixType("aftSaiplikKelishi", "aftKelishlik", "Saiplik Kelishi", 1). % родительный падеж
    affixType("aftDogrultuKelishi", "aftKelishlik", "Dogrultu Kelishi", 1). % дательный падеж
    affixType("aftTushumKelishi", "aftKelishlik", "Tushum Kelishi", 1). % винительный падеж
    affixType("aftErKelishi", "aftKelishlik", "Er Kelishi", 1). % местный падеж
    affixType("aftChikishKelishi", "aftKelishlik", "Chikish Kelishi", 1). % исходный падеж

  affixType("aftMulkiyet", "", "Mulkiyet", 0). % аффикс принадлежности
    affixType("aftMulkiyetTeklik", "aftMulkiyet", "Teklik", 1). % аффикс принадлежности ед. ч.
      affixType("aftMulkiyetTeklik1Shahis", "aftMulkiyetTeklik", "1 Shahis", 2). % 1-е лицо.
      affixType("aftMulkiyetTeklik2Shahis", "aftMulkiyetTeklik", "2 Shahis", 2). % 2-е лицо.
      affixType("aftMulkiyetTeklik3Shahis", "aftMulkiyetTeklik", "3 Shahis", 2). % 3-е лицо.
    affixType("aftMulkiyetChokluk", "aftMulkiyet", "Chokluk", 1). % аффикс принадлежности мн. ч.
      affixType("aftMulkiyetChokluk1Shahis", "aftMulkiyetChokluk", "1 Shahis", 2). % 1-е лицо.
      affixType("aftMulkiyetChokluk2Shahis", "aftMulkiyetChokluk", "2 Shahis", 2). % 2-е лицо.
      affixType("aftMulkiyetChokluk3Shahis", "aftMulkiyetChokluk", "3 Shahis", 2). % 3-е лицо.

  ...

  % Обучение: какие аффиксы у каких типов
  affix("", "aftBashKelishi").
  affix("нынъ", "aftSaiplikKelishi").
  affix("нинъ", "aftSaiplikKelishi").
  ...
  affix("тир", "aftHaberlikChokluk3Shahis").

  % Словарь
  word("азбар").
  ...
  word("бахыт").

class predicates
  divider  : (string Word, list List) nondeterm anyflow.
  root     : (string Root, list AffixList) nondeterm anyflow.
  analysis : (string Name, list Result) nondeterm anyflow.

clauses
  % разбиение входного значения (слова) на всевозможные комбинации аффиксов и корень слова
  divider(_, []).
  divider(Word, [Affix|List]) :-
    ListAffix = toCharList(Affix), % преобразуем строку в список символов
    ListWord  = toCharList(Word),
    conc(ListWordPart, ListAffix, ListWord),
    list(ListWordPart, ListWordPart1),
    PartWord = concatList(ListWordPart1) % преобразуем список в строку string
    divider(PartWord, List).
  divider(Word, [Word|List]) :-
    divider(Word, List), !.

  % выделение корня из полученной комбинации вводимого слова
  root(Root, List) :-
    lastElement(List, Root).
```

```
% анализ списка аффиксов, определение морфологических признаков
analysis(_, []).
analysis(Name, [R1|Result]) :-
  affixType(Name, Name1, R1, Pri),
  analysis(Name1, Result).

% перебор всех аффиксов базы и выделение корректных,
% используя analysis получаем конченое морфологическое представление слова
conclusion(_, []).
conclusion([L|List], [Res|Result]) :-
  affix(L, Name),
  analysis(Name, Res),
  conclusion(List, Result).
```

## Заключение

*В настоящее время не существует теоретических разработок и прикладных проектов по построению информационных систем автоматического понимания крымскотатарского языка. В данной статье делается попытка начать построения математико-информационной модели таких систем.* Первым этапом является морфологический анализ, который является частью лигвистического процессора, и которому (МА), в основном, посвящена данная статья.

В работе рассмотрены основные особенности морфологии крымскотатарского языка и сделана попытка их формализации на основе *иерархии аффиксов* с целью построения автоматизированной системы морфологического анализа. В среде логического программирования Visual Prolog была описана иерархия основных типов аффиксов и разработаны предикаты для выделения морфологической основы слов крымскотатарского языка.

## Список литературы


1. *Евдокимова И.С.* Естественно-языковые системы: курс лекций. – Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2006. – 92 с.
2. *Меметов А.М.* Земаневий къырымтатар тили. – Симферополь, 2006. – 320 с.
3. *Сейдаметова Н.Д.* Сопоставительная грамматика. – Симферополь, 2007.
4. *Анафиев А.С.* Теория шаблонов в задачах обучения по прецедентам и выбора моделей. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – 2007. – 135 с.


***Статья поступила в редакцию 01.06.2009***

УДК 519.95

# ПРИМІТИВНА ПРОГРАМНА АЛГЕБРА ОБЧИСЛЮВАНИХ ФУНКЦІЙ НА МНОЖИНІ ГРАФІВ

© Снігур Н.М.

Національний Технічний Університет України "Київський Політехнічний Інститут"
Факультет електроніки
12 корпус, вул. ак. Янгеля 16/9, м. Київ, 03056, Україна
e-mail: *nastena_sss@mail.ru*

**Abstract.** This paper is devoted to studying certain properties of primitive program algebra of $n$-ary functions defined for the set of finite grafs. The generating set for the partially recursive funtions algebra is found. The results presented are the continuation of the previously carried out research for vector, matrix, relation and table functions.

## Вступ

Серед дисциплін та методів дискретної математики теорія графів (а особливо алгоритмів на графах) знаходить найбільш широке затосування в програмуванні [1]. *Дана робота представляє собою коротке викладення результатів, що стосуються дослідження обчислюваних функцій та предикатів над графами.* Обчислюваність вводиться згідно нумераційного підходу [2]. В якості інструменту дослідження вибрано апарат примітивних програмних алгебр (ППА). Основна увага приділена пошуку породжуючих множин. Зазначимо, що отримані в роботі результати доповнюють результати для векторних, матричних, реляційних та табличних функцій [3, 4, 5].

Усі використані та невизначені в роботі поняття та позначення розуміються в сенсі [5].

## 1. Основні поняття

Носій ППА можуть складати або функції, залежні від змінних [3], або $n$-арні функції і предикати [4]. Далі ППА розуміються в другому сенсі, тому під функціями (предикатами) маються на увазі $n$-арні функції (предикати) для $n = 1, 2, \ldots$, хоча при їх позначенні перевага віддається не операторній, а термальній формі запису, зважаючи на її компактність [2] (п. 2.1).

Сигнатуру ППА складають операції суперпозиції, розгалуження та $(n+1)$-арного циклювання, що представляють собою адекватні уточнення стандартних структур управління алголоподібних мов програмування. Для зручності подальшого викладення та розуміння роботи видається корисним дати формальне визначення цих операцій (більш детально див. [6]).

1. Під *суперпозицією* мається на увазі $(m+1)$-арна операція $S^{x_{i_1},\ldots,x_{i_m}}$ : $\langle f, f_1, \ldots, f_n\rangle \to g$, де $g = f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, f_1, \ldots, x_{i_m-1}, f_m, \ldots, x_n)$, $m \le n$.
2. *Розгалуження* представляє собою $(m+1)$-арну операцію таку, що $\diamondsuit^{m+1}$ : $\langle h, f_1, \ldots, f_m\rangle \to g$, де $h(x_1, \ldots, x_n)$ — функція, із скінченною множиною значень $\{h_1, \ldots, h_m\}$ та $g(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$, якщо $h(x_1, \ldots, x_n) = h_i$.

3. Нарешті *циклювання* задається так: $\underset{y_1,\ldots,y_n}{*} : \langle p,\ f_1,\ \ldots,\ f_n\rangle \to g$, де $p$ — предикат, а $f_i, g$ — функції. Значення $g(x_1,\ldots,x_n)$ визначається наступним чином. Розглянемо послідовність кортежів $\{(\mathrm{y}_i^1,...,\mathrm{y}_i^n),\ i=0,\ 1,\ \ldots\}$, де $\mathrm{y}_0^j := x_j$, $y_{i+1}^j := f_j(y_i^1,\ldots,y_i^n)$, $i=0,1,\ldots,j=\overline{1,n}$. Знайдемо перший кортеж $(y_k^1,\ldots,y_k^n)$ такий, що $p(y_k^1,\ldots,y_k^n) = \mathrm{X}$. Покладемо $g(x_1,\ldots,x_n) = y_k^1$. (Якщо такого кортежу в послідовності не існує, то $g(x_1,\ldots,x_n)$ вважається невизначеним).

Перш ніж розглянути функції над графами спочатку введемо поняття самого графа. Тут має сенс зробити застереження, що існують різні способи визначення графа, в залежності від його подальшого застосування. Надалі будемо притримуватись термінології, вживаної у джерелі [1].

**Означення 1.** Під (скінченим) *орієнтованим графом* $g$ будемо розуміти сукупність двох множин – непорожньої зліченої множини $V$ (множини *вершин*) та множини $E$ впорядкованих пар різних елементів $V$ (множини *ребер* або *дуг*), яка, взагалі кажучи, може бути й порожньою:

$$g = \langle V, E\rangle, \quad V \neq \emptyset, \quad E \subset V \times V.$$

При цьому якщо $v_1, v_2 \in V$ та $e = (v_1, v_2) \in E$, то вершини $v_1$ та $v_2$ графа $g$ називаються *суміжними*, а кожна з них в свою чергу називається також *інцідентною дузі* $e$.

Якщо $e = (v_1, v_2)$, то кажуть, що дуга $e$ *направлена від вершини* $v_1$ *до вершини* $v_2$. Дуга $e$ вважається *додатно інцідентною* її кінцевій вершині $v_2$. Кількість дуг, які є додатно інцідентними вершині $v_1$, називається *додатним ступенем* $v_1$ і позначається через $\delta^+(v_1)$. *Від'ємний ступінь* $v_1$ визначається аналогічно і позначається $\delta^-(v_1)$.

**Зауваження 1.** Нижче будемо розглядати скінченні орієнтовані псевдографи (т. б.графи з петлями – дугами, які з'єднують вершину саму з собою). Множину всіх таких графів позначимо через $\mathbb{G}$.

Далі під функціями розуміємо часткові функції з аргументами і значеннями із $\mathbb{G}$, а під предикатами – також часткові предикати на $\mathbb{G}$. Через $A_{\mathbb{G}}$ позначимо ППА, носій якої складають всі багатомісні частково-рекурсивні функції і предикати на $\mathbb{G}$. Породжуючу множину алгебри $A_{\mathbb{G}}$ назвемо її *повною системою*, повну систему ППА – $I_m^n$ *базисом*, якщо будь-яка її підсистема, що отримується видаленням якого-небудь предиката або якої-небудь функції, відмінної від селекторної, вже не буде повною.

В силу зліченності множини $V$ не буде суттєвим обмеженням, якщо покласти $V = \mathbb{N}$. При цьому на множині вершин графа вводиться цілком природна впорядкованість. Оскільки розглядаються скінчені графи з вершинами, що належать зліченій множині $\mathbb{N}$, то очевидно, що множина всіх таких графів також є зліченою, а отже повинна існувати її ефективна нумерація $\alpha_{\mathbb{G}} : \mathbb{N} \to \mathbb{G}$ (визначення в сенсі [7]).

Основою всього подальшого викладення є наступні відомі теореми (теорема про ізоморфізм та теорема про базис ППА), які в даній роботі можуть бути сформульовані наступним образом:

**Теорема 1** (про ізоморфізм ППА). Бієктивне відображення $\theta_\alpha : A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}} \to A_{\mathbb{N}}^{\text{чр}}$, яке співставляє кожній функції на $\mathbb{G}$ певну арифметичну функцію (в заданій нумерації $\alpha_{\mathbb{G}}$), задає ізоморфізм ППА $A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}}$ на ППА $A_{\mathbb{N}}^{\text{чр}}$, де $A_{\mathbb{N}}^{\text{чр}}$ – ППА усіх чр-функцій та -предикатів над $\mathbb{N}$.

**Теорема 2** (про базис ППА). Існує $I_m^n$-базис алгебри $A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}}$, що складається з точністю до селекторних функцій з двох функцій та одного предиката.

При побудовах в ППА часто є зручними логічні зв'язки для предикатів; вони легко моделюються в ППА за допомогою всюди істинного і всюди хибного предикатів ($p_{\text{i}}$, $p_{\text{x}}$), наприклад

$$p(x_1, \ldots, x_n) \vee q(y_1, \ldots, y_m) = \Diamond(p(x_1, \ldots, x_n), p_{\text{i}}(x_1), \Diamond(q(y_1, \ldots, y_m), p_{\text{i}}(x_1), p_{\text{x}})).$$

Для сполучень $\neg$ та & аналогічно.

Позначимо через $[\sigma]_{\mathfrak{B}}$ замикання множини $\sigma$ операціями сукупності $\mathfrak{B}$, а $\Omega$ – сукупність введених вище операцій ППА.

## 2. ППА чр-функцій і чр-предикатів на множині скінченних орієнтованих графів

Будь-якому графу поставимо у відповідність вектор наступним чином:

1. Першим елементом поставимо номер першої вершини (кореня графа).
2. Далі перерахуємо усі суміжні з першою вершини, які відповідають її від'ємно інцідентним дугам.
3. Поставимо нуль.
4. Якщо вершина не має від'ємно інцідентних дуг, то її пропускаємо.
5. Повторюємо той самий процес для усіх вершин графа.
6. В кінці перерахуємо номери усіх ізольованих вершин, також розділяючи їх нулями.

Позначимо це відображення через $\phi : \mathbb{G} \to \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{N}^i$, де $\mathbb{N}^0 = \{\Lambda\}$ – порожній вектор. Очевидно, $\phi$ – ін'єкція, але не сюр'єкція. Позначимо, $\mathscr{V} := \phi(\mathbb{G})$. Вочевидь, ця множина є рекурсивною в нумерації $\alpha_{\mathbb{G}}$.

Тоді для будь-якої граф-функції $\mathscr{F} : \mathbb{G}^n \to \mathbb{G}$ існує її *векторний образ* $F : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ такий що $F(\phi(g_1), \ldots, \phi(g_n)) \simeq \phi\mathscr{F}(g_1, \ldots, g_n)$ для усіх $g_1, \ldots, g_n$. Для предикатів аналогічно.

Розглянемо наступні функції на множині графів (граф-функції):

1. $C_0^{\mathbb{G}}$ – константна функція: $C_0^{\mathbb{G}}(g) = g_0^1$;
2. $S_{\mathbb{G}}$ – збільшення на одиницю номера першої вершини графа;
3. $\cup$ – об'єднання графів (об'єднання множин вершин та дуг);
4. $\setminus$ – різниця графів (різниця множин);
5. $E_e$ – виділення першої дуги (підграфа з двох вершин та дуги);
6. $R$ – утотожнення кореня графа з першою від'ємно інцідентною вершиною: ;
7. $A$ – стягування першої вершини з тією від'ємно інцідентною їй, яка має найменший номер (нова вершина має номер від'ємно інцідентної);

8. $\cup^*$ – об'єднання графів $g_1$ та $g_2$ із додаванням дуги із кореня графа $g_1$ в корінь графа $g_2$;
9. $E_v$ – виділення першої вершини графа;

Покладемо

$$\sigma_{\mathbb{G}} := \{C_0^{\mathbb{G}}, S_{\mathbb{G}}, \cup, \setminus, E_e, R, A, \cup^*, E_v, =_{\mathbb{G}}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\dots}.$$

З метою моделювання векторних функцій граф-функціями побудємо кодуюче відображення $\Phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{G}$ наступним чином

$$\Phi(\Lambda) = \Delta_{\mathbb{G}},$$
$$\Phi(v) = \{(1, v_1), \dots, (n, v_n)\}$$

Таким чином отримаємо, що для довільної векторної функції $F(x_1, \dots, x_n)$ функція $\mathscr{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ є її *граф-моделлю*, якщо $\mathscr{F}(\Phi(v_1), \dots, \Phi(v_n)) \simeq \Phi(F(v_1, \dots, v_n))$ для всіх $v_1, \dots, v_n \subset \mathbb{N}^*$. Аналогічно для предиката.

**Лема 1.** Для будь-яких векторних чр-функцій та чр-предикатів існують їх граф-моделі, які належать замиканню $[\sigma_{\mathbb{G}}]_\Omega$.

Нехай $\psi := \phi \cdot \Phi$. Очевидно, що $\psi : \mathbb{G} \to \Phi(\mathscr{V})$ – бієкція. Через $\chi$ позначимо якенебудь розширення відображення $\psi^{-1}$. Граф-функції $\psi$ та $\chi$ грають ролі кодуючої та декодуючої функцій відповідно.

Істина наступна лема.

**Лема 2.** Нехай $\mathscr{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – чр-граф-функція, а $\mathscr{H}(\pi_1, \dots, \pi_n)$ – граф-модель векторного образа функції $\mathscr{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Тоді

$$\mathscr{F}(A_1, \dots, A_n) = \chi(\mathscr{H}(\psi(A_1), \dots, \psi(A_n)))$$

для усіх $A_i$, $i = \overline{1,n}$.

Аналогічно, нехай $\mathscr{P}(\xi_1, \dots, \xi_m)$ – чр-граф-предикат, а $\mathscr{K}(\pi_1, \dots, \pi_m)$ – граф-модель векторного образа цього предиката. Тоді

$$\mathscr{P}(A_1, \dots, A_n) = \mathscr{K}(\psi(A_1), \dots, \psi(A_n))$$

для усіх $A_i$, $i = \overline{1,n}$.

Справедлива така теорема

**Теорема 3.** $\sigma_{\mathbb{G}}$ є породжуючою множиною алгебри $A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}}$.

*Ідея доведення.* Скористаємось результатом, отриманим для векторних функцій в [5], а саме, множина $\sigma_{\mathbb{N}^*} = \{\Pi, \circ, C_0, S, =_{\mathbb{N}^*}, I_m^n\}_{m=\overline{1,n}}^{n=1,2,\dots}$ є базисом ППА $A_{\mathbb{N}^*}^{\text{чр}}$, де $\Pi(au) = u$, $u_1 \circ u_2 = u_1 u_2$, $C_0(u) = 0, S(au) = (a+1)u$.

За допомогою граф-функцій $\sigma_{\mathbb{G}}$ можна побудувати граф-моделі усіх векторних базисних функцій, а отже, й граф-моделі усіх частково-рекурсивних векторних функцій.

Окрім того, також справедливе включення $\psi, \chi \in [\sigma_{\mathbb{G}}]$. А отже, в силу леми 2, твердження теореми доведено. □

## Висновки

В представленій роботі дано короткий огляд результатів автора, які стосуються вивчення ППА чр-функцій над графами $A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}}$. Зокрема, знайдено породжуючу множину алгебри $A_{\mathbb{G}}^{\text{чр}}$.

В якості наступного кроку здійснюваного дослідження планується знайти $I_m^n$-базис вказаної ППА, в міру можливості скоротивши кількість базисних функцій.

Також видається корисним розглянути таку саму задачу для інших класів частково-рекурсивних функцій з огляду на різні практичні застосування.

## Список литературы


1. *Новиков Ф. А.* Дискретная математика для программистов. – СПб: Питер, 2000. – 304 с.
2. *Мальцев А. И.* Алгорнтмы и рекурсивные функции. – М.: Наука, 1965. – 391 с.
3. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Прнмитнвные программные алгебры целочисленных и словарных функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – №10. – С. 69–71.
4. *Буй Д. Б., Мавлянов А. В.* К теории программных алгебр // Укр. мат. журн. – 1984. – 36, №6. – С. 761–764.
5. *Буй Д. Б., Редько В. Н.* Примитивные программные алгебры. 1, II // Кибернетика. – 1984. – №5. – С. 1–7; – 1985. – №1. – С.28–33.
6. *Буй Д. Б.* Примитивные программные алгебры: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 22с.
7. *Ершов Ю.Л.* Теория нумераций. – М. : Наука, 1977.— 416 с.


***Статья поступила в редакцию 09.10.2009***

УДК 517.98

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ И ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ СООТНОШЕНИЙ

© **Омельченко П.В.**

Институт математики Национальной Академии Наук Украины
отдел функционального анализа
ул. Терещенковская 3, Киев, 252601, Украина
e-mail: *omelchenko@imath.kiev.ua*

**Abstract**. We study the $*$-algebra which generated by two selfadjoint elements $a, b$ satisfying the algebraic relations:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)bg_i(a) = h(a), \qquad \sum_{j=1}^{l} p_j(a)br_j(a)bq_j(a) = \nu(a),$$

where $f_i, g_i, h,\ i = \overline{1,m},\ p_j, r_j, q_j, \nu\ j = \overline{1,l}$ are polynomials on $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$. We investigate properties of polynomials $f_i, g_i, h,\ i = \overline{1,m},\ p_j, r_j, q_j, \nu\ j = \overline{1,l}$ for which this $*$-algebra is $*$-tame. The results are illustrated by examples.

## 1. Введение

Возникающие в задачах математики и физики $*$-алгебры стимулируют интерес к изучению таких алгебр и их представлений с различных точек зрения (см. например [4, 3] и др.). Важным классом $*$-алгебр являются $*$-алгебры порожденные образующими $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и определяющими соотношениями:

$$P_i(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*) = 0, \qquad i = \overline{1,w},\ w \in \mathbb{N},$$

где $P_i$ полиномы от некоммутативных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1^*, x_2^*, \ldots, x_k^*$. (см. например [4])

В данной работе рассматривается $*$-алгебра, порожденная двумя самосопряженными образующими $a, b$ и удовлетворяющая следующим соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)bg_i(a) = h(a), \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(a)br_j(a)bq_j(a) = \nu(a), \tag{1.2}$$

где $f_i,\ g_i,\ h,\ i = \overline{1,m},\ p_j,\ r_j,\ q_j,\ \nu,\ j = \overline{1,l}$, полиномы на $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$.

Стандартный путь описания $*$-представлений $*$-алгебры состоит в описании всех неприводимых представлений с точностью до унитарной эквивалентности, а затем разложение произвольного представления в прямую сумму или прямой интеграл неприводимых. Такое разложение возможно, и притом единственным образом, если $W^*$-алгебра, порожденная любым ограниченным $*$-представлением, содержит лишь факторы типа I. В этом случае соответствующую $*$-алгебру будем называть $*$-ручной. В случае если задача описания всех $*$-представлений $*$-алгебры содержит подзадачу, задачу описания всех $*$-представлений свободной $*$-алгебры с двумя самосопряженными образующими, то такую $*$-алгебру будем называть $*$-дикой (более подробно см. [4]). Заметим, что в отличие от теории представлений в линейных пространствах, существуют еще промежуточные классы $*$-алгебр, характеризующие сложность описания всех $*$-представлений $*$-алгебры. *В данной работе нас будут интересовать лишь неприводимые представления и условия на $*$-алгебры при которых они являются $*$-ручными.*

С полулинейным соотношением (1.1) можно связать простой неориентированный граф $\Gamma$, по виду которого можно судить о сложности задачи описания всех $*$-представлений с точностью до унитарной эквивалентности, соответствующей $*$-алгебры. Как показано в [4, 7, 11], $*$-алгебра соответствующая полулинейному соотношению (1.1) является $*$-ручной, тогда и только тогда, когда связные компоненты графа $\Gamma$ имеют вид: , , . Если $\Gamma$ содержит в качестве подграфа один из графов , , то соответствующая $*$-алгебра является $*$-дикой. Поэтому вполне естественно рассматривать представления полулинейных соотношений с дополнительными соотношениями. В данной работе в качестве дополнительного соотношения рассматривается полуквадратичное (квадратичное по $b$) соотношение (1.2).

В работе получены условия на полиномы $f_i, g_i, h$, $i = \overline{1,m}$, $p_j$, $r_j$, $q_j$, $\nu$, $j = \overline{1,l}$, при которых система соотношений (1.1), (1.2) является $*$-ручной. Также в работе показана связь между представлениями соотношений (1.1), (1.2) и ортоскалярными $*$-представлениями графов [14, 13, 16] и связанными с ними $*$-алгебрами [1, 5, 15]. Приведены примеры.

## 2. Постановка задачи. Основные определения

Ограниченным представлением соотношений (1.1), (1.2) будем называть пару ограниченных самосопряженных операторов $(A, B)$, действующих в гильбертовом пространстве $H$ и удовлетворяющую соотношениям:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(A) B g_i(A) = h(A) \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{l} p_j(A) B r_j(A) B q_j(A) = \nu(A), \tag{2.2}$$

где $f_i, g_i, h$, $i = \overline{1,m}$, $p_j, r_j, q_j, \nu$ $j = \overline{1,l}$ полиномы на $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$.

Неограниченным представлением соотношений (1.1), (1.2) будем называть пару симметричных операторов $(A, B)$, действующих в гильбертовом пространстве $H$, если существует такое плотное подмножество $K \subset H$, что

- $K$ инвариантно относительно $A, B, E_A(\Delta)$, $\quad \Delta \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$,
- $K$ состоит из ограниченных векторов оператора A, $\quad K \subset H_B(A) \subset D(A)$,
- соотношения (2.1),(2.2) выполняются на $K$.

Для описания структуры пар таких операторов удобно ввести следующие три объекта (подобно работам [4, 7, 11])

- Характеристические функции:
$$\Phi(t,s)=\sum_{i=1}^{m} f_i(t)g_i(s),$$
$$\Psi(x,y,z)=\sum_{j=1}^{l} p_j(x)r_j(y)q_j(z).$$
Заметим, что в [4, 7, 11]) изучались пары самосопряженных операторов $(A,B)$, которые удовлетворяют только соотношению (2.1) и соответственно только функция $\Phi(t,s)$. Для изучения пар операторов $(A,B)$, которые удовлетворяют также соотношению (2.2), мы рассмотрим еще и функцию трех переменных $\Psi(x,y,z)$.
- Простой граф $\Gamma$, множеством вершин которого являются все действительные числа $\mathbb{R}$, а вершина $t\in\mathbb{R}$ связана ребром с вершиной $s\in\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда $\Phi(t,s)=0$.

В случае, если $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$, и $H_{\lambda_1},H_{\lambda_2},\ldots,H_{\lambda_n}$ соответствующие собственные подпространства оператора $A$, то относительно разложения $H=H_{\lambda_1}\oplus H_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus H_{\lambda_n}$ операторы $A$ и $B$ можно представить в виде блочных матриц:
$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n}\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn}\end{pmatrix},\tag{2.3}$$
где $B_{ij}:H_{\lambda_j}\to H_{\lambda_i}$, $B^*_{ij}=B_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$.

**Утверждение 6.** *В случае дискретного* $\sigma(A)$ *выполняются следующие эквивалентности* $\Phi(t,s)=0\Leftrightarrow\Phi(s,t)=0$, $\Psi(x,y,z)=0\Leftrightarrow\Psi(z,y,x)=0$, *для всех* $t,s,x,y,z\in\sigma(A)$.

*Доказательство.* Если соотношения (2.1) и (2.2) выполняются, то выполняются и сопряженные соотношения, учитывая самосопряженность операторов $(A,B)$ получим требуемое утверждение. $\square$

Подставив блочные матрицы (2.3) в соотношения (2.1) и (2.2), учитывая самосопряженность операторов $(A,B)$, получим следующую систему равенств:
$$\begin{cases}\Phi(\lambda_i,\lambda_j)B_{ij}=0, \quad \text{при } i\neq j\\ \Phi(\lambda_i,\lambda_i)B_{ii}=h(\lambda_i),\\ \sum\limits_{k\in M_{\lambda_i\lambda_j}}\Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_j)B_{ik}B_{kj}=0, \quad \text{при } i\neq j\\ \sum\limits_{k\in M_{\lambda_i}}\Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_i)B_{ik}B_{ki}=\nu(\lambda_i),\end{cases}\tag{2.4}$$

где $M_{\lambda_i}$ – подмножество вершин графа $\Gamma$, соединенных ребром с вершиной $i$, $M_{\lambda_i\lambda_j}$ – подмножество таких вершин графа $\Gamma$, которые соединены ребром и с вершиной $i$ и с вершиной $j$. Из системы (2.4) видно, что для того, чтобы рассматривать нетривиальные представления системы соотношений (1.1), (1.2), необходимо наложить на них следующие условия:

$$\begin{cases} \Phi(\lambda_i,\lambda_k)=0, \\ \Phi(\lambda_k,\lambda_j)=0, \end{cases} \Rightarrow \Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_j)=0, \tag{2.5}$$

$$\Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_i)\neq 0, \qquad \nu(\lambda_i)\neq 0, \text{ для всех } \lambda_i,\lambda_k,\lambda_j\in\sigma(A).$$

Заметим, что существуют нетривиальные полиномы $\Phi(t,s),\Psi(x,y,z)$, которые удовлетворяют соотношениям (2.5), например, $\Phi(t,s)$ – произвольный полином двух переменных на $\mathbb{R}^2$, а $\Psi(x,y,z)=\dfrac{\Phi(x,y)-\Phi(z,y)}{x-z}$.

## 3. Представления полулинейных и полуквадратичных соотношений

Представление соотношения (1.1) можно рассматривать как представление соответствующего ему графа $\Gamma$, причем задача описания всех неприводимых пар самосопряженных операторов $(A,B)$, удовлетворяющих полулинейному соотношению (1.1) со спектром $\sigma(A)$ с точностью до унитарной эквивалентности, эквивалентна задаче описания всех неприводимых представлений соответствующего связного подграфа графа $\Gamma$ (см. [14, 13, 16]), а соотношение (1.2) задает дополнительные условия на оператор $B$. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** *Система соотношений (1.1),(1.2), характеристические функции которой удовлетворяют соотношениям (2.5) является $*$-ручной, если каждая связная компонента графа $\Gamma$ является одним из графов Дынкина ($A_n$, $D_n$, $E_6$, $E_7$, $E_8$) или расширенных графов Дынкина ($\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$).*

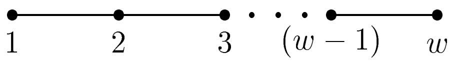
*Доказательство.* Пусть пара самосопряженных операторов $(A,B)$, со спектром $\sigma(A)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ будет представлением соотношений (1.1), (1.2) в гильбертовом пространстве $H$. Относительно разложения $H=H_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus H_{\lambda_n}$ блочные матрицы $A,B$ имеют вид (2.3). Введя обозначение $\Psi(\lambda_i,\lambda_k,\lambda_i):=\psi_{ik}$, получим следующие соотношения на блоки блочной матрицы $B=||B_{ij}||_{i,j=1}^n$:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{k\in M_{\lambda_1}}\psi_{1k}B_{1k}B_{k1}=\nu(\lambda_1), \\ \sum\limits_{k\in M_{\lambda_2}}\psi_{2k}B_{2k}B_{k2}=\nu(\lambda_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{k\in M_{\lambda_n}}\psi_{nk}B_{nk}B_{kn}=\nu(\lambda_n), \end{array} \tag{3.1}$$

где $B_{ij}:H_{\lambda_j}\to H_{\lambda_i}$, $i,j=\overline{1,n}$, $\psi_{ik}\in\mathbb{R}$, заметим, что $\psi_{ik}\neq\psi_{ik}$.

**Лемма 1.** *Если граф* $\Gamma$ *является деревом, то существует обратимое преобразование переводящее пару самосопряженных операторов* $(A, B)$ *в пару самосопряженных операторов* $(A, \widetilde{B})$, *которые являются представлением той же системы полулинейного и полуквадратичного соотношения с новой функцией* $\nu$ *(обозначим ее* $\tilde{\nu}$*) и* $\psi_{ik} = 1$.

*Доказательство.* Поскольку граф $\Gamma$ – дерево, то его можно разделить на подграфы типа цепочки $A_w$, которые будут пересекаться не более чем в одной точке, и занумеровать следующим образом:




Построим требуемое преобразование для каждой такой цепочки следующим образом:

$$
\begin{array}{llll}
\tilde{B}_{1k_1} = \sqrt{\psi_{1k_1}} B_{1k_1}, & \tilde{B}_{k_1 1} = \tilde{B}^*_{1k_1}, & k_1 \in \tilde{M}_1, & \tilde{\nu}(\lambda_1) = \nu(\lambda_1), \\
\tilde{B}_{2k_2} = \sqrt{\psi_{2k_2} \dfrac{\psi_{12}}{\psi_{21}}} B_{2k_2}, & \tilde{B}_{k_2 2} = \tilde{B}^*_{2k_2}, & k_2 \in \tilde{M}_2, & \tilde{\nu}(\lambda_2) = \nu(\lambda_2) \dfrac{\psi_{12}}{\psi_{21}}, \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\tilde{B}_{wk_w} = \sqrt{\psi_{wk_w} \dfrac{\psi_{(w-1)w}}{\psi_{w(w-1)}}} B_{wk_w}, & \tilde{B}_{k_w w} = \tilde{B}^*_{wk_w}, & k_w \in \tilde{M}_w, & \tilde{\nu}(\lambda_w) = \nu(\lambda_w) \dfrac{\psi_{(w-1)w}}{\psi_{w(w-1)}},
\end{array}
$$

где $\tilde{M}_k$ – подмножество вершин графа $\Gamma$, соединенных ребром с вершиной $k$ за исключением тех вершин, для которых уже построено преобразование. Прямая проверка показывает, что построенное преобразование удовлетворяет условиям леммы. $\square$

**Замечание 1.** Заметим, что данное преобразование справедливо и для графов с циклами длины 1 (петля), 2.

Далее, воспользовавшись известными [14, 13, 16] результатами теории ортоскалярных $*$-представлений графов и результатами работ [10, 6, 9] (для графа $\tilde{A}_n$) и сделав обратное преобразование, получим утверждение теоремы. $\square$

## 4. Примеры

**Пример 1.** Задача классификации всех, с точностью до унитарной эквивалентности, пар ограниченных самосопряженных операторов $(A, B)$, удовлетворяющих следующей системе соотношений, является $*$-ручного представленческого типа

$$A^3B + BA^3 - (A^2B + BA^2) + A^2BA + ABA^2 + ABA + B = 0,$$

$$B^2A^2 + BA^2B + A^2B^2 + B^2ABAB + B^2A^2B^2 + BABAB^2 - B^2A + BAB - AB^2 = 0,$$

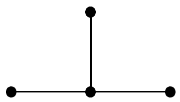
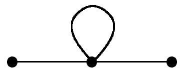
В этом случае характеристические функции имеют следующий вид:

$$\Phi(t, s) = t^3 + s^3 - (t^2 + s^2) + t^2s + ts^2 + ts + 1 = 0,$$

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\Phi(x, y) - \Phi(z, y)}{x - z} = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - x + y - z = 0,$$

$$h(t) \equiv 0, \quad \nu(x) \equiv 0,$$

Все связные компоненты графа данных соотношений имеют вид

 и лишь одна  ,

следовательно соответствующая $*$-алгебра $*$-ручного типа.

**Пример 2.** Пусть характеристические функции системы (1.1),(1.2) имеют следующий вид:

$$\Phi(t,s) = t^2 + 2a_{11}ts + s^2 + a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}, a_{11} = -\frac{q+q^{-1}}{2}, q \in \mathbb{R} \cup \mathbb{T},$$

$$\Psi(x,y,z) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(z,y)}{x-z} = z + 2a_{11}y + x,$$

$$h(t) \equiv 0, \quad \nu(x) = -a_0 x,$$

тогда представление данной системы $(A, B)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$A^2B + 2a_{11}ABA + BA^2 = -a_0 B,$$
$$B^2A + 2a_{11}BAB + AB^2 = -a_0 A,$$

заметим, что построенная $*$-алгебра при $a_0 = 1$ является алгеброй Фарли [2], при $a_0 = a_{11} = 1$ – универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $so(3)$, при $a_0 = a_{11} = -1$ – градуированным аналогом алгебры Ли $so(3)$. О представлениях этой алгебры см. [4, 6, 9, 10, 12].

**Пример 3.** Задача классификации всех, с точностью до унитарной эквивалентности, пар самосопряженных операторов $(A, B)$ удовлетворяющих следующей системе соотношений является $*$-ручного представленческого типа

$$A^2B + 2a_{11}ABA + BA^2 + 2a_1(AB + BA) + a_0 B = h(A),$$

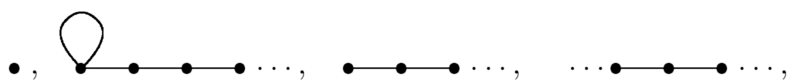
$$B^2A + 2a_{11}BAB + AB^2 + 2a_1 B^2 = \nu(A),$$

В этом случае характеристические функции имеют следующий вид:

$$\Phi(t,s) = t^2 + 2a_{11}ts + s^2 + 2a_1(t+s) + a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}, a_1 \neq 0,$$

$$\Psi(x,y,z) = \frac{\Phi(x,y) - \Phi(z,y)}{x-z} = z + 2a_{11}y + x + 2a_1,$$

как показано в [6] каждая связная компонента графа данных соотношений одна из следующих:



при этом оператор $A$ является неограниченным, а соответствующая $*$-алгебра $*$-ручного типа.

Автор выражает благодарность научному руководителю В. Л. Островскому и Ю. С. Самойленко за постановку задачи, плодотворные обсуждения и полезные замечания.

## Список литературы


1. *S. Albeverio V.L. Ostrovskyi, Yu.S. Samoilenko* On functions on graphs and representations of a certain class of $*$-algebras. - J. Algebra 308 (2007), no. 2, pp. 567-582.
2. *D.B. Fairlie*, *Quantum deformation of* $SU(2)$, J. Phys. A: Math. and Gen. **23** (1990), no. 5, pp. 183-187.
3. *M. Jimbo*, *Quantum R-matrix to the generalized Toda system: an algebraic approach*, Lect. Nones in Phys. **246** (1986), pp.335–361.
4. *V.L. Ostrovskyi, Yu.S. Samoilenko* Introduction to the Theory of representation of finited presented $*$-algebras. I.Representations by bounded operators. - Rev. Math. Math. Phys. - 1999 - 261p.
5. *V.L. Ostrovskyi* Special characters on star graphs and representations of *-algebras// arxiv: math. RA/0509240 - 2005
6. *P.V. Omel'chenko* About $*$-representation of polynomial semilinear relations.// Methods of Functional Analysis and Topology, - vol.15 - 2009 - № 2, - pp.168-176
7. *Yu.S. Samoilenko, L.B. Turowska, V.S. Shulman* Semilinear relations and their $*$-representation// Methods of Functional Analysis and Topology, - vol.2 - 1996 - № 1, - pp.55-111
8. *L.B. Turowska*, *$*$-Representations of the quantum algebra* $U_q(sl(3))$, J. Nonlinear Math. Phys. **3** (1996), no. 3-4, pp.396–401.
9. *L.B. Turowska, Yu.S. Samoilenko*, *Semilinear relations and $*$-representations of deformations of* $so(3)$, Quantum groups and quantum spaces, Banach center publications, Inst. of Math. Polish Acad. of Sc., Warszava **40** (1997), pp.21–40.
10. *О.В. Багро, С.А. Кругляк*, *Представления алгебр Д.Фарли*, Препринт, Киев, 1996,
11. *Ю.Н. Беспалов, Ю.С. Самойленко, В.С. Шульман О наборах операторов, связанных полулинейными соотношениями* // Применение методов функционального анализа в мат. физике, Акад. Наук Украины, Инст. Мат., Киев, (1991), С. 28–51.
12. *М.Ф. Городний, Г.Б. Подкозин*, *Неприводимые представления градуированных алгебр Ли*, Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ, Акад. Наук Укр. Инст. Мат., Киев (1984), с.66–77.
13. *С.А. Кругляк, А.В. Ройтер* Локально скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств. // Функциональный анализ и его приложения, - 2005 - Т.39 - вып.2 - с.13-30.
14. *С.А. Кругляк, С.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* О суммах проекторов// Функциональный анализ и его приложения, - 2002 - Т.36 - вып.3 - с.20-35.
15. *В.Л. Островський, Ю.С. Самойленко* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна. // Укр. мат. журнал, - 2006 - Т.58 - № 11 - с.1556-1570.
16. *А.В. Ройтер, С.А. Кругляк, Л.А. Назарова* Ортоскалярные представления колчанов, соответствующих расширенным графам Дынкина в категории гильбертовых пространств. // Функциональный анализ и его приложения, - 2009
17. *Л.Б. Туровская*, *Представление одного класса квадратичных $*$-алгебр с тремя образующими*, Применение методов функционального анализа в мат. физике, Акад. Наук Украины, Инст. Мат., Киев, (1991), с.100–109.


***Статья поступила в редакцию 17.09.2009***

**Капустій Б.О., Русин Б.П., Таянов В.А.** ***Оцінка ефективності моделі навчання та якості роботи метричних класифікаторів*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 5-14.

**УДК 004.93**

У роботі наведена повна концепція ймовірнісно-комбінаторного підходу, що є результатом тривалих попередніх досліджень. Підхід дає можливість встановити причини перенавчання алгоритмів розпізнавання, визначити можливі шляхи його зменшення, а також будувати максимально точні оцінки ймовірності розпізнавання. Комбінаторний підхід працює з детермінованими результатами розпізнавання, а ймовірнісний — визначає ймовірність існування цих результатів. Основна цінність комбінаторного підходу полягає в тому, що він дає можливість визначити вплив зміни розміру навчаючих даних на різні алгоритми, вибрати найбільш оптимальний із них або композицію оптимальних алгоритмів. Ймовірнісна частина визначає ймовірність результатів, отриманих на основі комбінаторного підходу.

В работе приведена полная концепция вероятностно-комбинаторного подхода, являющаяся результатом длительных предварительных исследований. Подход дает возможность установить причины переобучения алгоритмов распознавания, определить возможные пути его уменьшения, а также строить максимально точные оценки вероятности распознавания. Комбинаторный подход работает с детерминированными результатами распознавания, а вероятностный — определяет вероятность существования этих результатов. Основная ценность комбинаторного подхода состоит в том, что он дает возможность определить влияние изменения размера обучающих данных на различные алгоритмы, выбрать наиболее оптимальный из них или композицию оптимальных алгоритмов. Вероятностная часть определяет вероятность результатов, полученных на основании комбинаторного подхода.

---

**Гуров С.И.** ***Оценка вероятности ни разу не наблюденного события*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 15-20.

**УДК 519.233.22, 519.233.24**

Пропонуються та обґрунтовуються точкова й интервальна оцінки ймовірності події, що жодного разу не спостерігалося в серії випробувань за схемою Бернуллі, для якого класичні статистичні методи дають на практиці часто неприйнятну нульову оцінку.

Предлагаются и обосновываются точечная и интервальная оценки вероятности события, ни разу не наблюдавшегося в серии испытаний по схеме Бернулли, для которого классические статистические методы дают на практике часто неприемлемую нулевую оценку.

**Махина Г.А.** ***Оценки числовых параметров в ДНФ случайных частичных булевых функций*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 21-31.

**УДК 519.766, 519.768**

Ряд задач розпізнавання образів зводиться до побудови тупикових, скорочених або мінімальних ДНФ часткових булевих функцій. Інформація про метричні властивості таких функцій може значно прискорити пошук оптимальних рішень. Робота присвячена оцінкам числових параметрів часткових булевих функцій, що приймають значення 0 і 1 з імовірністю $p$ і $q$ відповідно. Для таких функцій отримані нижні та верхні оцінки найкоротших д.н.ф., вивід яких приводиться в даній статті.

Ряд задач распознавания образов сводится к построению тупиковых, сокращенных или минимальных ДНФ частичных булевых функций. Информация о метрических свойствах таких функций может значительно ускорить поиск оптимальных решений. Работа посвящена оценкам числовых параметров частичных булевых функций, принимающих значения 0 и 1 с вероятностью $p$ и $q$ соответственно. Для таких функций получены нижние и верхние оценки кратчайших д.н.ф., вывод которых приводится в данной статье.

---

**Нікітін А.В.** ***Стійкість розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 33-37.

**УДК 519.21**

У роботі отримані необхідні і достатні умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків лінійних систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода у гільбертовому просторі.

В работе получены необходимые и достаточные условия асимптотической сходимости в среднем квадратическом решений линейных систем стохастических дифференциальных уравнений Ито-Скорохода в гильбертовом пространстве.

---

**Славко Г.В.** ***Консервативна кінцево-різницева схема задачі Стефана для рівняння дифузії*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 39-46.

**УДК 519.6**

Консервативна кінцево-різницева схема розв'язання рівняння дифузії з вільною межею адаптована для створення програми у системі MathCad. Розроблена програма дозволяє досліджувати розв'язок для будь-якої функції, що визначає вільну межу.

Консервативная конечно-разностная схема решения уравнения диффузии со свободной границей адаптирована для программной реализации в системе MathCad. Разработанная программа позволяет исследовать решения для произвольной функции, определяющей свободную границу.

---

**Bondarenko O.S., Kozin I.V.** ***Evolutionary fragmentary algorithm for permutation flow shop problem*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 47-51.

**УДК 519.8**

Розглядається $\mathscr{NP}$-важка в сильному сенсі задача Джонсона. Встановлено фрагментарну структуру задачі. Запропоновано еволюційно-фрагментарний підхід для пошуку оптимального розв'язку. Проведено тестування еволюційно-фрагментарного алгоритму на наборі тестових задач з бібліотеки ORLib [1]. Ключові слова: задача Джонсона, фрагментарна структура, еволюційно-фрагментарний підхід, $\mathscr{NP}$-важкість.

Рассматривается $\mathscr{NP}$-трудная в сильном смысле задача Джонсона. Установлена фрагментарная структура задачи. Предложен эволюционно-фрагментарный подход для поиска оптимального решения. Проведено тестирование эволюционно-фрагментарного алгоритма на наборе тестовых задач из библиотеки ORLib [1]. Ключевые слова: задача Джонсона, фрагментарная структура, еволюционно-фрагментарный подход, $\mathscr{NP}$-трудность.

---

**Щербина О.А.** ***Локальные элиминационные алгоритмы обработки запросов в базах данных*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 53-62.

**УДК 519.68**

Розглянуто використання локальних елімінаційних алгоритмів (ЛЕА) для обробки запитів в реляційних базах даних. Обговорюються особливості реалізації локального алгоритму, що використовує лише пряму частину.

Рассмотрено использование локальных элиминационных алгоритмов (ЛЭА) для обработки запросов в реляционных базах данных. Обсуждаются особенности реализации локального алгоритма, использующего лишь прямую часть.

**Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П.** ***Исследование надежности однолинейной системы, обслуживающей два потока заявок, с конечной очередью*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 63-70.

**УДК 519.873**

У роботі знайдені стаціонарні імовірнісні характеристики станів СМО, що складає з однієї лінії й двох бункерів нагромадження кінцевих ємностей, призначених для заявок двох типів.

В работе найдены стационарные вероятностные характеристики состояний СМО, состоящей из одной линии и двух бункеров накопления конечных емкостей, предназначенных для заявок двух типов.

---

**Gladkova G.P., Drozd A.A.** ***Towards Easier Querying of XML-based Linguistic Corpora*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 71-77.

**УДК 004.6**

У роботі доведено, що будь-яке тупикове довизначення часткової булевої функції з класу $(n, 1, k)$ має нульову область невизначеності. Виділені умови, при яких довизначення функції з класу $(n, 1, k)$ є однозначним.

В работе доказано, что любое тупиковое доопределение частичной булевой функции с класса $(n, 1, k)$ имеет нулевую область неопределенности. Выделенные условия, при которых доопределении функции с класса $(n, 1, k)$ является однозначным.

---

**Адживелиева З.Д., Анафиев А.С., Заирова С.И.** ***Формализация и построение системы морфологического анализа крымскотатарского языка*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 79-84.

**УДК 519.766, 519.768**

У даній статті розглядаються основні особливості морфології кримськотатарської мови з метою побудови підсистеми морфологічного аналізу для системи розуміння кримськотатарської мови.

В данной статье рассматриваются основные особенности морфологии крымскотатарского языка с целью построения подсистемы морфологического анализа для системы понимания крымскотатарского языка.

**Снігур Н.М.** ***Примітивна програмна алгебра обчислюваних функцій на множині графів*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 85-89.

**УДК 517.98**

Дана стаття присвячена вивченню деяких властивостей примітивних програмних алгебр багатомісних функцій над множиною скінчених графів. Знайдено породжуючу множину алгебри частково-рекурсивних функцій. Викладені результати є доповненням результатів, отриманих раніше для векторних, матричних, реляційних та табличних функцій.

Данная статья посвящена изучению некоторых свойств примитивных программных алгебр многоместных функций над множеством конечных графов. Найдено порождающее множество алгебры частично-рекурсивных функций. Изложенные результаты являются дополнением результатов, полученных ранее для векторных, матричных, реляционных и табличных функций.

---

**Омельченко П.В.** ***О представлении системы полулинейных и полуквадратичных соотношений*** // Таврический вестник информатики и математики. – 2009. – №2. – С. 91-98.

**УДК 517.98**

Розглянуто $*$-алгебру, яка породжена двома самоспряженими твірними $a, b$, що пов'язані співвідношеннями:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)bg_i(a) = h(a), \qquad \sum_{j=1}^{l} p_j(a)br_j(a)bq_j(a) = \nu(a),$$

де $f_i, g_i, h,\ i = \overline{1,m},\ p_j, r_j, q_j, \nu\ j = \overline{1,l}$ поліноми на $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$. Отримано умови на поліноми $f_i, g_i, h,\ i = \overline{1,m},\ p_j, r_j, q_j, \nu\ j = \overline{1,l}$ при яких наведена $*$-алгебра є $*$-ручною. Наведено приклади таких алгебр.

Рассмотрена $*$-алгебра, порожденная двумя самосопряженными образующими $a, b$ которые связаны соотношениями:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(a)bg_i(a) = h(a), \qquad \sum_{j=1}^{l} p_j(a)br_j(a)bq_j(a) = \nu(a),$$

где $f_i, g_i, h,\ i = \overline{1,m},\ p_j, r_j, q_j, \nu\ j = \overline{1,l}$ полиномы на $\mathbb{R}$, $m, l \in \mathbb{N}$. Получены условия на полиномы $f_i, g_i, h,\ i = \overline{1,m},\ p_j, r_j, q_j, \nu\ j = \overline{1,l}$ при которых данная $*$-алгебра является $*$-ручной. Приведены примеры таких алгебр.

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА


| | |
|---|---|
| ***Адживелиева Зейнеб Длаверовна*** | студентка факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина |
| ***Анафиев Айдер Сератович*** | к. ф.-м. н., доцент кафедры информатики факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, секретарь редакции журнала ТВИМ, Украина<br>*e-mail: anafiyev@gmail.com* |
| ***Бондаренко Александр Сергеевич*** | аспирант кафедры экономической кибернетики Запорожского национального университета, Украина<br>*e-mail: buenasdiaz@gmail.com* |
| ***Гладкова Анна Павловна*** | аспирантка кафедры английской филологии Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, Украина<br>*e-mail: anna.gld@gmail.com* |
| ***Гуров Сергей Исаевич*** | к. ф.-м. н., МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия<br>*e-mail: sgur@cs.msu.ru* |
| ***Дрозд Александр Александрович*** | старший преподаватель кафедры программирования филиала МГУ в Севастополе, Украина<br>*e-mail: alexander.drozd@gmail.com* |
| ***Заирова Севиль Илимдаровна*** | студентка факультета математики и информатики Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина |
| ***Капустий Борис Емельянович*** | к. т. н., доцент, доцент кафедры теоретической радиотехники и радиоизмерений, ИТРЭ НУ «Львовская политехника», Украина |
| ***Козин Игорь Викторович*** | к. ф.-м. н., доцент кафедры экономической кибернетики Запорожского национального университета, Украина<br>*e-mail: buenasdiaz@gmail.com* |
| ***Коваленко Александр Ильич*** | к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина<br>*e-mail: svp54@mail.ru* |

***Марянин Борис Давыдович*** — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
*e-mail: svp54@mail.ru*

***Никитин Анатолий Владимирович*** — к. ф.-м. н., доцент кафедры математической и прикладной статистики Черновицкого национального университета имени Ю.Федьковича, Украина
*e-mail: nik_tol@rambler.ru*

***Омельченко Павел Витальевич*** — аспирант Института математики НАН Украины, Украина
*e-mail: omelchenko@imath.kiev.ua*

***Русын Богдан Павлович*** — д. т. н., профессор, зав. отделом «Методов и систем обработки, анализа и идентификации изображений» ФМИ им. Г.В. Карпенка НАН Украины, Украина
*e-mail: rusyn@ipm.lviv.ua*

***Славко Геннадий Владимирович*** — к. т. н., доцент, заместитель декана, доцент кафедры информатики и высшей математики Кременчугского государственного политехнического университета имени Михаила Остроградского, Украина
*e-mail: emath@mail.ru*

***Смолич Владимир Павлович*** — к. ф.-м. н., доцент кафедры математического анализа Таврического национального университета им. В. И. Вернадского, Украина
*e-mail: svp54@mail.ru*

***Снигур Наталия Николаевна*** — аспирантка факультета электроники НТУУ «КПИ», Украина
*e-mail: nastena_sss@mail.ru*

***Таянов Виталий Анатольевич*** — к. т. н., научный сотрудник ФМИ им. Г.В. Карпенка НАН Украины, Украина
*e-mail: vtayanov@ipm.lviv.ua*

***Щербина Олег Александрович*** — к. ф.-м. н., доцент факультета математики Венского университета, Gastprofessor, Австрия
*e-mail: oleg.shcherbina@univie.ac.at*

# ДО ВІДОМА АВТОРІВ

## *Загальні положення*

Для опублікування в журналі "Таврійський вісник інформатики і математики" приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.
Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Файл статті на дискеті 3,5" або надісланий електронною поштою за адресою редакції.

## *Вимоги до рукописів*

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.

2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).

3. ***Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1*** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

   У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

   *Постановка проблеми* у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

   *Аналіз останніх досліджень і публікацій,* в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор

   *Невирішені* раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття

   *Формулювання цілей статті (постановка задачі)*

   У висновку з данного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом)

   *результати* дослідження *та перспективи подальших розвідок у цьому напрямку*

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або абревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.

5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2000, №2.

6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету twim.sty, який можно отримати за адресою **www.twim.crimea.edu**.

### *Робота редакції з авторами*

1. Матеріали необхідно надіслати електронною поштою, а також у вигляді "твердої" копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м.Симферопіль, Крим, Україна, 95007**, e-mail: **twim_taurida@mail.ru**
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

## ДО УВАГИ АВТОРІВ!

### Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

## ПОСТАНОВА ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ від 15.01.2003 р. №7-05/1

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання данної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження с повним обгрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України В.В.Скопенко

Вчений секретар Л.М.Артюшин

Подписано к печати 15.10.2009. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 2.5 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, 95007, Украина