

ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№2 ' 2007

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 30 червня 2004 р. 3—05/7, перелік №4, журнал "Таврійський вісник інформатики та математики" внесено до переліку журналів ВАК України, у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів кандидата й доктора наук за спеціальностями "Теоретичні основи інформатики та кібернетики", "Математичне моделювання та обчислювальні методи", "Математичне і програмне забезпечення обчислювальних машин і систем", "Системний аналіз і теорія оптимальних рішень".

СОДЕРЖАНИЕ

Чабанюк Я.М. Стрибова процедура стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі в схемі усереднення.....	3
Hoderová J. Maximum angle condition in the case of some nonlinear elliptic problems	13
Терещенко В.М. Один підхід розв'язання задач обчислювальної геометрії на основі рекурсивно-паралельного алгоритму	24
Донской Д. В. Оптимизация прибыльности систем массового обслуживания.....	33
Федоров Е.Е. Методика синтеза слов	37
Исмаилова А.С., Третьяков Д.В. s -Дискриминанты и s -уравнение Пелля.....	47
Рефераты	61
Список авторов номера	64
К сведению авторов	65

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**

ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА

В.И. ДОНСКОЙ,	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
Е.П. БЕЛАН,	доктор физико-математических наук
Ю.И. ЖУРАВЛЁВ,	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ,	профессор, доктор физико-математических наук
И.В. ОРЛОВ,	доктор физико-математических наук
Е.А. ПАВЛОВ,	профессор, доктор физико-математических наук
С.К. ПОЛУМИЕНКО,	доктор физико-математических наук
К.В. РУДАКОВ,	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
Ю.С. САМОЙЛЕНКО,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
А.А. САПОЖЕНКО,	профессор, доктор физико-математических наук
В.Н. ЧЕХОВ,	профессор, доктор физико-математических наук
А.А. ЧИКРИЙ,	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук

СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ: к.ф.-м.н. **А.С. АНАФИЕВ** — секретарь, к.ф.-м.н. **В.Ф. БЛЫЩИК**, **В.П. ЛОПАТА**

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

Крымский научный центр Национальной Академии наук
и Министерства образования и науки Украины
Украина, Крым, г.Симферополь, пр-т Вернадского, 2, 95007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:

факультет математики и информатики ТНУ
Украина, Крым, г.Симферополь, пр-т Вернадского, 4, 95007

Тел. гл.редактора: (0652) 63-75-42
Тел. редакции: (0652) 230-325
e-mail (гл.редактор): donskoy@ccssu.crimea.ua
e-mail (для переписки): twim_taurida@mail.ru
сайт журнала: www.twim.crimea.edu

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения	Математические модели и методы прогнозирования
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Машинное обучение, нейронные сети, извлечение закономерностей
Нелинейный анализ и его применение	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Математические модели биологических процессов
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов
Вычислительная математика	

Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ НАН и Министерства образования и науки Украины
Протокол №6 от 17 декабря 2007 г.

**(С) КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
УКРАИНЫ**

СТРИБКОВА ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ В СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ

© Я.М. Чабанюк

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ НАУК
ВУЛ. С.БАНДЕРИ, 12, ЛЬВІВ, 79013, УКРАЇНА
Е-МАІЛ: *coffice@polynet.lviv.ua*

Abstract

Obtain the sufficient conditions the converges the jumping stochastic approximation procedure in semi-Markov media in the averaging scheme. By using the asymptotic representation the compensating operator for the three-components of Markov renewal process.

Вступ

Збіжність дискретної процедури стохастичної апроксимації (ПСА) до кореня u_0 рівняння регресії

$$C(u_0) = 0$$

досліджувалась використовуючи принцип інваріантності для сум [1], [2].

В випадку суттєвого впливу зовнішнього середовища на функцію регресії $C(u)$, природно розглянути її в вигляді $C(u, x)$, де x - аргумент, що описує таке середовище.

В роботі [3] отримано достатні умови збіжності дискретної ПСА, як вкладеної в стрибкову процедуру, коли зовнішнє середовище описується рівномірно ергодичним марковським процесом. В цій же роботі вперше для стрибкової процедури було використано новий підхід, оснований на розгляді ПСА в схемі серій з малим параметром $\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon > 0$, що дало змогу використати розв'язок проблеми сингулярного збурення [4] для зведено-оборотного оператора марковського процесу.

Дана робота присвячена розгляду стрибкової ПСА в напівмарковському середовищі в схемі усереднення з використанням розв'язку проблеми сингулярного збурення для компенсуючого оператора [5].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ПОЗНАЧЕННЯ

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації задається співвідношенням (покладемо $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \quad (1)$$

де функція регресії $C(u, x) = (C_k(u, x), k = \overline{1, d})$, $u \in R^d, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем [6]

$$du^x(t)/dt = C(u^x(t), x), x \in X.$$

Напівмарковський процес $x(t), t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі (X, \mathbf{X}) задається напівмарковським ядром [4]

$$Q(x, B, t) = P(x, B)G_x(t), x \in X, B \in \mathbf{X}, t \geq 0.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n := x(\tau_n), n \geq 0$,

$$P(x, B) := P\{x_{n+1} \in B | x_n = x\},$$

де $\tau_n, n \geq 0$, - моменти марковського відновлення напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, з лічильним процесом $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$, а $G_x(t), x \in X, t \geq 0$, - функція розподілу часу перебування θ_x в стані $x \in X$:

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\}.$$

В ПСА (1) нормуюча послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t), t \geq 0$ через співвідношення:

$$a_n^\varepsilon := a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon \tau_n, n \geq 0. \quad (2)$$

Разом з напівмарковським процесом $x(t), t \geq 0$, розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t \geq 0$, що задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)], \quad (3)$$

де

$$q(x) = 1/g(x),$$

а

$$g(x) := \int_0^\infty \overline{G}_x(t) dt, \overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t).$$

Стаціонарний розподіл $\rho(B), B \in \mathbf{X}$, вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, задається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx) P(x, B), \rho(X) = 1,$$

а супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t \geq 0$, є рівномірно-ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathbf{X}$.

Має місце зв'язок між розподілами [7]

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx) = \rho(dx)g(x)/m, m = \int_X \rho(dx)g(x) = \frac{1}{q}.$$

З іншої сторони розподіли $\pi(B)$ і $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\tilde{\Pi}$ відповідно

$$\begin{aligned} \Pi\varphi(x) &:= \hat{\varphi}1(x), \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x), 1(X) \equiv 1, \\ \tilde{\Pi}\varphi(x) &:= \tilde{\varphi}1(x), \tilde{\varphi} := \int_X \rho(dx)\varphi(x), 1(X) \equiv 1, \end{aligned}$$

на банаховому просторі $\mathbf{B}(X)$ дійснозначних функцій з супремум нормою.

Разом з (2) має місце вкладеність дискретної ПСА $u_n^\varepsilon, n \geq 0$, в стрибковому ПСА (1)

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), n \geq 0. \quad (4)$$

Збіжність ПСА (1) розглядається в умовах експоненційної стійкості усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), C(u) = q \int_X \rho(dx)C(u, x). \quad (5)$$

Надалі без зменшення загальності покладемо $u_0 = 0$, тобто має місце

$$C(0) = 0.$$

Генератор Q є зведено-оборотним [7], для якого існує потенціал R_0 , такий, що визначається співвідношеннями

$$R_0Q = QR_0 = \Pi - I. \quad (6)$$

2. ЗБІЖНІСТЬ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Теорема 1. Нехай функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d), u \in R^d$, усередненої системи (5) така, що

C1 : забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (5)

$$C(u)V'(u) \leq -c_0V(u), c_0 > 0;$$

C2 : для $\bar{C}(u) := \max_{x \in X} C(u, x)$ мають місце оцінки

$$|\bar{C}(u)V'(u)| \leq c_1(1 + V(u)), c_1 > 0,$$

$$|\bar{C}(u)[\bar{C}(u)V'(u)]'| \leq c_2(1 + V(u)), c_2 > 0,$$

$$|\bar{C}(u)\bar{C}(u)[\bar{C}(u)V'(u)]''| \leq c_3(1 + V(u)), c_3 > 0.$$

Нарешті нормуюча функція $a(t)$ монотонно спадає, обмежена та задовольняє умовам:

$$C3: \int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty.$$

Тоді при кожному позитивному $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 – достатньо мале, ПСА (1) збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки рівноваги усередненої еволюційної системи (5):

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = 0 \right\} = 1.$$

3. КОМПЕНСУЮЧИЙ ОПЕРАТОР

Розглянемо для стрибкової ПСА (1) розширений процес марковського відновлення

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon \tau_n, n \geq 0. \quad (7)$$

Згідно [5] компенсуючий оператор для процесу (7) визначається умовним математичним сподіванням

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x, t) := & \varepsilon^{-1} q(x) E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) - \\ & - \varphi(u, x, t) | u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t]. \end{aligned} \quad (8)$$

Лема 1. Компенсуючий оператор (8) на тест-функціях $\varphi(u, x), u \in R^d, x \in X$, має представлення

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) := \varepsilon^{-1} Q \varphi(u, x) + \varepsilon^{-1} q(x) \mathbf{P} \mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(u, x), \quad (9)$$

де

$$\mathbf{C}_t^\varepsilon(x) \varphi(u, x) = \varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), x) - \varphi(u, x), \quad (10)$$

а оператор \mathbf{P} визначається співвідношенням

$$\mathbf{P} \varphi(\cdot, x) := \int_X P(x, dy) \varphi(\cdot, y). \quad (11)$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання

$$\begin{aligned} E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) | u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] &= E_{u,x,t} \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) = \\ &= E_{u,x,t} \varphi(u_n^\varepsilon + \Delta u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon), \end{aligned} \quad (12)$$

де $\Delta u_{n+1}^\varepsilon := u_{n+1}^\varepsilon - u_n^\varepsilon$. Для обчислення приросту $\Delta u_{n+1}^\varepsilon$ скористаємось представленнями, що випливають з (1) і (7), а саме

$$u_{n+1}^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^n a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon),$$

$$u_n^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon).$$

Враховуючи останнє маємо

$$\Delta u_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon). \quad (13)$$

Підставляючи в (12) зображення (13) отримуємо

$$E_{u,x,t} \varphi(u_n^\varepsilon + \Delta u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) = E_{u,x,t} \varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y),$$

де $y = x_{n+1}^\varepsilon$ значення процесу $x(t), t \geq 0$, в момент наступного стрибка (див. (4)).

Отже компенсуючий оператор (8), враховуючи останнє, має вигляд

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon \varphi(u, x) := \varepsilon^{-1} q(x) E_{u,x,t} [\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u, x), y) - \varphi(u, x)] =$$

$$= \varepsilon^{-1}q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u, x), y) - \varphi(u, x)].$$

Використовуючи доданок $\pm\varphi(u, y)$, з останньої рівності маємо

$$\begin{aligned} L_i^\varepsilon \varphi(u, x) &= \varepsilon^{-1}q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(u, y) - \varphi(u, x)] + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(x) \int_X P(x, dy)[\varphi(u + \varepsilon a(t)C(u, x), y) - \varphi(u, y)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Враховуючи позначення (3) та (10),(11), з (14) отримуємо (9). □

Наслідок 1. На тест-функціях $\varphi(u, \cdot) \in C^3(R^d)$ компенсуючий оператор (9) має асимптотичне представлення

$$L_i^\varepsilon \varphi(u, x) = \varepsilon^{-1}Q\varphi(u, x) + a(t)Q_1(x)\varphi(u, x) + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x), \quad (15)$$

де

$$Q_1(x)\varphi(u, x) = C(u, x)Q_0(x)\varphi'_u(u, x), \quad (16)$$

і

$$Q_0\varphi(u, x) = q(x)\mathbf{P}\varphi(u, x),$$

а залишковий член $\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = \frac{1}{2}C^2(u, x)Q_0\varphi''_u(\theta u, x)$, $0 \leq \theta \leq 1$ такий, що

$$\varepsilon a^2(t) \|\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x, t)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доведення. Для оператора $C_i^\varepsilon(x)$ з (10) згідно гладкості функції $\varphi(u, x)$ маємо розклад

$$C_i^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = \varepsilon a(t)C(u, x)\varphi'_u(u, x) + \theta_C^\varepsilon(x)\varphi(u, x), \quad (17)$$

де

$$\theta_C^\varepsilon(x)\varphi(u, x) = \varepsilon^2 a^2(t) \frac{1}{2}C^2(u, x)\varphi''_u(\theta u, x), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Підставимо розклад (17) в (9) і проведемо ряд зрозумілих перетворень

$$\begin{aligned} L_i^\varepsilon \varphi(u, x) &= \varepsilon^{-1}Q\varphi(u, x) + \varepsilon^{-1}q(x)\varepsilon a(t)C(u, x)\mathbf{P}\varphi'_u(u, x) + \\ &+ \varepsilon^{-1}q(x)\varepsilon^2 a^2(t) \frac{1}{2}C^2(u, x)\mathbf{P}\varphi''_u(\theta u, x). \end{aligned}$$

Таким чином маємо представлення (15) і (16) з залишковим членом $\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x)$. Згідно властивостей функцій $\varphi(u, x)$, $a(t)$ і $C(u, x)$ також отримуємо

$$\varepsilon a^2(t) \|\theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u, x)\| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.$$

□

4. РОЗВ'ЯЗОК ПРОБЛЕМИ СИНГУЛЯРНОГО ЗБУРЕННЯ

Першим етапом доведення теореми є розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (15) на збуреній функції Ляпунова

$$V^\varepsilon(u, x) = V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x), \quad (18)$$

де $V(u)$ - функція Ляпунова для системи (5).

Лема 2. Компенсуючий оператор L_t^ε , при виконанні умови С2 Теореми, на функціях $V^\varepsilon(u, x)$ таких, що $V(u) \in C^3(R^d)$, має асимптотичне представлення

$$L_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x, t) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u), \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} \theta_L^\varepsilon(x)V(u) &= \theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \theta_1^\varepsilon(x)V(u), \\ \theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= C(u, x)Q_0R_0\tilde{C}'_u(u, x)V'(u) + C(u, x)[q(x)R_0 - I]\tilde{C}(u, x)V''(u), \\ \theta_1^\varepsilon(x)V(u) &= \frac{1}{2}C^2(u, x)q(x)V''(\theta u), \quad 0 \leq \theta \leq 1, \\ \tilde{C}(u, x) &= q(x)C(u, x) - C(u). \end{aligned}$$

Доведення. Спочатку розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного до (15) оператора, а саме

$$L_{t_0}^\varepsilon = \varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x).$$

Розклад оператора $L_{t_0}^\varepsilon$ на функції $V^\varepsilon(u, x)$ має вигляд

$$\begin{aligned} L_{t_0}^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= [\varepsilon^{-1}Q + a(t)Q_1(x)][V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x)] = \\ &= \varepsilon^{-1}QV(u) + a(t)[QV_1(u, x) + Q_1(x)V(u)] + \varepsilon a^2(t)Q_1(x)V_1(u, x). \end{aligned} \quad (20)$$

З умови розв'язності розкладу (20) (див. [8], §5.2.2) маємо

$$QV_1(u, x) + Q_1(x)V(u) = \widehat{Q}_1V(u) \quad (21)$$

де

$$\widehat{Q}_1\Pi = \Pi Q_1(x)\Pi. \quad (22)$$

Обчислимо праву частину (22). З представлення (16) і дії проектора Π маємо

$$\begin{aligned} \Pi Q_1(x)\Pi &= \Pi C(u, x)Q_0(x)\Pi = \Pi C(u, x)q(x)\mathbf{P}\Pi = \\ &= \Pi q(x)C(u, x)\Pi = \int_X \pi(dx)q(x)C(u, x) = \\ &= q \int_X \rho(dx)C(u, x) = C(u). \end{aligned}$$

Таким чином, враховуючи обчислення похідної в (16), для правої частини (22) маємо

$$\widehat{Q}_1V(u) = C(u)V'(u). \quad (23)$$

Отже з (21) отримуємо

$$QV_1(u, x) = (\widehat{Q}_1 - Q_1(x))V(u).$$

Враховуючи властивість (6) потенціалу R_0 з (21) отримуємо розв'язок

$$V_1(u, x) = R_0 \tilde{Q}_1(x) V(u), \quad (24)$$

де

$$\tilde{Q}_1(x) = Q_1(x) - \hat{Q}_1. \quad (25)$$

Порахуємо праву частину (25), враховуючи (16) і (23),

$$Q_1(x) - \hat{Q}_1 = [C(u, x)q(x)\mathbf{P} - C(u)] = \tilde{C}(u, x).$$

Отже для збурення $V_1(u, x)$ функції Ляпунова $V(u)$ з (21) отримуємо представлення

$$V_1(u, x) = R_0 \tilde{\mathbf{C}}(x) V(u), \quad (26)$$

де

$$\tilde{\mathbf{C}}(x) V(u) = \tilde{C}(u, x) V'(u).$$

Використаємо (26) для обчислення останнього доданку в (20). Зауважимо, що для цього доданку можна розглядати співмножник $\theta_0^\varepsilon(x)$, тобто

$$\theta_0^\varepsilon(x) V(u) := Q_1(x) V_1(u, x).$$

Враховуючи (16) і (26) проведемо обчислення для $\theta_0^\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned} \theta_0^\varepsilon(x) V(u) &= C(u, x) Q_0 [R_0 \tilde{\mathbf{C}}(x) V(u)]' = \\ &= C(u, x) Q_0 R_0 [\tilde{C}(u, x) V'(u)]' = \\ &= C(u, x) q(x) \mathbf{P} R_0 [\tilde{C}'_u(u, x) V'(u) + \tilde{C}(u, x) V''(u)]. \end{aligned} \quad (27)$$

З того, що $q(x) \mathbf{P} R_0 = q(x) R_0 + \Pi - I$ маємо наступний розклад (27)

$$\begin{aligned} \theta_0^\varepsilon(x) V(u) &= C(u, x) [q(x) R_0 + \Pi - I] [\tilde{C}'_u(u, x) V'(u) + \tilde{C}(u, x) V''(u)] = \\ &= q(x) \mathbf{P} R_0 \tilde{C}'_u(u, x) V'(u) + q(x) R_0 \tilde{C}(u, x) V''(u) + \\ &\quad + \Pi \tilde{C}(u, x) V''(u) - \tilde{C}(u, x) V''(u) = \\ &= q(x) \mathbf{P} R_0 \tilde{C}'_u(u, x) V'(u) + [q(x) R_0 - I] \tilde{C}(u, x) V''(u), \end{aligned}$$

оскільки

$$\begin{aligned} \Pi \tilde{C}(u, x) &= \Pi [q(x) C(u, x) - C(u)] = \\ &= \int_X \pi(dx) q(x) C(u, x) - C(u) \int_X \pi(dx) \mathbf{1}(X) = \\ &= q \int_X \rho(dx) C(u, x) - C(u) = C(u) - C(u) = 0. \end{aligned}$$

Таким чином маємо представлення залишкового члена $\theta_0^\varepsilon(x) V(u)$.

Остаточно права частина (20) дає представлення

$$\mathbf{L}_{t_0}^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) = a(t) C(u) V'(u) + \varepsilon a^2(t) \theta_0^\varepsilon(x) V(u). \quad (28)$$

Повертаючись до повного зображення компенсуючого оператора (15) (див. зауваження 5.1 з [8]), представимо його в вигляді

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon = \mathbf{L}_{t_0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t) \theta_1^\varepsilon(x).$$

Отже на функціях (18) маємо розклад

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) = [\mathbf{L}_{t_0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)][V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x)], \quad (29)$$

де $V_1(u, x)$ обчислюється за формулою (24).

Враховуючи (28), перетворимо праву частину (29)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= \mathbf{L}_{t_0}^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u, x)] = \\ &= a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \\ &+ \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)R_0\tilde{C}(u, x)V'(u)]. \end{aligned} \quad (30)$$

Проведемо обчислення останнього доданку з (30).

$$\begin{aligned} \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)R_0\tilde{C}(u, x)V'(u)] &= \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)V(u) + \\ &+ \varepsilon^2 a^3(t)\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]. \end{aligned}$$

Порахуємо праву частину в отриманому розкладі. Отже

$$\theta_1^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u, x)q(x)V''(\theta u), \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)] = \frac{1}{2}C^2(u, x)Q_0R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]''|_{u=\theta u}.$$

З гладкості функцій $C(u, x)V(u)$ (див. умови С2 Теорема) і обмеженості операторів Q_0 і R_0 отримуємо

$$\|\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\tilde{C}(u, x)V'(u)]\| \leq M, \quad M > 0, \quad x \in X.$$

Таким чином, враховуючи другий порядок малості величини ε , можемо знехтувати відповідним доданком в розкладі (30).

В результаті разом з (30) маємо (19). \square

5. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ

Доведення проведемо в декілька етапів. Спочатку встановимо ключову нерівність.

Лема 3. Компенсуючий оператор \mathbf{L}_t^ε на збуреній функції Ляпунова (16) в умовах теореми допускає оцінку

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) \leq -\delta a(t)V(u), \quad \delta > 0. \quad (31)$$

Доведення. Використовуючи оцінки С2 для залишкового члена $\theta_L^\varepsilon(x)V(u)$, умову С1 експоненційної стійкості системи (5), а також монотонність та обмеженість нормуючої функції $a(t)$, маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u, x) &= a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u) \leq \\ &\leq -a(t)(\delta^* - \varepsilon c)V(u) \leq -a(t)\delta V(u), \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Остання нерівність має місце при всіх $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, де ε_0 таке, що $\varepsilon_0 < \delta^*/c$.

По-друге, явний вигляд збурення (24), а також умова С2 теореми, дають оцінку збуреної функції Ляпунова

$$0 < (1 - \varepsilon a(t)c)V(u) \leq V^\varepsilon(u, x) \leq (1 + \varepsilon a(t)c)V(u).$$

По-третє, встановимо, що процес

$$V_n^\varepsilon := V^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), n \geq 0, \quad (33)$$

є невід’ємним супермартигалом. Для цього зауважимо, що розширений процес марковського відновлення (7) породжує на тест-функціях $\varphi(u, x)$, $u \in R^d$, $x \in X$, мартигал

$$\mu_{n+1} = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u_0, x_0) - \varepsilon \sum_{k=0}^n \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \quad (34)$$

відносно потоку σ -алгебр $F_n^\varepsilon = \sigma\{u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon, 0 \leq k \leq n\}$, $n \geq 0$. Дійсно, в позначенні $\varphi_n^\varepsilon := \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon)$ маємо

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n | F_n^\varepsilon] = E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] - E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon \theta_{n+1} \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon]. \quad (35)$$

Враховуючи означення компенсуючого оператора (8) обчислимо другий доданок в (35):

$$\begin{aligned} E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon \theta_{n+1} \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon] &= \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon = \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \varepsilon^{-1} q(x_n^\varepsilon) E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] = \\ &= E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon]. \end{aligned}$$

Таким чином з (35) маємо мартигальну властивість для (34):

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n | F_n^\varepsilon] = 0, n \geq 0. \quad (36)$$

□

Використаємо (36) для доведення наступної леми.

Лема 4. Процес (33) є невід’ємним супермартигалом.

Доведення. Розглянемо в (34) замість довільної тест-функції збурену функцію Ляпунова $V^\varepsilon(u, x)$ і використаємо мартигальну характеристику процесу (34), а саме справедливості представлення

$$E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon E\left[\sum_{k=0}^n \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon\right] + \mu_n^\varepsilon, \quad (37)$$

оскільки з (36) маємо $E[\mu_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = \mu_n^\varepsilon$. Підставимо в (37) замість μ_n^ε його значення з (34):

$$\begin{aligned} E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] &= V_0^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon + \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon\right] + \\ &+ V_n^\varepsilon - V_0^\varepsilon - \varepsilon \left[\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1} \mathbf{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Звідки маємо $E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] = V_n^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon) \mathbf{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon$, і разом з ключовою нерівністю (31) отримуємо $E[V_{n+1}^\varepsilon | F_n^\varepsilon] \leq V_n^\varepsilon$, $n \geq 0$, що і доводить лему. □

Використання оцінок (31) та (32), а також леми 4 завершує доведення теореми за схемою доведення теореми 2.8.1 с. 100 [1].

ЗАКЛЮЧЕННЯ

Сформульована Теорема розширює границі використання процедури стохастичної апроксимації в теоріях навчання, керування, передачі повідомлень та ін. З іншої сторони використання асимптотичних властивостей компенсуючого оператора розширеного процесу марковського відновлення (лема 2) та розв'язок проблеми сингулярного збурення (п. 4) для такого оператора забезпечує новий метод аналізу умов асимптотичної нормальності флюктуацій процедури навколо точки рівноваги.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.:Наука, 1972. - 304 с.
2. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992. - 113P.
3. *Чабанюк Я.М.* Дискретна стохастична процедура у марківському випадковому середовищі // Вісник Львів. ун-ту., Серія мех-мат.-2000. Вип. **56**. С. 179-184.
4. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их применение. Киев: Наук. думка, 1976. - 184с.
5. *Свириденко М.Н.* Мартингальный подход в предельных теоремах для полумарковских процессов // Теория вероятностей и её применения. - 1986. - С. 540-545.
6. *Королюк В.С.* Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. Мат. Журнал. - 1998. - 50, №1, - С. 36-47.
7. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. Kluwer, Academic Publishers, 1999. - 185p.
8. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific Publishing, 2005. - 330 P.

Статья поступила в редакцию 07.08.2007

**MAXIMUM ANGLE CONDITION IN THE CASE OF SOME
NONLINEAR ELLIPTIC PROBLEMS**

© **Hoderová J.**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY,
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
TECHNICKÁ 2, 616 69 BRNO, CZECH REPUBLIC
E-MAIL: *hoderova@fme.vutbr.cz*

Abstract

In this paper the finite element method is analyzed for nonlinear elliptic variational problem which is formally equivalent to a two-dimensional nonlinear elliptic boundary problem with mixed nonhomogeneous boundary conditions. The given problem is analyzed under the maximum angle condition and is solved in the case of a bounded domain Ω whose boundary $\partial\Omega$ consists of two circles Γ_1 , Γ_2 of the same centre S_0 . These circles have the radii R_1 , $R_2 = R_1 + \varrho$, where $\varrho \ll R_1$. The finite element analysis is restricted to the case of semiregular finite elements with polynomials of the first degree. At the end some numerical results are introduced.

INTRODUCTION

The theory presented generalizes the results obtained in [2] and [12]. In [2] the problem is formulated on an arbitrary domain with a Lipschitz-continuous boundary and the finite element method is analyzed under the minimum angle condition. In [12] the finite element method is analyzed for a linear strongly elliptic mixed boundary value problem under the maximum angle condition. In this paper we consider the same domain as in [12] but the problem is nonlinear. Our assumptions concern the boundary, the data and the form $a(u, v)$, which is nonlinear in u and linear in v . We prove the convergence of approximate solutions to the exact solution u under the condition $u \in H^1(\Omega)$. The theory is briefly made in [14] and precisely in [3]. Some numerical results are discussed at the end.

In [11] the finite element method for a special monotone problem, which has applications in magnetostatics, was analyzed under the maximum angle condition. The results can be considered to be a special case of the present text.

The notation of Sobolev spaces, their norms and seminorms is the same as in [5].

1. FORMULATION OF THE PROBLEM

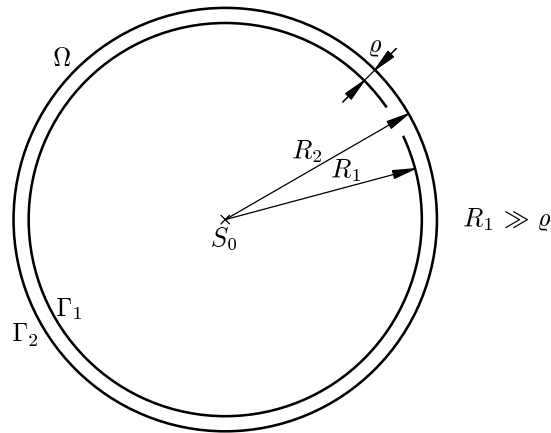
1.1. Boundary value problem. We will consider the boundary value problem

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial b_i}{\partial x_i}(\cdot, u, \nabla u) + b_0(\cdot, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^2 b_i(\cdot, u, \nabla u)n_i(\Omega) = q \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (3)$$

where Ω (see Fig. 1) is a two-dimensional bounded domain with a boundary $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, Γ_1 and Γ_2 being circles with radii R_1 and $R_2 = R_1 + \varrho$, respectively. We assume that the

Рис. 1: The domain Ω

circles Γ_1, Γ_2 have the same center S_0 and that $R_1 \gg \rho$. Obviously, $\partial\Omega$ is Lipschitz continuous. The symbols $n_i(\Omega)$ ($i = 1, 2$) denote the components of the unit outward normal to $\partial\Omega$. Further, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, $b_i : \Omega \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ (i.e., $b_i = b_i(x, \xi) = b_i(\cdot, u, \nabla u)$, where $x = (x_1, x_2) \in \Omega$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (u(x), \nabla u(x)) \in \mathbb{R}^3$, $i = 0, 1, 2$) are given functions and $\nabla u = (\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2)$.

We solve this type of elliptic boundary problem by an almost standard finite element method.

1.2. Weak formulation. We will use the Lebesgue spaces $L_2(\Omega)$, $L_2(\partial\Omega)$, $L_\infty(\Omega)$ and the Sobolev spaces $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, $W^{1,\infty}(\Omega)$ equipped with their usual norms $\|\cdot\|_{0,\Omega}$, $\|\cdot\|_{0,\partial\Omega}$, $\|\cdot\|_{0,\infty,\Omega}$ and $\|\cdot\|_{1,\Omega}$, $\|\cdot\|_{2,\Omega}$, $\|\cdot\|_{1,\infty,\Omega}$, respectively (see [1, 5, 7]). The seminorms in the spaces $H^1(\Omega)$ and $H^2(\Omega)$ will be denoted by $|\cdot|_{1,\Omega}$ and $|\cdot|_{2,\Omega}$, respectively.

1. Assumptions. Let $\{\Omega_h\}$ ($h \in (0, h_0)$) be a set of polygonal approximations of Ω . Let $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded domain such that

$$\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_h \quad \forall h \in (0, h_0). \quad (4)$$

Let the functions $f : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^1$, $q : \Gamma_2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ and $b_i : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ($i = 0, 1, 2$) have the following properties:

(A) (Growth condition) The functions $b_i(x, \xi)$ ($x \in \tilde{\Omega}$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^3$) are continuous in $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^3$. There exists a constant $C > 0$ such that

$$|b_i(x, \xi)| \leq C \left(1 + \sum_{j=0}^2 |\xi_j| \right) \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad (i = 0, 1, 2).$$

(B) The derivatives $(\partial b_i / \partial \xi_j)(x, \xi)$ ($i, j = 0, 1, 2$) are continuous and bounded in $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^3$:

$$\left| \frac{\partial b_i}{\partial \xi_j}(x, \xi) \right| \leq C \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

(C) The functions b_i satisfy

$$\sum_{i,j=0}^2 \frac{\partial b_i}{\partial \xi_j}(x, \xi) \eta_i \eta_j \geq \alpha \sum_{i=1}^2 \eta_i^2 \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^3$$

where $\alpha > 0$ is a constant independent of x, ξ and η .

(D) The functions $\partial b_i / \partial x_j$ ($i = 0, 1, 2; j = 1, 2$) are continuous in $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^3$. There exists a constant $C > 0$ such that

$$\left| \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(x, \xi) \right| \leq C \left(1 + \sum_{j=0}^2 |\xi_j| \right) \quad \forall x \in \tilde{\Omega}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3 \quad (i = 0, 1, 2; j = 1, 2).$$

(E) a) $f \in W^{1,\infty}(\tilde{\Omega})$;

b) $\bar{u} = z$ on Γ_1 , where $z \in W_p^1(\Omega)$ ($p > 2$);

c) the function q defined on $\Gamma_2 = \partial\Omega - \bar{\Gamma}_1$ is piecewise of class C^2 ,

$$q \in PC^1(\Gamma_2).$$

(F) The quadrature formulas which will be used in the disertation have the forms

$$\int_T F(x_1, x_2) dx \approx \text{meas}_2 T \sum_{i=1}^I \omega_{T,i} F(x_{T,i}), \tag{5}$$

$$\int_{\Gamma_{2h}} F(x) ds = \sum_{S_h} \int_{S_h} F(x) ds \approx \sum_{S_h} s_h \sum_{i=1}^I \beta_i F(x_{T,i}) \tag{6}$$

with degrees of precision $d = 1$ and we use only such formulas which satisfy

$$\omega_{T,i} > 0 \quad (i = 1, \dots, I), \quad \sum_{i=1}^I \omega_{T,i} = 1.$$

($S_h \in \partial\Omega_h$ is the corresponding side of the triangle $T \in \mathcal{T}_h$ which approximates T^{id} (so called ideal triangle) and s_h is the length of the side S_h .)

A weak solution of problem (1)–(3) is a solution of the following variational problem (which can be obtained from (1)–(3) by means of Green’s theorem in a standard way).

2. Problem (Continuous). Let us set

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ on } \Gamma_1\}, \tag{7}$$

$$a(w, v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^2 b_i(\cdot, w, \nabla w) \frac{\partial v}{\partial x_i} + b_0(\cdot, w, \nabla w) v \right) dx \quad \forall w, v \in H^1(\Omega), \tag{8}$$

$$L(v) = L^\Omega(v) + L^\Gamma(v) = \int_{\Omega} v f \, dx + \int_{\Gamma_2} v q \, ds. \quad (9)$$

Find $u \in V$ such that

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (10)$$

If $b_i(x, \xi) = k_i(x)\xi_i$, ($i = 0, 1, 2$), then Continuous Problem 2 is reduced to a linear problem. In this case assumptions (A)–(E) can be easily satisfied. In Example 3 we give example of functions $b_i(x, \xi)$ which satisfy (A)–(E) and which do not reduce Continuous Problem 2 to a linear one.

3. Example. Let $\nu = \nu(x, s)$ ($x \in \tilde{\Omega}$, $s \in \langle 0, \infty \rangle$) be the function with the following properties:

- a) $\nu(x, s)$ and the derivatives $\partial\nu/\partial s$ are continuous in $\tilde{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle$.
- b) The derivatives $\partial\nu/\partial x_j$ ($j = 1, 2$) are continuous in $\tilde{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle$ and bounded:

$$\left| \frac{\partial\nu}{\partial x_j}(x, s) \right| \leq C, \quad (x, s) \in \tilde{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle \quad (j = 1, 2). \quad (11)$$

- c) There exists constants $0 < c_1 < c_2$ such that

$$c_1 \leq \frac{\partial}{\partial s}(s\nu(x, s)) \leq c_2, \quad \forall (x, s) \in \tilde{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle. \quad (12)$$

Assumption c) has an important consequence: if we integrate (12) in $\langle 0, t \rangle$ ($t > 0$) then we obtain

$$c_1 \leq \nu(x, t) \leq c_2, \quad \forall (x, s) \in \tilde{\Omega} \times (0, \infty).$$

This result and assumption a) give

$$c_1 \leq \nu(x, t) \leq c_2, \quad \forall (x, s) \in \tilde{\Omega} \times \langle 0, \infty \rangle. \quad (13)$$

We define

$$\begin{aligned} b_i(x, \xi) &:= \nu(x, (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2})\xi_i \quad (i = 1, 2), \\ b_0(x, \xi) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Using assumptions a)–c) and relation (13) we can prove after some computations that the functions (14) satisfy Assumptions (B)–(E).

Functions (14) are used in the theory of magnetic fields. See for example [6].

The formal equivalence of boundary value problem (1)–(3) and variational problem (7)–(10) follows from Lemma 4 which is proved in [3].

4. Lemma. *Let a solution $u \in V$ of Problem 2 satisfy $u \in H^2(\Omega)$. Then relation (1) holds almost everywhere in Ω and relation (3) holds almost everywhere on Γ_2 .*

To be able to solve Continuous Problem 2 by the finite element in its simplest form let us approximate the domain Ω by a polygonal domain Ω_h with the polygonal boundary $\partial\Omega_h$. The vertices of the polygonal boundary $\partial\Omega_h$ lies on $\partial\Omega$. The symbols Γ_{1h} and Γ_{2h} denotes the parts of $\partial\Omega_h$ approximating Γ_1 and Γ_2 , respectively (see Fig. 2).

We have committed by it the first variational crime.

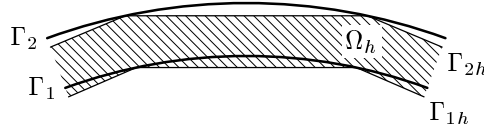


Рис. 2: A domain Ω_h

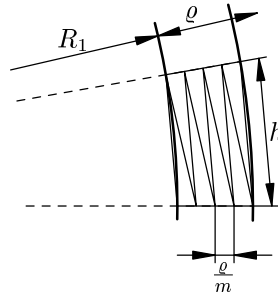


Рис. 3: The partition

We admit to use narrow triangles. This means that we will have

$$\frac{\rho}{m} \ll h \tag{15}$$

in our considerations, where h is the length of the greatest segment and ρ/m is the length of the shortest segment in the partition of Ω_h (see Fig. 3). The corresponding partition consisting of closed triangles \bar{T} will be denoted by \mathcal{T}_h .

5. Definition.

- a) We say that the set $\{\mathcal{T}_h\}$ of triangulations with $h \rightarrow 0$ satisfies the *maximum angle condition* if there exists a positive constant $\gamma_0 < \pi$ such that

$$\gamma_T \leq \gamma_0 < \pi \quad \forall \bar{T} \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}, \tag{16}$$

where γ_T is the magnitude of the maximum angle of the triangle T .

- b) We say that the set $\{\mathcal{T}_h\}$ of triangulations with $h \rightarrow 0$ satisfies the *minimum angle condition* if there exists a positive constant $\vartheta_0 > 0$ such that

$$\vartheta_T \geq \vartheta_0 > 0 \quad \forall \bar{T} \in \mathcal{T}_h, \quad \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\}, \tag{17}$$

where ϑ_T is the magnitude of the minimum angle of the triangle T .

(In case a) we can have $\alpha \rightarrow 0$, which is impossible in case b.)

- c) Irregular triangle can have two angles arbitrarily small.

We covered Ω_h by semiregular triangles, i.e., triangles satisfying the maximum angle condition (see Definition 5 and Fig. 3). If the triangulation satisfies the minimum angle condition the maximum angle condition is satisfied too. Now we will approximate the spaces $H^1(\Omega)$ and V .

1.3. Discrete problem. We define spaces

$$X_h = \{v \in C(\bar{\Omega}_h) : v|_{\bar{T}} \text{ is a linear polynomial } \forall \bar{T} \in \mathcal{T}_h\} \quad (18)$$

and

$$V_h = \{v \in X_h : v = 0 \text{ on } \Gamma_{1h}\} \equiv \{v \in X_h : v(P_i) = 0 \quad \forall P_i \in \Gamma_1\}, \quad (19)$$

P_i being the nodes of the given triangulation lying on Γ_1 .

We set

$$\tilde{a}_h(w, v) = \int_{\Omega_h} \left(\sum_{i=1}^2 b_i(\cdot, w, \nabla w) \frac{\partial v}{\partial x_i} + b_0(\cdot, w, \nabla w) v \right) dx \quad \forall w, v \in H^1(\Omega_h) \quad (20)$$

and

$$\tilde{L}_h^\Omega(v) = \int_{\Omega_h} v f dx \quad \forall v \in X_h. \quad (21)$$

To define $\tilde{L}_h^\Gamma(v)$ is more complicated and we refer to [12] or [3].

The symbols $a_h(w, v)$, $L_h^\Omega(v)$ and $L_h^\Gamma(v)$, where $w, v \in X_h$, will denote the approximations of $\tilde{a}_h(w, v)$, $\tilde{L}_h^\Omega(v)$ and $\tilde{L}_h^\Gamma(v)$, respectively, by means of numerical integration. We can write the results by the forms

$$a_h(v, w) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \text{meas}_2 T \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial w}{\partial x_i} \Big|_T \sum_{j=1}^I 2\omega_{T_0,j} b_i(x_{T,j}, v(x_{T,j}), \nabla v|_T) + \right. \\ \left. + w(x_{T,j}) \sum_{j=1}^I 2\omega_{T_0,j} b_0(x_{T,j}, v(x_{T,j}), \nabla v|_T) \right), \quad (22)$$

$$L_h(v) = L_h^\Omega(v) + L_h^\Gamma(v), \quad (23)$$

where

$$L_h^\Omega(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \text{meas}_2 T \sum_{j=1}^I 2\omega_{T_0,j} f(x_{T,j}) v(x_{T,j}), \quad (24)$$

$$L_h^\Gamma(v) = \sum_{S_h \subset \Gamma_{2h}} s_h \sum_{j=1}^I \beta_i q_h(x_{T,j}) v(x_{T,j}).$$

Numerical integration is not exact. Thus we have committed by it the second variational crime.

Now we define a finite element discrete problem for the solution of Problem 2 with the use of numerical integration.

6. Problem (Discrete). Find $u_h \in V_h$ such that

$$a_h(u_h, v) = L_h(v) \quad \forall v \in V_h. \tag{25}$$

Let us note that X_h and V_h are finite dimensional approximations of $H^1(\Omega)$ and V , respectively. Using them we have committed the third and last variational crime.

In order to prove Theorem 10 (our Abstract Error Estimate) we must use discrete Friedrichs' inequality in the case of narrow triangles satisfying the maximum angle condition in the following form (this Lemma is proved in [14]).

7. Lemma (Discrete Friedrichs' inequality). *We have*

$$\|v\|_{1,\Omega_h} \leq C|v|_{1,\Omega_h}, \quad \forall v \in V_h, \forall h < h_0, \tag{26}$$

where the constant C does not depend on h and v .

Since we use the partition of the domain Ω_h which is overlapping the origin domain Ω we need to use an extension of the function u . It is described in the following Lemma 8 which is proved in [3].

8. Lemma. *Let Ω be a two-dimensional bounded domain with the boundary $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ where Γ_1 and Γ_2 are circles with radii R_1 and $R_2 = R_1 + \varrho_0$. We assume that the circles Γ_1 and Γ_2 have the same center S_0 and that*

$$R_1 \gg \varrho_0. \tag{27}$$

Let Γ_0 be the circle with a center S_0 and radius $R_0 = R_1 - \varrho$ and let $\tilde{\Omega}$ be a bounded domain such that $\partial\tilde{\Omega} = \Gamma_0 \cup \Gamma_2$. Then there exists a linear and bounded extension operator (of Nikolskij-Hestenes type) $\varepsilon_2 : H^2(\Omega) \rightarrow H^2(\tilde{\Omega})$ with property $\varepsilon_2 : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\tilde{\Omega})$ and such that the constant C appearing in the inequality

$$\|\varepsilon_2(v)\|_{2,\tilde{\Omega}} \leq C\|v\|_{2,\Omega}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \tag{28}$$

does not depend on R_1/ϱ .

9. Remark. By the standard way can be proved that Continuous Problem 2 has a unique solution and that the Discrete Problem 6 has a unique solution. The prove is made in [3].

2. AN ABSTRACT ERROR ESTIMATE

10. Theorem (Abstract Error Estimate). *Let Assumptions 1 be satisfied. For all $h \in (0, h_0)$ we have*

$$\begin{aligned} C^{-1}\|\tilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} &\leq \inf_{v \in V_h} \|v - \tilde{u}\|_{1,\Omega_h} + \inf_{v \in V_h} \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|a_h(v, w) - \tilde{a}_h(v, w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} \\ &+ \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{L}_h^\Omega(w) - L_h^\Omega(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{L}_h^\Gamma(w) - L_h^\Gamma(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}} + \sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w) - \tilde{L}_h(w)|}{\|w\|_{1,\Omega_h}}, \end{aligned} \tag{29}$$

where C is a positive constant not depending on the solution $u \in H^1(\Omega)$ of Continuous Problem 2, $u_h \in V_h$ is the solution of Discrete Problem 6 and $\tilde{u} = E(u)$ with $E : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\tilde{\Omega})$.

The proof of the Theorem 10 we can find in [3].

The estimating of the terms on the right side of the inequality (29) consists of the three separated parts. The first part is focused to the estimating of the first term on the right side of inequality (29) which expresses the error of the interpolation (see Section 5, [3]). The second part covers the estimations related with the numerical integration. Errors of the numerical integration are included in the second, the third and the fourth term of the inequality (29). For details see Section 6, [3]. The last term on the right side of the inequality (29) represents the error of the approximation of the boundary Ω by Ω_h and estimations are precisely made in Section 7, [3].

We introduce only the results now:

11. Theorem. *We have*

$$\inf_{v \in V_h} \|v - \tilde{u}\|_{1, \Omega_h} \leq Ch \|u\|_{2, \Omega}, \quad (30)$$

where the constant C is independent of h , u the triangulation \mathcal{T}_h , and $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega})$.

12. Theorem.

$$IS := \inf_{v \in V_h} \sup_{w \in V_h, w \neq 0} \frac{|a_h(v, w) - \tilde{a}_h(v, w)|}{\|w\|_{1, \Omega}} \leq Ch(1 + \|u\|_{1, \Omega}), \quad (31)$$

where $u \in H^1(\Omega)$ is the solution of the Continuous variational Problem 2 and the constant C does not depend on h and u .

13. Theorem. *Let the degree of precision of a given quadrature formula be $d = 0$. Then we have*

$$\sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{L}_h^\Omega(w) - L_h^\Omega(w)|}{\|w\|_{1, \Omega_h}} \leq Ch \sqrt{\text{meas}_2 \Omega} \|f\|_{1, \infty, \tilde{\Omega}}. \quad (32)$$

14. Theorem. *Let the degree of precision of quadrature formulas be $d \geq 1$. Then we have*

$$\sup_{\substack{w \in V_h \\ w \neq 0}} \frac{|\tilde{L}_h^\Gamma(w) - L_h^\Gamma(\bar{w})|}{\|w\|_{1, \Omega_h}} \leq \frac{C}{\sqrt{\varrho}} h^d M_d(q) \sqrt{\text{meas}_1 \Gamma_2} \quad (33)$$

where the constant C does not depend on q , ϱ and h and where in the most used case $d = 2$ we have

$$M_2(q) = 8 \max \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{1}{R_2} \right) \max_{(x, y) \in \Gamma_2} \left(\left| \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} \right|, \left| \frac{\partial q}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial q}{\partial y} \right| \right).$$

Thus, if we want to obtain the rate of convergence $O(h)$ we must assume that

$$C_1 h^2 \leq \frac{\varrho}{m} \quad (C_1 > 0). \quad (34)$$

Assumption (34) is a restriction for semiregular triangles because $\frac{\varrho}{m}$ is the length of the smallest side of triangles in our triangulation \mathcal{T}_h .

15. Theorem. *Let $u \in H^2(\Omega)$ and let condition (34) be satisfied. Then*

$$\sup_{w \in V_h, w \neq 0} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w) - \tilde{L}_h(w)|}{\|w\|_{1, \Omega_h}} \leq \frac{C}{\sqrt{\varrho}} h \tag{35}$$

where the constant C does not depend on ϱ, u, m, h and the triangulation \mathcal{T}_h .

If in addition condition

$$u \in H^2(\Omega) \cap W^{1, \infty}(\Omega) \tag{36}$$

is satisfied, i.e., $u \in H^2(\Omega) \cap W^{1, \infty}(\Omega)$, then

$$\sup_{w \in V_h, w \neq 0} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w) - \tilde{L}_h(w)|}{\|w\|_{1, \Omega_h}} \leq Ch \tag{37}$$

where again the constant C does not depend on ϱ, u, m, h and the triangulation \mathcal{T}_h .

3. THE FINAL ESTIMATE

In this section we use the assumption (34) (in order to obtain the optimum rate of convergence from Theorem 15, where the quantity m/ϱ appears (see Fig. 3)).

The preceding results (i.e., interpolation theorem, numerical integration and error of approximation of the boundary) yield then the following theorem:

16. Theorem. *Let $u \in H^2(\Omega)$, $f \in W^{1, \infty}(\tilde{\Omega})$. Let assumption (34) and the assumptions concerning the degree of precision of the quadrature formulas be satisfied. Then*

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h} \leq \frac{C}{\sqrt{\varrho}} h \tag{38}$$

where the constant C does not depend on ϱ, m, h and the triangulation \mathcal{T}_h .

If in addition condition (36) is satisfied then

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h} \leq Ch \tag{39}$$

where again the constant C does not depend on ϱ, m, h and the triangulation \mathcal{T}_h .

4. GENERAL CONVERGENCE THEOREM

In this section we will assume that $u \in H^1(\Omega)$ only and we will prove the convergence under a stronger assumption than (34), namely

$$C_1 h^{2-\delta} \leq \frac{\varrho}{m} \leq C_2 h^{2-\delta}, \tag{40}$$

where

$$0 < \delta < 1 \tag{41}$$

is a given number which can be arbitrary small and C_1, C_2 are positive constants. The lack of regularity of $u \in H^1(\Omega)$ is usually a consequence of the fact that the Dirichlet condition

is prescribed only on a part of Γ_1 or Γ_2 (and the Neumann condition is considered on the rest of Γ_1 or Γ_2).

Thus, using the preceding results we obtain:

17. Theorem. *Let Assumptions 1 as well as the assumptions concerning the degrees of precision of quadrature formulas on a triangle and its side (see Theorems 13 and 14) be satisfied. Then*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h} = 0, \quad (42)$$

where u_h is the solution of Discrete Problem 6, $u \in H^1(\Omega)$ is the solution of Continuous Problem 2 and $\tilde{u} = E(u) \in H^1(\tilde{\Omega})$ is its extension in the sense of Lemma 8 with $k = 1$.

5. NUMERICAL RESULTS

Input:

$u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$... the exact solution
 $R_1 = 1$... radius of the circle inside
 $\varrho = \frac{1}{50}R_1 = 0.02$... width of the gap between the circles

Notation:

m, d ... parameters of the finite element method (see Fig. 3)
 u_h ... the approximation solution
 $\|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h}$... the computed norm
 EOC ... the experimental order of convergence where $EOC = \log_2 \frac{\|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h}}{\|\tilde{u} - u_{h/2}\|_{1, \Omega_h}}$

$m = 16$			$m = 32$		
d	$\ \tilde{u} - u_h\ _{1, \Omega_h}$	EOC	d	$\ \tilde{u} - u_h\ _{1, \Omega_h}$	EOC
24	0.0536843809		24	0.0536839448	
48	0.0267053823	1.01049656	48	0.0267044940	1.01053294
96	0.0133371998	1.00244928	96	0.0133354151	1.00259446
192	0.0066700114	0.99988775	192	0.0066664393	1.00046766
			384	0.0033347361	0.99939204

The computed results can be written in following form

$$\|\tilde{u} - u_h\|_{1, \Omega_h} \leq Ch$$

where the experimental order of convergence (EOC) gives the power of h .

We can formulate the conclusion now. The theory presented is concerned to semiregular triangles which are in a way specific and the experiment validate the theory.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ciarlet, P. G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978.
2. Feistauer, M., Ženíšek, A.: Finite element solution of nonlinear elliptic problems. Numer. Math. 50 (1987), 451–475.
3. Hoderová, J.: Semiregular simplexes in the finite element method. Dissertation. Inst. of Mathematics FME BUT, Brno (2005), 89 p.

4. Křížek, M.: On semiregular families of triangulations and linear interpolation. *Appl. Math.* 36 (1991), 223–232.
5. Kufner, A., John, O., Fučík, S.: *Function Spaces*. Akademia, Praha, 1977.
6. Melkes, F., Zlámal, M.: Numerical solution of nonlinear quasistationary magnetic fields. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 19 (1983), 1053–1062.
7. Nečas, J.: *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*. Academia-Masson, Prague-Paris, 1967.
8. Nečas, J.: *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*. Teubner Texte Zur Mathematik, Band 52, Leipzig, 1983.
9. Oganessian, L. A., Rukhovec, L. A.: *Variational-Difference Methods for the Solution of Elliptic Problems*. Izd. Akad. Nauk ArSSSR, Jerevan, 1979. (In Russian)
10. Ženíšek, A.: *Nonlinear Elliptic and Evolution Problems and Their Finite Element Approximations*. Academic Press, London, 1990.
11. Ženíšek, A.: The maximum angle condition in the finite element method for monotone problems with applications in magnetostatics. *Numer. Math.* 71 (1995), 399–417.
12. Ženíšek, A.: Finite element variational crimes in the case of semiregular elements. *Applications of Math.* 41 (1996), 367–398.
13. Zlámal, M.: On the finite element method. *Numer. Math.* 12 (1968), 394–409.
14. Zlámalová, J.: Semiregular finite elements in solving some nonlinear problem. *Appl. Math.* 46 (2001), 53–77.

Статья поступила в редакцию 07.12.2007

УДК 618.3 518.6

ОДИН ПІДХІД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГЕОМЕТРІЇ НА ОСНОВІ РЕКУРСИВНО-ПАРАЛЕЛЬНОГО АЛГОРИТМУ

© В.М. Терещенко

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КІБЕРНЕТИКИ
Пр-т академіка Глушкова, 2, корпус 6, Київ, Україна
E-MAIL: v_ter@ukr.net

Abstract

This article is devoted to the generalized approach of the effective decision of problems of computing geometry which initial data are set of points in Euclidean planes. The basis of this approach is construction recursion-parallel algorithm by means of strategy «distribute and dominate». In particular, on an example of a problem of a finding of a convex environment of set of points, it is offered recursion-parallel algorithm of its decision.

ВВЕДЕННЯ

Постановка проблеми. Одним з важливих напрямків побудови ефективних алгоритмів розв'язання задач в області інформатики є створення паралельних алгоритмів. Особливістю таких задач є те, що при наявності їх внутрішнього паралелізму, вони мало досліджені щодо застосування паралельних алгоритмів їх розв'язання. Це важливо з тієї точки зору, що на сьогоднішній день обчислювальна геометрія має досить широку область застосувань.

Аналіз останніх досліджень та публікацій В ряді робіт [1] запропоновано ряд послідовних алгоритмів побудови опуклої оболонки на площині на основі стратегії «розподіляй та володарюй» з можливою перспективою їх розпаралелювання. При цьому, їх оцінка складності в найгіршому випадку складає $O(N \log N)$ з лінійним часом злиття. Зокрема в роботі Препарарати і Хонга [10] розглядається алгоритм побудови опуклої оболонки опуклих багатокутників шляхом побудови опорних відрізків з лінійним часом злиття. Згідно аналізу побудови рекурсивно-паралельних алгоритмів вирішальним моментом ефективності являється саме час кроку злиття, а тому заслуговують уваги ідеї побудови алгоритмів які дозволяють одержати час кроку злиття менший за $O(N)$.

Метою даної статті є розгляд рекурсивно-паралельного алгоритму побудови опуклої оболонки для багатопроцесорної системи на основі стратегії «розподіляй та володарюй», крок злиття якого виконується за час $O(\log N)$. Така ефективність кроку злиття досягається за рахунок використання структури даних – зчіплювальна черга, яка дозволяє виконувати усі необхідні операції, в тому числі побудову опорних відрізків до двох оболонок, на кожному кроці за логарифмічний час. Це, в свою чергу, дає можливість розробити єдину схему побудови паралельних алгоритмів розв'язання задач обчислювальної геометрії для багатопроцесорних систем на основі стратегії «розподіляй та володарюй».

Постановка задачі. *На площині задана множина S із N точок. Розробити рекурсивно-паралельний алгоритм побудови опуклої оболонки заданої множини точок.*

1. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АЛГОРИТМУ

Математична модель алгоритму складається із трьох етапів: попередньої обробки, етапу рекурсивного розбиття множини точок та етапу злиття опуклих оболонки.

Попередня обробка

На етапі попередньої обробки формується структурований масив точок $U(P_{ij})$ із упорядкованих по x та y координатах списків точок U_x, U_y , відповідно.

Нехай задана множина S із N точок $S = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$ на площині (1). І нехай задано $O(N)$ процесорів: $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N/2}$. В результаті проведеної попередньої обробки, у запропонований спосіб, на вході алгоритму матимемо масив точок $U = \{P_{ij}, i, j = 1, N\}$, де i – індекс, який вказує номер точки у впорядкованому списку по x координаті, а j – індекс, який вказує номер точки у впорядкованому списку по y координаті. На (1) показаний випадок для $N=12$.

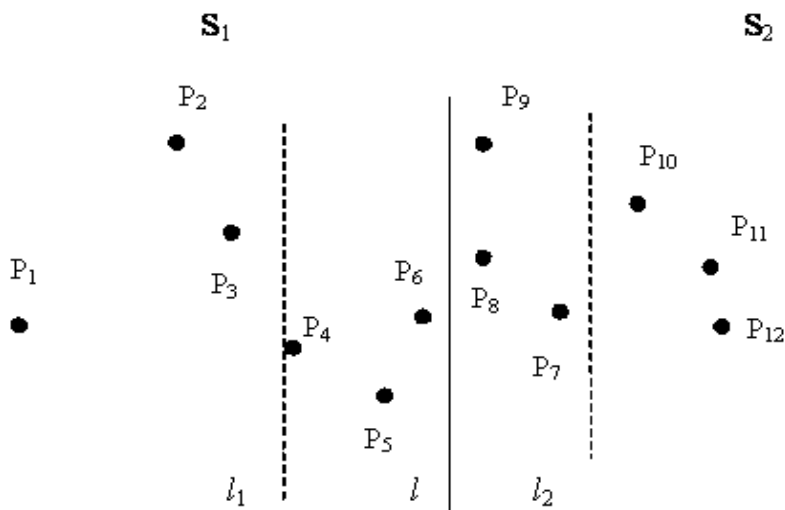


Рис. 1: Упорядкований список $U = \{P_{51}, P_{122}, P_{13}, P_{74}, P_{45}, P_{66}, P_{87}, P_{118}, P_{39}, P_{1010}, P_{211}, P_{912}\}$

Далі, на множині S із N даних будується бінарне дерево з коренем, (2), кожному вузлу якого відповідає ціле число k , відносно якого розбивається список точок у вузлах на два списки рівної потужності, відносно медіани, після порівняння перших індексів точок масиву P_{ij} . Число k визначається за один прохід по дереву, якщо відома кількість точок заданої множини, за формулою:

$$(1) \quad k = [(m + M)/2]$$

де m – номер першого елемента списку, M – останній елемент списку. Сформований у такий спосіб список подається на вхід алгоритму, граф якого має вигляд двійкового дерева, (2).

Розбиття множини точок (рекурсивний спуск)

На етапі розбиття на кожному кроці рекурсії задана множина точок, у вигляді списку U , розбивається на підмножини U_1, U_2 рівної потужності відносно медіани l , які передаються на наступний крок рекурсії. Процес розбиття завершується коли у підмножинах розбиття залишиться по одному елементу. Структура даних яка підтримує цей процес є наше дерево алгоритму, (2). У листках двійкового дерева будуть окремі точки з U . У випадку послідовного алгоритму загальний час рекурсивного спуску буде $O(N_2N)$, оскільки на кожному кроці рекурсії передача даних виконується за час $O(M)$, а пошук медіани на впорядкованому по координаті x індексованому масиві точок P_{ij} виконується за константний час $O(1)$. Медіана визначається по формулі

$$(2) \quad l = (Pkj + Pk + 1j)/2,$$

де k визнається по формулі (1), а M кількість точок у списку.

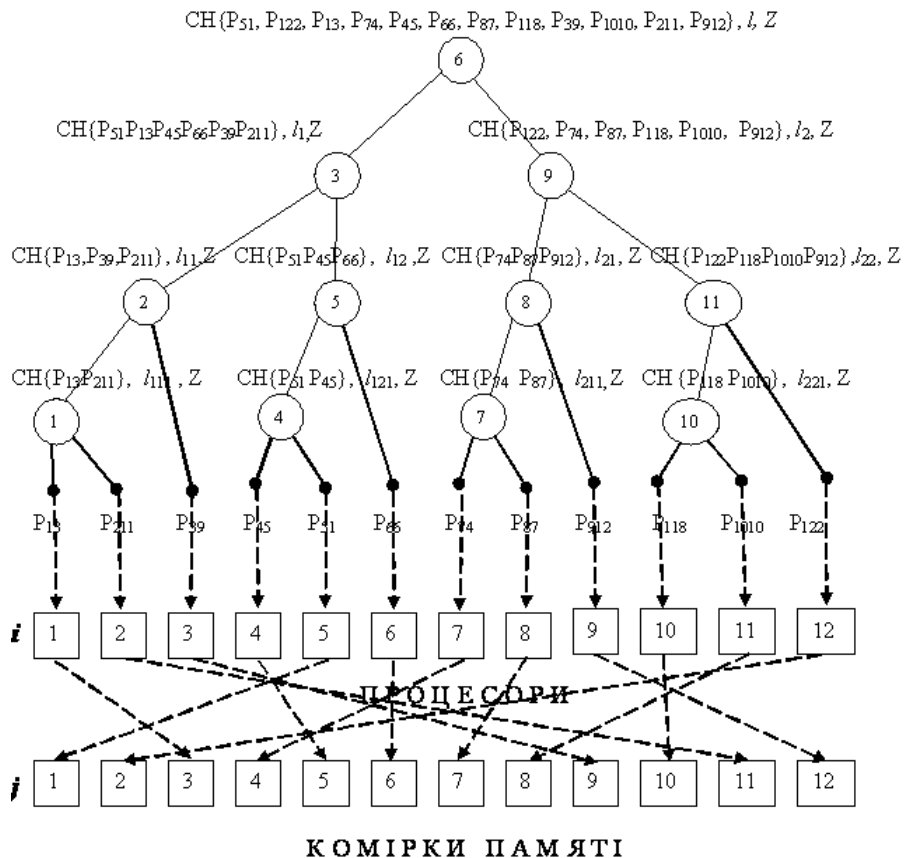


Рис. 2: Граф алгоритму

Час, необхідний на рекурсивний спуск у випадку паралельного алгоритму, визначається наступною лемою.

Лема 1. Етап рекурсивного розбиття множини S із N точок на підмножини S_1 та S_2 рівної потужності на площині, пошук медіани ℓ та передачу підмножин S_1 та S_2 за допомогою N процесорів можна виконати за час $O(\log_2 N)$, виконавши попередню обробку за час $O(N \log_2 N)$.

Доведення. Нехай задана множина точок у вигляді індексованого двовимірного, упорядкованого масиву $U = P_{ij}$, $i, j = 1, N$, де i – індекс, який указує номер точки у впорядкованому списку Ux , а j – індекс, який указує номер точки у впорядкованому списку Uy . Таке представлення множини точок дозволяє, знаючи кількість точок N у списку U , побудувати дерево розбиття (двійкове дерево). На (2) побудоване дерево для $N=12$ точок.

Як показано на рисунку, з першим індексом i кожної точки P_{ij} пов'язаний номер процесора, а з другим індексом j позначений номер комірки пам'яті в яку заноситься точка згідно упорядкованості по y координаті. На кожному кроці розбиття відповідні процесори синхронно порівнюють перші індекси зі списку точок та розсилають точки у відповідні вузли алгоритму, зберігаючи при цьому порядок розташування точок, який визначається їх порядком в комірках пам'яті. Враховуючи чітку упорядкованість по обом індексам точок P_{ij} масиву U та взаємозв'язок між процесорами та елементами пам'яті, час виконання процесу злиття у кожному вузлі дерева не перевищуватиме константу $O(1)$.

Таким чином, загальний час розбиття буде не більшим ніж $O(\log_2 N)$ для найгіршого вводу даних. Що і треба було довести.

□

Злиття результатів (рекурсивний підйом)

На кожному кроці рекурсивного підйому, починаючи з другого, на вхід батьківського вузла v дерева подаються опуклі оболонки від лівого сина $U_L(U_L = \text{ЛСИН}[v])$ та правого сина $U_R(U_R = \text{ПСИН}[v])$. Необхідно побудувати опуклу оболонку для вузла v .

Лема 2. Етап рекурсивного злиття результатів визначення опуклої оболонки множини S із N точок на площині за допомогою N процесорів, можна виконати за час $O(\log_2 N)$.

ПРОЦЕДУРА ЗЛИТТЯ ОПУКЛИХ ОБОЛОНОК. Для побудови опуклої оболонки опуклих оболонок синів вузла v , необхідно визначити верхні та нижні опорні вершини лівої та правої опуклих оболонок, розчепити взаємо опуклі ланцюги між цими опорними точками, і з'єднати відповідні ввігнуті частини лівої та правої опуклих оболонок верхнім та нижнім опорними відрізками. Для того щоб виконати такі дії необхідно: визначити структуру даних, яка б підтримувала б опуклу оболонку в кожному вузлі, дозволяла б знаходити опорні точки, розчіпляти та зчіпляти частини опуклих оболонок, проводити опорні відрізки.

При виборі структури даних, яка б виконувала вище наведені операції за логарифмічний час, скористаємось ідеєю, запропонованою в роботі Овермарса і Ван Лювена [11] для послідовного алгоритму, згідно якої за таку структуру даних обрано зчеплену чергу, із заданою на ній процедурою З'ЄДНАТИ (U_L, U_R).

В роботі доведено, що процедура З'ЄДНАТИ (U_L, U_R), починаючи з корневих вершин збалансованих дерев, які підтримують U_L та U_R дозволяє побудувати верхню та нижню границі опуклої оболонки за час $O(\log N)$. При виконанні пошуку опорних вершин та побудові опорних відрізків, використовується класифікація вершин, подана в роботі [1] (3).

Необхідно лише до поданих дев'яти випадків класифікації при побудові верхньої опуклої оболонки додати 9 аналогічних випадків для побудови нижньої опуклої оболонки.

Після визначення опорних точок та розчепленням по ним опуклих оболонок синів вузла v , відкидається права частина дерев, які підтримують U_L між опорними точками та ліва частина дерев, які підтримують U_R між опорними точками. Збалансовані дерева, які підтримуватимуть верхню та нижню опуклу оболонку вузла v утворюються шляхом злиття частин дерев, які залишилися.

$q_i \setminus q_j$	Ввігнута	Опорна	Опукла
ввігнута			
опорна			
опукла			

Рис. 3:

Знову ж таки, усі наведені операції виконуються за час $O(\log_2 N)$. Одержані у такий спосіб опуклі оболонки передаються на наступний рівень рекурсії.

На рисунку (4) показано крок злиття алгоритму. У кожному вузлі позначено функцію З'ЄДНАТИ (U_L, U_R) через Z , а відповідні границі опуклих оболонок через $CH(U)$; окрім, цього через l_{ij} позначено медіани. На (5) показано пошук опорних вершин лівої та правої опуклих оболонок (4) на кроці злиття. По вершинам P_2, P_5

розчіпляється ліва опукла оболонка $U_L = CH(S_1)$ на ланцюги $U_{L1} = (P_2, P_1, P_5)$ та $U_{L2} = (P_5, P_6, P_2)$, а права опукла оболонка $U_R = CH(S_2)$ розчіпляється по вершинам P_9, P_{12} на ланцюги $U_{R1} = (P_9, P_8, P_7, P_{12})$ та $U_{R2} = (P_{12}, P_{11}, P_{10}, P_9)$. Ланцюги $U_{L2} = (P_5, P_6, P_2)$ і $U_{R1} = (P_9, P_8, P_7, P_{12})$ взаємо опуклі то згідно алгоритму вони відкидаються, а значить, і зникають відповідні вузли дерев які підтримують відповідні опуклі оболонки.

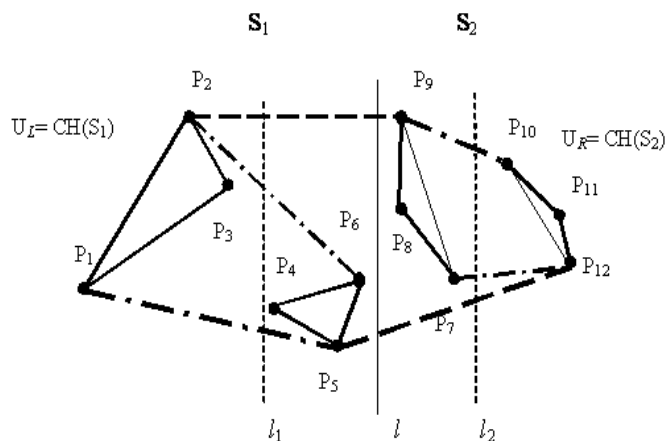


Рис. 4:

Так у дереві, яке підтримує ліву опуклу оболонку зникнуть вузли, які знаходяться праворуч опорних точок P_2, P_5 – це вузол P_6 , а у дереві правої опуклої оболонки зникнуть вузли, точки яких розташовані ліворуч від правих опорних точок – це вузли P_8, P_7 . Після цього зчіплюються ланцюги $U_{L1} = (P_2, P_1, P_5)$ і $U_{R2} = (P_{12}, P_{11}, P_{10}, P_9)$ за допомогою опорних відрізків (P_2, P_9) та (P_5, P_{12}) , які і утворять результуючу границю опуклої оболонки $CH(S) = (P_{12}, P_{11}, P_{10}, P_9, P_2, P_1, P_5)$.

Частини дерев що залишились зіллються в єдине збалансоване дерево, яке підтримує одержану границю кінцевої опуклої оболонки $CH(S)$.(6).

Процеси, які реалізують алгоритм на етапі злиття можна описати таким чином:

Теорема 1. *Задачу побудови опуклої оболонки на множині S із N точок площини можна розв'язати за допомогою N процесорів із часом $O(\log_2 N)$, із використанням $O(N)$ пам'яті за два рекурсивні проходи, виконавши попередньо обробку вхідних даних за час $O(N \log_2 N)$.*

У випадку паралельної обробки, синхронно може працювати менша кількість процесорів, ніж для вузлових списків, в одних і тих же вузлах алгоритму, а завантаженість процесорів буде більш висока. Питання використання більш оптимального складу процесорів (комп'ютерів) у даній роботі не розглядалось й потребує подальших досліджень. В той же час відомо з робіт [3,4], що якщо позначити за k кількість процесорів, за w – загальну кількість операцій алгоритму, а за $O(F(N))$ – складність алгоритму для необмеженої кількості процесорів, то час виконання алгоритму

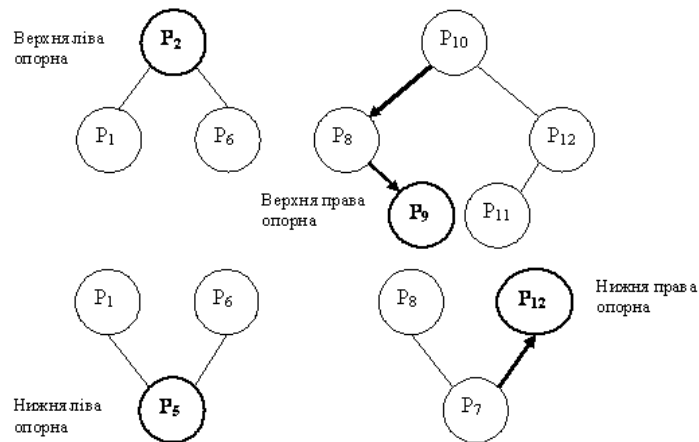


Рис. 5:

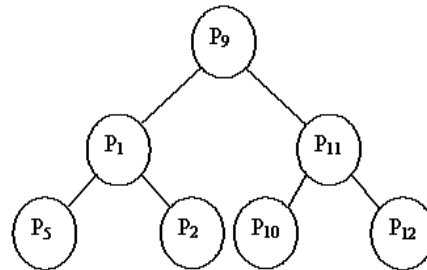


Рис. 6:

можна представити у вигляді:

$$(3) \quad O(f(N)) = ((k - 1)O(F(N)) + w)/k$$

У нашому випадку, згідно теореми 2, $F(N) = \log_2 N$, а значить час виконання алгоритму для k процесорів визначатиметься наступним співвідношенням:

$$(4) \quad O(f(N)) = ((k - 1)O(\log_2 N) + w)/k$$

Так, зокрема, для кількості операцій w порядку $O(N)$ із співвідношення (4) випливає: у випадку $k = 2$ процесорам, час виконання алгоритму буде рівний $O(N/2)$, а при $k = N/2 - O(\log_2 N)$. Окрім цього, на наш погляд, синхронна обробка даних алгоритму може бути замінена конвеєрною, що розширює можливості підвищення загальної ефективності алгоритму.

2. Реалізація алгоритму

Що до практичної реалізації розробленого паралельного алгоритму, то одним з ефективних підходів може бути підхід на основі використання технології ПАРКС (Паралельні Асинхронні Рекурсивно Керовані Системи) [5], яка дозволяє

досить ефективно реалізувати саме рекурсивно-паралельні алгоритми розв'язання складних задач. Про це свідчать відомі результати при розв'язанні задач обчислювальної математики [5] та оптимізаційних задач в економіці [6]. На сьогоднішній день, час новітніх технологій, ідея ПАРКС набула свого нового дихання у системах ПАРКС-JAVA [7, 8], що дає можливість розпаралелювати звичайні рекурсивні алгоритми для паралельного виконання на комп'ютерах, з'єднаних через локальну мережу, або мережу Internet.

Система ПАРКС-JAVA реалізується на основі локальної чи глобальної комп'ютерної мережі обробки інформації, надаючи можливість користувачам малопотужних комп'ютерів використовувати ресурси мультипроцесорних комплексів, або ресурси комп'ютерної мережі. Основні елементи системи ПАРКС та засоби паралельного програмування для реалізації ПАРКС-технології, детально описані в роботах [5-8].

Висновки

В даній роботі запропонована ідея розробки узагальненого алгоритму розв'язання задач обчислювальної геометрії на прикладі задачі про побудову опуклої оболонки на основі схеми «розподіляй та володарюй» при використанні технології ПАРКС. Зважаючи на те, що більшість задач обчислювальної геометрії пов'язані з обробкою множин точок, запропонована стратегія може бути загальною методологією розв'язання широкого класу задач обчислювальної геометрії.

Так в роботі, завдяки побудові структурованого масиву точок заданої множини та вдало вибраних структур даних: дерева алгоритму та зчепленої черги, яка описує опуклу оболонку у кожному вузлі дерева алгоритму, вдалось одержати оптимальний час кроку злиття $\theta(\log_2 N)$ для багатопроцесорної системи.

Етап розбиття, запропонований у цій роботі, може бути загальним як для задач обчислювальної геометрії, вхідними даними яких є точки, так і може бути узагальненим і на розпаралелювання задач інших класів [9]. Основні кроки етапу злиття теж можуть бути спільними для багатьох класів задач обчислювальної геометрії. Відмінними лише будуть процедури злиття, які можна розробляти, а потім використовувати як окремі модулі програми.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. М.: Мир, 1989. – 478 с.
2. *Анісімов А.В., Терещенко В.М., Кравченко І.В.* Основні алгоритми обчислювальної геометрії. ВПЦ "Київський університет", Київ, 2002, 81 с.
3. *В. В. Воеводін, Вл. В. Воеводін.* Параллельные вычисления, СПб., БХВ – Петербург, 2004, 608 с.
4. *В. В. Воеводін.* Матричные методы и алгоритмы. Сб. научных трудов // РАН Инс. Выч. Мат., под ред. Воеводина, 1993, 171 с.
5. *Анісімов А.В., Глушков В.М.* Управляющие пространства в асинхронных параллельных вычислениях. // Кибернетика, №5, 1980.-С.1-9.

6. *Анисимов А.В., Борейша Ю.Е., Карапетян М.С.* Параллельное программирование экономических систем на основе декомпозиционных методов. КИБЕРНЕТИКА, Киев, Наукова думка, 1990, №3, с. 105-110.
7. *Анисимов А.В., Дерев'яненко А.В.* Построение виртуального параллельного пространства с использованием технологии ПАРУС-JAVA. // Материалы Международной научно-технической конференции ИМС, 2003,Т.2.-С 18-19.
8. *Анісімов А.В., Дерев'яненко А.В.* Система ПАРКС-JAVA як засіб вирішення паралельних алгоритмів на комп'ютерній мережі. // Материалы четвертой международной научно-практической конференции УкрПРОГ'2004, ПРОБЛЕМЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ, №2-3, 2004.-С.282-284.
9. *Анісімов А.В., Кулябко П.П., Терещенко В.М.* Паралельні алгоритми в дослідженнях неперервних систем. К.: Видавництво "ЛОГОС", 1999.-50с.
10. *F. P. Preparata and J. Hong.* Convex hulls of finite sets of points two and three dimensions, Comm. ACM 2(20),87 -93(Feb. 1977).
11. *M. H. Overmars and J. van Leeuwen.* Maintenance of configurations in the plane, J.Cjmput. and Syst. Sci. 23, 166-204(1981).

Статья поступила в редакцию 17.12.2007

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛЬНОСТИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

© Д. В. Донской

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ УПРАВЛЕНИЯ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: *donskoy2simf@mail.ru*

Abstract

In this paper optimization of profitability functions of queueing systems is considered. It is shown that as a rule such functions are unimodal.

ВВЕДЕНИЕ

Классическая математическая теория массового обслуживания (ТМО) описывает и анализирует абстрактные системы на основе двух главных понятий: потока (последовательности) событий, называемых заявками, и множества объектов, называемых каналами обслуживания заявок. Кроме этих основных элементов используются и другие – очереди, потоки обслуживания, отказы, а также параметры, определяющие поведение систем массового обслуживания (СМО). Язык ТМО адекватно описывает многие экономические, биологические и технические системы. Особый интерес представляет параметрическая оптимизация подобных систем, определяющая наилучшее их функционирование. В частности, для экономических систем целесообразно оптимизировать прибыльность [1].

Целью данной работы является изучение свойств и вычислительных особенностей функций прибыльности, оптимизируемых в математических моделях таких объектов, как, например, рекреационные и туристические предприятия.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается n – канальная СМО с отказами, в которую поступает простейший (пуассоновский) поток заявок с интенсивностью λ . Производительность (интенсивность обслуживания) каждого канала обозначается μ [2]. Экономические характеристики системы: C_1 – затраты на создание одного канала; C_2 – расходы на эксплуатацию одного канала в единицу времени; C_3 – расходы от простоя одного канала в единицу времени; C_4 – доход от обслуживания одной заявки.

Будем считать, что случайный процесс, протекающий в СМО, перешел в стационарный режим. Для рассматриваемой СМО среднее число занятых каналов \bar{k} определяется формулой $\bar{k} = \rho(1 - p_n)$, где $\rho = \lambda/\mu$; $p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0$; $p_0 = (\sum_{m=0}^n \frac{\rho^m}{m!})^{-1}$; n – число каналов СМО; p_k – вероятность события «занято ровно k каналов обслуживания», $k = \bar{1}, n$; p_0 – вероятность того, что все каналы свободны [2].

Поскольку пропускная способность СМО равна $\mu\bar{k}$, средний доход в единицу времени D определяется формулой $D = C_4\mu\bar{k}$. Средние расходы в единицу времени $R = C_2\bar{k} + C_3(n - \bar{k})$. Средняя прибыль в единицу времени $G_1 = D - R = (C_4\mu + C_3 - C_2)\bar{k} - C_3n$.

Если считать λ и μ – заданными параметрами, то $G_1 = G_1(n)$ является функцией от числа каналов n , которую требуется оптимизировать. Иначе говоря, требуется определить оптимальное число каналов (мест обслуживания), при котором обеспечивается получение наибольшей средней прибыли. Подстановка в $G_1(n)$ функции $\bar{k} = \bar{k}(n)$ даёт окончательное выражение

$$G_1(n) = (C_4\mu + C_3 - C_2)\varrho \left(1 - \frac{\varrho^n}{n!} \left(\sum_{m=0}^n \frac{\varrho^m}{m!} \right)^{-1} \right) - C_3n.$$

Замечание. Затраты на создание каналов здесь не учитываются. Предполагается, что в стационарном режиме система уже приносит прибыль. Легко проверить, что это происходит спустя время t_0 от начала функционирования СМО, где

$$t_0 = \frac{C_1n}{(C_4\mu + C_3 - C_2)\bar{k} - C_3n}$$

2. УНИМОДАЛЬНОСТЬ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ $G_1(n)$

Покажем, что при выполнении ряда легко проверяемых (и выполняемых для практически реализуемых СМО) условий существует единственное натуральное n^* такое, что при $n < n^*$ функция $G_1(n)$ монотонно возрастает, а при $n > n^*$ – монотонно убывает.

Действительно, рассматривая неравенство $\frac{G_1(n+1)}{G_1(n)} - 1 > 0$ (затем, аналогично $\frac{G_1(n+1)}{G_1(n)} - 1 < 0$), которое выражает для любой зафиксированной точки n условие возрастания (убывания) в этой точке, после несложных преобразований получаем эквивалентное неравенство

$$\frac{\varrho^n}{n! \sum_{m=0}^n \frac{\varrho^m}{m!}} \left(1 - \frac{\varrho}{(n+1) \left(1 + \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)! \sum_{m=0}^n \frac{\varrho^m}{m!}} \right)} \right) - \gamma > 0,$$

где $\gamma = \frac{C_3}{(C_4\mu + C_3 - C_2)\varrho}$. Заметим, что в левую часть неравенства дважды входит выражение

$$\frac{\varrho^n}{n! \sum_{m=0}^n \frac{\varrho^m}{m!}} = p_n,$$

поэтому рассматриваемое неравенство можно записать в виде

$$\varrho p_n^2 + (n+1 - \varrho(\gamma+1))p_n - \gamma(n+1) > 0$$

и при зафиксированном n решать относительно p_n . Поскольку вероятность $p_n \geq 0$, в уравнении

$$\Phi(p_n) = \varrho p_n^2 + (n+1 - \varrho(\gamma+1))p_n - \gamma(n+1) = 0$$

рассмотрим только один корень

$$(p_n)^* = \frac{-(n+1 - \varrho(\gamma+1)) + \sqrt{(n+1 - \varrho(\gamma+1))^2 + 4\varrho\gamma(n+1)}}{2\varrho}$$

Так как выполняется условие $\varrho = \frac{\lambda}{\mu} > 0$, функция $\Phi(p_n)$ монотонно возрастает на промежутке $[-(n+1 - \varrho(\gamma+1))/\mu; \infty)$ и принимает нулевое значение в точке $(p_n)^*$. Имеем $\Phi(0) = -\gamma(n+1) < 0$, т.к. $\gamma > 0$ по смыслу задачи. Поскольку $0 \leq p_n \leq 1$, потребуем, чтобы выполнялись условия $\Phi(0) > \Phi\left(-\frac{n+1 - \varrho(\gamma+1)}{2\varrho}\right)$ и $\Phi(1) > 0$. При этих условиях на отрезке $(0;1)$ функция Φ будет монотонно возрастать и проходить через ноль. Указанные условия приводят к ограничениям $-\gamma(n+1) > \Phi\left(-\frac{n+1 - \varrho(\gamma+1)}{2\varrho}\right)$ и $(n+1)(1-\gamma) > \varrho\gamma$, которые должны выполняться в каждой точке возрастания функции $G_1(n)$. В то же время p_n , как функция от числа каналов n , монотонно убывает с ростом n от единицы (при $n=0$) до нуля (при $n \rightarrow \infty$) при выполнении легко проверяемого условия $\varrho < n+1$. Поэтому при выполнении всех указанных условий функция $G_1 = G_1(n)$ действительно унимодальна.

3. ДРУГИЕ МОДЕЛИ СМО И ФУНКЦИИ ПРИБЫЛЬНОСТИ

По результатам проведенных расчетов, свойство унимодальности целевых функций прибыльности от числа каналов обслуживания сохраняется и для многих других моделей СМО.

Рассмотрим n -канальную СМО с ограничением на длину очереди. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . Производительность каждого канала равна μ . Число мест в очереди ограничено величиной m . Экономические характеристики системы: C_1 – затраты на создание одного канала; C_2 – расходы на эксплуатацию одного канала в единицу времени; C_3 – расходы от простоя одного канала в единицу времени; C_4 – расходы на содержание одной заявки в очереди в единицу времени; C_5 – доход от обслуживания одной заявки. Для этой модели функция прибыльности имеет вид

$$G_2(n) = C_5 A(n) + (C_3 - C_2) \bar{k}(n) - C_3 n - C_4 \bar{r}(n),$$

где $A(n) = \lambda(1 - p_{n+m})$; $\bar{k}(n)$ – среднее число занятых каналов; $\bar{r}(n)$ – средняя длина очереди.

Для n -канальной СМО с ограничением на время ожидания заявки в очереди (не более $t_{ож}$) с теми же экономическими характеристиками C_1, \dots, C_5 вид функции прибыльности остаётся прежним, но в этом случае $A(n) = \lambda - \nu \bar{r}(n)$; $\bar{r}(n) = \frac{\varrho - \bar{k}(n)}{\beta}$;

$\nu = \frac{1}{t_{ож}}$, где $\bar{t}_{ож}$ – среднее время ожидания заявки в очереди; $\beta = \frac{\nu}{\mu}$.

В заключение в качестве примера приведём результат численного расчёта оптимального числа каналов СМО со следующими исходными параметрами .

Интенсивность заявок на обслуживание 70.00.

Наибольшая длина очереди 3.

Интенсивность обслуживания 50.00.

Сумма затрат на организацию одного пункта 650.00.

Средняя прибыль от одного пункта в час 13.00.

Средн.потери от простоя одного пункта в час 0.50.

Рабочий день пункта обслуживания (часов) 6.00.

Результат решения оптимизационной задачи:

Оптимальное число пунктов обслуживания 3.

Средняя прибыль в час 17.19.

Среднесуточная прибыль 103.14.

Сеть пунктов окупится за 19 суток.

Унимодальность функции прибыли от числа каналов иллюстрируется Таблицей 1.

Таблица 1:

Число каналов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Величина прибыли	11.8	16.6	17.19	16.9	16.4	15.9	15.4	14.9	14.4	13.9

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Оптимизационный подход к моделированию СМО позволяет осуществлять выбор параметров функционирования систем обслуживания с наибольшей прибылью в единицу времени.

2. Функции прибыльности, определяемые для различных типов СМО в стационарном режиме, как правило, унимодальны, что позволяет реализовать несложные вычислительные процедуры для нахождения оптимального числа каналов обслуживания.

3. В дальнейшем целесообразно и перспективно провести исследование оптимизации СМО с учётом дополнительных ограничений, связанных с проблемной областью, прежде всего – экологических.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеева Н.К.* Стратегическое управление туристской фирмой. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 208 с.
2. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. – 324 с.

Статья поступила в редакцию 18.12.2007

МЕТОДИКА СИНТЕЗА СЛОВ

© Е.Е. Федоров

Донецкий государственный институт искусственного интеллекта,
КАФЕДРА СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ
УЛ.АРТЕМА, 118-В, ДОНЕЦК, УКРАИНА, 340048
E-MAIL: fee@iai.donetsk.ua

For mining a natural language interface of the automatic control system (ACS) in the article the techniques synthesis of words Russian language is offered.

ВВЕДЕНИЕ

Постановка проблемы. В настоящее время актуальной становится разработка естественно-языкового (ЕЯ) интерфейса для управления гибкой производственной системой (ГПС), имеющей в своем составе робототехнические комплексы (РТК). Команды ЕЯ-интерфейса содержат описания процессов, протекающих в ГПС, и предметов, участвующих в этих процессах [1, 2, 3]. При формировании описаний процессов и предметов важную роль играет словообразование, изучающее правила формирования слов, входящих в состав этих описаний [4, 5, 6].

Анализ исследований. Анализ последних достижений и публикаций, посвященных этой проблеме, позволяет сделать вывод, что эти модели синтеза и анализа слов не учитывают морфонологические преобразования и не используют количественные оценки языковых структур.

Нерешенным является вопрос, связанный с созданием методики синтеза слов, базирующейся на правилах словообразования русского языка.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является формирование методологических положений синтеза слов.

Решение задачи. В данной статье излагается методика синтеза слов, включающая в себя:

- 1) Формальное представление языковых конструкций
- 2) Присвоение им количественных оценок
- 3) Закрепление взаимосвязей между элементами синтеза слов
- 4) Разработку структуры синтеза слов
- 5) Формирование структуры нейросети, реализующей правила синтеза слов.
- 6) Разработку процедуры обучения

1. ФОРМАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЯЗЫКОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ

При синтезе слов осуществляется формальное представление следующих языковых конструкций ($s = 1$ - если буква, $s = 2$ - если фонема):

- частей речи $H_i, i \in \overline{1, \eta(\mathbf{H})}$ и их наборов $\overline{H1_n}, n \in \overline{1, \eta(\overline{\mathbf{H1}})}$;
- букв $A_i, i \in \overline{1, \eta(\mathbf{A})}$ и фонем $\Phi_i, i \in \overline{1, \eta(\overline{\mathbf{\Phi}})}$;
- порождающих слов $\overline{Q_e^s}, e \in \overline{1, \eta(\mathbf{Q}^s)}$ и их наборов $\overline{Q1_{e,s}}, e \in \overline{1, \eta(\overline{\mathbf{Q1}^s})}$;

- основ слов $\bar{L}_q^s, q \in \overline{1, \eta(\bar{\mathbf{L}}^s)}$ и их наборов $\overline{\bar{L}1}_q^s, q \in \overline{1, \eta(\overline{\bar{\mathbf{L}1}}^s)}$;
- форм основ слов $\widetilde{\bar{L}}_q^s, q \in \overline{1, \eta(\widetilde{\bar{\mathbf{L}}^s})}, \widetilde{\bar{L}}_q^s, q \in \overline{1, \eta(\widetilde{\bar{\mathbf{L}}^s})}$ и их наборов $\overline{\widetilde{\bar{L}1}}_q^s, q \in \overline{1, \eta(\overline{\widetilde{\bar{\mathbf{L}1}}^s})}, \overline{\widetilde{\bar{L}1}}_q^s, q \in \overline{1, \eta(\overline{\widetilde{\bar{\mathbf{L}1}}^s})}$ полученных при линейных и нелинейных морфонологических преобразованиях;
- неосновных частей слов $\bar{V}_u^s, u \in \overline{1, \eta(\bar{\mathbf{V}}^s)}$ и их наборов $\overline{\bar{V}1}_u^s, u \in \overline{1, \eta(\overline{\bar{\mathbf{V}1}}^s)}$;
- словообразовательных аффиксов (префиксов \bar{B}_p^{s1} , интерфиксов \bar{B}_p^{s2} , суффиксов \bar{B}_p^{s3} , флексий \bar{B}_p^{s4} , постфиксов $\bar{B}_p^{s5}, p \in \overline{1, \eta(\bar{\mathbf{B}}^{sk})}, k \in \overline{1, 5}$) и их наборов $\overline{\bar{B}1}_p^s, p \in \overline{1, \eta(\overline{\bar{\mathbf{B}1}}^s)}$;
- усекаемых/наращиваемых $\widetilde{\bar{D}}_w^{s1}/\widetilde{\bar{D}}_w^{s2}, w \in \overline{1, \eta(\widetilde{\bar{\mathbf{D}}^{sk}})}, k \in \overline{1, 2}$ и чередующихся $\widetilde{\bar{D}}_v^{s1}/\widetilde{\bar{D}}_v^{s2}, v \in \overline{1, \eta(\widetilde{\bar{\mathbf{D}}^{sk}})}, k \in \overline{1, 2}$ буквенных и фонемных последовательностей и их наборов $\overline{\widetilde{\bar{D}1}}_w^s, w \in \overline{1, \eta(\overline{\widetilde{\bar{\mathbf{D}1}}^s})}, \overline{\widetilde{\bar{D}1}}_v^s, v \in \overline{1, \eta(\overline{\widetilde{\bar{\mathbf{D}1}}^s})}$, участвующих в линейных и нелинейных морфонологических преобразованиях основ слов;
- порожденных слов $\bar{C}_r^s, r \in \overline{1, \eta(\bar{\mathbf{C}}^s)}$.

2. ПРИСВОЕНИЕ ЯЗЫКОВЫМ КОНСТРУКЦИЯМ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ОЦЕНОК

Языковым конструкциям присваиваются количественные оценки в виде:

- а) рангов – $r(H_i), r(A_i), r(\Phi_i)$;
- б) информационных мер, сформированных на основе рангов, – $M(\bar{Q}_e^s), M(\bar{L}_q^s), M(\widetilde{\bar{L}}_q^s), M(\bar{L}_q^s), M(\bar{V}_u^s), M(\bar{B}_p^{sk}), M(\widetilde{\bar{D}}_w^{sk}), M(\widetilde{\bar{D}}_v^{sk}), M(\bar{C}_r^s)$ в виде

$$M(\bar{\xi}^s) = \|\mu(\bar{\xi}^s)\| = \sum_{t=1}^{|\bar{\xi}^s|} \left(r(\xi_t^s) * 2^{(|\bar{\xi}^s|-t)n} \right) \quad (1)$$

- в) информационных мер, сформированных из информационных мер (1) – $M(\overline{\bar{H}1}_n), M(\overline{\bar{Q}1}_e^s), M(\overline{\bar{L}1}_q^s), M(\overline{\widetilde{\bar{L}1}}_q^s), M(\overline{\bar{V}1}_u^s), M(\overline{\bar{B}1}_p^s), M(\overline{\widetilde{\bar{D}1}}_w^s), M(\overline{\widetilde{\bar{D}1}}_v^s)$ в виде

$$M(\overline{\bar{\xi}1}^s) = \|\mu(\overline{\bar{\xi}1}^s)\| = \sum_{t=1}^{|\overline{\bar{\xi}1}^s|} \left(M(\bar{\xi}1_t^s) * 2^{(|\overline{\bar{\xi}1}^s|-t)n} \right), \quad (2)$$

где n – количество бит, приходящихся на один элемента синтеза слов; $|\bar{\xi}^s|, |\overline{\bar{\xi}1}^s|$ – длина элемента синтеза слов; t – номер компонента $\bar{\xi}^s, \overline{\bar{\xi}1}^s$.

3. ЗАКРЕПЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗЕЙ МЕЖДУ ЯЗЫКОВЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ

Для закрепления взаимосвязей между языковыми конструкциями вводятся:

а) матрица бинарных отношений $\Gamma(\overline{\mathbf{QI}}^s, \overline{\mathbf{C}}^s)$

$$\Gamma(\overline{\mathbf{QI}}^s, \overline{\mathbf{C}}^s) = \|\Gamma(\overline{\mathbf{QI}}_e^s, \overline{\mathbf{C}}_r^s)\|, \quad (3)$$

$$M(\overline{\mathbf{QI}}_{e-1}^s) \prec M(\overline{\mathbf{QI}}_e^s) \prec M(\overline{\mathbf{QI}}_{e+1}^s), \quad M(\overline{\mathbf{C}}_{r-1}^s) \prec M(\overline{\mathbf{C}}_r^s) \prec M(\overline{\mathbf{C}}_{r+1}^s),$$

$$\forall \overline{\mathbf{QI}}_e^s \wedge \overline{\mathbf{C}}_r^s \quad \exists \Gamma(\overline{\mathbf{QI}}_e^s, \overline{\mathbf{C}}_r^s) = \begin{cases} 1, & \text{для } \overline{\mathbf{QI}}_e^s \text{ существует } \overline{\mathbf{C}}_r^s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad s \in \overline{1, 2}.$$

б) матрица бинарных отношений $\Gamma(\overline{\mathbf{HI}}, \overline{\mathbf{QI}}^s)$

$$\Gamma(\overline{\mathbf{HI}}, \overline{\mathbf{QI}}^s) = \|\Gamma(\overline{\mathbf{HI}}_n, \overline{\mathbf{QI}}_e^s)\|, \quad (4)$$

$$r(\overline{\mathbf{HI}}_{n-1}) \prec r(\overline{\mathbf{HI}}_n) \prec r(\overline{\mathbf{HI}}_{n+1}), \quad M(\overline{\mathbf{QI}}_{e-1}^s) \prec M(\overline{\mathbf{QI}}_e^s) \prec M(\overline{\mathbf{QI}}_{e+1}^s),$$

$$\forall \overline{\mathbf{HI}}_n \wedge \overline{\mathbf{QI}}_e^s \quad \exists \Gamma(\overline{\mathbf{HI}}_n, \overline{\mathbf{QI}}_e^s) = \begin{cases} 1, & \text{для } \overline{\mathbf{HI}}_n \text{ существует } \overline{\mathbf{QI}}_e^s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad s \in \overline{1, 2}.$$

в) матрица бинарных отношений $\Gamma(\overline{\mathbf{HI}}, \overline{\mathbf{VI}}^s)$

$$\Gamma(\overline{\mathbf{HI}}, \overline{\mathbf{VI}}^s) = \|\Gamma(\overline{\mathbf{HI}}_n, \overline{\mathbf{VI}}_u^s)\|, \quad (5)$$

$$r(\overline{\mathbf{HI}}_{n-1}) \prec r(\overline{\mathbf{HI}}_n) \prec r(\overline{\mathbf{HI}}_{n+1}), \quad M(\overline{\mathbf{VI}}_{u-1}^s) \prec M(\overline{\mathbf{VI}}_u^s) \prec M(\overline{\mathbf{VI}}_{u+1}^s),$$

$$\forall \overline{\mathbf{HI}}_n \wedge \overline{\mathbf{VI}}_u^s \quad \exists \Gamma(\overline{\mathbf{HI}}_n, \overline{\mathbf{VI}}_u^s) = \begin{cases} 1, & \text{для } \overline{\mathbf{HI}}_n \text{ существует } \overline{\mathbf{VI}}_u^s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad s \in \overline{1, 2}.$$

г) матрица бинарных отношений $\Gamma(\mathbf{H}, \overline{\mathbf{BI}}^s)$

$$\Gamma(\mathbf{H}, \overline{\mathbf{BI}}^s) = \|\Gamma(H_i, \overline{\mathbf{BI}}_p^s)\|, \quad (6)$$

$$r(H_{i-1}) \prec r(H_i) \prec r(H_{i+1}), \quad M(\overline{\mathbf{BI}}_{p-1}^s) \prec M(\overline{\mathbf{BI}}_p^s) \prec M(\overline{\mathbf{BI}}_{p+1}^s),$$

$$\forall H_i \wedge \overline{\mathbf{BI}}_p^s \quad \exists \Gamma(H_i, \overline{\mathbf{BI}}_p^s) = \begin{cases} 1, & \text{для } H_i \text{ существует } \overline{\mathbf{BI}}_p^s \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad s \in \overline{1, 2}.$$

д) матрица бинарных отношений $\Gamma(\mathbf{H}, \overline{\mathbf{C}}^s)$

$$\Gamma(\mathbf{H}, \overline{\mathbf{C}}^s) = \|\Gamma(H_i, \overline{\mathbf{C}}_r^s)\|, \quad (7)$$

$$r(H_{i-1}) \prec r(H_i) \prec r(H_{i+1}), \quad M(\overline{\mathbf{C}}_{r-1}^s) \prec M(\overline{\mathbf{C}}_r^s) \prec M(\overline{\mathbf{C}}_{r+1}^s),$$

$$\forall H_i \wedge \overline{C}_r^s \quad \exists \Gamma(H_i, \overline{C}_r^s) = \begin{cases} 1, & \text{для } H_i \text{ существует } \overline{C}_r^s, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad s \in \overline{1,2}$$

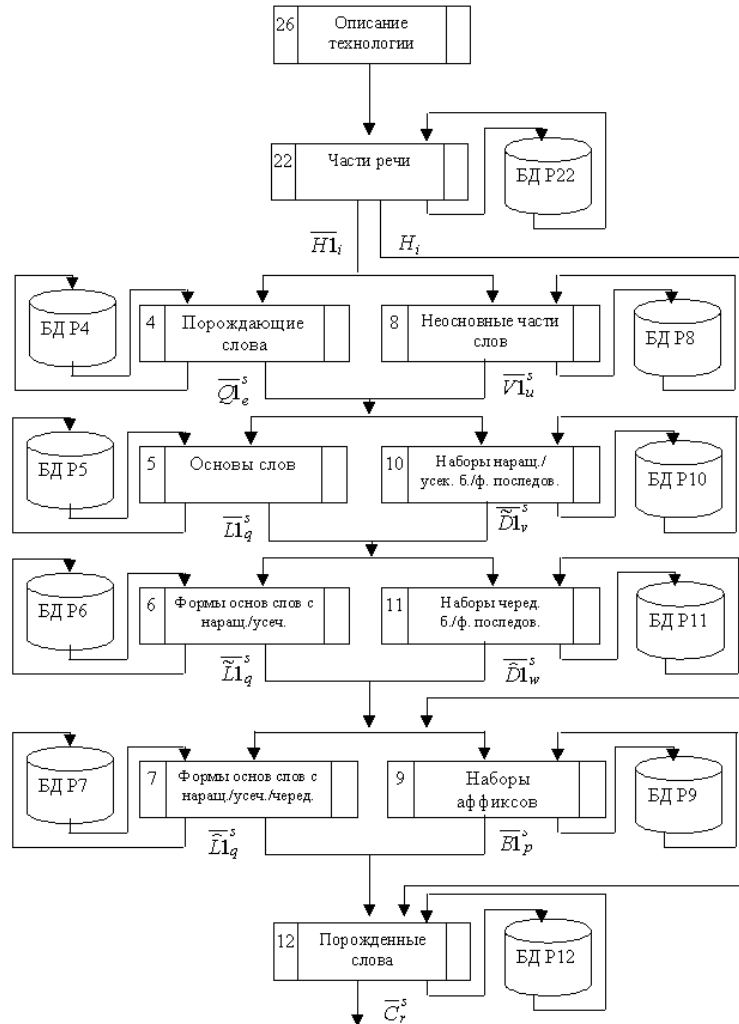


Рис. 1: Структурная детализация синтеза слов

4. РАЗРАБОТКА СТРУКТУРЫ СИНТЕЗА СЛОВ

На основе формализации, количественного оценивания и закрепления взаимосвязи языковых конструкций разработана структура синтеза слов (рис. 1). Технологическая карта (блок 26) содержит в себе задания на все уровни управления производством и характеризуется определенным набором слов, который уже, чем общий словарь русского языка. Конструирование слов, описывающих технологические агрегаты и операции над ними, происходит следующим образом. Из порождающих слов

(блок 4), согласно паре частей речи порождающих слов (блок 22), выделяется основа (блок 5) путем усечения неосновной части (блок 8). Эта основа преобразуется к своим формам (блоки 6, 7) посредством наборов наращиваемых/усекаемых (блок 10) и чередующихся (блок 11) буквенно/фонемных последовательностей. К полученной форме основы добавляется набор словообразовательных аффиксов (блок 9) в соответствии с частью речи (блок 22) порождаемого слова (блок 12). Результаты синтеза слов помещаются в соответствующие разделы базы данных (БД).

5. РАЗРАБОТКА СТРУКТУРЫ НЕЙРОСЕТИ, РЕАЛИЗУЮЩЕЙ ПРАВИЛА СИНТЕЗА СЛОВ

На основе разработанной структуры синтеза слов разработана нейронная сеть синтеза слов (рис.2) - пятислойная полносвязная с прямыми связями. В первом осуществляется выделение основ порождающих слов путем отсечения неосновной части. Во втором – преобразование основ с учетом линейных морфонологических преобразований. В третьем – преобразование основ с учетом нелинейных морфонологических преобразований. В четвертом – формирование порожденного слова путем добавления к основе набора словообразовательных аффиксов. В пятом – формирование множества слов, непосредственно порожденных от входного слова (словообразовательная парадигма).

6. ПРОЦЕДУРА ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОСЕТИ

После формирования структуры сети произведено ее обучение, заключающееся в закреплении установившихся ассоциативных связей для данной технологической карты путем настройки весовых коэффициентов. Наиболее вероятная цепочка характеризуется самыми высокими весовыми коэффициентами. Процедура обучения сети состоит из инициализации, прямого и обратного хода.

Инициализация

Производится инициализация весов связей (8) и коэффициентов для слоя 1 (9), слоя 2 (10), слоя 3 (11), слоя 4 (12).

$$w_{ij}^{(t)} = 1, \quad t \in \overline{1, 5}, \quad (8)$$

$$M(\beta_j^{(1)}) = M(\overline{L1}_q^s), \quad q = [j/\eta(\overline{\mathbf{V1}}^s)] + 1, \quad (9)$$

$$M(\beta_j^{(2)}) = M(\overline{\widetilde{L1}}_q^s), \quad q = [j/\eta(\overline{\widetilde{\mathbf{D1}}}^s)] + 1, \quad (10)$$

$$M(\beta_j^{(3)}) = M(\overline{\widetilde{\widetilde{L1}}}_q^s), \quad q = [j/\eta(\overline{\widetilde{\widetilde{\mathbf{D1}}}}^s)] + 1, \quad (11)$$

$$M(\beta_j^{(4)}) = M(\overline{C}_r^s), \quad r = [j/\eta(\overline{\mathbf{B1}}^s)] + 1, \quad (12)$$

где $\lfloor \rfloor$ – целая часть
Прямой ход

Первый слой состоит из $\eta(\overline{\mathbf{L1}}^s)$ групп, каждая из которых содержит $\eta(\overline{\mathbf{V1}}^s)$ нейронов, соответствующих векторам пар неосновных частей слов. В этом слое вычисляется информационная мера пары основ порождающих слов, используя функцию активации (13). При этом информационная мера $\psi_j^{(1)}$ определена в виде (14). Информационная мера $\zeta_1^{(0)}$ (15) вычисляется в виде конкатенации информационных мер основ (16)-(17).

$$M(x_j^{(1)}) = f(M(\psi_j^{(1)})) = \begin{cases} M(\beta_j^{(1)}), & M(\beta_j^{(1)}) = M(\psi_j^{(1)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где} \quad (13)$$

$$j \in \overline{1, N^{(1)}}, \quad N^{(1)} = \eta(\overline{\mathbf{L1}}^s) \cdot \eta(\overline{\mathbf{V1}}^s)$$

$$M(\psi_j^{(1)}) = w_{1j}^{(1)} M(\zeta_1^{(0)}), \quad (14)$$

$$M(\zeta_1^{(0)}) = M(\xi_1^s) \diamond M(\xi_2^s), \quad (15)$$

$$M(\xi_1^s) = M(x_{11}) \circ M(v_{u1}^s), \quad u = j \bmod \eta(\overline{\mathbf{V1}}^s), \quad (16)$$

$$M(\xi_2^s) = M(x_{12}) \circ M(v_{u2}^s), \quad u = j \bmod \eta(\overline{\mathbf{V1}}^s), \quad (17)$$

где \circ - усечение справа, \diamond - конкатенация, \bmod - деление по модулю

Второй слой состоит из $\eta(\widehat{\mathbf{L1}}^s)$ групп, каждая из которых содержит $\eta(\widehat{\mathbf{D1}}^s)$ нейронов, соответствующих векторам наращиваемых/усекаемых буквенных/фонемных последовательностей. В этом слое формируется информационная мера пары форм основ порождающих слов (с наращением/усечением букв/фонем), используя функцию активации (18). При этом информационная мера $\psi_j^{(2)}$ определена в виде (19). Информационная мера $\zeta_i^{(1)}$ (20) вычисляется в виде конкатенации информационных мер форм основ (21)-(22).

$$M(x_j^{(2)}) = f(M(\psi_j^{(2)})) = \begin{cases} M(\beta_j^{(2)}), & M(\beta_j^{(2)}) \in M(\psi_j^{(2)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где} \quad (18)$$

$$j \in \overline{1, N^{(2)}}, \quad N^{(2)} = \eta(\widehat{\mathbf{L1}}^s) \cdot \eta(\widehat{\mathbf{D1}}^s),$$

$$M(\psi_j^{(2)}) = \bigcup_{i=1}^{N^{(1)}} w_{ij}^{(2)} M(\zeta_i^{(1)}), \quad (19)$$

$$M(\zeta_i^{(1)}) = M(\xi_1^s) \diamond M(\xi_2^s), \quad (20)$$

$$M(\xi_1^s) = ((M(\widehat{d}_{m1}^s) \diamond M(x_{i1}^{(1)})) \circ M(\widehat{d}_{m3}^s)) \diamond M(\widehat{d}_{m2}^s), \quad m = j \bmod \eta(\widehat{\mathbf{D1}}^s), \quad (21)$$

$$M(\xi_2^s) = ((M(\widehat{d}_{m4}^s) \diamond M(x_{i2}^{(1)})) \circ M(\widehat{d}_{m6}^s)) \diamond M(\widehat{d}_{m5}^s), \quad m = j \bmod \eta(\overline{\widehat{\mathbf{D1}}^s}) \quad (22)$$

Третий слой состоит из $\eta(\overline{\widehat{\mathbf{L1}}^s})$ групп, каждая из которых содержит $\eta(\overline{\widehat{\mathbf{D1}}^s})$ нейронов, соответствующих векторам чередующихся буквенных/фонемных последовательностей. В этом слое формируется информационная мера пары форм основ порождающих слов (с наращением/усечением/чередованием букв/фонем), используя функцию активации (23). При этом информационная мера $\psi_j^{(3)}$ определена в виде (24). Информационная мера $\zeta_i^{(2)}$ (25) вычисляется в виде конкатенации информационных мер форм основ (26)-(27), формируемых на базе векторов рангов форм основ (28)-(29), которые получены в соответствии с правилами нелинейных морфонологических преобразований (30)-(32).

$$M(x_j^{(3)}) = f(M(\psi_j^{(3)})) = \begin{cases} M(\beta_j^{(3)}), & M(\beta_j^{(3)}) \in M(\psi_j^{(3)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где} \quad (23)$$

$$j \in \overline{1, N^{(3)}}, \quad N^{(3)} = \eta(\overline{\widehat{\mathbf{L1}}^s}) \cdot \eta(\overline{\widehat{\mathbf{D1}}^s})$$

$$M(\psi_j^{(3)}) = \bigcup_{i=1}^{N^{(2)}} w_{ij}^{(3)} M(\zeta_i^{(2)}), \quad (24)$$

$$M(\zeta_i^{(2)}) = M(\xi_1^s) \diamond M(\xi_2^s), \quad (25)$$

$$M(\xi_1^s) = \|\mu(\xi_1^s)\| = \sum_{t=1}^{|\xi_1^s|} (r(\xi_{1t}^s) * 2^{(|\xi_1^s|-t)n}), \quad (26)$$

$$M(\xi_2^s) = \|\mu(\xi_2^s)\| = \sum_{t=1}^{|\xi_2^s|} (r(\xi_{2t}^s) * 2^{(|\xi_2^s|-t)n}), \quad (27)$$

$$\mu(\xi_1^s) = (r(\xi_{11}^s), \dots, r(\xi_{1t}^s), \dots, r(\xi_{1M}^s)), \quad (28)$$

$$\mu(\xi_2^s) = (r(\xi_{21}^s), \dots, r(\xi_{2t}^s), \dots, r(\xi_{2M}^s)), \quad (29)$$

а) если $M(\widetilde{d}_{v1}^s) = 0 \wedge M(\widetilde{d}_{v2}^s) \neq 0$ (в форме основы первого слова появляется гласная между согласными), $v = j \bmod \eta(\overline{\widehat{\mathbf{D1}}^s})$, то

$$|x_{i1}^{(2)}| = len \wedge (r(x_{i1c}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\} \wedge r(x_{i1,c+1}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\}) \wedge \quad (30)$$

$$\left((c+1 = len) \vee \left(\bigwedge_{k=c+1}^{len-1} \neg (r(x_{i1k}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\} \wedge r(x_{i1,k+1}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\}) \right) \right) \rightarrow$$

$$\left(\bigwedge_{p=1}^j r(\xi_{1p}^s) = r(x_{i1p}^{(2)}) \right) \wedge r(\xi_{1,c+1}^s) = r(\widetilde{d}_{v21}^s) \wedge \left(\bigwedge_{b=c+2}^{len} r(\xi_{1b}^s) = r(x_{i1,b-1}^{(2)}) \right), \quad c \in \overline{1, |x_{i1}^{(2)}| - 1},$$

где $\{r(T_i^1)\} \subset \{r(A_i)\}$, $\{r(T_i^2)\} \subset \{r(\Phi_i)\}$ - множество рангов согласных

Аналогично для формы основы второго слова

б) если $M(\tilde{d}_{v1}^s) \neq 0 \wedge M(\tilde{d}_{v2}^s) = 0$ (в форме основы первого слова исчезает гласная между согласными), то

$$|x_{i1}^{(2)}| = len \wedge (r(x_{i1,c-1}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\} \wedge r(x_{i1c}^{(2)}) = r(\tilde{d}_{v11}^s) \wedge r(x_{i1,c=1}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\}) \wedge \quad (31)$$

$$\left((c+1 = len) \vee \left(\bigwedge_{k=c+1}^{len-1} \neg(r(x_{i1,k-1}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\} \wedge r(x_{i1k}^{(2)}) = r(\tilde{d}_{v11}^s) \wedge r(x_{i1,k+1}^{(2)}) \in \{r(T_i^s)\}) \right) \right) \rightarrow$$

$$\left(\bigwedge_{p=1}^j r(\xi_{1p}^s) = r(x_{i1p}^{(2)}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{b=c+1}^{len-1} r(\xi_{1b}^s) = r(x_{i1,b+1}^{(2)}) \right), \quad c \in \overline{2, |x_{i1}^{(2)}| - 1}$$

Аналогично для формы основы второго слова

в) если $M(\tilde{d}_{v1}^s) \neq 0 \wedge M(\tilde{d}_{v2}^s) \neq 0$ (в форме основы первого слова заменяются буквенные последовательности), то

$$|\tilde{d}_{v1}^s| = len1 \wedge |\tilde{d}_{v2}^s| = len2 \wedge |x_{i1}^{(2)}| = len3 \wedge \left(\bigwedge_{m=1}^{len1} r(x_{i1,c+m}^{(2)}) = r(\tilde{d}_{v1m}^s) \right) \wedge \quad (32)$$

$$\left((c + len1 = len3) \vee \bigwedge_{k=c+1}^{len3} \neg \left(\bigwedge_{n=1}^{len1} (r(x_{i1,k+n}^{(2)}) = r(\tilde{d}_{v1n}^s)) \right) \right) \rightarrow$$

$$\left(c = 0 \vee \left(\bigwedge_{p=1}^j r(\xi_{1p}^s) = r(x_{i1p}^{(2)}) \right) \right) \wedge \left(\bigwedge_{z=1}^{len2} r(\xi_{1,(c+1)+z}^s) = r(\tilde{d}_{v2z}^s) \right) \wedge$$

$$\left(\bigwedge_{b=1}^{len3-(c+len1)} r(\xi_{1,(c+len2+1)+b}^s) = r(x_{i1,(c+len1+1)+b}^{(2)}) \right), \quad c \in \overline{0, |x_{i1}^{(2)}| - 1}$$

Аналогично для формы основы второго слова

Четвертый слой состоит из $\eta(\overline{\mathbf{C}}^s)$ групп, каждая из которых содержит $\eta(\overline{\mathbf{B1}}^s)$ нейронов, соответствующих векторам аффиксов. В этом слое формируется информационная мера порожденного слова, используя функцию активации (33). При этом информационная мера $\psi_j^{(4)}$ определена в виде (34). Информационная мера $\zeta_i^{(3)}$ (35) вычисляется в виде конкатенации информационных мер форм основ и аффиксов.

$$M(x_j^{(4)}) = f(M(\psi_j^{(4)})) = \begin{cases} M(\beta_j^{(4)}), & M(\beta_j^{(4)}) \in M(\psi_j^{(4)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где} \quad (33)$$

$$j \in \overline{1, N^{(4)}}, \quad N^{(4)} = \eta(\overline{\mathbf{C}}^s) \cdot \eta(\overline{\mathbf{B1}}^s),$$

$$M(\psi_j^{(4)}) = \bigcup_{i=1}^{N^{(3)}} w_{ij}^{(4)} M(\zeta_i^{(3)}), \quad (34)$$

$$M(\zeta_i^{(3)}) = M(b_{p1}^s) \diamond M(x_{i1}^{(3)}) \diamond M(b_{p2}^s) \diamond M(x_{i2}^{(3)}) \diamond M(b_{p3}^s) \diamond M(x_{i3}^{(3)}) \diamond M(b_{p4}^s) \diamond M(x_{i4}^{(3)}) \diamond M(b_{p5}^s), \quad (35)$$

$$p = j \bmod \eta(\overline{\mathbf{B1}}^s)$$

Пятый (выходной) слой содержит один нейрон. В этом слое формируется словообразовательная парадигма y_1 , используя функцию активации (36). При этом информационная мера $\psi_j^{(5)}$ определена в виде (37).

$$M(y_1) = f(M(\psi_1^{(5)})) = \begin{cases} M(\psi_1^{(5)}), & |M(\psi_1^{(5)})| > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \text{ где} \quad (36)$$

$$M(\psi_1^{(5)}) = \bigcup_{i=1}^{N^{(4)}} w_{i1}^{(5)} M(x_i^{(4)}) \quad (37)$$

Обратный ход

Весовые коэффициенты пятого слоя вычисляются согласно (38), четвертого – согласно (39), третьего – согласно (40), второго – согласно (41), первого – согласно (42).

$$w_{i1}^{(5)} = \begin{cases} 1, & M(x_i^{(4)}) \in M(y_1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i \in \overline{1, N^{(4)}} \quad (38)$$

$$w_{ij}^{(4)} = \begin{cases} 1, & M(\zeta_i^{(3)}) = M(x_j^{(4)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i \in \overline{1, N^{(3)}}, \quad j \in \overline{1, N^{(4)}} \quad (39)$$

$$w_{ij}^{(3)} = \begin{cases} 1, & M(\zeta_i^{(2)}) = M(x_j^{(3)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i \in \overline{1, N^{(2)}}, \quad j \in \overline{1, N^{(3)}} \quad (40)$$

$$w_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 1, & M(\zeta_i^{(1)}) = M(x_j^{(2)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad i \in \overline{1, N^{(1)}}, \quad j \in \overline{1, N^{(2)}} \quad (41)$$

$$w_{1j}^{(1)} = \begin{cases} 1, & M(\zeta_1^{(0)}) = M(x_j^{(1)}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad j \in \overline{1, N^{(1)}} \quad (42)$$

После процедуры обучения сеть методологически готова для синтеза слов, характеризующих технологическую карту. Процедура прогноза проводится аналогично прямому ходу процедуры обучения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основным результатом данной статьи является методика синтеза слов, входящих в описание объектов и действий команд производственной системы, которая включает в себя: формальное представление языковых конструкций; присвоение им количественных оценок; закрепление взаимосвязей между языковыми конструкциями; разработку структуры синтеза слов; формирование структуры нейросети, реализующей правила синтеза слов; разработку процедуры обучения. Впервые формализованы правила линейных и нелинейных морфологических преобразований слов.

Представляется перспективным дальнейшее изучение и разработка правил анализа и синтеза языковых структур. Основные положения работы могут быть реализованы в интеллектуальной системе в виде алгоритмов, обеспечивающих общение с пользователем на естественном языке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. Математическая теория конструирования систем управления. - М.:Высшая школа, 2003. - 615 с.
2. Интеллектуальное управление динамическими системами / Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федун Б.Е. - М.:Физико-математическая литература, 2000. - 352 с.
3. Finite element modelling of the effect of non-metallic inclusions in metal forming processes / Riedel Ulrich T., Bleck Wolfgang, Morgan John E. // Comput. Mater. Sci. - 1999. - №16 - pp.32 - 38.
4. Криводубский О.А., Федоров Е.Е. Формальное представление русского языка и речи // Искусственный интеллект. - 2003. - № 4. - С. 402-410.
5. Современный русский язык / В.А. Белошапкова, Е.А.Брызгунова, Е.А.Земская и др.; Под ред. В.А.Белошапковой. - М.:Азбуковник, 1997. - 928 с.
6. Русская грамматика: В 2т.- М.:Наука, 1980. - т.1: Фонетика. Словообразование. Морфология. - 784 с.

Статья поступила в редакцию 04.11.2006

s -ДИСКРИМИНАНТЫ И s -УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ

© А.С. Исмаилова, Д.В. Третьяков

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И.ВЕРНАДСКОГО,
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО,4, Г.СИМФЕРОПОЛЬ, КРЫМ, УКРАИНА, 95007
E-MAIL: *tretyakov@crimea.edu***Abstract**

The set of all quadratic irrationalities (s -discriminants) with decomposition $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, sq_0]$ ($s \geq 2$ – parameter) are described. Theory of Pell s -equation is constructed. The inverse problem (reconstruction of s -discriminant with the help from continued fraction period's symmetric part) is solved. Key words: s -discriminants, Pell s -equation, partial periodic continued fraction, quadratic irrationalities.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $ax^2 + 2bxy + cy^2$ – целочисленная квадратичная форма и $D = b^2 - ac$ – ее дискриминант. Классы целочисленно эквивалентных форм с фиксированным D образуют конечную абелеву группу порядка $h(D)$, где

$$h(D) = c_D \frac{\sqrt{|D|} L(1, D)}{R(D)}, L(s, D) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) m^{-s},$$

c_D – явная константа, практически не зависящая от D , $L(s, D)$ – соответствующий ряд Дирихле [1]. $R(D) = 1$ при $D < 0$, $R(D)$ – регулятор поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ при $D > 0, D \neq k^2$. Регулятор связан с $\varepsilon(D)$ – основной единицей поля соотношением $R(D) = \log \varepsilon(D)$, а сама основная единица $\varepsilon(D) = P + \sqrt{D}Q$ определяется наименьшими положительными решениями $\langle P, Q \rangle$ уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$ [1], [2]. Решения уравнения Пелля определяются разложением в цепную дробь (ЦД):

$$\sqrt{D} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, 2q_0], \quad (1)$$

поскольку $\frac{P}{Q}$ совпадает с одной из подходящих дробей (ПД) этого разложения. Отсюда, длина периода ζ является важнейшей характеристикой для оценки $h(D)$ (см., напр., [3], [4], [8], [10]). Отметим, что симметричная часть периода правой части равенства (1) не единственным образом определяет дискриминант. Задача описания всех дискриминантов по симметричной части периода (1) была решена Голубевой Е.П. в работе [9].

В связи с этим приходим к постановке следующей проблемы. Исследовать более общие квадратичные иррациональности (КИ), которые допускают следующие разложения в ЦД $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1}, sq_0]$, где $s \geq 2$ – натуральный параметр (в работе такие КИ называются s -дискриминантами).

Анализ последних достижений и публикаций, посвященных этой проблеме (см., напр., [5], [6], [7], [11], [12]-[15]), позволяет сделать вывод, что в настоящее время s -дискриминанты и вопросы, связанные с этим понятием, не исследовались. *Нерешенным является вопрос об описании s -дискриминантов, о построении теории s -уравнения Пелля, о решении задачи восстановления s -дискриминантов по симметричной части периода разложения в ЦД.*

Целью настоящей работы является изучение s -дискриминантов, s -уравнения Пелля, а также решение обратной задачи восстановления s -дискриминанта по симметричной части его разложения в бесконечную цепную дробь.

Все определения и понятия, используемые ниже без пояснений, хорошо известны специалистам. При необходимости их можно найти в литературе [1], [2], [5].

Первые два раздела работы написаны вторым автором, третий раздел – первым.

1. s -ДИСКРИМИНАНТЫ

Пусть D – натуральное число, не являющееся точным квадратом. Хорошо известно [1], [2] разложение в ЦД

$$\frac{\sqrt{D}}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, 2q_0}],$$

где $D \geq a^2$ и период ЦД содержит симметричную часть. Следующая теорема является обобщением приведённого предложения.

Теорема 1. Равенство

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0}], \quad (2)$$

где $s \geq 2$ – натуральный параметр, возможно тогда и только тогда, когда

$$2b = (s - 2)q_0a, \quad q_0 = [\alpha] > 1. \quad (3)$$

Если это условие выполнено, то

$$b = (s - 2)q_0P_{n-1}, \quad a = 2P_{n-1}, \quad D = (sq_0P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n, \quad (4)$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2, \dots, q_2, q_1]. \quad (5)$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0}]$, $\alpha' = -\frac{\sqrt{D} + b}{a}$ – сопряжённая КИ. Тогда в силу 2-й теоремы Галуа

$$\alpha + (s - 1)q_0 = [\overline{sq_0, q_1, \dots, q_1}] = -\alpha' + q_0,$$

откуда и следует условие (3). Обратно, если выполнено условие (3), то $\omega = \alpha + (s - 1)q_0 > 1$ и

$$-\omega' = \frac{(\sqrt{D} - b) + 2b - (s - 1)q_0a}{a} = \alpha - q_0 \in (0, 1).$$

Следовательно, по 1-й теореме Галуа число ω раскладывается в чистую периодическую дробь вида $[\overline{sq_0, q_1, \dots, q_n}]$. Так как по 2-й теореме Галуа

$$(\omega')^{-1} = [\overline{q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, sq_0}] = (\alpha - q_0)^{-1} = [\overline{q_1, q_2, \dots, q_{n-1}, q_n, sq_0}],$$

то из единственности разложения в ЦД следуют равенства : $q_n = q_1, q_{n-1} = q_2, \dots$.

Поскольку

$$(\omega - sq_0)^{-1} = [\overline{q_1, \dots, q_1, sq_0}] = [q_1, \dots, q_1, \omega] = \frac{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

то

$$\omega - sq_0 = \frac{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}}{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}, \quad \omega^2 P_{n-1} - \omega sq_0 P_{n-1} - (sq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = s^2 q_0^2 P_{n-1}^2 + 4P_{n-1}(sq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = (sq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n.$$

Отсюда

$$\alpha = \omega - (s - 1)q_0 = \frac{\sqrt{D} - (s - 2)q_0 P_{n-1}}{2P_{n-1}}$$

Теорема доказана. □

Далее КИ, представимые формулой (2), будем называть *s - дискриминантами*.

Пример 1. КИ $\alpha = \frac{\sqrt{485} - 5}{10}$ раскладывается в ЦД $[1, \overline{1, 2, 2, 1, 3}]$, ($s = 3, q_0 = 1$). Таким образом, α – 3-дискриминант.

Пример 2. Рассмотрим ЦД $\beta = [7, \overline{3, 2, 1, 2, 3, 35}]$. Используя формулы (4), приходим к равенству

$$\beta = \frac{\sqrt{10491117} - 1911}{182}.$$

Следствие 1. Для того чтобы ЦД $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0}]$ являлась разложением числа $\sqrt{D} - b$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$(sq_0 Q_{n-1} + Q_{n-2} \dot{\vdots} P_{n-1}) \wedge (sq_0 P_{n-1} \dot{\vdots} 2).$$

Пример 3. ЦД $\gamma = [2, \overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$ удовлетворяет всем условиям следствия 1. Действительно,

$$\frac{P_5}{Q_5} = [1, 1, 5, 5, 1, 1] = \frac{125}{68}, \quad Q_4 = 37, \quad sq_0 Q_5 + Q_4 = 1125 \dot{\vdots} 125.$$

Легко видеть, что $\gamma = \sqrt{73} - 6$.

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. Для того чтобы ЦД $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, 2q_0}]$ являлась разложением числа \sqrt{D} , необходимо и достаточно, чтобы

$$2q_0 Q_{n-1} + Q_{n-2} \dot{\vdots} P_{n-1}$$

Пример 4. Пусть $\delta = [14, \overline{1, 2, 3, 2, 1, 28}]$. Тогда

$$\frac{P_4}{Q_4} = [1, 2, 3, 2, 1] = \frac{33}{23}, \quad Q_3 = 16, \quad 2q_0 Q_4 + Q_3 = 660 \dot{\vdots} 33.$$

Таким образом, данная ЦД на основании следствия 2 является разложением числа \sqrt{D} . По формулам (4) $\delta = \sqrt{216}$.

КИ α удовлетворяет следующему квадратному уравнению

$$P_{n-1}x^2 + (s-2)q_0P_{n-1}x - c = 0,$$

где $c = (s-1)q_0^2P_{n-1} + sq_0Q_{n-1} + Q_{n-2} > 0$.

Имеет место

Следствие 3. Если выполнено условие (3), то $D - b^2 = 2ac$, $D - (aq_0 + b)^2 \div a$.

2. s -УРАВНЕНИЕ ПЕЛЛЯ И ЕГО РЕШЕНИЯ

Пусть D – натуральное число, не являющееся точным квадратом. Рассмотрим диофантово уравнение

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = a^2, \quad (6)$$

где α – s -дискриминант, $a \neq 1$. В дальнейшем это уравнение будем называть s -уравнением Пелля.

Квадратичная форма $\{a^2, 2ab, b^2 - D\}$, порождающая уравнение (6) и квадратичная форма $\{1, 0, -D\}$, порождающая уравнение Пелля, неэквивалентны, так как имеют разные дискриминанты, соответственно, $4a^2D$ и $4D$. (см., напр., [1], [2]).

Отметим также, что при $a = 1$ уравнение (6) эквивалентно уравнению Пелля.

Лемма 1. Если D – число, не являющееся точным квадратом, то существует константа $M > a^2 > 0$, что неравенство

$$|(ax + by)^2 - Dy^2| < M$$

имеет бесконечное множество взаимно простых натуральных решений.

Доказательство. Так как $(ax + by)^2 - Dy^2 = (ax - (\sqrt{D} - b)y)(ax + (\sqrt{D} + b)y)$ и существует бесконечное множество пар натуральных чисел x, y , таких что $(x, y) = 1$, и $|xy^{-1} - \alpha| < y^{-2}$ [2], то $|ax - (\sqrt{D} - b)y| < ay^{-1}$, и

$$|ax + (\sqrt{D} + b)y| < |ax - (\sqrt{D} - b)y| + 2\sqrt{D}y < \frac{a}{y} + 2\sqrt{D}y.$$

Отсюда

$$|(ax + by)^2 - Dy^2| < \frac{a}{y} \left(\frac{a}{y} + 2\sqrt{D}y \right) = \frac{a^2}{y^2} + 2\sqrt{D}a < a^2 + 2\sqrt{D}a.$$

Лемма доказана. \square

Из леммы следует бесконечность множества положительных решений уравнения (6).

На множестве всех положительных решений указанного уравнения введём отношение частичного порядка \prec , считая, что $\langle x, y \rangle \prec \langle u, v \rangle \Leftrightarrow ax + (\sqrt{D} + b)y \leq au + (\sqrt{D} + b)v$. Рассмотрим наименьшее положительное решение ϕ . Такое решение существует и единственно. Назовём его *фундаментальным* или *основной единицей*.

Лемма 2. Пусть $\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a}$ s -дискриминант. Тогда:

- если $\langle x_*, y_* \rangle$ – положительное решение уравнения (6), то $\frac{x_*}{y_*}$ – одна из ПД к числу α ;
- если $\langle x', y' \rangle$ – положительное решение уравнения (6), то $x' = P_{kn-1}$, $y' = Q_{kn-1}$, где k – период разложения α в ЦД, а $n \in \mathbb{N}$;
- все положительные решения s -уравнения Пелля исчерпываются формулами $\langle P_{kt-1}, Q_{kt-1} \rangle$, где $t \in \mathbb{N}$ – таково, что kt – чётное число.

Доказательство.

а) если $(ax_* + by_*)^2 - Dy_*^2 = a^2$, то

$$\left(x_* - \frac{\sqrt{D}-b}{a} y_*\right) \left(x_* + \frac{\sqrt{D}+b}{a} y_*\right) = 1, \text{ и } \frac{x_*}{y_*} > \frac{\sqrt{D}-b}{a}.$$

Отсюда

$$\left| \frac{x_*}{y_*} - \frac{\sqrt{D}-b}{a} \right| = \frac{1}{y_*^2 \left| \frac{x_*}{y_*} + \frac{\sqrt{D}+b}{a} \right|} < \frac{1}{2y_*^2},$$

и, следовательно, $\frac{x_*}{y_*} - \text{ПД к } \alpha$ [2].

б) пусть k – период разложения α в ЦД и $\frac{P_j}{Q_j} - \text{ПД к } \alpha$ – ПД к этому числу, числитель и знаменатель которой образуют решение $\langle P_j, Q_j \rangle$ уравнения (6). Число α является корнем квадратного уравнения $a^2x^2 + 2abx - (D - b^2) = 0$. Остаток r_{j+1} порядка $j + 1$ разложения α в ЦД является корнем квадратного уравнения $A_{j+1}x^2 + B_{j+1}x + C_{j+1} = 0$ [2], где

$$A_{j+1} = a^2P_j^2 + 2abP_jQ_j - (D - b^2)Q_j^2 = a^2,$$

$$B_{j+1} = 2a^2P_jP_{j-1} + 2ab(P_jQ_{j-1} + P_{j-1}Q_j) - 2(D - b^2)Q_jQ_{j-1} = -2la$$

чётное число. Отсюда $r_{j+1} = \frac{\sqrt{D}+l}{a}$. Однако r_{j+1} раскладывается в ЦД с тем же периодом, что и α . При этом

$$r_{j+1} = \frac{\sqrt{D}+l}{a} = \alpha + \frac{(l-b)+2b}{a} = \alpha + (s-1)q_0 + \frac{l-b}{a} - q_0,$$

откуда следует, что $l = b + aq_0$, $r_{j+1} = \alpha + (s-1)q_0$. Следовательно, $j + 1 = kn$, $n \in \mathbb{N}$ и $j = kn - 1$.

в) пусть $\omega = [\overline{sq_0, q_1, \dots, q_1}] = \alpha + (s-1)q_0$ и $m \in \mathbb{N}$. Запишем число α в виде:

$$\alpha = [q_0, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0, \dots, q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, \omega].$$

mk

Тогда

$$\alpha = \frac{\omega P_{mk-1} + P_{mk-2}}{\omega Q_{mk-1} + Q_{mk-2}} = \frac{(\alpha + (s-1)q_0)P_{mk-1} + P_{mk-2}}{(\alpha + (s-1)q_0)Q_{mk-1} + Q_{mk-2}}$$

или $(\sqrt{D}-b)(Q_{mk-1}a(\sqrt{D}-b+(s-1)q_0a)+a^2Q_{mk-2}) = P_{mk-1}a(\sqrt{D}-b+(s-1)q_0a)+a^2P_{mk-2}$. Последнее уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} q_0Q_{km-1} + Q_{km-2} = P_{km-1} \\ (D - b(aq_0 + b))Q_{km-1} - abQ_{km-2} = (aq_0 + b)aP_{km-1} + a^2P_{km-2}. \end{cases}$$

Подставляя первое уравнение системы в её второе уравнение, получим:

$$\begin{aligned} (-1)^{km} a^2 &= a^2(P_{km-1}Q_{km-2} - P_{km-2}Q_{km-1}) = \\ &= a^2P_{km-1}(P_{km-1} - q_0Q_{km-1}) - ((D - b^2)Q_{km-1} - a^2(s-1)q_0P_{km-1})Q_{km-1} = \\ &= a^2P_{km-1}^2 + a^2(s-2)q_0P_{km-1}Q_{km-1} - (D - b^2)Q_{km-1}^2 = (aP_{km-1} + bQ_{km-1})^2 - DQ_{km-1}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, пара чисел $\langle P_{km-1}, Q_{km-1} \rangle$ удовлетворяет s -уравнению Пелля (6) тогда и только тогда, когда km – чётное. Лемма доказана. \square

Отметим, что любое решение $\langle x, y \rangle$ s -уравнения Пелля с $x > 0$ и $ax + by > 0$ параметризуется уравнениями

$$\begin{cases} x = \text{cht} - \frac{b \text{sh}t}{\sqrt{D}} \\ y = \frac{a \text{sh}t}{\sqrt{D}}, \end{cases} \quad (7)$$

где $t \in \mathbb{R}$ таково, что x, y определяют целочисленное решение уравнения (6) с $x > 0$ и $ax + by > 0$.

Используя условие (3) и следствие 2 из теоремы 1, легко убедиться в том, что обе части последнего уравнения можно разделить на a :

$$ax^2 + 2bxy - 2cy^2 = a. \quad (8)$$

Обозначим через \mathfrak{P}_s – множество всех целочисленных решений s -уравнения Пелля с $x > 0$ и $ax + by > 0$. На этом множестве определим бинарную операцию $*$ следующим образом:

$$\langle x, y \rangle * \langle u, v \rangle := \left\langle xu + \frac{(D - b^2)yv}{a^2}, xv + yu + (s - 2)q_0yv \right\rangle. \quad (9)$$

Отметим, что $\frac{(D - b^2)yv}{a^2} = \frac{2cyv}{a} \in \mathbb{Z}$. В самом деле, если, в силу (8),

$ax^2 + 2bxy - 2cy^2 = a$ и $au^2 + 2buv - 2cv^2 = a$, то $2cy^2 \vdots a$ и $2cv^2 \vdots a$, откуда $2cyv \vdots a$.

Правая часть равенства (9), как легко видеть, определяет также некоторое решение s -уравнения Пелля. Операция $*$ коммутативна и ассоциативна. Более того, имеет место

Лемма 3. $\langle \mathfrak{P}_s ; * \rangle$ – циклическая абелева группа с порождающим элементом ϕ .

Доказательство. Пара $\phi^0 := \varepsilon = \langle 1, 0 \rangle$, удовлетворяя уравнению (6), является единицей в \mathfrak{P}_s . Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\phi^n \in \mathfrak{P}_s$. Кроме того операция $*$ обратима, так как

$$\langle x, y \rangle^{-1} = \langle x + (s - 2)q_0y, -y \rangle \in \mathfrak{P}_s \quad \forall \langle x, y \rangle \in \mathfrak{P}_s.$$

Следовательно, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\phi^{-n} \in \mathfrak{P}_s$.

Пусть Θ_s (Θ_s^+) – множество всех вещественных (положительных) чисел t , для которых формулы (7) определяют целочисленные (положительные) решения s -уравнения Пелля. Рассмотрим биективное отображение $f : \mathfrak{P}_s \rightarrow \Theta_s$, где $f(\langle x, y \rangle) := t$. Здесь t определяет x и y по формулам (7). Из определения f и (9) вытекает, что Θ_s – абелева группа относительно сложения, а также, что группы \mathfrak{P}_s и Θ_s изоморфны. Так как в силу равенства $(ax + by) + \sqrt{D}y = ae^t$ отображение f индуцирует порядок в Θ_s^+ , то в Θ_s^+ есть наименьший элемент t_ϕ . Группа Θ_s – циклическая. В самом деле, если, существует $\tilde{t} \in \Theta_s$, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{t} \neq nt_\phi$, то $t_\phi > t_1 = \tilde{t} - \left[\frac{\tilde{t}}{t_\phi} \right] t_\phi > 0$. Отсюда $t_1 \in \Theta_s^+$, вопреки определению t_ϕ .

Лемма доказана. \square

Положим $\mathfrak{P}_s^* = \{ \langle -x, -y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in \mathfrak{P}_s \}$ и сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 2. Пусть α – s – дискриминант, k – длина периода разложения α в ЦД. Соответствующее α s – уравнение Пелля (6) имеет бесконечное множество $\mathfrak{P}_s \cup \mathfrak{P}_s^*$ целочисленных решений. Любое решение из \mathfrak{P}_s – это целая степень основной единицы

$\phi = \langle P_{kn_0-1}, Q_{kn_0-1} \rangle$, где $n_0 \in \mathbb{N}$ – наименьшее число, для которого kn_0 чётное, $\frac{P_{kn_0-1}}{Q_{kn_0-1}}$ – ЦД к α . Степень единицы понимается в смысле равенства (9).

Пример 5. Рассмотрим уравнение вида $5x^2 + 5xy - 23y^2 = 5$. Умножим обе его части на 20 и выделим полный квадрат : $(10x + 5y)^2 - 485y^2 = 100$. Отсюда $\alpha = \frac{\sqrt{485}-5}{10} = [1, \overline{1, 2, 2, 1, 3}]$, $s = 3$, $k = 5$. Фундаментальное решение данного 3-уравнения Пелля $\phi = \langle P_9, Q_9 \rangle = \langle 749, 440 \rangle$. Все остальные решения уравнения из \mathfrak{P}_3 согласно теореме 2 имеют вид $\phi_n^+ = \langle 749, 440 \rangle^n$, $\phi_n^- = \langle 1189, -440 \rangle^n$, $n \in \mathbb{N}$.

В заключение этого пункта отметим, что аналогично исследуется диофантово уравнение вида $(ax + by)^2 - Dy^2 = -a^2$, где $\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a}$ – *s*-дискриминант.

3. *s*-ДИСКРИМИНАНТЫ С ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНОЙ ПЕРИОДА РАЗЛОЖЕНИЯ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Рассмотрим *s*-дискриминант α с разложением в периодическую ЦД вида

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_L, q_{L+1}, q_L, \dots, q_2, q_1, sq_0}].$$

Лемма 4. Пусть $2L+2 = \zeta$ и приведенные иррациональности (ПИ) для числа α [1] имеют вид

$$\frac{b_0 + \sqrt{D}}{a_1}, \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_2}, \dots, \frac{b_L + \sqrt{D}}{a_{L+1}}, \frac{b_L + \sqrt{D}}{a_L}, \dots, \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_1}, \frac{b_0 + \sqrt{D}}{a_0}.$$

Тогда :

1) справедливы следующие соотношения :

$$\begin{cases} b_i^2 + a_i a_{i+1} = D \\ b_i + b_{i+1} = a_{i+1} q_{i+1}, \quad i = \overline{0, L} \\ 2b_L = a_{L+1} q_{L+1} \\ 2b_0 = sa_0 q_0, \end{cases} \quad (10)$$

2) диофантова система (10) относительно b_i ($i = \overline{0, L}$) и a_i ($i = \overline{1, L+1}$) равносильна следующей линейной диофантовой системе относительно неизвестных t_i ($i = \overline{1, L}$), b_L и a_i ($i = \overline{1, L+1}$) :

$$\begin{cases} 2b_0 = sa_0 q_0 \\ 2b_L = a_{L+1} q_{L+1} \\ t_{i+1} q_{i+1} = a_{i+2} - a_i, \quad i = \overline{0, L-1} \\ t_L = a_L q_L - a_{L+1} q_{L+1} \\ t_i = a_i q_i - a_{i+1} q_{i+1} - t_{i+1}, \quad i = \overline{1, L-1}. \end{cases}$$

Доказательство.

1) равенства получаются в результате разложения числа α в ЦД.

2) проверяется непосредственными вычислениями ($t_{i+1} = b_i - b_{i+1}, i = \overline{0, L-1}$). □

Замечание 1. Числа $a_i q_i - t_i$ и $a_i q_i + t_i$ имеют одинаковую четность, и, поэтому, значения t_i и a_i однозначно определяют b_i , если $a_{L+1} q_{L+1}$ – четное число.

Лемма 5. *Неизвестные a_i ($i = \overline{1, L+1}$) удовлетворяют соотношениям*

$$a_{L-i} = (-1)^{i+1}(a_{L+1}S_{i+1}T_{i-1} - a_L R_i^2), \quad (i = \overline{1, L}) \quad (11)$$

где S_i ($i = \overline{0, L+1}$), R_i ($i = \overline{0, L}$), T_i ($i = \overline{0, L-1}$) определяются рекуррентными формулами: $S_0 = T_0 = R_0 = 1$, $S_1 = q_{L+1}$, $R_1 = q_L$, $T_1 = q_{L-1}$,

$$S_{i+1} = q_{L-i+1}S_i + S_{i-1} \quad (i = \overline{1, L}), \quad (12)$$

$$R_{i+1} = q_{L-i}R_i + R_{i-1} \quad (i = \overline{1, L-1}), \quad (13)$$

$$T_{i+1} = q_{L-i-1}T_i + T_{i-1} \quad (i = \overline{1, L-2}). \quad (14)$$

Доказательство. Положим $T_{-1} = R_{-1} = 0$, $T_{-2} = 1$, тогда равенства (11) имеют место и при $i = -1; 0$. По лемме 4

$$t_{L-i} = a_{L-i}q_{L-i} + 2 \sum_{m=1}^i (-1)^m a_{L-i+m}q_{L-i+m} + (-1)^{i+1}a_{L+1}q_{L+1}. \quad (15)$$

Если (11) доказано при всех $i < i_0$, то покажем, что и при $i = i_0$ это равенство также справедливо. Будем считать, что $i_0 = 2k + 1$ (случай $i_0 = 2k$ аналогичен). Из леммы 4 и формулы (15)

$$a_{L-(2k+1)} = a_{L-(2k-1)} - q_{L-2k}t_{L-2k} = a_{L+1}(S_{2k}T_{2k-2} + q_{L-2k}^2 S_{2k+1}T_{2k-1} + q_{L+1}q_{L-2k} + 2q_{L-2k} \sum_{m=1}^{2k} q_{L-2k+m}S_{2k-m+1}T_{2k-m-1}) - a_L(R_{2k-1}^2 + q_{L-2k}^2 R_{2k}^2 + 2q_{L-2k} \sum_{m=1}^{2k} q_{L-2k+m}R_{2k-m}^2),$$

где скобка при a_L равна R_{2k+1}^2 , так как

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{2k} q_{L-2k+m}R_{2k-m}^2 &= \sum_{m=1}^{2k} R_{2k-m}(q_{L-2k+m}R_{2k-m}) = \sum_{m=1}^{2k} R_{2k-m}(R_{2k-m+1} - R_{2k-m-1}) = \\ &= \sum_{m=1}^{2k} (R_{2k-m}R_{2k-m+1} - R_{2k-m}R_{2k-m-1}) = R_{2k-1}R_{2k}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется множитель при a_{L+1} . Таким образом,

$$a_{L-(2k+1)} = a_{L+1}S_{2k+1}T_{2k} - a_L R_{2k+1}^2.$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Величины a_{L+1} и a_L удовлетворяют уравнению*

$$a_{L+1}S_{L+1}T_{L-1} - a_L R_L^2 = (-1)^{L+1}a_0. \quad (16)$$

Если $a_{L+1}q_{L+1}$ - четно, то остальные неизвестные a_i ($i = \overline{1, L-1}$), b_i ($i = \overline{0, L}$) и D , входящие в систему (10), вычисляются, соответственно, из уравнений

$$b_L = \frac{a_{L+1}q_{L+1}}{2}, \quad b_i = a_{i+1}q_{i+1} - b_{i+1}, \quad D = b_L^2 + a_L a_{L+1}. \quad (17)$$

Доказательство. Очевидно, что уравнение (11) при $i = L$ совпадает с (16) (поскольку $a_0 = a$). Остальные соотношения проверяются непосредственными вычислениями, как в леммах 4 и 5. □

Лемма 7. Пусть a_{L+1} и a_L – положительные решения уравнения (16), причем $a_{L+1}q_{L+1}$ – четно. Тогда

1) Все неизвестные a_i ($i = \overline{0, L-1}$) и b_i ($i = \overline{0, L}$), удовлетворяющие (11) и (17), положительны;

2) Если $2L + 2 = \zeta$ и ПИ, эквивалентные $\frac{\sqrt{D}-b}{a}$, имеют вид

$$\frac{b_0 + \sqrt{D}}{a_1}, \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_2}, \dots, \frac{b_L + \sqrt{D}}{a_{L+1}}, \frac{b_L + \sqrt{D}}{a_L}, \dots, \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_1}, \frac{b_0 + \sqrt{D}}{a_0},$$

то они составляют полную систему ПИ, эквивалентных $\frac{\sqrt{D}-b}{a}$.

Доказательство. Пусть, для определенности, L – нечетно, тогда из (11), при $i = L$, получаем:

$$a_{L+1} = a_L \frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} + \frac{a_0}{S_{L+1}T_{L-1}}.$$

1) Покажем, что a_i ($i = \overline{1, L-1}$) – положительны.

При нечетном i из (11) следует

$$\begin{aligned} a_{L-i} &= a_{L+1}S_{i+1}T_{i-1} - a_LR_i^2 = \left(a_L \frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} + \frac{a_0}{S_{L+1}T_{L-1}} \right) S_{i+1}T_{i-1} - a_LR_i^2 > \\ &> a_L \frac{S_{i+1}T_{i-1}R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} - a_LR_i^2 = a_LS_{i+1}T_{i-1} \left(\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} - \frac{R_i^2}{S_{i+1}T_{i-1}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{L-i} > a_LS_{i+1}T_{i-1} \left(\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} - \frac{R_i^2}{S_{i+1}T_{i-1}} \right). \tag{18}$$

Отношение $\frac{S_{i+1}}{R_i}$ в силу (12)-(14) является ПД к $\frac{S_{L+1}}{R_L}$ с четным номером [1], так что

$$\frac{S_{i+1}}{R_i} > \frac{S_{L+1}}{R_L}. \tag{19}$$

По аналогичным причинам

$$\frac{R_i}{T_{i-1}} < \frac{R_L}{T_{L-1}}. \tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получаем $a_i > 0$, где i – нечетно. Доказательство, что $a_i \neq 0$ вытекает из системы (17). При четном i из (11) следует

$$\begin{aligned} a_{L-i} &= a_LR_i^2 - a_{L+1}S_{i+1}T_{i-1} = a_LR_i^2 - \left(a_L \frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} + \frac{a_0}{S_{L+1}T_{L-1}} \right) S_{i+1}T_{i-1} = \\ &= a_LR_i^2 - a_L \frac{S_{i+1}T_{i-1}R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}} - \frac{a_0S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}} = a_L \left(R_i^2 - \frac{R_L^2S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}} \right) - \frac{a_0S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a_{L-i} = a_L \left(R_i^2 - \frac{R_L^2S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}} \right) - \frac{a_0S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}. \tag{21}$$

Имеют место неравенства

$$\frac{S_{i+1}}{R_i} < \frac{S_{L+1}}{R_L}, \quad \frac{R_i}{T_{i-1}} > \frac{R_L}{T_{L-1}}. \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21) получаем $a_{L-i} > -1$. Так как $a_i \neq 0$, то $a_i > 0$ и для четного i . Докажем теперь, что $b_i > 0$ ($i = \overline{0, L}$). Из леммы 4 следует, что $b_0 > 0$. Из (17) вытекает, что $b_L > 0$. Предположим, что $b_i \leq 0$, $i = \overline{1, L-1}$. Тогда по лемме 4 $b_{i-1}^2 = (a_i q_i - b_i)^2 \geq a_i^2 q_i^2 + b_i^2 = a_i^2 q_i^2 + D - a_i a_{i+1}$. Аналогично $b_{i+1}^2 \geq a_{i+1}^2 q_{i+1}^2 + D - a_i a_{i+1}$. Отсюда $a_{i+1}^2 q_{i+1}^2 - a_i a_{i+1} \leq -a_{i+1} a_{i+2}$, и $a_i^2 q_i^2 - a_i a_{i+1} \leq -a_{i-1} a_i$. Следовательно, $a_{i+1} q_{i+1}^2 + a_{i+2} \leq a_i$, $a_i q_i^2 + a_{i-1} \leq a_{i+1}$. Однако последние два неравенства одновременно выполняться не могут поскольку $a_{i+1} \geq a_i q_i^2 + a_{i-1} \geq (a_{i+1} q_{i+1}^2 + a_{i+2}) q_i^2 + a_{i-1} = a_{i+1} q_{i+1}^2 q_i^2 + a_{i+2} q_i^2 + a_{i-1}$. Получено противоречие.

Случай четного L рассматривается аналогично.

2) Пусть теперь $\tau = \frac{b + \sqrt{D}}{a}$ – ПИ, и натуральные $q, q_1, b_1, b_2, a_1, a_2$ удовлетворяют соотношениям

$$b + b_1 = aq, \quad b_1 + b_2 = a_1 q_1, \quad b_1^2 + a a_1 = b_2^2 + a_1 a_2 = D. \quad (23)$$

Покажем, что $\tau_1 = \frac{b_1 + \sqrt{D}}{a_1}$ – также ПИ. Условия приведения имеют вид $b_1 < \sqrt{D}$, $a_1 + b_1 > \sqrt{D}$, $b_1 + \sqrt{D} > a_1$ [1]. Первое следует из неравенства $D = b_1^2 + a a_1 > b_1^2$, третье – из приведённости τ и соотношений $a \leq aq = b + b_1 < b_1 + \sqrt{D}$.

Очевидно, $q < \tau$. Покажем, что $q > \tau - 1$, то есть, $q = [\tau]$. Если, напротив, $aq < b + \sqrt{D} - a$, то $b_1 = aq - b < \sqrt{D} - a$ и $a_1 = \frac{D - b_1^2}{a} > \frac{D - (\sqrt{D} - a)^2}{a} = 2\sqrt{D} - a$. Отсюда $b_2 = a_1 q_1 - b_1 > (2\sqrt{D} - a)q_1 - (\sqrt{D} - a) = \sqrt{D}(2q_1 - 1) - a(q_1 - 1) > \sqrt{D}$, что противоречит (23). Следовательно, $q = [\tau]$, и, значит, в силу (23) τ_1 – ПИ [1].

Рассмотрим КИ $\frac{b_L + \sqrt{D}}{a_{L+1}}$. Условие $b_L < \sqrt{D}$ выполнено. Неравенство $b_L + a_{L+1} > \sqrt{D}$ равносильно $a_{L+1}(q_{L+1} + 1) > a_L$. Действительно, $(b_L + a_{L+1})^2 > D \Leftrightarrow (a_{L+1}(a_{L+1}q_{L+1} + a_{L+1} - a_L) > 0)$. Из (22) и леммы 6 следует цепочка неравенств:

$$a_{L+1}(q_{L+1} + 1) > \frac{a_L R_L^2 (q_{L+1} + 1)}{S_{L+1} T_{L-1}} > \frac{a_L R_L (q_{L+1} + 1)}{S_{L+1}} > a_L,$$

поскольку в силу (22) $T_{L-1} < R_L$ и $R_L > q_{L+1} S_{L+1}$. Условие $b_L + \sqrt{D} > a_{L+1}$ выполнено так как $b_L \geq \frac{a_{L+1}}{2}$ и $\sqrt{D} > \frac{a_{L+1}}{2}$. Лемма доказана. \square

Лемма 8. Пусть a_{L+1} и a_L – удовлетворяют уравнению (16). Тогда

$$\begin{cases} a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2 ((-1)^{L-1} - R_L (S_L + T_{L-2})) + \delta R_L^2 \\ a_L = a_0 ((-1)^L S_L^2 - S_{L+1} T_{L-2} R_{L-1} (S_L + T_{L-2})) + \delta S_{L+1} T_{L-1}, \end{cases}$$

где $\delta \in \mathbb{Z}$ – произвольно.

Доказательство. Все решения уравнения (16) записываются в виде

$$\begin{cases} a_{L+1} = a_{L+1}^{(0)} + \delta R_L^2 \\ a_L = a_L^{(0)} + \delta S_{L+1} T_{L-1}, \end{cases}$$

где $\delta \in \mathbb{Z}$ – произвольно, а $\langle a_{L+1}^{(0)}, a_L^{(0)} \rangle$ – какое-то частное решение этого уравнения.

В самом деле, подставив эти равенства в уравнение (16), в результате получим:

$$(a_{L+1}^{(0)} + \delta R_L^2) S_{L+1} T_{L-1} - (a_L^{(0)} + \delta S_{L+1} T_{L-1}) R_L^2 =$$

$$= (a_{L+1}^{(0)} S_{L+1} T_{L-1} - a_L^{(0)} R_L^2) + \delta(R_L^2 S_{L+1} T_{L-1} - S_{L+1} T_{L-1} R_L^2) = (-1)^{L+1} a_0$$

Пусть, для определенности, L – нечетно, тогда $S_{L+1} R_{L-1} - S_L R_L = 1$. Действительно, в силу (12) и (13)

$$\begin{aligned} S_{L+1} R_{L-1} - S_L R_L &= R_{L-1}(q_1 S_L + S_{L-1}) - S_L(q_1 R_{L-1} + R_{L-2}) = S_{L-1} R_{L-1} - S_L R_{L-2} = \\ &= S_{L-1}(q_2 R_{L-2} + R_{L-3}) - (q_2 S_{L-1} + S_{L-2}) R_{L-2} = S_{L-1} R_{L-3} - S_{L-2} R_{L-2} = \\ &= \dots = (-1)^i (S_{L-i+1} R_{L-i-1} - S_{L-i} R_{L-i}) = \dots = -S_1 R_{-1} + S_0 R_0 = 1. \end{aligned}$$

Все решения уравнения $S_{L+1} x - R_L y = 1$ относительно неизвестных x и y записываются в виде

$$\begin{cases} x = R_{L-1} + \alpha R_L \\ y = S_L + \alpha S_{L+1}, \end{cases} \quad (24)$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}$ – произвольно, так как, подставив x и y из (24) в указанное уравнение, получаем:

$$S_{L+1}(R_{L-1} + \alpha R_L) - R_L(S_L + \alpha S_{L+1}) = S_{L+1} R_{L-1} - R_L S_L + \alpha(S_{L+1} R_L - R_L S_{L+1}) = 1.$$

Отсюда в силу (16)

$$a_{L+1} T_{L-1} = a_0(R_{L-1} + \alpha R_L) \quad (25)$$

$$a_L R_L = a_0(S_L + \alpha S_{L+1}). \quad (26)$$

Аналогично рассуждая при помощи уравнений (13) и (14), получаем, что при нечетном L имеет место следующее соотношение: $R_L T_{L-2} - R_{L-1} T_{L-1} = -1$. Это соотношение и (25) приводят нас к равенствам:

$$\begin{aligned} \alpha a_0 &= a_0 R_{L-1} T_{L-2} + \beta T_{L-1} \\ a_{L+1} &= a_0 R_{L-1}^2 + \beta R_L. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как, $a_{L+1} T_{L-1} = a_0 R_{L-1} + \alpha a_0 R_L$, то умножая, во-первых, последнее равенство на T_{L-2} , получаем

$$\begin{aligned} a_{L+1} T_{L-1} T_{L-2} &= a_0 R_{L-1} T_{L-2} + \alpha a_0 T_{L-2} R_L \\ \alpha a_0 &= a_0 T_{L-2} R_{L-1} + T_{L-1}(\alpha a_0 R_{L-1} - a_{L+1} T_{L-2}) = a_0 T_{L-2} R_{L-1} + \beta T_{L-1}; \end{aligned}$$

во-вторых, умножим то же равенство на R_{L-1} :

$$\begin{aligned} a_{L+1} R_{L-1} T_{L-1} &= a_0 R_{L-1}^2 + \alpha a_0 R_{L-1} R_L \\ a_{L+1} &= a_0 R_{L-1}^2 + R_L(\alpha a_0 R_{L-1} - a_{L+1} T_{L-2}) = a_0 R_{L-1}^2 + \beta R_L. \end{aligned}$$

Используя те же соображения ещё раз для равенства (26), приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \alpha a_0 &= -a_0 R_{L-1} S_L + \gamma R_L \\ a_L &= -a_0 S_L^2 + \gamma S_{L+1}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$ – произвольно.

Сравним теперь (27) и (28):

$$\gamma R_L - \beta T_{L-1} = a_0 R_{L-1} (S_L + T_{L-2}).$$

Легко проверить, что одно из частных решений этого уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma^{(0)} = -a_0 R_{L-1} T_{L-2} (S_L + T_{L-2}) \\ \beta^{(0)} = -a_0 R_{L-1}^2 (S_L + T_{L-2}), \end{cases} \quad (29)$$

Таким образом, подставляя (29) в (27) и (28), получаем решения уравнения (16) при нечетном L :

$$\begin{cases} a_{L+1}^{(0)} = a_0 R_{L-1}^2 (1 - R_L (S_L + T_{L-2})) \\ a_L^{(0)} = -a_0 (S_L^2 + S_{L+1} T_{L-2} R_{L-1} (S_L + T_{L-2})). \end{cases}$$

Аналогично рассуждая, приходим к решениям уравнения (16) при четном L :

$$\begin{cases} a_{L+1}^{(0)} = -a_0 R_{L-1}^2 (1 + R_L (S_L + T_{L-2})) \\ a_L^{(0)} = a_0 (S_L^2 - S_{L+1} T_{L-2} R_{L-1} (S_L + T_{L-2})). \end{cases}$$

Таким образом, утверждение леммы доказано. \square

Теорема 3. Пусть q_1, \dots, q_{L+1} - произвольный набор натуральных чисел, S_i ($i = \overline{0, L+1}$), R_i ($i = \overline{0, L}$), T_i ($i = \overline{0, L-1}$) определяются рекуррентными соотношениями (12) - (14). Предположим, что выполнено одно из условий: или q_{L+1} - четно или оба q_{L+1} и R_L нечетны. Тогда все s -дискриминанты вида $\alpha = \frac{\sqrt{D-b}}{a}$, раскладывающиеся в ЦД $[q_0, q_1, \dots, q_L, q_{L+1}, q_L, \dots, q_1, sq_0]$, задаются равенствами:

$$a_L = a_0 ((-1)^L S_L^2 - S_{L+1} T_{L-2} R_{L-1} (S_L + T_{L-2})) + \delta S_{L+1} T_{L-1}, \quad (30)$$

$$a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2 ((-1)^{L-1} - R_L (S_L + T_{L-2})) + \delta R_L^2, \quad D = \left(\frac{q_{L+1} a_{L+1}}{2} \right)^2 + a_L a_{L+1}, \quad (31)$$

$$a = 2P_{n-1}, \quad sq_0 P_{n-1} = \sqrt{D - 4(-1)^n} - 2Q_{n-1}, \quad b = (s-2)q_0 P_{n-1}. \quad (32)$$

Здесь $\delta \in \mathbb{Z}$ - четно, если q_{L+1} нечетно и таково, что $a_{L+1} > 0$ и $sq_0 \geq 2$.

Доказательство. В силу результатов двух предыдущих лемм достаточно показать, что в условиях теоремы произведение $a_{L+1} q_{L+1}$ является четным.

При нечетном q_{L+1} и четном δ из того, что $S_i = q_{L+1} R_{i-1} + T_{i-2}$ ($i = \overline{0, L}$), следует соотношение

$$a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2 ((-1)^{L-1} - R_L (q_{L+1} R_{L-1} + 2T_{L-2})) + \delta R_L^2 \equiv 0 \pmod{2}$$

при любой четности R_{L-1} . Формулы (32) вытекают из (4) и (5). Теорема доказана.

Доказанная теорема является обобщением результата Е.П. Голубевой из [9] (там фактически рассмотрены 2-дискриминанты). \square

Пример 6. Пусть $L = 4$, $\zeta = 10$, $q_1 = q_2 = q_4 = 1$, $q_3 = 3$, $q_5 = 5$. Тогда по формулам (12) - (14) находим: $S_0 = 1$, $S_1 = 5$, $S_2 = 6$, $S_3 = 23$, $S_4 = 29$, $S_5 = 52$, $R_0 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 4$, $R_3 = 5$, $R_4 = 9$, $T_0 = 1$, $T_1 = 3$, $T_2 = 4$, $T_3 = 7$. Из (4) и (5) $\frac{P_8}{Q_8} = [1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1] = \frac{531}{296}$, $a = a_0 = 1062$. Подставляя полученные значения в формулы (30) - (31), находим: $a_5 = 81\delta - 7911900$, $a_4 = 364\delta - 35554698$. Так как q_5 нечетно, то δ выбираем четным. Наименьшее δ , при котором $q_5 > 0$ и $sq_0 \geq 2$ - это $\delta_0 = 97684$.

Пусть $\delta = 97688$. Тогда в силу (30) - (32) $a_5 = 828$, $a_4 = 3734$, $D = 7376652$, $sq_0 = 4$. Таким образом, получаем следующие возможные случаи:

1. $s = 4$, $q_0 = 1$, $b = 1062$;
2. $s = 2$, $q_0 = 2$, $b = 0$.

Найденным значениям соответствуют КИ:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{7376652} - 1062}{1062} = \frac{\sqrt{204907} - 177}{177} = [1, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 4}],$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{7376652}}{1062} = \frac{\sqrt{4204907}}{177} = [2, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 4}],$$

Положим $\delta = 97704$. Тогда $a_5 = 2124$, $a_4 = 9558$, $D = 48497292$, $sq_0 = 12$. Возможны следующие случаи:

1. $s = 12$, $q_0 = 1$, $b = 5310$;
2. $s = 6$, $q_0 = 2$, $b = 4248$;
3. $s = 4$, $q_0 = 3$, $b = 3186$;
4. $s = 3$, $q_0 = 4$, $b = 2124$;
5. $s = 2$, $q_0 = 6$, $b = 0$.

Отметим, что в данном случае для всех КИ выполнены условия следствия 1: $n = 9$, $P_8 = 531$, $Q_8 = 296$, $Q_7 = 165$. Получаем следующие КИ:

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{48497292} - 5310}{1062} = \sqrt{43} - 5 = [1, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{48497292} - 4248}{1062} = \sqrt{43} - 4 = [2, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{48497292} - 3186}{1062} = \sqrt{43} - 3 = [3, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_4 = \frac{\sqrt{48497292} - 2124}{1062} = \sqrt{43} - 2 = [4, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_5 = \frac{\sqrt{48497292}}{1062} = \sqrt{43} = [6, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

(ср. с примером в [3]).

Если $\delta = 97710$, то $a_5 = 2610$, $a_4 = 11742$, $D = 73222245$, $sq_0 = 15$. Откуда:

1. $s = 15$, $q_0 = 1$, $b = 6903$;
2. $s = 5$, $q_0 = 3$, $b = 4779$;
3. $s = 3$, $q_0 = 5$, $b = 2655$.

Соответствующие КИ имеют вид:

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{73222245} - 6903}{1062} = \frac{\sqrt{8135805} - 2301}{354} = [1, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 15}].$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{73222245} - 4779}{1062} = \frac{\sqrt{8135805} - 1593}{354} = [3, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 15}].$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{73222245} - 2655}{1062} = \frac{\sqrt{8135805} - 885}{354} = [5, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 15}].$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами данной статьи являются:

1. Получено описание s -дискриминантов.
2. Изучено s -уравнение Пелля, найдены формулы для нахождения всех решений этого уравнения.
3. Решена задача описания всех s -дискриминантов по симметричной части их разложения в непрерывную цепную дробь.

Представляется перспективным дальнейшее изучение s -дискриминантов, приложений полученных результатов к теории целочисленных квадратичных форм, а также изучение КИ с более общими разложениями в ЦД, соответствующим им аналогам уравнения Пелля, а также обратным задачам и приложениям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венков Б.А. Элементарная теория чисел. - М.:ОНТИ НКТП СССР, 1937. - 219 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. - М.: Гос.уч.-пед.изд.Мин.просв.РСФСР, 1960. - 376 с.
3. Пен А.С., Скубенко Б.Ф. Оценка сверху периода квадратичной иррациональности// Мат.заметки, - 1969. - т.5. - №4 - С.413-417.
4. Голубева Е.П. О длинах периода квадратичной иррациональности// Мат.сб., - 1984. - т.123. - №1. - С.120-129.
5. Robertson J. Computing in Quadratic Orders// available at <http://hometown.aol.com/jpr2718/> . - 2006.
6. Mollin R.A., Goddard B. A description of continued fraction expansions of quadratic surds represented by polynomials//J.Number Theory, - 2004. - Vol.107 - P.228-240.
7. Van der Poorten A.J., Williams H.C. On certain continued fraction expansions of fixed period length// Acta Arith., - 1999. - Vol.89. - P.23-35.
8. Голубева Е.П. О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей. I // в кн. Аналитическая теория чисел и теория функций. Зап.научн.семина.ЛОМИ, - 1990. - Вып.10, - Т.185. - С.72-81.
9. Голубева Е.П. Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь // в кн. Аналитическая теория чисел и теория функций. - Зап.научн.семина.ЛОМИ, - 1987. - Вып.9, - Т.161. - С.10-31.
10. Голубева Е.П. О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей. II // в кн. Аналитическая теория чисел и теория функций. - Зап.научн.семина.ЛОМИ, - 1988 - Вып.9. - Т.168. - С.11-22.
11. Robertson J. Solving the generalized Pell equation $x^2 - Dy^2 = N$ //available at <http://hometown.aol.com/jpr2718/> . - 2004.
12. Finch S. Class number theory//available at <http://pauillac.inria.fr/algo/clsolve/cls.pdf> . - 2005.
13. Mollin R.A. Quadratic equations determined by continued fractions//JP J.Algebra Number Theory Appl., - 2001. - Vol.1. - No.1. - P.57-75.
14. Robertson J. Solving the equation $ax + bxy + cy + dx + ey + f = 0$ //available at <http://hometown.aol.com/jpr2718/> . - 2003.
15. Matthews K. The diophantine equation $ax^2 + bxy + cy^2 = N$, $D = b^2 - 4ac > 0$ //J. Théor. Nombres Bordeaux. - 2002. - Vol.14. - P.257-270.

Статья поступила в редакцию 16.09.2007

Чабанюк Я.М. *Стрибкова процедура стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі в схемі усереднення* // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №2. — С. 3-12.

УДК 519.21+62

Отримано достатні умови збіжності стрибкової процедури стохастичної апроксимації в напівмарковському середовищі в схемі усереднення. Використано асимптотичні властивості компенсуючого оператора для трьохкомпонентного розширеного процесу марковського відновлення.

Получены достаточные условия сходимости скачкообразной процедуры стохастической аппроксимации в полумарковской среде в схеме усреднения. Использовано асимптотические свойства компенсирующего оператора для трёхкомпонентного расширенного процесса марковского восстановления.

Hoderová Jana. *Maximum angle condition in the case of some nonlinear elliptic problems* // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №2. — С. 13-23.

УДК 519.87

В данной работе анализируется метод конечных элементов для нелинейной эллиптической вариационной задачи, формально эквивалентной нелинейной эллиптической краевой задаче со смешанными неоднородными краевыми условиями. Данная проблема рассматривается при условии с максимальным углом и решается для случая ограниченной области Ω , границы которой $\partial\Omega$ состоят из двух окружностей Γ_1, Γ_2 с общим центром S_0 . Радиусы этих окружностей R_1 и $R_2 = R_1 + \rho$, где $\rho \ll R_1$. Анализ методом конечных элементов ограничен для случая полурегулярных конечных элементов с полиномами первой степени. В заключении приводятся некоторые численные результаты.

У даній роботі аналізується метод кінцевих елементів для нелінійної еліптичної варіаційної задачі, формально еквівалентною нелінійної еліптичної крайової задачі зі змішаними неоднорідними крайовими умовами. Дана проблема розглядається за умови з максимальним кутом і вирішується для випадку обмеженої області Ω , границі якої $\partial\Omega$ складаються з двох окружностей Γ_1, Γ_2 із загальним центром S_0 . Радіуси цих окружностей R_1 й $R_2 = R_1 + \rho$, де $\rho \ll R_1$. Аналіз методом кінцевих елементів обмежений для випадку напіврегулярних кінцевих елементів з поліномами першого ступеня. У висновку наводяться деякі чисельні результати.

Терещенко В.М. *Один підхід розв'язання задач обчислювальної геометрії на основі рекурсивно-паралельного алгоритму* // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №2. — С. 24-32.

УДК 618.3 518.6

Стаття присвячена узагальненому підходу ефективного розв'язання задач обчислювальної геометрії, початкові дані яких є множина точок Евклідової площини. В основі даного підходу лежить побудова рекурсивно-паралельного алгоритму на основі принципу «розподіляй та володарюй». Як приклад, запропонований алгоритм був використаний для розв'язання задачі побудови опуклої оболонки для множини точок.

Статья посвящена обобщенному подходу эффективного решения задач вычислительной геометрии, начальные данные которых – это множество точек Евклидовой плоскости. В основе данного подхода лежит построение рекурсивно-параллельного алгоритма на основе принципа «разделяй и властвуй». Как пример, предложенный алгоритм был использован для решения задачи нахождения выпуклой оболочки для множества точек.

Донской Д.В. *Оптимизация прибыльности систем массового обслуживания* // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №2. — С. 33-36.

УДК 519.21:338.48

У роботі розглядається задача оптимізації функцій прибутковості, у системах масового обслуговування. Показано, що, як правило, такі функції є унімодальними.

В работе рассматривается задача оптимизации функций прибыльности в системах массового обслуживания. Показано, что, как правило, такие функции унимодальны.

Федоров Е.Е. *Методика синтеза слов* // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №2. — С. 37-46.

УДК 004.934.1'1

Для розробки природно-мовного інтерфейсу автоматизованої системи керування (АСУ) у статті пропонується методика синтезу слів російської мови.

Для разработки естественно-языкового интерфейса автоматизированной системы управления (АСУ) в статье предлагается методика синтеза слов русского языка.

Исмаилова А.С., Третьяков Д.В. *s-Дискриминанты и s-уравнение Пелля* // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №2. — С. 47-60.

УДК 618.3 518.6

Отримано опис усіх квадратичних іраціональностей (s -дискримінантів), які розкладаються у ланцюгову дріб $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0}]$, де $s \geq 2$ – параметр. Побудована теорія s -рівняння Пелля. Розв’язана обернена задача побудування s -дискримінанта по симетричній частині періода ланцюгової дроби. Ключові слова: s -дискримінанти, s -рівняння Пелля, звичайна ланцюгова періодична дріб, квадратичні іраціональності.

Получено описание всех квадратичных иррациональностей (s -дискриминантов), которые раскладываются в цепную дробь вида $[q_0, \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, sq_0}]$, где $s \geq 2$ – параметр. Построена теория s -уравнения Пелля. Решена обратная задача восстановления s -дискриминанта по заданной симметричной части периода цепной дроби. Ключевые слова: s -дискриминанты, s -уравнение Пелля, обыкновенная цепная периодическая дробь, квадратичные иррациональности.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

*Донской Дмитрий
Владимирович*

старший преподаватель кафедры, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
e-mail: donskoy2simf@mail.ru

*Исмаилова Айше
Сияровна*

магистр, факультет математики и информатики, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,

*Терещенко Василий
Николаевич*

к.ф.-м.н., доцент, факультет кибернетики, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка,
e-mail: v_ter@ukr.net

*Третьяков Дмитрий
Вадимович*

к.ф.-м.н., доцент, кафедра алгебры и функционального анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
e-mail: dvttd@mail.ru

*Федоров Евгений
Евгеньевич*

к.т.н., доцент, кафедра системного анализа и моделирования, Донецкий государственный институт искусственного интеллекта,
e-mail: fee@iai.donetsk.ua

*Чабанюк Ярослав
Михайлович*

к.ф.-м.н., доцент, кафедра вычислительной математики и программирования, Национальный университет «Львівська політехніка»,
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

Hoderová Jana

Ph.D., Faculty of Mechanical Engineering, University of Technology, Brno, Czech Republic
e-mail: hoderova@fme.vutbr.cz

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі "Таврійський вісник інформатики і математики" приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Файл статті на дискеті 3,5" або надісланий електронною поштою за адресою редакції.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. **Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор

Невирішені раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття

Формулювання цілей статті (постановка задачі)

У висновку з даного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом)

результати дослідження та *перспективи подальших розвідок у цьому напрямку*

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або аббревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2000, №2.

6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету `twim.sty`, який можна отримати за адресою www.twim.crimea.edu.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надіслати електронною поштою, а також у вигляді "твердої" копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м.Симферопіль, Крим, Україна, 95007, e-mail: twim_taurida@mail.ru**
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

**ПОСТАНОВА
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ
від 15.01.2003 р. №7-05/1**

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України

В.В.Скопенко

Вчений секретар

Л.М.Артюшин

Подписано к печати 18.12.2007. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 2.5 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, Украина, 95007