Таврический Вестник Информатики и Математики

№1 ' 2007

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації

КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 30 червня 2004 р. 3—05/7, перелік №4,журнал "Таврійський вісник информатики та математики" внесено до переліку журналів ВАК України, у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів кандидата й доктора наук за спеціальностями "Теоретичні основи інформатики та кібернетики", "Математичне моделювання та обчислювальні методи", "Математичне і програмне забезпечення обчислювальних машин і систем", "Системний анализ і теорія оптимальних рішень".

Содержание

Деміденко С.В., Жук С.М., Наконечний О.Г. До проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач 7

Щербина О.А. Локальные элиминационные алгоритмы для задач удовлетворения ограничений 24

Чабанюк Я.М. Асимптотична нормальність стрибкової процедури з дифузійним збуренням в марковському середовищі 40

Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. Исследование надежности трехэлементной системы с приоритетным обслуживанием двумя наладчиками 49

Закиров Б.С., Чилин В.И. Банаховы модули $L_\infty(\nabla, m)$ L_0-ограниченных функций и их предсопряженные модули 58

Рефераты 70

Список авторов номера 73

К сведению авторов 74

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**

АДРЕС РЕДАКЦИИ:
Крымский научный центр Национальной Академии наук
и Министерства образования и науки Украины
Украина, Крым, г. Симферополь, пр-т Вернадского, 2, 95007

ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:
факультет математики и информатики ТНУ
Украина, Крым, г. Симферополь, пр-т Вернадского, 4, 95007

Тел. гл.редактора:	(0652) 63-75-42
Тел. редакции:	(0652) 230-325
e-mail (гл.редактор):	donskoy@ccssu.crimea.ua
e-mail (для переписки):	twim_taurida@mail.ru
сайт журнала:	www.twim.crimea.edu

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

Ведущие тематические разделы:

Функциональный анализ и его приложения

Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы

Нелинейный анализ и его применение

Спектральные и эволюционные задачи

Математические проблемы гидродинамики

Дискретная оптимизация

Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений

Вычислительная математика

Математические модели и методы прогнозирования

Машинное обучение, нейронные сети, извлечение закономерностей

Дедуктивные системы и базы знаний

Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений

Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации

Математические модели биологических процессов

Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов

**Печатается по решению научно технического Совета
КНЦ НАН и Министерства образования и науки Украины
Протокол №2 от 21 мая 2007 г.**

УДК 519.962.22

ДО ПРОБЛЕМИ МІНІМАКСНОГО ОЦІНЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

© Деміденко С.В., Жук С.М., Наконечний О.Г.

Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка,
факультет кібернетики
пр-т академіка Глушкова-2, корпус 6, м.Київ 03680, Україна
e-mail: *beetle@unicyb.kiev.ua*

In this paper we study observation problem for linear 2-point BVP $\mathcal{D}x(\cdot) = \mathcal{B}f(\cdot)$ assuming that information about system input $f(\cdot)$ and random noise η in system state observation model $y(\cdot) = \mathcal{H}x(\cdot) + \eta$ is incomplete: $f(\cdot)$ and $M\eta\eta'$ are some arbitrary elements of given sets. A criterion of guaranteed (minimax) estimation error finiteness is proposed. Representations of minimax estimations are obtained in terms of 2-point BVP solutions. It is proved that in general case we can only estimate a projection of system state onto some linear manifold $\mathcal{L}(\cdot)$. In particular, $\mathcal{L}(\cdot) = \mathbb{L}_2^n$ if $\dim \mathscr{N}(\mathcal{D}\ \ \mathcal{H}) = 0$. Also we propose a procedure which decides if given linear functional belongs to $\mathcal{L}(\cdot)$.

Вступ

Задачам мінімаксного спостереження для звичайних лінійних диференціальних рівнянь присвячено значну кількість публікацій, зокрема у вітчизняних друкованих та електронних наукових виданнях. Різні автори (докладніше див.огляд [1]) вивчали ті чи інші питання теорії гарантованого оцінювання як для окремо взятих лінійних диференціальних так і для абстрактних операторних рівнянь.

Останнім часом увага деяких вітчизняних дослідників [2]-[5] зосереджена на розробці теорії гарантованого оцінювання для систем, стан яких описується лінійним операторним рівнянням з неін'єктивним оператором: в роботах [2, 3] вивчались задачі гарантованого оцінювання для лінійних дескрипторних рівнянь в просторі квадратично сумовних вектор-функцій, у [4] мінімаксні середньоквадратичні оцінки для нетерових систем в абстрактному гільбертовому просторі для того випадку, коли нуль-многовид оператора спостереження не має спільних векторів з нуль-многовидом оператора системи. Згадана умова, зокрема, забезпечує скінченність мінімаксної похибки оцінювання для довільного лінійного обмеженого функціоналу і гарантує однозначну розв'язність відповідної системи рівнянь Ейлера для оцінок.

У даній роботі вивчається задача мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів на множині розв'язків крайової задачі для лінійного диференціального рівняння у звичайних похідних. Дослідження проводиться за допомогою підходу, запропонованого у [3] для задач гарантованого оцінювання у лінійних дескрипторних рівняннях. Це дозволяє побудувати оцінки для кожного функціоналу з деякої підмножини, яка, зокрема, збігається з усім простором, якщо виконано умови [4].

Одержані представлення для оцінок записані в термінах лінійних невід'ємно означених крайових задач. Для того випадку, коли відомий аналітичний вигляд фундаментальної матриці відповідного рівняння, запропоновано характеристику множини оцінюваних функціоналів, розглянуто приклади.

1. Постановка задачі

Нехай $t \mapsto x(t)$ – абсолютно неперервна вектор-функція з простору квадратично сумовних n-вектор-функцій $\mathbb{L}_2^n := \mathbb{L}_2([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, що задовольняє крайовій задачі

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) = B(t)f(t), x(0) = x(\omega), \tag{1}$$

де $t \mapsto A(t)(t \mapsto B(t))$ – $n \times n(n \times r)$-матричнозначна неперервна функція, $\omega < +\infty$, $f(\cdot) \in \mathbb{L}_2^r$.

Припустимо, що при деякому $f \in \mathscr{G}$ на сегменті $[0,\omega]$ спостерігається реалізація m-вектор-функції $t \mapsto y(t)$ вигляду

$$y(t) = H(t)x(t) + \eta(t), \tag{2}$$

де $t \mapsto x(t)$ належить до множини розв'язків крайової задачі (1) при деякому $f(\cdot) \in \mathscr{G}$, $t \mapsto \eta(t)$ – реалізація неперервного у середньому квадратичному випадкового процесу з нульовим середнім та невідомою кореляційною функцією $(t,s) \mapsto R_\eta(t,s) \in \mathscr{G}_2$

$$\mathscr{G} := \{f(\cdot) : \int_0^\omega (f(t), f(t))\mathrm{d}t \le 1\},\ \mathscr{G}_2 := \{R_\eta : \int_0^\omega \mathrm{sp}R_\eta(t,t)\mathrm{d}t \le 1\}$$

Розглянемо функціонал

$$\ell(x) := \int_0^\omega (\ell(t), x(t))\mathrm{d}t, \ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$$

визначений на множині розв'язків (1). Оцінку $\ell(\cdot)$ будемо шукати у класі лінійних

$$u(y) := \int_0^\omega (u(t), y(t))\mathrm{d}t,$$

якість апроксимації будемо характеризувати за допомогою функціоналу[1]

$$\sigma(u) := \sup_{x(\cdot), R_\eta} \{M[\ell(x) - u(y)]^2 | x(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}), \mathcal{D}x(\cdot) \in \mathscr{G}, R_\eta \in \mathscr{G}_2\}, \tag{3}$$

[1]Оператор $\mathcal{D}$ породжується крайовою задачею (1) згідно правила $(\mathcal{D}x(\cdot))(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$, $x[0] = x(\omega)$, $x(\cdot)$ – абсолютно неперервна функція.

гарантованої похибки оцінювання, яка обчислюється для оцінки $u(\cdot) \in U_l$ з деякої допустимої множини оцінок U_l.

Означення 1. Оцінку $\hat{u}(\cdot)$, що є одним із розв'язків варіаційної нерівності

$$\sigma(\hat{u}) \le \sigma(u), \quad u(\cdot) \in U_l \tag{4}$$

називають мінімаксною середньоквадратичною оцінкою, а

$$\hat{\sigma} := \inf_{u \in U_l} \sigma(u)$$

називають мінімаксною середньоквадратичною похибкою оцінювання.

2. Вигляд мінімаксної оцінки та структура множини оцінюваних функціоналів

Теорема 1. Мінімаксна середньоквадратична похибка оцінювання лінійного функціоналу $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$ на одному з розв'язків крайової задачі

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) = B(t)f(t), x(0) = x(\omega) \tag{5}$$

дається виразом

$$\sigma(u) = \begin{cases} +\infty, & \ell(\cdot) \notin \mathscr{F}, \\ \int_0^\omega (\ell(t), \hat{p}(t))_n \mathrm{d}t \end{cases}$$

мінімаксна середньоквадратична оцінка $\hat{u}(\cdot)$ для $\ell(\cdot) \in \mathscr{F}$ має вигляд

$$\hat{u}(t) = H(t)\hat{p}(t),$$

де $\hat{p}(\cdot)$ знаходиться як довільний розв'язок (7).

Наслідок 1. Для заданого $y(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$ мінімаксна оцінка може бути подана у вигляді

$$\int_0^\omega (\hat{u}(t), y(t))\mathrm{d}t = \int_0^\omega (\ell(t), \hat{x}(t))\mathrm{d}t,$$

де $\hat{x}(\cdot)$ знаходиться як розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} &\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) - H'(t)(y(t) - H(t)x(t)), p(0) = p(\omega), \\ &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)B'(t)p(t), x(0) = x(\omega) \end{aligned} \tag{6}$$

Наслідок 2. Нехай система функцій $\{\mathcal{H}\psi_k(\cdot)\}$ лінійно незалежна, де $\mathcal{H}\psi_k(t) = H(t)\psi_k(t)$, $\psi_k(\cdot)$ лінійно незалежні розв'язки однорідної крайової задачі (5). Тоді для довільного $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$ мінімаксна похибка скінчена і оцінка представляється згідно рецепту теореми 1 або ж наслідку 2.

Теорема 2. Крайова задача

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A'(t)z(t) + H'(t)H(t)p(t) - \ell(t), z(0) = z(\omega) \\ \dot{p}(t) &= A(t)p(t) + B(t)B'(t)z(t), p(0) = p(\omega) \end{aligned} \tag{7}$$

має непорожню множину розв'язків тоді і лише тоді, коли

$$Ph(\omega) \perp \mathscr{N}(W(0,\omega)),$$

де $P := [E - (E - \Phi(\omega, 0))(E - \Phi(\omega, 0))^+]$, Φ – нормована фундаментальна матриця спряженого рівняння,

$$W(0,\omega) := \int_0^\omega P\Phi(\omega, s)H'(s)H(s)\Phi'(\omega, s)P\mathrm{d}s,$$

$h(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші

$$\dot{h}(t) = -A'(t)h(t) + \ell(t), h(0) = 0$$

Таким чином, множина оцінюваних функціоналів $\mathscr{F}$ складається з усіх $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$, що задовольняють умови теореми 2.

Наслідок 3. Якщо виконано умови наслідку 2, то крайова задача (7) має непорожню множину розв'язків для довільного $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$.

Доведення теореми 1. Під час доведення нам знадобляться деякі властивості лінійного оператора $\mathcal{D}$, породженого крайовою задачею (1)

$$\mathcal{D}x = \dot{x} - Ax, x \in \mathscr{D}(\mathcal{D}),$$

де через $\mathscr{D}(\mathcal{D})$ позначено сукупність усіх таких абсолютно неперервних вектор-функцій $t \mapsto x(t)$ з простору $\mathbb{L}_2^n$, що

$$\int_0^\omega |\dot{x}(t)|_n^2 < +\infty, \int_0^\omega \dot{x}(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{$*$}$$

$x \mapsto Ax$ – оператор множення на матричнозначну функцію $t \mapsto A(t)$. Справедлива

Лема 1. Оператор $\mathcal{D}$ є замкненим щільно визначеним лінійним оператором, його спряжений $\mathcal{D}^*$ визначається співвідношеннями

$$(\mathcal{D}^* z)(t) = -\dot{z}(t) - A'(t)z(t), \mathscr{D}(\mathcal{D}^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D})$$

Обчислимо $\sigma(u)$ для довільних $\ell(\cdot), u(\cdot)$. Беручи до уваги властивості шуму

$$\sigma(u) = \sup_x \{\langle \ell - \mathcal{H}'u, x\rangle_2^2 | \mathcal{D}x \in \mathscr{G}, x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})\} + \sup_{R_\eta}\{M\langle u, \eta\rangle_2^2\}$$

Враховуючи нерівність Коші-Буняковського

$$\sup_{R_\eta}\{M\langle u, \eta\rangle_2^2\} = \langle u, u\rangle_2$$

Помітимо, що
$$\ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot) \notin \mathscr{R}(\mathcal{D}^*) \Rightarrow \sigma(u) = +\infty$$
відтак запропоноване означення оцінки виділяє в просторі $\mathbb{L}_2^n$ сукупність оцінюваних функціоналів
$$\mathscr{F} := \{\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n | \exists u(\cdot) : \int_0^\omega (\ell(t) - H'(t)u(t), \psi_k(t))_n \mathrm{d}t = 0, k = 1 \dots m\},$$
кожному елементу якої можна поставити у відповідність множину допустимих оцінок
$$U_l := \{u(\cdot) : \langle \ell - H^* u, \psi_i \rangle_2 = 0, i = \overline{1,m}\}$$
Отже, для $\ell(\cdot) \in \mathscr{F}$ існують такі $u(\cdot), z(\cdot)$, що
$$\dot{z}(t) = -A'(t)z(t) + H'(t)u(t) - \ell(t), z(0) = z(\omega)$$
Для обчислення гарантованої похибки скористаємось[2]

Лема 2. Нехай
1) множина значень $\mathscr{R}(L)$ оператора L замкнена;
2) $\mathscr{G}$ – опукла обмежена замкнена підмножина H і
$$\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L) \cap \mathrm{int}\mathscr{G} \neq \varnothing$$
Тоді $\mathrm{dom}(\delta L)^* = \mathscr{R}(L')$ і для довільного $z : L'z = h$ виконано
$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \inf_p \{s(\mathcal{B}'z - p)|\mathscr{G}), p \in \mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'\mathscr{N}(L')\} = s(\mathcal{B}'z - \hat{p}|\mathscr{G})$$

Отже, $\ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і, оскільки $0 \in \mathrm{int}\mathscr{G} \cap \mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(\mathcal{D})$, то згідно леми 2
$$\sup_{x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})} \{\langle \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot), x(\cdot)\rangle_2 - \delta(\mathcal{D}x(\cdot)|\mathcal{B}\mathscr{G})\} = \inf_{p(\cdot)\in \mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'\mathscr{N}(\mathcal{D}')\}} \|\mathcal{B}'z(\cdot) - p(\cdot)\| =$$
$$\inf_{\alpha_j} \|\mathcal{B}'(\tilde{z}(\cdot) + z^0(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j \varphi_j(\cdot))\| = \|\mathcal{B}'(\tilde{z}(\cdot) - \sum_1^n \tilde{\alpha}_j \varphi_j(\cdot))\| < +\infty,$$
$$\mathcal{D}'\tilde{z} = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot), \tilde{z}(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}), z^0(\cdot) \in \mathscr{N}(\mathcal{D}')$$
для довільного $z(\cdot) : \mathcal{D}'z(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot)$, звідки
$$\sigma(u) = \begin{cases} \|u\|_2^2 + \|\mathcal{B}'(\tilde{z}(\cdot) - \sum_1^n \tilde{\alpha}_j \varphi_j(\cdot))\|_2^2, & \mathcal{D}'\tilde{z} = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot), \tilde{z}(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}) \\ +\infty, & u \notin U_\ell \end{cases} \tag{8}$$

Таким чином ми встановили, що $u(\cdot) \mapsto \sigma(u)$ є строго опуклим слабко напівнеперервним знизу коерцитивним функціоналом і $\mathrm{dom}\sigma = U_\ell$. Множина U_ℓ опукла і замкнена, відтак $\exists \hat{u}(\cdot) \in U_\ell : \sigma(\hat{u}) = \inf_\sigma(u)$. Покажемо, що $\hat{u}(\cdot)$ можна знайти, користуючись рецептом теореми. Для цього нам знадобиться

[2]Нехай L – лінійний замкнений оператор, визначений на щільній лінійній підмножині $\mathscr{D}(L)$ абстрактного гільбертового простору H, $\mathcal{B}, \mathcal{H}$ – лінійні обмежені оператори, $\delta(\cdot|\mathscr{G})$ – індикаторна функція (індикатор) опуклої множини $\mathscr{G}$, $s(\cdot|\mathscr{G})$ – її опорна функція, $(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*$ – перетворення Юнга-Фенхеля функціоналу $x \mapsto \delta(Lx|\mathcal{B}\mathscr{G})$, $\mathcal{B}\mathscr{G}$ образ опуклої множин $\mathscr{G}$ відносно оператора $\mathcal{B}$.

Лема 3. Нехай оператор $\mathcal{D}^+$ кожному $b \in \mathbb{L}_2^n$ ставить у відповідність розв'язок задачі Коші

$$\dot{z}(t) = -A'(t)z(t) - b(t), z(0) = (E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega),$$

де[3] $z_1(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші

$$\dot{z}_1(t) = -A'(t)z_1(t) - b(t), z_1(0) = 0.$$

Тоді $\mathcal{D}^+$ лінійний обмежений оператор і

$$\langle \mathcal{D}^+ b, \mathcal{D}^+ b\rangle_2 = \inf_z \{\langle z, z\rangle_2 | \mathcal{D}^* z = b\} \tag{9}$$

для всіх $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$, причому $\mathcal{D}^+ b \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}^+\mathcal{D}^*\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}^+$ на $\mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і $\mathcal{D}^*\mathcal{D}^+\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*$ на $\mathscr{D}(\mathcal{D})$.

Помітимо, що в силу означення оператора $\mathcal{D}^+$ функціонал

$$u(\cdot) \mapsto \mathcal{L}(u) = \|u(\cdot)\|_2^2 + \|\mathcal{B}'(z^+(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j^+ \varphi_j(\cdot))\|_2^2$$

де $\{\alpha_j^+\}$ знаходяться з умови

$$\langle \mathcal{B}'(z^+(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j^+ \varphi_j(\cdot)), \varphi_k(\cdot)\rangle = 0, k = 1\ldots, n \tag{10}$$

визначений на всьому просторі $\mathbb{L}_2^m$ і на U_l збігається з $\sigma(u)$. Справді, у позначеннях леми 3

$$\sigma(u) = \|u(\cdot)\|_2^2 + \|\mathcal{B}'(z^+(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j^+ \varphi_j)\|_2^2, z^+ = \mathcal{D}^+(\ell - \mathcal{H}'u), u \in U_l,$$

бо за означенням

$$\mathcal{D}' z^+(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot), z^+(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D})$$

тому, зокрема, $\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot)) = \min_{U_l} \mathcal{L}(u(\cdot))$.

З іншого боку $\mathcal{L}(\cdot)$ обмежений на одиничній кулі $\mathbb{L}_2^m$ з центром в $\hat{u}(\cdot)$, позаяк оператор $\mathcal{D}^+$ неперервний, оператор ортогонального проектування на $\mathrm{Lin}\{\mathcal{B}'\varphi_k\}_1^n$ обмежений. Отже [10, с.181] $\mathcal{L}(\cdot)$ є неперервним в $\hat{u}(\cdot)$, але тоді [10, с.89] знайдуться такі числа $\{\mu_i\}_1^m$, що

$$\hat{\mu}_1 \mathcal{H}\psi_1 + \cdots + \hat{\mu}_m \mathcal{H}\psi_m \in \partial\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot)), \tag{11}$$

де символом $\partial\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot))$ позначено субдиференціал опуклого функціоналу $\mathcal{L}(\cdot)$ в $\hat{u}(\cdot)$. Знайдемо цей субдиференціал. Обчислимо похідну $\mathcal{L}(\cdot)$ в точці $\hat{u}(\cdot)$ у напрямку $u(\cdot)$. Запишемо

$$g(\tau) = \mathcal{L}(\hat{u}(\cdot) + \tau u(\cdot)) = \|\hat{u}(\cdot) + \tau u(\cdot)\|^2 + \|\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) + \tau v(\cdot) - \sum_1^n \alpha(\tau)_j \varphi_j)\|_2^2,$$

[3] $\Phi(t,s)$ – перехідна матриця [6, с.105] рівняння $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

де $\hat{z}(\cdot) = \mathcal{D}^+(\ell(\cdot) - \mathcal{H}'\hat{u}(\cdot))$, $v(\cdot) = \mathcal{D}^+\mathcal{H}'u(\cdot)$, а $\alpha_j(\tau)$ знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'\hat{z}(\cdot), \varphi_k\rangle + \tau\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'v, \varphi_k\rangle = \sum_1^n \alpha_j \langle \mathcal{B}\mathcal{B}'\varphi_j, \varphi_k\rangle,$$

звідки дістанемо

$$\frac{d}{d\tau}g(0) = 2\langle \hat{u}(\cdot), u(\cdot)\rangle + 2\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j), v\rangle$$

Згідно (10) існує таке $\hat{p}(\cdot)$, що

$$\hat{p}_t(t) = A(t)\hat{p}(t) + B(t)B'(t)(\hat{z}(t) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j(t)), \hat{p}(0) = \hat{p}(\omega) \perp \mathscr{N}(E - \Phi(\omega, 0)) \quad (12)$$

По аналогії з доведенням леми 3(див. (22)), запишемо

$$\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j), v\rangle_2 = \int_0^\omega (-H'(t)u(t), \hat{p}(t))_n \mathrm{d}t$$

Таким чином для довільного $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot) + \tau u(\cdot))|_{\tau=0} = 2\langle \hat{u}(\cdot) - \mathcal{H}\hat{p}(\cdot), u(\cdot)\rangle,$$

де, як це безпосередньо випливає з (12),

$$\mathcal{D}\hat{p}(\cdot) = \mathcal{B}\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j), \hat{p}(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}^*) \quad (13)$$

Але тоді функціонал $u(\cdot) \mapsto \langle \hat{u}(\cdot) - \mathcal{H}\hat{p}(\cdot), u(\cdot)\rangle$ є похідною Гато функціоналу $\mathcal{L}(\cdot)$ в точці $\hat{u}(\cdot)$, відтак

$$\partial\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot)) = \{\hat{u}(\cdot) - \mathcal{H}\hat{p}(\cdot)\},$$

звідки і з (11) знаходимо

$$\hat{u}(\cdot) = \mathcal{H}\hat{p}(\cdot) + \sum_1^m \hat{\mu}_i\mathcal{H}\psi_i(\cdot) \quad (14)$$

Оскільки $\hat{u}(\cdot) \in U_\ell$, то для $\hat{z}(\cdot) = \mathcal{D}^+(\ell(\cdot) - \mathcal{H}'\hat{u}(\cdot))$ ми будемо мати, згідно означення $\mathcal{D}^+$, що $\hat{z}(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}')$ і

$$\mathcal{D}'\hat{z}(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'\hat{u}(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'\mathcal{H}\hat{p}(\cdot) - \sum_1^m \hat{\mu}_i\mathcal{H}'\mathcal{H}\psi_i(\cdot) \quad (15)$$

Якщо покласти

$$p(\cdot)=\hat p(\cdot)+\sum_1^m \hat\mu_i\psi_i(\cdot), z(\cdot)=\hat z(\cdot)-\sum_1^n \hat\alpha_j\varphi_j(\cdot),$$

то $p(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D}), z(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D}')$ і $\mathcal{D}p(\cdot)=\mathcal{D}\hat p(\cdot), \mathcal{D}'z(\cdot)=\mathcal{D}'\hat z(\cdot)$, відтак

$$\begin{pmatrix}-\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p(\cdot)\\ z(\cdot)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \ell(\cdot)\end{pmatrix} \tag{16}$$

згідно (13)-(15) звідки, зокрема, випливає, що

$$\ell\in\mathscr{F}\Rightarrow \ell\in\mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}'\end{smallmatrix}\right) \tag{17}$$

і $p(\cdot), z(\cdot)$ належать до множини розв'язків крайової задачі

$$\begin{aligned} &p_t(t)=A(t)p(t)+B(t)B'(t)z(t), p(0)=p(\omega),\\ &z_t(t)=-A'(t)z(t)-\ell(t)+H'(t)H(t)p(t), z(0)=z(\omega),\end{aligned} \tag{18}$$

З іншого боку

$$\hat u(\cdot)=\mathcal{H}p(\cdot)$$

згідно (14) і означення $p(\cdot)$.

Припустимо, що $(p_0,z_0)\in\mathscr{N}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}'\end{smallmatrix}\right)$. Легко переконатись, що

$$\begin{pmatrix}-\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H}\\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D}\end{pmatrix}\subseteq\begin{pmatrix}-\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}'\end{pmatrix}'$$

і тому $\mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H}\\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D}\end{smallmatrix}\right)\subset\mathscr{N}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}'\end{smallmatrix}\right)^\perp$. З іншого боку $\mathscr{R}([-\mathcal{D}\quad\mathcal{B}\mathcal{B}'])\subset\mathscr{R}([-\mathcal{D}\quad\mathcal{B}])$ тому по аналогії з (17)

$$\{0\}\times\mathscr{R}([-\mathcal{D}\quad\mathcal{B}])\subset\mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H}\\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D}\end{smallmatrix}\right)\Rightarrow(0,-\mathcal{D}p(\cdot)+\mathcal{B}\mathcal{B}'z(\cdot))\in\mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H}\\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D}\end{smallmatrix}\right)$$

для довільних $p(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D}), z(\cdot)\in\mathbb{L}_2^n$ звідки

$$0=\langle z_0,-\mathcal{D}p(\cdot)+\mathcal{B}\mathcal{B}'z(\cdot)\rangle=\langle\mathcal{D}p_0,z(\cdot)\rangle+\langle\mathcal{H}'\mathcal{H}p_0,p(\cdot)\rangle,$$

відтак

$$\langle\mathcal{H}'\mathcal{H}p_0,p(\cdot)\rangle=0,\quad\forall p(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})$$

тому $p_0\in\mathscr{N}(\mathcal{H})$, себто оцінка не залежить від p_0. □

Зауваження 1. Під час доведення теореми було показано, що

$$\ell\in\mathscr{F}\Rightarrow \ell\in\mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix}-\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}'\end{smallmatrix}\right)$$

Зворотнє включення перевіряється безпосередньо. Таким чином, для абстрактних лінійних операторів нетерового L та обмежених $\mathcal{B},\mathcal{H}$ вектор $(0,\ell(\cdot))$ лежить у множині значень оператора $\begin{smallmatrix}L & \mathcal{B}\mathcal{B}'\\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & L'\end{smallmatrix}$ тоді і лише тоді, коли $\ell(\cdot)\in\mathscr{F}$. Без істотних змін доведення теореми може бути перенесено на випадок абстрактних лінійних нетерових операторів у просторах Гільберта.

3. Приклади

Приклад 1. Проілюструємо застосування наслідку 1 для задачі оцінювання стану моделі лінійного осцилятора

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

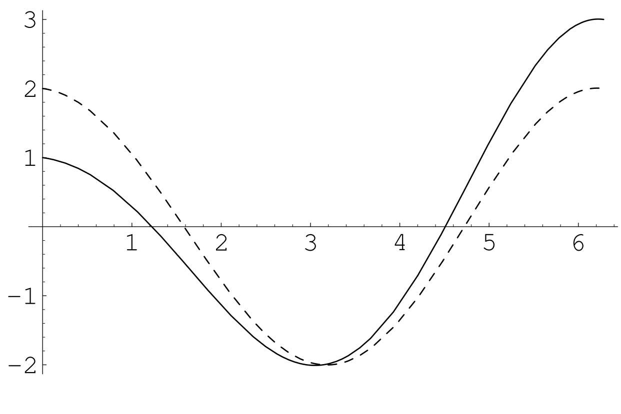
Помітимо, що

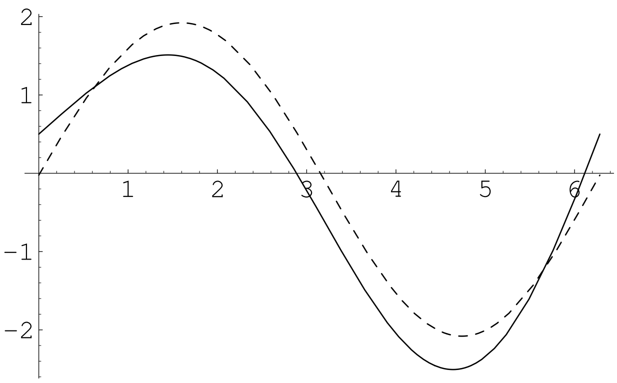
$$\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{\{\cos(t), -\sin(t)\}, \{\sin(t), \cos(t)\}\}, \mathcal{H}\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{\{0, 0\}, \{\frac{1}{20}, \frac{1}{2}\}\}$$

Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\pi} \\ \frac{\sin(t)}{\pi} \end{pmatrix}$ і спостерігається

$$x(t) = \{\cos(t) + t\; cos(t)/\pi - \sin(t)/2, \cos(t)/2 + \sin(t) + t\sin(t)/\pi)\}$$

на тлі шуму $g(t) = \begin{pmatrix} 0.1\sin(t) \\ 0.1\sin(t) \end{pmatrix}$. При цьому вихід системи має вигляд $((0.05 + 0.0159155t + 0.1\sin(t), 0.5 + 0.159155t + 0.1\sin(t))$, тобто на виході відсутня інформація про компоненту з ядра, що входить до складу $x(\cdot)$. Знайдемо $\hat{x}(\cdot)$, розв'язуючи (6) і обчислимо $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_2 \simeq 1.85877$. На малюнках показано як співвідносяться компоненти зімітованої траєкторії $x(\cdot)$(суцільна крива) та $\hat{x}(\cdot)$ (пунктирна крива)





Приклад 2. Проілюструємо на прикладі застосування теореми 2. Для цього покладемо

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, l_1(t) = \left[\begin{smallmatrix} \sin(t) \\ 1 \end{smallmatrix} \right] f(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нормована фундаментальна матриця прямої системи дається виразом

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -1 + e^t & 1 \end{pmatrix}$$

відтак $\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{(0,1)\}$ і, очевидно, $\mathcal{H}\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{0\}$.

Обчислимо нормовану фундаментальну матрицю спряженої системи

$$G(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t}(-1 + e^t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Покладемо $\ell(\cdot) = l_1(\cdot)$ і обчислимо вектор-функцію $h(\cdot)$

$$h(t) = \left[\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2} e^{-t}(1 - 2e^(t) + 2\exp(t)t + \exp(t)\cos(t) - \exp(t)\sin(t)) \\ t \end{smallmatrix} \right]$$

Обчислимо матриці $W(2\pi, 0)$, P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W(2\pi, 0) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $W(2\pi, 0)$ - нульова матриця, то згідно теореми 2 $\ell(\cdot) \in \mathscr{F}$ лише тоді, коли $Ph(2\pi) = 0$. З іншого боку

$$h(2\pi) = \left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2} - 2\pi \\ 2\pi \end{smallmatrix} \right] \Rightarrow Ph(2\pi) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2\pi \end{smallmatrix} \right]$$

згідно вибору $l_1(\cdot)$.

Покладемо $\ell(t) := l_2(t) = (\sin(t), \cos(t))$ і обчислимо $h(2\pi)$. Знаходимо

$$h(t) = (0, \sin(t)) \Rightarrow Ph(2\pi) = (0, 0)$$

Покажемо, що для $(0, l_1(\cdot))$ система (7) не має розв'язків. Для цього обчислимо нуль-многовид N оператора, породженого спряженою системою Ейлера. Безпосереднім обчисленням встановлюється $N = \{(0, 0, 0, 1)\}$. Очевидно, що $(0, l_1(\cdot))$ не ортогональне N, в той час як $(0, l_2(\cdot))$ вже ортогональне N.

4. Допоміжні результати і доведення

Доведення леми 2.

Зауваження 2. Для того випадку, коли $\mathcal{B}$ – тотожній оператор, твердження леми повторює подібний результат [2] для замкнених лінійних операторів у гільбертових просторах: в умовах леми спряжений до прообразу індикатору відносно оператора є функціонал, що зіставляє h норму розв'язку (мінімального по нормі) спряженого рівняння.

Зрозуміло, що

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \sup_x\{\langle h, x\rangle - \delta(Lx|\mathcal{B}\mathscr{G})\} = +\infty$$

для $h \notin \mathrm{N}^\perp(L^*) = \mathrm{R}(L^*)$, відтак $\mathrm{dom}(\delta L)^* \subset \mathrm{R}(L^*)$.

Нехай z – довільний розв'язок $L^*z = h$. Тоді

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \sup_x\{\langle z, Lx\rangle - \delta(Lx|\mathcal{B}\mathscr{G})\} = \sup_f\{\langle z, \mathcal{B}f\rangle - \delta(\mathcal{B}f|\mathscr{R}(L)) - \delta(f|\mathscr{G})\}$$

і згідно 2) знайдеться $f \in \mathrm{int}\mathscr{G}$, для деякого $\mathcal{B}f \in \mathscr{R}(L)$, відтак [10, с.189,т.1] будемо мати

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \inf_p\{s(\mathcal{B}'z - p|\mathscr{G}) + \delta^*(\cdot|\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L))(p)\} =$$

$$s(\mathcal{B}'z - \hat{p}|\mathscr{G}) + \delta^*(\cdot|\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L))(\hat{p}) < +\infty$$

Таким чином $\mathrm{dom}(\delta L)^* = \mathscr{R}(L^*)$.

Оскільки $\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L)$ – замкнений лінійний многовид, то

$$\delta^*(\cdot|\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L)) = \delta(\cdot|(\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L))^\perp)$$

Покажемо, що

$$(\mathcal{B}'\mathscr{N}(L^*))^\perp = \mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L).$$

Покладемо $M := \mathscr{N}(L^*), M^\perp := \mathscr{R}(L)$ і нехай $i_M : M \to H$ вкладення M у H за правилом $i_M x = x$. Тоді оператор $\mathcal{B}'i_M$ лінійно неперервно відображає гільбертовий простір M у H, $\mathscr{R}(\mathcal{B}'i_M) = \mathcal{B}'M$ і $(\mathcal{B}'i_M)' = i'_M\mathcal{B}$, відтак

$$\mathscr{R}(\mathcal{B}'i_M)^\perp = \mathscr{N}(i'_M\mathcal{B}) \Rightarrow \mathrm{cl} \quad \mathscr{R}(\mathcal{B}'i_M) = \mathscr{N}(i'_M\mathcal{B})^\perp$$

Зрозуміло, що $\mathscr{N}(i'_M\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1}\mathscr{N}(i'_M)$. З умови ортогональності графіка лінійного оператора $i_M : M \to H$ та оберненого графіка $i'_M : H \to M$

$$\langle x, -i'_M z\rangle + \langle z, i_M x\rangle = 0, \forall x \in M, z \in H$$

знаходимо $\mathscr{N}(i'_M) = M^\perp$.

Покажемо, що

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}(\mathscr{G})))^*(h) = s(\mathcal{B}'z - \hat{p}|\mathscr{G}), \hat{p} \in \mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'\mathscr{N}(L^*)$$

не залежно від вибору $z \in \mathcal{Z} = \{z : L^*z = h\}$. Справді, для довільного $z \in \mathcal{Z} : z = z^+ + z - z^+$, де $z^+ \in \mathcal{Z} \cap \mathscr{R}(L)$, $z - z^+ \in \mathscr{N}(L^*)$, відтак $\mathcal{B}'(z - z^+) \in \mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'\mathscr{N}(L^*)$. Але тоді

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}(\mathscr{G})))^*(h) = \inf_p \{s(\mathcal{B}'z - p|\mathscr{G}) + \delta(p|\mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'(\mathscr{N}(L^*)))\} =$$

$$\inf_p \{s(\mathcal{B}'z^+ + \mathcal{B}'(z - z^+) - p|\mathscr{G}) + \delta(p|\mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'(\mathscr{N}(L^*)))\} =$$

$$\inf_p \{s(\mathcal{B}'z^+ - p|\mathscr{G}) + \delta(p|\mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'(\mathscr{N}(L^*)))\} = s(\mathcal{B}'z^+ - p^+|\mathscr{G})$$

□

Доведення теореми 2. Розв'язність крайової задачі (7) еквівалентна

$$(0, \ell) \in \mathscr{R}(\begin{smallmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & -\mathcal{D}' \end{smallmatrix}) \tag{19}$$

Імплікація

$$(0, \ell) \in \mathscr{R}(\left(\begin{smallmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & -\mathcal{D}' \end{smallmatrix} \right)) \Rightarrow \exists u(\cdot) : \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot) \in \mathscr{R}(D')$$

очевидна. Зворотна імплікація доведена у (17).

Для кожного розв'язку z_0 лінійного алгебраїчного рівняння

$$(E - \Phi(\omega, 0))z_0 = \int_0^\omega \Phi(\omega, s)(H'(s)u(s) - \ell(s))\mathrm{ds} \tag{$*$}$$

розв'язок задачі Коші

$$\dot{z}(t) = -A'(t)z(t) + H'(t)u(t) - \ell(t), z(0) = z_0$$

буде періодичним розв'язком. $(*)$ має розв'язки лише для таких ℓ, u, для яких

$$\int_0^\omega [E - (E - \Phi(\omega, 0))(E - \Phi(\omega, 0))^+]\Phi(\omega, s)(H'(s)u(s) - \ell(s))\mathrm{ds} = 0 \tag{$**$}$$

Введемо лінійний оператор

$$u \mapsto Lu = \int_0^\omega P\Phi(\omega, s)H'(s)u(s)\mathrm{ds}, P := [E - (E - \Phi(\omega, 0))(E - \Phi(\omega, 0))^+]$$

і покладемо

$$b := \int_0^\omega P\Phi(\omega, s)\ell(s))\mathrm{ds}$$

Тоді умову $(**)$ виконано лише тоді, коли лінійне операторне рівняння

$$Lu = b$$

має розв'язки. З іншого боку відомо [6, с.211], що $b \in R(L)$ лише тоді, коли b лежить у підпросторі, натягнутому на стовпчики матриці

$$W(0,\omega) := \int_0^\omega P\Phi(\omega,s)H'(s)H(s)\Phi'(\omega,s)P\mathrm{d}s$$

або, що те саме

$$b \perp \{x : W(0,\omega)x = 0\}$$

□

Доведення леми 1. Множина $\mathscr{D}(\mathcal{D})$ скрізь щільна у просторі $\mathbb{L}_2^n$. Нам достатньо довести скрізь щільність множини

$$\mathscr{D}(\mathcal{D}_1) := \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{D}) : \varphi(0) = \varphi(\omega) = 0\},$$

бо для довільного $x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ справедливий векторний аналог формули Н'ютона-Лейбніца

$$x(s) - x(0) = \int_0^s \dot{x}(t)\mathrm{d}t,$$

і з умови $(*)$ виводимо $x(0) = x(\omega)$. Нехай $f \in \mathbb{L}_2^n$ і $\int_0^\omega (f,\varphi)_n \mathrm{d}t = 0$ для всіх $\varphi(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_1)$, звідки, інтегруючи по частинах, дістанемо

$$\int_0^\omega (\int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \dot{\varphi}(t))_n \mathrm{d}t = 0, \forall \varphi(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_1) \Rightarrow \int_0^t f(s)\mathrm{d}s = const.$$

Дійсно, вектор-функція $g(\cdot)$ ортогональна до підпростору постійних вектор-функцій $\mathscr{C}$ з $\mathbb{L}_2^n$ тоді і лише тоді, коли $\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s = 0$. Усі такі $g(\cdot)$ утворюють нуль-многовид $\mathscr{G}$ лінійного обмеженого функціоналу $g(\cdot) \mapsto \int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s$. Отже, $\mathscr{C}^\perp = \mathscr{G}$ звідки $\mathscr{C} = \mathscr{G}^\perp$ в силу скінченновимірності $\mathscr{C}$. З іншого боку $\varphi(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_1)$ і $\dot{\varphi}(t) = g(t)$ для $g(\cdot) \in \mathscr{G}$.

Замкненість оператора $\mathcal{D}$ є наслідком [8, с.119] того факту, що $\mathcal{D}$ є сумою обмеженого та замкненого. Справді, оператор $x \mapsto Ax$ обмежений в силу неперервності $t \mapsto A(t)$. Покажемо, що оператор $x \mapsto \mathcal{D}_0 x := \dot{x}$, визначений на $\mathscr{D}(\mathcal{D})$, замкнений. Відомо [7, с.93], що для довільної послідовності абсолютно неперервних функції $\{f_n\}$ в $\mathbb{L}_2^n$ такої, що $\{f_n\} \to f, \{\dot{f}_n\} \to g$ сильно в $\mathbb{L}_2^n$, f – абсолютно неперервна і $\dot{f} = g$. Якщо ж водночас $f_n \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, то $\int_0^\omega \dot{f}(t)\mathrm{d}t = 0$. Справді, в силу $(*)$

$$0 = \lim \int_0^\omega \dot{f}_n(t)\mathrm{d}t$$

З іншого боку

$$\lim \int_0^\omega \dot{f}_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^\omega \dot{f}(t)\mathrm{d}t$$

в силу неперервності лінійного функціоналу $g \mapsto \int_0^\omega g(t)\mathrm{d}t$ та сильної збіжності $\dot{f}_n \to \dot{f}$.
Отже, $\mathcal{D}$ – щільно визначений замкнений лінійний оператор з $\mathbb{L}_2^n$ в $\mathbb{L}_2^n$, відтак [9, с.40] існує єдиний спряжений оператор $\mathcal{D}^*$, що буде замкненим і щільно визначеним лінійним оператором з $\mathbb{L}_2^n$ в $\mathbb{L}_2^n$. Обчислимо $\mathcal{D}^*$. Для цього достатньо обчислити оператори $\mathcal{D}_0^*, A^*$, бо $(\mathcal{D}_0 - A)^* = \mathcal{D}_0^* - A^*$ і $\mathscr{D}((\mathcal{D}_0 - A)^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$ для замкненого $\mathcal{D}_0$ та обмеженого A лінійних операторів, що діють в абстрактному гільбертовому просторі.
Спочатку визначимо $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$. Символом $\mathcal{D}_1$ позначимо звуження $\mathcal{D}_0$ на множину $\mathscr{D}(\mathcal{D}_1)$. Можна показати [8, с.196], що $\mathcal{D}_0^* \subset \mathcal{D}_1^*$ тобто $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*) \subseteq \mathscr{D}(\mathcal{D}_1^*)$ і $\mathcal{D}_0^* = \mathcal{D}_1^*$ на $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$. З іншого боку [7, с.94] $\mathscr{D}(\mathcal{D}_1^*)$ складається з усіх абсолютно неперервних функцій з $\mathbb{L}_2^n$, що мають похідну класу $\mathbb{L}_2^n$ і $N(\mathcal{D}_1^*)$ утворено функціями-константами з $\mathbb{L}_2^n$.
Символом $\mathcal{D}_2$ позначимо лінійний оператор, визначений на $\mathscr{D}(\mathcal{D})$ згідно правила

$$\mathcal{D}_2 z = -\dot{z}.$$

Неважко пересвідчитись, що $\mathcal{D}_2$ – замкнений оператор. Помітимо, що згідно формули інтегрування по частинах для абсолютно неперервних функцій

$$\langle \mathcal{D}_0 x, g\rangle_2 := \int_0^\omega ((\mathcal{D}_0 x)(t), g(t))_n \mathrm{d}t = \langle x, \mathcal{D}_2 g\rangle_2,$$

для довільних $x, g \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, відтак $\mathcal{D}_0^* x = \mathcal{D}_2 x, x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ і $\mathscr{D}(\mathcal{D}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$. Покажемо, що $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*) \subset \mathscr{D}(\mathcal{D})$. Справді, нехай $g \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$ і $\mathcal{D}_0^* g = h$. Тоді

$$\langle \mathcal{D}_0 x, g\rangle_2 = \langle x, h\rangle_2 = \int_0^\omega (x(t), h(t))_n \mathrm{d}t,$$

звідки, поклавши $x(t) \equiv e_i, e_i$ – i-орт в $\mathbb{R}^n$, дістанемо

$$\int_0^\omega h(t)\mathrm{d}t = 0.$$

З іншого боку, інтегруючи по частинах

$$\int_0^\omega (x(t), \left[\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\right]')_n \mathrm{d}t = -\int_0^\omega (\dot{x}(t), \int_0^t h(s)\mathrm{d}s)_n \mathrm{d}t + (\int_0^\omega h(t)\mathrm{d}t, x(\omega))_n$$

знаходимо, що для всіх $x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ виконано

$$\int_0^\omega (\dot{x}(t), g(t) + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s)_n \mathrm{d}t = 0,$$

відтак майже скрізь

$$g(t) + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s = p(t) \Rightarrow g(0) = p(0), g(\omega) = p(\omega)$$

для деякої вектор-функції $t \mapsto p(t) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$ такої, що $\mathcal{D}_0^* p = 0$. Але тоді $\mathcal{D}_1^* p = 0$ відтак $p \in N(\mathcal{D}_1^*)$ і тому $p(0) = p(\omega)$.
Таким чином $\mathcal{D}_0^* z = -\dot{z}, \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D})$. Безпосередньо встановлюється, що $(A^*z)(t) = A'(t)z(t)$, тому $(\mathcal{D}^*z)(t) = -\dot{z}(t) - A'(t)z(t)$ і $\mathscr{D}(\mathcal{D}^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D})$. $\square$

Доведення леми 3. Лінійність $\mathcal{D}^+$ не викликає сумніву. Нехай $b \in \mathbb{L}_2^n$ і $z^+ := \mathcal{D}^+ b$. Помітимо, що $\Phi'(t_0, t)$ буде перехідною матрицею рівняння $\dot{z}(t) = -A(t)'z(t)$, відтак

$$z^+(t) = \Phi'(0,t)(E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega) + z_1(t).$$

Матрична функція $t \mapsto \Phi'(0,t)$ абсолютно неперервна по t і не залежить від b, тому оператор множення на неперервну матрицю обмежений в $\mathbb{L}_2^n$. Лінійний оператор $b \mapsto z_1(\omega)$ є обмеженим, відтак оператор $b \mapsto \Phi'(0,t)(E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega)$ обмежений, як композиція обмежених. Оскільки $b(\cdot) \mapsto z_1(\cdot)$ обмежений, то $\mathcal{D}^+$ обмежений як сума таких.

Далі

$$z^+(\omega) - z^+(0) = \Phi'(0,\omega)(E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega) + z_1(\omega) - (E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega) =$$
$$(E - (E - \Phi'(0,\omega))(E - \Phi'(0,\omega))^+) z_1(\omega) \in \mathscr{N}((E - \Phi(0,\omega))),$$

Відомо [6, с.121], що $\Phi(0,\omega) = \Phi^{-1}(\omega, 0)$ і якщо помножити рівняння $(E - \Phi(\omega,0))q = 0$ зліва на $\Phi(0,\omega)$, то дістанемо $(\Phi(0,\omega) - E)q = 0$, звідки $\mathscr{N}(E - \Phi(\omega,0)) = \mathscr{N}(\Phi(0,\omega) - E)$, отже

$$z^+(\omega) - z^+(0) \in \mathscr{N}(E - \Phi(\omega, 0)) \tag{20}$$

Нехай $u(\cdot) = \mathcal{D}p(\cdot)$. Тоді

$$\begin{gathered}\langle u(\cdot), z^+(\cdot)\rangle_2 = \int_0^\omega (p_t, z^+) + (z_t^+, p) - (p, b)\mathrm{d}t = \\ (p(0), z^+(\omega) - z^+(0)) - \langle p(\cdot), b(\cdot)\rangle_2\end{gathered} \tag{21}$$

звідки легко одержати, що $z^+(\omega) = z^+(0)$ для довільного $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$, і тому $z^+(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}')$, $\mathcal{D}'z^+(\cdot) = b(\cdot)$. Справді, зафіксуємо $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і нехай $p(\cdot) \in \mathscr{N}(\mathcal{D})$. Тоді $p(0) \in \mathscr{N}(E - \Phi(\omega, 0))$. З іншого боку згідно (21)

$$0 = \langle \mathcal{D}p(\cdot), z^+(\cdot)\rangle_2 = (p(0), z^+(\omega) - z^+(0)),$$

і, позаяк остання рівність виконана для довільного $p(\cdot) \in \mathscr{N}(\mathcal{D})$, із (20) дістанемо потрібне.

У загальному випадку $b \in \mathbb{L}_2^n$ із (21) випливає, що

$$\langle \mathcal{D}p(\cdot), z^+(\cdot)\rangle_2 = -\langle p(\cdot), b(\cdot)\rangle_2 \tag{22}$$

якщо $p(0) \perp \mathscr{N}(E-\Phi(\omega,0))$. По аналогії з тим, як це буде зроблено нижче, можна показати, що остання умова еквівалентна включенню $p(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$.

Зафіксуємо $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і нехай $\mathcal{D}'z = b$, $\mathcal{D}^{+}b := z^{+}$. Легко збагнути, що $z(0) = z^{+}(0) + z_0$, де z_0 такий, що $(E-\Phi(\omega,0))z_0 = 0$. Але тоді

$$z(t) = z^{+}(t) + \Phi(t,0)z_0 \Rightarrow \|z\|_2 - \|z^{+}\|_2 = \|z^{+} + \Phi(t,0)z_0\|_2 - \|z^{+}\|_2 \geq 0$$

що еквівалентно включенню $z^{+} \in \mathscr{R}(\mathcal{D})$. Решта тверджень леми є простими наслідками сказаного і перевіряються безпосередньо. $\square$

Висновки

У цій роботі для задачі мінімаксного спостереження лінійних обмежених функціоналів на множині розв'язків лінійної одновимірної крайової задачі запропоновано критерій скінченності мінімаксної похибки оцінювання без обмеження структури системи та моделі спостереження. Виділено множину функціоналів $\mathscr{F}$, для елементів якої і лише для них мінімаксна оцінка існує і єдина. У випадку квадратичних обмежень запропоновано представлення оцінки за допомогою розв'язків крайової задачі для лінійної невід'ємно означеної гамільтонової системи. Запропоновано критерій приналежності заданого лінійного функціоналу до множини $\mathscr{F}$ в термінах алгебраїчних рівнянь, структура яких визначається фундаментальною матрицею вихідного рівняння. Показано, що $\mathscr{F} = \mathbb{L}_2^n$ для випадку ін'єктивності звуження оператора $\mathcal{H}$ на ядро оператора $\mathcal{D}$. Як наслідки з теореми про вигляд оцінки та похибки одержано характеристику ядра та множини значень оператора $\begin{matrix} L & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & L' \end{matrix}$ для абстрактних лінійних операторів нетерового L та обмежених $\mathcal{B}, \mathcal{H}$ (див. зауваження 1).

У тому випадку коли ядро оператора $\mathcal{H}$ має нетривіальний перетин з $\mathscr{N}(\mathcal{D})$ множина оцінюваних функціоналів звужується до деякого підпростору. Останнє означає, що вихідна система втрачає властивість повної спостережуваності, відтак за допомогою розв'язку $\hat{x}(\cdot)$ задачі (6) вдається оцінити лише проекцію $x(\cdot)$ на підпростір оцінюваних функціоналів. У такому випадку виникає потреба в розробці конструктивного методу побудови базису підпростору оцінюваних функціоналів у $\mathbb{L}_2^n$. Це в свою чергу дозволило би ефективно будувати оцінки зазначених проекцій і тому становить перспективний напрямок для подальших досліджень.

Список литературы

1. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності // Наукові записки КНУ ім. Т.Г. Шевченка. — 2004. – Том 7: факультет кібернетики.— С.102-112.
2. *Жук С.М.* Мінімаксні задачі спостереження для лінійних дескрипторних диференціальних рівнянь // Ж. обч. прикл. мат. — 2005. — N2. — С.39-46.
3. *Жук С.М.* Задачі мінімаксного спостереження для лінійних дескрипторних систем: Автореферат дис. канд-та фіз.-мат. наук / Київ, 2006. – 19 с.

4. *Подлипенко Ю.К.* Минимаксное оценивание правых частей нётеровых уравнений в гильбертовом пространстве в условиях неопределенности // Доповіді НАНУ. — 2005. — 12. — С.36-44.
5. *Подлипенко Ю.К., Рябікова А.В.* Минимаксное оценивание по неполным данным решений двухточечных краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференципалных уравнений // Жур. прикл. и выч. мат-ки. – 2005. – 2(93). – С.97-106.
6. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.:Наука, 1976. — 416 с.
7. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ: Пер.з англ. — М.:Наука, 1980.– 384 с.
8. *Хатсон В., Пим Дж.С.* Приложения функционального анализа и теории операторов: Пер. з англ. — М.:Мир, 1983. — 432 с.
9. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. — Киев: Наук.думка, 1983. — 212 с.
10. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.:Наука, 1974. — 477 с.

Статья поступила в редакцию 23.03.2007

УДК 519.68

ЛОКАЛЬНЫЕ ЭЛИМИНАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ УДОВЛЕТВОРЕНИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ

© О.А. Щербина
University of Vienna,
Institut für Mathematik
Nordbergstr. 15, Vienna 1090, Austria
e-mail: *oleg.shcherbina@univie.ac.at*

In this paper local elimination algorithms of decomposition of constraint satisfaction problems are considered.

Введение

Использование подходов и алгоритмов искусственного интеллекта (ИИ) позволяет решать многие прикладные задачи, такие, как задачи теории расписаний [10], задачи проектирования экспертных систем и систем поддержки принятия решений [3], доказательство теорем, задачи тестирования электронных схем, обработка изображений. Одной из важных задач ИИ является задача удовлетворения ограничений (constraint satisfaction problem) [14], [23]. К сожалению, большинство интересных задач ИИ являются NP-трудными и решение их в худшем случае может требовать перебора экспоненциального числа решений. Многие практические задачи содержат огромное число переменных и/или ограничений, что создает сложности при попытке решения этих задач с помощью современных решателей.

Перспективными декомпозиционными подходами, использующими структуру разреженных графов, описывающих задачи ИИ, являются графовые декомпозиционные методы [18], интерес к которым возрос в последнее время, что обусловлено результатами Courcelle [13], Arnborg et al. [9], доказавших, что ряд NP-трудных задач, поставленных в монадической логике второго порядка, могут быть решены за полиномиальное время с помощью методов динамического программирования на графах, описывающих структуру задачи, с ограниченной древовидной шириной.

К графовым декомпозиционным подходам относится класс локальных элиминационных алгоритмов (ЛЭА) вычисления информации [4], включающий локальные алгоритмы декомпозиции [1, 6], алгоритмы несериального динамического программирования (НСДП) ([11, 5, 20], алгоритмы сегментной элиминации [15], методы древовидной декомпозиции [18].

В [5, 20] рассмотрено применение ЛЭА для решения задач дискретной оптимизации (ДО). Успехи графовых декомпозиционных схем, позволяющих справиться с решением NP-трудных задач с помощью алгоритмов динамического программирования [18], вызвали интерес к применению этих методов и в областях, отличных от оптимизации. ЛЭА может быть использовано и для решения неоптимизационных задач, которые можно разбить на подзадачи и использовать полученные решения меньших подзадач при решении больших. Связь НСДП с локальными алгоритмами ([1, 6, 5]) обусловлена тем, что, как и локальные алгоритмы, НСДП решает задачи, преобразуя локальную информации в глобальную. Одной из общих для этих методов графовых интерпретаций является *элиминационная игра* (Parter [21]).

Для решения ряда разреженных дискретных задач, возникающих в самых разных областях, были предложены обобщения принципа динамического программирования, такие как обобщение Dechter [15] (bucket elimination), Shenoy [22] и др. Интересно заметить, что все прикладные задачи, для которых были предложены отмеченные обобщения, характеризовались возможностью находить решения всей задачи на базе локальных решений, анализируя окрестности элементов задачи. Автор считает важным подчеркнуть именно возможность вычисления и дальнейшего использования *локальной информации* (т.е. информации об элементах окрестности) при решении этих задач и предложить общий класс локальных элиминационных алгоритмов вычисления информации для их решения, позволяющих осуществлять вычисление *глобальной информации* с помощью *локальных вычислений.*

В настоящей статье рассмотрен класс локальных элиминационных алгоритмов вычисления информации и их применение при решении задач удовлетворения ограничений.

1. Задачи удовлетворения ограничений

1.1. **Основные понятия.** Задачи удовлетворения ограничений (УО), известные в англоязычной литературе как constraint satisfaction problems (CSP) [14, 23], широко используются при решении ряда практически важных задач ИИ, таких как составление расписаний, проектирование электронных схем, поддержка принятия решений. В данной статье рассматриваются задачи УО с дискретными переменными. При задании ограничений используются *отношения.*

Определение 1. Для данных множества переменных $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и соответствующих их областей значений $D_1, \ldots, D_n$ *отношением* R на множестве переменных называется любое подмножество декартова произведения их областей значений. Множество переменных, на котором определено отношение R, называется *диапазоном* отношения и обозначается $scope(R)$.

Если $R = D_1 \times \ldots \times D_n$, то R называется *универсальным отношением.*

Отношения могут задаваться с помощью таблиц, описывающих допустимые сочетания значений переменных (табл. 1).

Таблица 1. Отношение R

x_1	x_2	x_3
a	b	c
b	b	c
c	b	c
c	b	s

Определение 2. Задача УО (ЗУО) определяется множеством дискретных переменных $x_1, \ldots, x_n$, для каждой из которых задана область определения или домен $D_j = \{d_j^{(1)}, \ldots, d_j^{(p_j)}\}$ $(j = 1, \ldots, n)$, и множеством ограничений. *Ограничением* называется пара (R, S), где R – отношение, определенное на диапазоне S. *Решением* ЗУО называется присвоение значений всем переменным, которое удовлетворяет всем ограничениям. *Целью* решения ЗУО может быть нахождение одного или всех решений.

Действия над отношениями. Пусть R_1, R_2 – два отношения с одинаковым диапазоном. Тогда *пересечением* $R_1 \cap R_2$ называется отношение, содержащее все наборы значений переменных, которые имеются одновременно в обоих отношениях R_1 и R_2.

Объединение $R_1 \cup R_2$ – отношение, содержащее все наборы значений переменных, которые имеются либо в R_1, либо в R_2, или в обоих отношениях.

Разностью $R_1 - R_2$ называется отношение, содержащее наборы значений переменных, содержащиеся в R_1, но не содержащиеся в R_2.

Проекция $\Pi_Y(R)$ отношения R на множество переменных $Y \subseteq scope(R)$ является отношением, содержащим наборы значений только переменных, содержащихся в Y. В табличном представлении отношений проекция выбирает подмножество столбцов, соответствующих множеству Y.

Соединение отношений. Оператор соединения $R_S \bowtie R_T$ из двух отношений R_S с диапазоном S и R_T с диапазоном T строит новое отношение, состоящее из их общих переменных в S и T. Набор r из соединения $R_S \bowtie R_T$ отношений R_S и R_T можно построить, используя следующие шаги: (1) взять набор s из R_S; (2) выбрать набор t из R_T такой, что компоненты s и t согласуются по переменным из $S \cap T$, общим для R_S и R_T; (3) образовать новый набор r, комбинируя компоненты s и t, сохраняя лишь один из полученных одинаковых наборов. Диапазон получающегося отношения – $S \cup T$. Соединение двух отношений с одинаковыми диапазонами эквивалентно пересечению этих отношений.

Пример 1. Отношения R_1, R_2, R_3:

R_1:

x_1	x_2	x_3
a	b	c
b	b	c
c	b	c
c	b	s

R_2:

x_1	x_2	x_3
b	b	c
c	b	c
c	n	n

R_3:

x_2	x_3	x_4
a	a	1
b	c	2
b	c	3

Результаты действий над отношениями из примера 1

$R_1 \cap R_2$:

x_1	x_2	x_3
b	b	c
c	b	c

$R_1 \cup R_2$:

x_1	x_2	x_3
a	b	c
b	b	c
c	b	c
c	b	s
c	b	n

$R_1 - R_2$:

x_1	x_2	x_3
a	b	c
c	b	s

$\Pi_{\{x_2,x_3\}} R_2$:

x_2	x_3
b	c
n	n

$R_2 \bowtie R_3$:

x_1	x_2	x_3	x_4
a	b	c	2
b	b	c	3
c	b	c	2
c	b	c	3

1.2. **Примеры задач удовлетворения ограничений.** В числе важнейших примеров задач УО в обзоре [17] указаны задача о раскраске графа, задача составления расписаний и задача SAT.

Задача о раскраске вершин графа и задача составления расписаний

Задача о раскраске карты или эквивалентная ей задача о раскраске вершин графа (рис. 1) так, чтобы никакие две смежные вершины не были окрашены в одинаковый цвет, является одной из хорошо известных задач, к которой сводится задача составления расписания.

Определение 3. [16]. *Устойчивым множеством* вершин графа $G = (V, E)$ называется подмножество вершин X, никакие две из которых не являются смежными.

Определение 4. [16]. *Правильной раскраской* графа $G = (V, E)$ называется разбиение множества вершин V: $V = X_1 + \ldots + X_c$, такое, что каждое X_i является устойчивым множеством.

В этом случае говорят, что элементы подмножества X_i "окрашены" цветом i, причем смежные вершины окрашиваются разными цветами.

Пример 2. *Задача составления расписания*

Дано множество $V = \{v_i\}$ учебных курсов в университете. Известны интервалы времени T_i, в течение которых читаются соответствующие курсы $\{v_i\}$. Необходимо приписать учебные курсы аудиториям так, чтобы никакие два курса не пересекались по времени для одной и той же аудитории. Эта задача может быть сведена к поиску правильной раскраски графа $G = (V, E)$, где $(v_i, v_j) \in E \Leftrightarrow T_i \bigcap T_j \neq \emptyset$. Здесь каждой аудитории соответствует свой цвет.

Задача SAT (satisfiability) (задача проверки выполнимости формулы логики высказываний) имеет важное прикладное значение, причем приложения находятся в области тестирования электронных схем, проектирования компьютеров, анализа изображений [17]. Именно с задачи SAT Cook в 1971 г. начал исследование задач

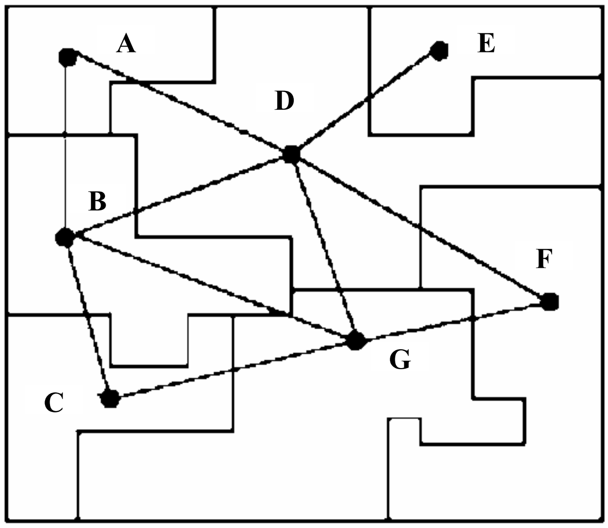


Рис. 1. Раскраска карты и соответствующий граф [14].

на NP-полноту [12]. Задача SAT состоит в определении, истинна ли данная формула логики высказываний при каком-нибудь значении литералов. Под решением задачи SAT понимается *интерпретация*, т.е. такое присваивание истинностных значений (1 или 0) литералам в формуле, при которых эта формула станет истинной.

2. Локальные элиминационные алгоритмы вычисления информации

При изучении сложных объектов не всегда возможно получить (или вычислить) полную информацию об объекте в целом, поэтому представляет интерес получение информации об объекте, рассматривая его по частям, т.е. локально. В [1] описаны предложенные Ю.И. Журавлевым локальные алгоритмы вычисления информации. Локальный алгоритм (ЛА) изучает элементы в порядке, задаваемом алгоритмом упорядочения A_π, используя при этом локальную информацию об элементах из окрестности [2] данного элемента. Алгоритм, расставляющий отметки, производит вычисление функции ϕ, значение которой на каждом шаге алгоритма будет определять вид отметки, выставляемой на этом шаге. Функция ϕ, порождающая алгоритм, – это функция от двух аргументов, первый из которых пробегает множество элементов, а второй – множество окрестностей. ЛА декомпозиции [6] задач ДО имеют свою специфику, состоящую в том, что они не вычисляют предикаты, а, используя принцип оптимальности Беллмана, вычисляют оптимальные частичные решения подзадач, соответствующих блокам задачи ДО.

Важной особенностью локальных алгоритмов является вычисление и использование именно *локальной информации* (т.е. информации об элементах окрестности элемента) при решении задач, поэтому локальные элиминационные алгоритмы (ЛЭА) вычисления информации позволяют осуществлять вычисление глобальной информации с помощью локальных вычислений.

Структура ЗУО задается ограничениями, и может быть задана как системой окрестностей переменных задачи (графом взаимосвязей переменных) и порядком просмотра этих переменных с помощью ЛЭА [5], так и различными производными структурами – блочными [4, 11], блочно-древовидными [7], задаваемыми структурными конденсированными графами. В конденсированном графе вершинами являются подмножества переменных задачи.

ЛЭА вычисляет информацию о локальных элементах структуры ЗУО, задаваемой структурным графом, записывая локальную информацию об этих элементах в виде новых зависимостей, добавляемых к задаче, затем элиминируя просмотренные элементы и использованные ограничения. Алгоритмическая схема ЛЭА представляет собой бесконтурный орграф (directed acyclic graph (DAG)), вершинами которого являются локальные подзадачи, соответствующие окрестностям элементов, а дуги – выражают информационную зависимость подзадач друг от друга.

Процедура ЛЭА состоит из двух частей:

- *прямая часть* — выделение локальных элементов, их окрестностей в текущем структурном графе и соответствующих им подзадач, вычисление и запоминание локальной информации в виде новых ограничений, добавляемых к задаче, элиминация просмотренных локальных элементов и использованных ограничений, получение значения критерия (совместна ли ЗУО);

- *обратная часть* — нахождение глобального решения исходной ЗУО по имеющимся таблицам с локальными решениями, обеспечивающего достижение критерия (совместности ЗУО).

Прямая часть ЛЭА анализирует окрестность $Nb(x)$ текущего элемента x в структурном графе задачи, применяет оператор элиминации, состоящий в решении подзадачи ЗУО, соответствующей окрестности $Nb(x)$ этого элемента в текущем структурном графе, к этому элементу, вычисляя локальную информацию об элементе x в виде нового ограничения $(R,\ x \bigcup Nb(x))$, содержащего локальные решения в виде допустимых наборов переменных вида $R(x,\ Nb(x))$. Потом строится проекция $R' = \Pi_{Nb(x)} R(x,\ Nb(x))$; ограничение $(R',\ Nb(x))$ добавляется к системе ограничений. Далее элемент x элиминируется вместе с использованными ограничениями, а из элементов его окрестности $Nb(x)$ создается клика в структурном графе (эта клика соответствует ограничению $(R',\ Nb(x))$). Создание клик изменяет структурный граф и окрестности элементов. Обратная часть ЛАЭ восстанавливает решение всей задачи ЗУО на основе сохраненных таблиц с локальными решениями $R(x,\ Nb(x))$.

Для решения ЗУО, описываемой переменными $x_1, \ldots, x_n$, системой ограничений $(R_1, S_1), \ldots, (R_m, S_m)$, где R_i– отношение, $S_i = scope(R_i)$, $i = 1, \ldots, m$, и при заданном упорядочении A_π переменных ЛЭА выглядит следующим образом:

1. Выбрать очередной элемент x (переменную или группу переменных) согласно упорядочению A_π. Сформулировать подзадачу задачи УО, соответствующую окрестности $Nb(x)$ элемента x в текущем структурном графе, сформировав новое ограничение $R,\ x\bigcup Nb(x)$ с диапазоном $(x,\ Nb(x))$,решить ее, запоминая в таблице все решения этого ограничения.

2. Спроектировать полученное ограничение на множество элементов подзадачи, соответствующих окрестности $Nb(x)$ элемента x. В результате получится новое ограничение, добавляемое к ограничениям ЗУО. Если ограничение с тем же набором переменных уже имеется, найти их пересечение. Если пересечение пусто, то ЗУО несовместна и допустимых решений не имеет.

3. Элиминировать элемент x вместе с соответствующими ограничениями.

4. Продолжать до тех пор, пока не останется нерешенных ограничений.

Рассмотрим подробнее детали реализации ЛЭА при решении задач УО в случае, когда структурный граф является *графом взаимосвязей* переменных [11], который в литературе называется также *графом ограничений* [14]. В графе взаимосвязей ЗУО вершины соответствуют переменным ЗУО, причем две вершины соединяются ребром, если соответствующие переменные имеются в одном и том же ограничении (т.е., в одном и том же диапазоне какого-то отношения). Рассмотрим переменную x_i и ее окрестности $U(x_i)$, $Nb(x_i)$ в текущем графе взаимосвязей G: $U(x_i) = \{R_p \mid x_i \in scope(R_p)\}$, $Nb(x_i) = \{x_j \mid \exists p :\ x_i,\ x_j \in scope(R_p)\}$. Пусть $R_{i_1}, \dots, R_{i_{m_i}}$ – отношения с диапазонами $S_{i1}, \dots, S_{im_i}$, индексы которых входят в $U(x_i)$, причем их диапазоны содержат x_i.

Решение ЗУО, заданной ограничениями $R_{i1}, \dots, R_{im_i}$ и соответствующими переменными, и последующая элиминация x_i может быть описана следующим образом. Определяем диапазон нового ограничения как $S^{(i)} = \bigcup_{r=1}^{m_i} S_{i_r} - \{x_i\}$ и новое отношение $R^{(i)} = \Pi_{S^{(i)}}(\bowtie_{r=1}^{m_i} R_{i_r})$. Затем находится пересечение с существовавшим ранее отношением с тем же диапазоном $S^{(i)}$: $R^{(i)} = R_{S^{(i)}} \bigcap R^{(i)}$. Граф взаимосвязей $G = (V, E)$ при элиминации переменной x_i изменяется согласно алгоритму элиминационной игры [21]:

$$V \leftarrow V - \{x_i\};$$
$$E \leftarrow E \bigcup \{(x_k,\ x_r) |\ x_k,\ x_r \in Nb(x_i)\}.$$

Пример 3. Рассмотрим решение с помощью ЛЭА задачи УО, содержащей ограничения $(R_{345},\ S_{345})$, $(R_{25},\ S_{25})$, $(R_{42},\ S_{42})$, $(R_{31},\ S_{31})$, $(R_{21},\ S_{21})$, где диапазоны отношений: $S_{345} = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$, $S_{25} = \{x_2,\ x_5\}$, $S_{42} = \{x_4,\ x_2\}$, $S_{31} = \{x_3,\ x_1\}$, $S_{21} = \{x_2,\ x_1\}$, а отношения заданы в табличной форме:

R_{345} :

x_3	x_4	x_5
1	1	1
0	0	1
0	1	1

R_{25} :

x_2	x_5
0	1
1	0

R_{42} :

x_4	x_2
1	0
0	1

R_{31} :

x_3	x_1
0	1
1	0

R_{21} :

x_2	x_1
1	1
0	0

В качестве структурного графа ЗУО используем граф взаимосвязей переменных. Для данного примера граф взаимосвязей переменных показан на рис. 2 а). Для определения порядка A_π элиминации переменных используем эвристику "Minimum Degree" [8], которая выбирает на каждом шаге вершину текущего графа с минимальной степенью. Первой выберем переменную x_1. Ее соседи – x_2, x_3, $Nb(x_1) = \{x_2, x_3\}$. Рассмотрим ЗУО, задаваемую ограничениями (R_{31}, S_{31}), (R_{21}, S_{21}), где $S_{31} = \{x_3, x_1\}$, $S_{21} = \{x_2, x_1\}$. Построим новое ограничение $R'_{123} = R_{31} \bowtie R_{21}$, используя операцию $\bowtie$ соединения отношений (табл. 2).

Таблица 2. Отношение R'_{123}

	x_1	x_2	x_3
R'_{123}:	1	1	0
	0	0	1

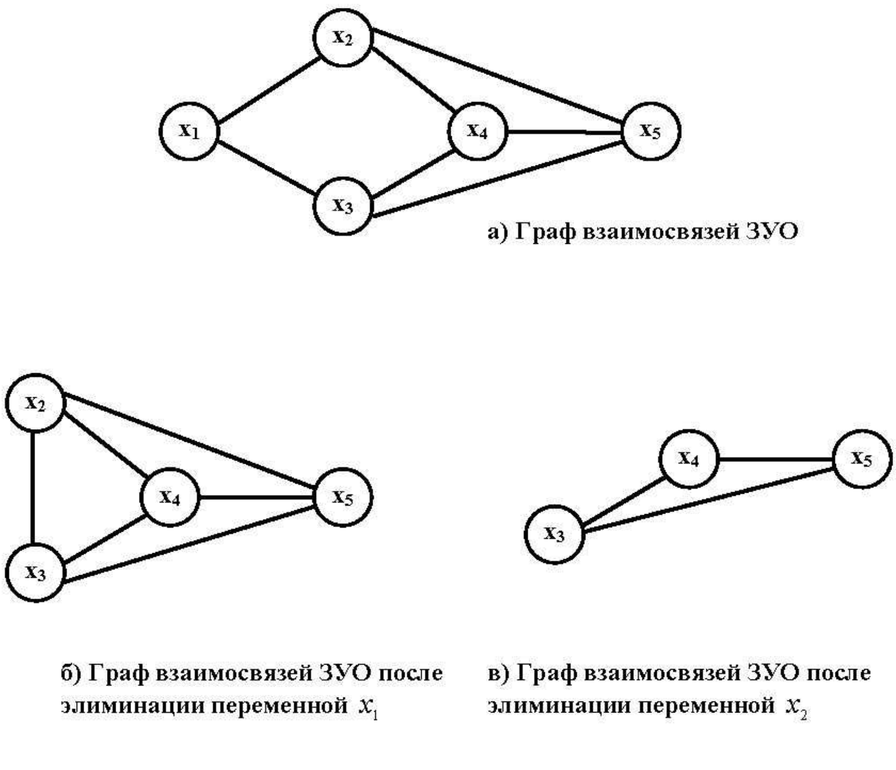


Рис. 2. Граф взаимосвязей для ЗУО.

Найдем проекцию $R'_{23} = \Pi_{\{x_2,x_3\}} R'_{123}$

R'_{23}:

x_2	x_3
1	0
0	1

В результате вершина x_1 элиминируется вместе с ребрами, исходящими из нее (эти ребра соответствуют уже использованным отношениям $R_{31},\ R_{21}$), вершины $x_2,\ x_3 \in Nb(x_1)$ соединяются ребром, соответствующим новому отношению R'_{23} (рис. 2 б)).

Рассмотрим переменную x_2, окрестность которой $Nb(x_2) = \{x_3,\ x_4,\ x_5\}$. Рассмотрим ЗУО, задаваемую ограничениями $(R_{25},\ S_{25})$, $(R_{42},\ S_{42})$, $(R'_{23},\ S_{23})$, где $S_{25} = \{x_2,\ x_5\}$, $S_{42} = \{x_4,\ x_2\}$, $S_{23} = \{x_2,\ x_3\}$. Построим новое ограничение $R'_{2345} = R_{25} \bowtie R_{42} \bowtie R_{23}$ (табл. 3). Найдем проекцию $R'_{345} = \Pi_{\{x_3,x_4,x_5\}}R'_{2345}$ отношения R'_{2345} на $\{x_3,x_4,x_5\}$ (табл. 4). Вершина x_2 элиминируется вместе с ребрами, исходящими из нее (и соответствующими отношениям $R_{25},\ R_{42},\ R'_{23}$), вершины $x_3,\ x_4,\ x_5 \in Nb(x_2)$ соединены между собой ребрами, соответствующими отношению R_{345}, поэтому соединять их не нужно (рис. 2 в)).

Таблица 3. Отношение R'_{2345}

x_2	x_3	x_4	x_5
0	1	1	1
1	0	0	0

Таблица 4. Отношение R'_{345}

x_3	x_4	x_5
1	1	1
0	0	0

Рассмотрим отношения R_{345} и R'_{345} и найдем их пересечение: $R^{+}_{345} = R_{345} \bigcap R'_{345}$ (табл. 5). Прямая часть ЛАЭ закончена, так как оставшиеся переменные ЗУО найдены: $x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1$. Для нахождения остальных переменных применим обратную часть процедуры ЛАЭ, просматривая таблицы с частичными решениями. Из таблицы 3, зная $x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1$, найдем $x_2 = 0$. Из таблицы 2, зная $x_2 = 0,\ x_3 = 1$, найдем $x_1 = 0$. Таким образом, решение исходной ЗУО:

Таблица 5. Отношение R^{+}_{345}

x_3	x_4	x_5
1	1	1

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1.$$

2.1. **Задача SAT и ее графовое представление.** Рассмотрим пример решения задачи SAT [19], заданной в конъюнктивной нормальной форме, состоящей из 7 элементарных дизъюнкций $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6,\ C_7$, называемых дизъюнктами:

$$(x_2 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee \neg x_6) \wedge (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_2)$$

Структура формулы может быть задана графом взаимосвязей – неориентированным графом, вершины которого соответствуют переменным-литералам, причем ребро соединяет две вершины, если соответствующие переменные входят в один и тот же дизъюнкт формулы. Оператор элиминации в данном случае — *ре-*

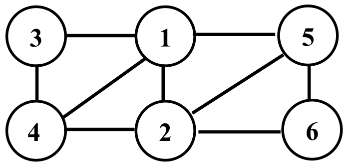


Рис. 3. Граф взаимосвязей для задачи SAT.

золюция, которая по двум дизъюнктам $(\alpha \vee Q)$ и $(\beta \vee \neg Q)$ выводит дизъюнкт $(\alpha \vee \beta)$, называемый *резольвентой*, в которой литерал Q элиминирован. Оператор элиминации (в данном случае – резолюция) порождает новые дизъюнкты, которым соответствуют новые ребра в графе взаимосвязей. Определим порядок рассмотрения окрестностей [1] на основе применения эвристики "Minimal Degree" [8]: $A_\pi = \{6, 5, 2, 4, 3, 1\}$. Рассмотрим вершину 6 и соответствующую переменную x_6. Ее окрестности $U(x_6) = \{C_1, C_2\}$, $Nb(x_6) = \{x_2, x_5\}$. Выпишем дизъюнкты из окрестности $U(x_6) : (x_2 \vee x_6) \wedge (x_5 \vee \neg x_6)$. Применяя оператор элиминации – резольвенту, получим новый дизъюнкт $C_{12} : (x_2 \vee x_5)$, т.е. новое отношение с переменными из $Nb(x_6)$. Для обеспечения возможности последующего выполнения обратной части ЛЭА необходимо запомнить вычисленную информацию о локальном решении $h_6(x_2, x_5) = x_2 \vee x_5$ и $x_6^*(x_2, x_5)$ – значение переменной x_6 для заданных значений x_2, x_5, при котором оба дизъюнкта будут истинны.

Таблица 6

(x_2, x_5)	$h_6(x_2, x_5)$	$x_6^*(x_2, x_5)$
(0, 0)	0	–
(0, 1)	1	1
(1, 0)	1	0
(1, 1)	1	1, 0

Элимируем дизъюнкты $C_1,\ C_2$ и переменную x_6. Соседи x_6 – переменные x_2, x_5 – связаны теперь в новом дизъюнкте $C_{12} : (x_2 \vee x_5)$, который добавляется в систему дизъюнктов. Граф взаимосвязей изменяется следующим образом: вершина 6 удаляется вместе с ребрами, исходящими из нее; соседи вершины 6 – вершины 2 и 5, соответствующие переменным x_2, x_5 должны быть соединены ребром в графе взаимосвязей (что соответствует появлению нового дизъюнкта C_{12}). Поскольку такое ребро было, то его добавлять не надо (рис. 4). Согласно порядку рассмот-

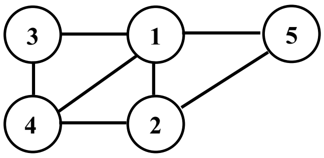


Рис. 4. Граф взаимосвязей для задачи SAT после элиминации вершины 6.

рения окрестностей A_π, перейдем к переменной x_5 (вершине 5) и ее окрестностям $U(x_6) = \{C_{12}, C_3, C_4\}$, $Nb(x_5) = \{x_1, x_2\}$.

$$(x_2 \vee x_5) \wedge (\neg x_1 \vee x_5) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_5).$$

Применяя оператор элиминации – резольвенту к последним двум дизъюнктам, получим новый дизъюнкт $C_{34} : \neg x_1 \vee \neg x_2$. Резольвента первого и третьего дизъюнктов дает $\neg x_2 \vee \neg x_2$, что можно отбросить. Элимируем дизъюнкты C_{12}, C_3, C_4 и переменную x_5. Соседи x_5 – переменные x_1, x_2 – связаны теперь в новом дизъюнкте $C_{34} : \neg x_1 \vee \neg x_2$, который добавляется в систему дизъюнктов. Граф взаимосвязей изменяется следующим образом: вершина 5 удаляется вместе с ребрами, исходящими из нее; поскольку вершины 1 и 2 соединены ребром, то новое ребро между ними не добавляется.

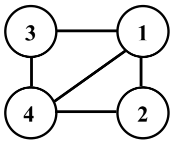


Рис. 5. Граф взаимосвязей для задачи SAT после элиминации вершины 5.

Вычислим и запомним информацию о локальном решении $h_5(x_1, x_2) = \neg x_1 \vee \neg x_2$ и $x_5^*(x_1, x_2)$ – значение переменной x_5 для заданных значений x_1, x_2, при котором оба дизъюнкта будут истинны.

Рассмотрим переменную x_2 и ее окрестности $U(x_2) = \{C_{34}, C_6, C_7\}$, $Nb(x_2) = \{x_1, x_4\}$.

$$(\neg x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_2).$$

Применяя оператор элиминации – резольвенту к первым двум дизъюнктам, вычислим новый дизъюнкт $\neg x_1 \vee x_4$. Резольвента первого и третьего дизъюнктов дает $\neg x_1 \vee \neg x_1$, что можно отбросить.

Таблица 7

(x_1, x_2)	$h_5(x_1, x_2)$	$x_5^*(x_1, x_2)$
(0, 0)	1	1
(0, 1)	1	0
(1, 0)	1	1
(1, 1)	0	–

Элиминируем дизъюнкты C_{34}, C_6, C_7 и переменную x_2. Соседи x_2 – переменные $x_1,\ x_4$ связаны теперь в новом дизъюнкте $C_{14} = \neg x_1 \vee \neg x_4$, который добавляется в систему дизъюнктов. Граф взаимосвязей изменяется следующим образом: вершина 2 удаляется вместе с ребрами, исходящими из нее; поскольку 1 и 4 соединены ребром, то новое ребро не добавляется. Вычислим и запомним информацию о локальном

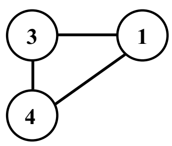


Рис. 6. Граф взаимосвязей для задачи SAT после элиминации вершины 2.

решении $h_2(x_1, x_4) = \neg x_1 \vee \neg x_4$ и $x_2^*(x_1,\ x_4)$ – значение переменной x_2 для заданных значений $x_1,\ x_4$, при котором все дизъюнкты будут истинны.

Таблица 8

(x_1, x_4)	$h_2(x_1, x_4)$	$x_2^*(x_1, x_4)$
(0, 0)	1	1
(0, 1)	1	1
(1, 0)	1	0
(1, 1)	0	–

Рассмотрим переменную x_4 и ее окрестности $U(x_4) = \{C_{14}, C_5\},\ Nb(x_4) = \{x_1, x_3\}$.

$$(\neg x_1 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee x_4)$$

Применяя оператор элиминации – резольвенту к этим дизъюнктам, получим новый дизъюнкт $h_4(x_1, x_3) \equiv 1$ при любых x_1, x_3. Элимируем дизъюнкты $C_{14},\ C_5$ и переменную x_4. Соседи x_4 – переменные x_1, x_3 принимают произвольные бинарные значения, причем данная формула логики высказываний истинна. Вычислим и запомним информацию о локальном решении: $x_4^*(x_1,\ x_3)$ - значение переменной x_4 для заданных значений $(x_1,\ x_3)$, при котором все дизъюнкты будут истинны. Найдем теперь

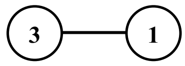


Рис. 7. Граф взаимосвязей для задачи SAT после элиминации вершины 4.

Таблица 9

(x_1, x_3)	$h_4(x_1, x_3)$	$x_4^*(x_1, x_3)$
(0, 0)	1	1
(0, 1)	1	1,0
(1, 0)	1	0
(1, 1)	1	0

решения, т.е. те значения переменных x_1, x_3, при которых данная формула алгебры высказываний истинна. Поскольку значения произвольны, построим следующую таблицу возможных решений, используя таблицы 6–9 в обратном порядке.

Таблица 10. Решения задачи SAT.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1

2.2. **Задача о раскраске графа.** В задаче о раскраске вершин графа граф взаимосвязей ЗУО идентичен графу, вершины которого нужно раскрасить. При этом переменные ЗУО соответствуют вершинам графа, области значений переменных – множеству возможных цветов, а отношения являются неравенствами вида: $A \neq B$ (цвет вершины A отличен от цвета вершины B).

Пример 4. Рассмотрим пример задачи о раскраске графа, показанного на рис. 8 а), вершины которого нужно раскрасить в два цвета: красный (1) и зеленый (2) [14]. При формулировании ЗУО, в качестве отношения R_{ED} принимается следующее: $R_{ED} : E \neq D$, т.е. вершины E и D окрашены в разные цвета, или $R_{ED} = \{(1, 2), (2, 1)\}$; в табличной форме

$$R_{ED} : \begin{array}{c|c} E & D \\ \hline 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}$$

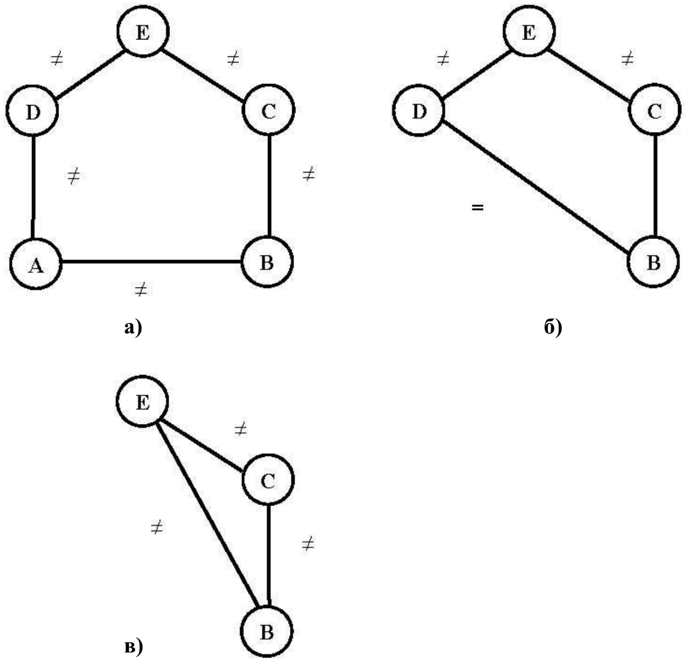


Рис. 8. Граф взаимосвязей для задачи о раскраске: а) исходный; б) после элиминации вершины A; в) после элиминации вершины D.

Используем порядок элиминации $A_\pi = \{A,\ D,\ C,\ B,\ E\}$. Рассмотрим вершину A графа на рис. 8 а), окрестность которой $Nb(A) = \{B,\ D\}$. Ребрам $(A,\ B)$ и $(A,\ D)$ соответствуют отношения R_{AB} и R_{AD}: $R_{AB} = \{(1,2),(2,1)\}$, $R_{AD} = \{(1,2),(2,1)\}$.

Находя $R_{ABD} = R_{AB} \bowtie R_{AD}$, получим $R_{ABD} = \{(1,2,2),(2,1,1)\}$. Проектируя отношение R_{ABD} на $Nb(A) = \{B,\ D\}$, получим $R_{BD} = \{(2,2),(1,1)\}$, т.е. $B = D$ (цвета вершин B и D одинаковы) или в табличной форме

$$R_{BD} : \begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Элиминируем вершину A вместе с инцидентными ей ребрами $(A,\ B)$ и $(A,\ D)$ (соответствующие этим ребрам отношения R_{AB} и R_{AD} также далее не рассматриваются). Добавим новое отношение $R_{BD} : B = D$. Измененный граф взаимосвязей показан на рис. 8 б). В нем вершины B и D соединены ребром, соответствующим отношению $R_{BD} : B = D$.

Рассмотрим следующую, согласно порядку A_π, вершину D. $Nb(D) = \{B,\ E\}$, поэтому рассмотрим ребра $(D,\ B)$ и $(D,\ E)$ графа на рис. 8 б) и соответствующие им отношения: $R_{BD} : B = D$ и $R_{DE} : D \neq E$. Найдем $R_{DBE} = R_{BD} \bowtie R_{DE}$ в виде $R_{DBE} = \{(1,1,2),(2,2,1)\}$. Найдем проекцию $R_{BE} = \Pi_{\{B,E\}} R_{DBE}$:

$R_{BE} = \{(1,2),(2,1)\}$ или $B \neq E$. Элиминируем вершину D вместе с инцидентными ей ребрами (D, B) и (D, E) (соответствующие отношения R_{BD} и R_{DE} далее не рассматриваются). Добавим новое отношение $R_{BE} : B \neq E$. Измененный граф взаимосвязей показан на рис. 8 в). В нем вершины B и E соединены ребром, соответствующим добавленному отношению $R_{BE} : B \neq E$.

Рассмотрим следующую, согласно порядку A_π, вершину C. $Nb(C) = \{B,\ E\}$, так что рассмотрим ребра (C, B) и (C, E) графа на рис. 8 в) и соответствующие им отношения: $R_{CB} : C \neq B$ и $R_{CE} : C \neq E$. Найдем $R_{CBE} = R_{CB} \bowtie R_{CE}$: $R_{CBE} = \{(1,2,2),(2,1,1)\}$. Найдем проекцию $R'_{BE} = \Pi_{\{B,E\}} R_{CBE}$: $R'_{BE} = \{(2,2),(1,1)\}$ или $B = E$. Поскольку уже имеется отношение $R_{BE} : B \neq E$ с тем же диапазоном $\{B,E\}$, необходимо найти пересечение $R_{BE} \bigcap R'_{BE}$, которое пусто, что означает несовместность ЗУО, т.е. данная задача о раскраске вершин графа с помощью двух красок не имеет решения.

Заключение

Локальный элиминационный алгоритм вычисления информации — перспективный подход, делающий возможным решение прикладных разреженных задач удовлетворения ограничений, в том числе задач SAT и задач о раскраске графа. *Перспективными направлениями* дальнейших исследований являются разработка эффективных схем локального элиминационног алгоритма при решении конкретных задач удовлетворения ограничений, обладающих специальной структурой с использованием различных видов структурных графов.

Список литературы

1. *Журавлев Ю.И.* Избранные научные труды. – М.: Магистр, 1998. – 420 с.
2. *Журавлев Ю.И., Лосев Г.Ф.* Окрестности в задачах дискретной математики // Кибернетика и системный анализ. — 1995. – №2. — С. 32-41.
3. *Сараев А.Д., Щербина О.А.* Системный анализ и современные информационные технологии // Труды Крымской академии наук. – Симферополь: СОНАТ. – 2006. – С. 47-59.
4. *Щербина О.А.* Элиминационные алгоритмы декомпозиции задач дискретной оптимизации // Таврический вестник информатики и математики. – 2006. – №2. – С. 28-41.
5. *Щербина О.А.* О несериальной модификации локального алгоритма декомпозиции задач дискретной оптимизации // Динамические системы. — 2005. — Вып.19. — С.179—190.
6. *Щербина О.А.* О локальных алгоритмах решения задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. – 1983. – № 40. – Р.171-200.
7. *Щербина О.А.* Локальные алгоритмы для блочно-древовидных задач дискретного программирования // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1985. – Т. 25. – N 8. – С. 1143-1154.
8. *Amestoy P.R., Davis T.A., Duff I.S.* An approximate minimum degree ordering algorithm // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 1996. — V. 17, N.4. — P.886—905.
9. *Arnborg S., Corneil D.G., Proskurowski A.* Complexity of finding embeddings in a k-tree // SIAM J. Alg. Disc. Meth. — 1987. – 8. – P.277–284.
10. *Barnier N., Brisset P.* Graph coloring for air traffic flow management // Annals of Operations Research. – 2004. – V.130. – P.163-178.
11. *Bertele U., Brioschi F.* Nonserial Dynamic Programming. – New York: Academic Press, 1972. – 235 p.

12. *Cook S.A.* The complexity of theorem-proving procedures // In: Proc. 3rd Ann. ACM Symp. on Theory of Computing Machinery. – New York. – 1971. – P.151-158.
13. *Courcelle B.* Graph rewriting: An algebraic and logic approach // In J. Van Leeuwen (ed.). Handbook of Theoretical Computer Science, Volume B. — Elsevier. — 1990. – P.193-242.
14. *Dechter R.* Constraint processing. – Morgan Kaufmann, 2003. – 481 p.
15. *Dechter R.* Bucket elimination: A unifying framework for reasoning // Articial Intelligence. — 1999. — V. 113. — P.41-85.
16. *Golumbic M.C.* Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs. – New York: Academic Press, 1980. – 284 p.
17. *Gu J., Purdom P.W., Franco J., Wah B.W.* Algorithms for the satisfiability (SAT) problem: A survey // In: Satisfiability Problem Theory and Applications. – 1997. – P. 19-153.
18. *Hicks I.V., Koster A.M.C.A., Kolotoglu E.* Branch and tree decomposition techniques for discrete optimization // In: Tutorials in Operations Research. – New Orleans: INFORMS – 2005. – P.1—29. (http://ie.tamu.edu/People/faculty/Hicks/bwtw .pdf)
19. *Hooker J.* Logic-based Methods for Optimization: Combining Optimization and Constraint Satisfaction. – John Wiley, 2000. – 495 p.
20. *Neumaier A., Shcherbina O.* Nonserial dynamic programming and local decomposition algorithms in discrete programming (submitted). Available online: http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2006/03/1351.html
21. *Parter S.* The use of linear graphs in Gauss elimination // SIAM Review. – 1961. – V. 3. – P.119–130.
22. *Shenoy P.P.* Axioms for dynamic programming // In: A. Gammerman (ed.). Computational Learning and Probabilistic Reasoning. John Wiley & Sons, Ltd. – 1996. — P. 259–275.
23. *Tsang E.* Foundations of Constraint Satisfaction. – New York: Academic Press, 1993. – 421 p.

Статья поступила в редакцию 17.05.2007

УДК 519.21:62

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ З ДИФУЗІЙНИМ ЗБУРЕННЯМ В МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

© Чабанюк Я.М.

Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут прикладної математики і фундаментальних наук
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
e-mail: *coffice@polynet.lviv.ua*

The sufficient conditions of the asymptotic normality of the jump stochastic approximation procedure are obtained in Markov media in the diffusion approximation scheme. The solution of the singular perturbation problem is used for the generator three-components of Markov process.

Вступ

Оцінка швидкості збіжності процедури стохастичної апроксимації (ПСА) [1] до кореня рівняння регресії обумовлюється асимптотичною нормальністю ПСА [1, 2]. Основним методом дослідження асимптотичної нормальності дискретних ПСА в класичних схемах є принцип інваріантності для сум [1, 2].

В нашій роботі [3] розглянуто асимптотичну нормальність неперервної ПСА з марковським збуренням функції регресії в схемі серій з малим параметром $\varepsilon, \varepsilon > 0$ методом розв'язку проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) для генератора ергодичного двокомпонентного марковського процесу [4].

В даній роботі розглядається асимптотична нормальність для стрибкової ПСА [5] в марковському середовищі, що описується стрибковими еволюціями [6], з асимптотично дифузійним збуренням в умовах збіжності такої процедури, методом РПСЗ.

1. Постановка задачі та позначення

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації з сингулярним збуренням функції регресії задається рівнянням (покладемо $\sum\limits_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), t \geq 0, \tag{1}$$

де послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значеннями функції $a(t), t > 0$, такої, що задовольняє звичайні умови збіжності ПСА [7]

$$a(t) > 0, \int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty, t_0 > 0,$$

через співвідношення: $a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0$, де $\tau_n, n \geq 0$, моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного марковського процесу (МП) $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ [8].

Надалі покладемо $a(t) = a/t$. Лічильний процес числа стрибків МП $x(t), t > 0$, на відрізку часу $[0;t]$ визначимо так : $\nu(t) := max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$.

Функція $C^\varepsilon(u,x) := C(u,x) + \varepsilon^{-1}C_0(x), u \in R, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)dt = C^\varepsilon(u_x(t),x), x \in X.$$

МП $x(t), t \geq 0$, задається породжуючим оператором Q, що визначається співвідношенням

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $q(x)$ — інтенсивність, така, що $\|q(x)\| := \sup_{x \in X} q(x) < \infty$, а стохастичне ядро $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$, задається ймовірностями переходу вкладеного ланцюга Маркова $x_n := x(\tau_n), n \geq 0$, тобто $P(x,B) = P\{x_{n+1} \in B \mid x_n = x\}$, і визначає оператор

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) = \int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Для оператора Q розглянемо потенціал R_0 такий, що $R_0Q = QR_0 = \Pi - I$, де Π — проектор на нуль-простір оператора Q[4].

Час θ_x перебування в станах $x \in X$ задається формулою $\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n, n \geq 0, \tau_0 = 0$, з функцією розподілу

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} < t | x_n = x\} = 1 - e^{-tq(x)}, t \geq 0.$$

Таким чином марковський процес відновлення $x_n, \theta_n, n \geq 0$, [8], задається напівмарковським ядром

$$P\{x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} < t | x_n = x\} = P(x,B)(1 - e^{-tq(x)}).$$

Стаціонарний розподіл $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$,вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, визначається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x,B), B \in \boldsymbol{X}, \rho(X) = 1,$$

а стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, МП $x(t), t \geq 0$, задається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Збіжність ПСА (1) розуміємо в сенсі збіжності з ймовірністю одиниця до точки рівноваги u_0 усередненої системи

$$du(t)/dt = C(u(t)),$$

де функція регресії $C(u)$ є усередненням функції $C(u,x)$ по стаціонарному розподілу вкладеного ланцюга Маркова:

$$C(u) = q \int\limits_X \rho(dx) C(u,x).$$

Для збурення $C_0(x)$ процедури (1) передбачається виконання умови балансу:

УБ1: $\int\limits_X \rho(dx) C_0(x) = 0,$

або $\widetilde{\Pi} C_0(x) = 0$, де $\widetilde{\Pi}$ — проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, тобто $\widetilde{\Pi}\varphi(x) = \int\limits_X \rho(dx)\varphi(x)$.

Без зменшення загальності будемо вважати $u_0 = 0$, тобто виконання умови

$$C(0) = 0. \tag{2}$$

Додаткові умови на функцію регресії $C(u,x)$ такі, як і в роботі [3], а саме $C(u,\cdot) \in C^3(R)$, тобто має місце розклад за форомулою Тейлора

$$C(u,x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u,x), \tag{3}$$

де

$$C^0(x) = C(0,x), \tag{4}$$

$$C^1(x) = C'_u(0,x), C_2(u,x) = \frac{1}{2} C''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Виходячи з (2), (3) та (4) маємо додаткову умову балансу

УБ2: $\widetilde{\Pi} C^0(x) = 0.$

Зауваження 1. Для дифузійного збурення

$$C_0^\varepsilon(t) := \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C_0(x_k^\varepsilon), \tag{5}$$

ПСА (1) має місце слабка збіжність [9]

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \frac{a\rho q}{t} w(t), \varepsilon \to 0, \tag{6}$$

де $w(t)$ — стандартний вінеріський процес, а

$$\rho^2 = 2 \int\limits_X \pi(dx) \widetilde{C}_0(x) R_0 \widetilde{C}_0(x) - q \int\limits_X \rho(dx) C_0^2(x),$$

$$\widetilde{C}_0(x) = q(x) C_0(x).$$

З іншої сторони, використовуючи (5), для ПСА (1) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \widetilde{v}^\varepsilon(t) + \varepsilon C_0^\varepsilon(t), \tag{7}$$

де

$$\widetilde{v}^{\varepsilon}(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^{\varepsilon} C(u_k^{\varepsilon}, x_k^{\varepsilon}).$$

Флуктуації ПСА (1) розглядаються в такому вигляді:

$$v^{\varepsilon}(t) = \varepsilon \widetilde{v}^{\varepsilon}(t)/\sqrt{t}, \tag{8}$$

або в зворотньому зв'язку

$$\widetilde{v}^{\varepsilon}(t) = \sqrt{t} v^{\varepsilon}(t)/\varepsilon. \tag{9}$$

З (7) та (9) маємо

$$u^{\varepsilon}(t) = \varepsilon[v^{\varepsilon}(t) + \sqrt{t} C_0^{\varepsilon}(t)]/\sqrt{t},$$

звідки отримуємо (8) в вигляді

$$v^{\varepsilon}(t) = [u^{\varepsilon}(t)/\varepsilon - C_0^{\varepsilon}(t)]\sqrt{t}.$$

Надалі позначимо через

$$c_1 := \int_X \rho(dx) C^1(x), \tag{10}$$

а через

$$b := ac_1 + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

2. Асимптотична нормальність

Теорема 1. В умовах збіжності ПСА (1) та при додаткових умовах

Д1: $\rho^2 > 0$,

Д2: $c_1 \leq -1/2a$,

має місце слабка подвійна збіжність

$$v^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \sigma(t) w(t), \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = a^2 \rho^2 q^2 / t^2$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T < \infty$.

Двокомпонентний граничний процес $\zeta(t), \sigma(t) w(t), t > 0$, є дифузійним процесом, що визначається генератором

$$\boldsymbol{L}_t \varphi(v, w) = q(bv + \sqrt{t} wac_1) + \frac{a^2 \rho^2}{2t} \varphi''_w(v, w). \tag{12}$$

Висновок 1. Граничний процес $\zeta(t), t > 0$, задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\zeta(t) = b(\zeta(t) + c_1 \sqrt{t} w(t)) dt.$$

Зауваження 2. Умова Д2 забезпечує від'ємність параметра b, що зумовлює стійкість граничного процесу $\zeta(t), t > 0$.

3. Властивості генератора марковського процесу

$$v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^4), t > 0. \qquad (13)$$

Ключовим кроком в асимптотичному аналізі флуктуацій , є асимптотичне представлення генератора МП (13).

Лема 1. Генератор МП (13) на тест-функціях $\varphi(v, \cdot, \cdot) \in C^2(R)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v, w, x) = \varepsilon^{-4} q(x) \boldsymbol{P}[\varphi(v + \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}}, x), w+$$
$$+\varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x), y) - \varphi(v, w, x)] + \frac{v}{2t}\varphi_v'(v, w, x), \qquad (14)$$

де

$$z = v + \sqrt{t} w. \qquad (15)$$

Доведення. Спочатку розглянемо прирости флуктуацій $\Delta v^\varepsilon(t)$ в моменти стрибків при $\tau_n^\varepsilon = t, x_n = x$, з приростами часу Δ, використовуючи (8):

$$\Delta v^\varepsilon(t) := v^\varepsilon(t+\Delta) - v^\varepsilon(t) = \sqrt{t+\Delta}\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta)/\varepsilon - \sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon =$$
$$= \sqrt{t}(1 + \frac{\Delta}{2t}\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta)/\varepsilon - \sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + o(\Delta) =$$
$$= \sqrt{t}\Delta v^\varepsilon(t) + o(\Delta).$$

Остаточно, з того що $\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta) = \widetilde{v}^\varepsilon(t) + o(\Delta)$, маємо

$$\Delta v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + \frac{\Delta}{2t}\widetilde{v}^\varepsilon(t) + o(\Delta). \qquad (16)$$

Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | v^\varepsilon(t) = v, C_0^\varepsilon(t) = w, x_t^\varepsilon = x] =$$
$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)].$$

Використовуючи (9) і (16) з останнього маємо

$$E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$
$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + \Delta\frac{v}{2t} + o(\Delta), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$
$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)]+$$
$$+\Delta\frac{v}{2t}\varphi_v'(v, w, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] + o(\Delta), \qquad (17)$$

оскільки $\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)$ і $\Delta C_0^\varepsilon(t)$ не залежать від $x_{t+\Delta}^\varepsilon$.

Враховуючи, що ліву частину (17) можна подати в формі

$$E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)][I(\theta_x > \varepsilon^{-4}\Delta) + I(\theta_x \le \varepsilon^{-4}\Delta)]$$

і те, що

$$P\{\theta_x > \varepsilon^{-4}\Delta\} = e^{-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)} = 1 - \varepsilon^{-4}\Delta q(x) + o(\Delta),$$
$$P\{\theta_x \le \varepsilon^{-4}\Delta\} = 1 - e^{-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)} = \varepsilon^{-4}\Delta q(x) + o(\Delta),$$

отримаємо

$$E_{v,w,x}[\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)+\Delta\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,w,x)]=$$

$$=\varphi(v,w,x)(1-\varepsilon^{-4}\Delta q(x))+\Delta\varepsilon^{-4}q(x)\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,w,x)+$$

$$+E_{v,w,x}\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)\Delta\varepsilon^{-4}q(x)+o(\Delta). \qquad (18)$$

З (6) та (9) для приростів $\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)$ і $\Delta C_0^\varepsilon(t)$ маємо представлення

$$\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)=\varepsilon^4\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}},x), \qquad (19)$$

$$\Delta C_0^\varepsilon(t)=\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x), \qquad (20)$$

де z обчислюється в (15).

Враховуючи (19) і (20) в (18) маємо представлення умовного математичного сподівання

$$E_{v,w,x}[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)-\varphi(v,w,x)]=$$

$$+\Delta\varepsilon^{-4}q(x)\boldsymbol{P}[\varphi(v+\varepsilon^4\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}},x), w+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x),y)+\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,w,x)]+o(\Delta).$$

Остаточно, за означенням генератора МП (13)

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}E_{v,w,x}[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon)-\varphi(v,w,x)]=\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x)$$

отримуємо (14).

Наслідок. *Генератор МП (13) на тест-фенкціях $\varphi(v,\cdot,\cdot)\in C^2(R)$ має представлення*

$$\mathbf{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi(\cdot,\cdot,x)+\varepsilon^{-4}q(x)\mathbf{L}_0^\varepsilon\mathbf{P}\varphi(v,w,x), \qquad (21)$$

де

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon\varphi(v,w,x)=\varphi(v+\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z,x), w+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x),y)-$$

$$-\varphi(v,w,y)+\varepsilon^4\frac{v}{2t}\varphi_v'(v,w,x). \qquad (22)$$

Доведення. Представлення (21) отримуємо використовуючи доданок $\pm\varphi(v,w,y)$ в квадратних дужках (14).

Лема 2. Генератор МП (13) на тест-функціях $\varphi(v,w,\cdot)\in C^{2,3}(R\times R)$ має асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi(v,w,x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}q(x)Q_2(x)\boldsymbol{P}+$$

$$+\frac{1}{t}q(x)Q_3(x)\boldsymbol{P}+\theta_L^\varepsilon Q_0]\varphi(v,w,x), \qquad (23)$$

де

$$Q_1(x)\varphi(w)=aC_0(x)\varphi'(w),$$
$$Q_2(x)\varphi(v)=aC^0(x)\varphi'(v),$$

$$Q_3(x)\varphi(v,w) = C(v,\sqrt{t}w,x)\varphi'_v(v,w) + \frac{a^2}{2t}C_0^2(x)\varphi''_w(v,w),$$

$$C(v,\sqrt{t}w,x) = a(v+\sqrt{t}w)C^1(x) + \frac{v}{2},$$

Q_0 обчислюється за формулою

$$Q_0\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\varphi(y), \tag{24}$$

а залишковий член $\theta_L^\varepsilon Q_0$ такий, що

$$\|\theta_L^\varepsilon Q_0\varphi(v,w,x)\| \to 0, \varepsilon \to 0, t \to \infty.$$

Доведення. Виходячи з гладкості функцій $\varphi(v,w) = \varphi(v,w,\cdot)$ (третя змінна $x \in X$ не приймає участі в подальших перетвореннях) маємо

$$\varphi(v+\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z/\sqrt{t},x), w+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x)) = \varphi(v,w)+$$

$$+\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z/\sqrt{t},x)\varphi'_v(v,w) + \varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x)\varphi'_w(v,w)+$$

$$+\varepsilon^4\frac{a^2}{2t^2}C_0^2(x)\varphi''_w(v,w) + o(\varepsilon^4). \tag{25}$$

Аналогічно, згідно (3), для $C(\varepsilon z/\sqrt{t})$ маємо

$$C(\varepsilon z/\sqrt{t}) = C^0(x) + \varepsilon\frac{z}{\sqrt{t}}C^1(x) + o(\varepsilon). \tag{26}$$

Враховуючи (26) і (25) в (22), з (21) маємо (23).

4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення

Заключним етапом побудови граничного оператора є використання РПСЗ ([9], Розділ 5.1). Для цього розглянемо розклад оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ з (23) на збурених функціях виду

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) + \varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4\varphi_4(v,w,x).$$

Лема 3. Розв'язок проблеми сингулярного збурення з $\varphi(v,w) \in C^{3,4}(R \times R)$ для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має наступний вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) + \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w), \tag{27}$$

де $\boldsymbol{L}_t$ має вигляд (12), а залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w)$ такий, що

$$|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w)| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Для отримання (27) достатньо розглянути РПСЗ на зрізаному операторі $\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}$ з (23), а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon} = \varepsilon^{-4}Q + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}q(x)Q_2(x)\boldsymbol{P} + \frac{1}{t}q(x)Q_3(x)\boldsymbol{P}.$$

Значення оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(v,w,x)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \varepsilon^{-4}Q\varphi(v,w) + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}[Q\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_1(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[Q\varphi_3(v,w,x) + q(x)Q_2(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\frac{1}{t}[Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w)] +$$

$$+\theta_{L_0}^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) + \theta_{L_0}^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w), \tag{28}$$

де залишковий член $\theta_{L_0}^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w)$ такий, що $|\theta_{L_0}^{\varepsilon}(x)\varphi(v,w)| \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

З умови розв'язності проблеми сингулярного збурення (28)

$$Q\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) = 0$$

і умови балансу УБ1 маємо представлення

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0 q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) = aR_0\widetilde{C}_0(x)\varphi'_w(v,w). \tag{29}$$

Аналогічно з рівності $Q\varphi_3(v,w,x) + q(x)Q_2(x)\varphi(v,w) = 0$ і УБ2 маємо

$$\varphi_3(v,w,x) = aR_0\widetilde{C}^0(x)\varphi'_v(v,w)$$

де $\widetilde{C}^0(x) := q(x)C^0(x)$.

Остаточно з умови розв'язності (28) маємо

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_t\varphi(v,w),$$

де оператор $\boldsymbol{L}_t$ такий, що

$$\boldsymbol{L}_t\Pi\varphi(v,w) = \Pi\boldsymbol{L}_t(x)\Pi\varphi(v,w), \tag{30}$$

а

$$\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(v,w) = \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0 q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w). \tag{31}$$

Обчислимо праву частину в (30). Враховуючи (31) і (29) для (30) маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_t\Pi\varphi(v,w) = \frac{a^2}{t}\Pi q(x)C_0(x)\boldsymbol{P}R_0 q(x)C_0(x)\Pi\varphi''_w(v,w) +$$

$$+\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v,w). \tag{32}$$

Для першого доданку в (32) отримуємо

$$\Pi q(x)C_0(x)\boldsymbol{P}R_0 q(x)C_0(x)\Pi = \int_X \pi(dx)\widetilde{C}_0(x)R_0\widetilde{C}_0(x) - q\int_X \rho(dx)C_0^2(x). \tag{33}$$

А для другого маємо

$$\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v,w) = q[bv + \sqrt{t}wc_1]\varphi'_v(v,w) +$$

$$+\frac{a^2}{2t}q\int_X \rho(dx)C_0^2(x)\varphi''_w(v,w),$$

в позначеннях (10) та (11). Остання формула разом з (33) дає для оператора $\boldsymbol{L}_t$ зображення (12).

Зауваження 3. Малий доданок в (23) не впливає на РПСЗ для оператора $\boldsymbol{L}_{t0}$ в формі (27) (див. [9], висновок 5.1, с. 141), тобто головна частина РСПЗ для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має вигляд правої частини (27).

Доведення теореми. Завершення доведення Теореми реалізується за схемою, що приведена при доведенні т. 6.6. §6, роботи [9].

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСА в $R^d, d > 1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Заключення

Встановлено достатні умови асимптотичної нормальності стрибкової процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі в схемі дифузійного наближення. Використано асимптотичні властивості генератора трьохкомпонентного марковського процесу та розв'язок проблеми сингулярного збурення для такого генератора.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В.С. Королюку за увагу до викладеного матеріалу.

Список литературы

1. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.:Наука, 1972. – 304 с.
2. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992. – 113P.
3. *Чабанюк Я.М.* Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі. // Доп. НАН України, 2004, сер. А, № 5 , с. 37-45.
4. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. Kluwer, Academic Publishers, 1999. – 185p.
5. *Чабанюк Я.М.* Дискретна стохастична процедура у марківському випадковому середовищі // Вісник Львів. ун-ту., Серія мех-мат. – 2000. Вип. 56. С. 179-184.
6. *Hersh R.* The birth of random evolution // Mathematical Intelligencer, – 2003-25, – P.53-60.
7. *Чабанюк Я.М.* Процедура стохастичної апроксимації в ергодичному середовищі Маркова // Математичні студії. – 2004. – Т. 21, № 1. – с.81-86.
8. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их применение. Киев: Наук. думка, 1976. – 184с.
9. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific Publishing, 2005. – 330P.

Статья поступила в редакцию 18.05.2007

УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ПРИОРИТЕТНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ДВУМЯ НАЛАДЧИКАМИ

© А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
E-mail: *svp54@mail.ru*

A hierarchical system with one control and two slave elements is considered. The elements may be break down. Two repairmen with different levels of proficiency make the renewal of the sistem under some rules. The equilibrium probabilities, safety factor, mean-time-between-failures are obtained in the article.

Введение

В последнее время для исследования надёжностных характеристик систем массового обслуживания чаще привлекаются асимптотические и статистические методы исследования, т.к. аналитическое моделирование приводит к достаточно сложным системам интегро–дифференциальных уравнений, к решению которых приходится применять либо приближённые, либо численные методы. Авторы предлагают задачу, математическое моделирование которой не является громоздким и позволяет получать аналитическое решение и вывод точных вероятностных характеристик функционирования соответствующей системы в стационарном режиме.

1. Постановка задачи

Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одного управляющего элемента (**Y**) и двух одинаковых подчиненных элементов (**П**). При её функционировании элементы могут выходить из строя. Потоки отказов элементов предполагаются простейшими с параметрами β и α соответственно для элементов **Y** и **П**. Система считается работоспособной, если исправны управляющий и хотя бы один из подчиненных элементов. В неработоспособном состоянии система "отключена", т.е. исправные элементы не отказывают. Обслуживание системы (наладку отказавших элементов) осуществляют два наладчика. Одного из них назовём мастером, а другого стажёром. В общей постановке задачи времена обслуживания являются произвольными непрерывными случайными величинами с конечными математическими ожиданиями.

Обозначим через ω_1 время обслуживания (наладки) элемента **Y** мастером, ω_2 – время обслуживания элемента **П** мастером, ω_3 – время обслуживания элемента **П** стажёром. Через $\mu_i(x),\ i = 1, 2, 3$ обозначим интенсивности случайных величин ω_i, через $\Phi_i(x)$ и $f_i(x)$ соответствующие им функции набожности и плотности распределения.

В правилах обслуживания системы содержатся следующие условия:

1. При наличии неисправных элементов системы мастер обязательно занят наладкой одного из них.
2. Обслуживание элемента **Y** является приоритетным, т.е. если во время обслуживания мастером элемента **П** отказал элемент **Y**, то мастер останавливает наладку элемента **П** (с сохранением времени обслуживания) и немедленно приступает к наладке элемента **Y**.
3. Стажёр имеет право обслуживать только элемент **П** в то время, когда мастер занят наладкой либо элемента **П**, либо элемента **Y**.
4. Стажёр отстраняется от обслуживания (с сохранением времени наладки) в случае, если мастер закончил наладку неисправного элемента. При этом мастер немедленно приступает к обслуживанию элемента **П**, оставленного недообслуженным стажёром.

Заметим, что из определения работоспособности системы следует, что из трёх её элементов одновременно могут быть неисправными только два.

Авторы вывели систему интегро–дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями, описывающую поведение системы, но в общем виде аналитическое решение получить не удалось. Целью данной работы является математическое моделирование рассмотренной системы с дальнейшим получением вероятностей состояний в стационарном режиме, а также коэффициента надёжности и средней наработки между отказами в частном случае: $\mu_3(z) = \mu_3 = \mathrm{const}$ – время ремонта подчинённого элемента стажёром имеет показательное распределение.

2. Математическое моделирование

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, фазовое пространство которого состоит из состояний системы $\{\overline{0,4}\}$:

- (0) – всё исправно, система функционирует
- $(1, \omega_2)$ – система функционирует, но один из подчинённых элементов не исправен, ω_2 – время, затраченное на его ремонт мастером. Обозначим соответствующую функцию распределения
$$Q_1(t,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 1, \omega_2 < x\}$$
и плотность распределения
$$q_1(t,x) := \frac{\partial Q_1(t,x)}{\partial x}.$$
При этом
$$p_1(t) := Q_1(t,\infty) = \int\limits_0^\infty q_1(t,x)\,dx = \mathbb{P}\{\xi(t) = 1\} -$$
вероятность нахождения системы в состоянии (1) в момент времени t.

- $(2, \omega_1)$ – система не функционирует, управляющий элемент неисправен и ω_1 – время ремонта его мастером.

$$Q_2(t,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 2, \omega_1 < y\}, \quad q_2(t,y) := \frac{\partial Q_2}{\partial y}$$

$$\int\limits_0^\infty q_2(t,y)\,dy = Q_2(t,\infty) =: p_2(t) \,-$$

вероятность нахождения системы в состоянии (2) в момент времени t.

- $(3, \omega_1, \omega_2', \omega_3)$ – система не функционирует, управляющий и один из подчинённых элементов неисправны, ω_2' – "отложенное" время ремонта подчинённого элемента мастером; мастер передал ремонт подчинённого элемента стажёру и взялся за ремонт вышедшего из строя управляющего элемента; ω_1 – время ремонта управляющего элемента мастером, ω_3 – время ремонта подчинённого элемента стажёром; при этом $\omega_1 = \omega_3$ (оба принялись за работу одновременно).

$$Q_3(t,y,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 3, \omega_1 < y, \omega_2' < x, \omega_3 = \omega_1\}, \quad q_3(t,y,x) := \frac{\partial^2 Q_3}{\partial y \partial x}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty q_3(t,y,x)\,dy\,dx = Q_3(t,\infty,\infty) =: p_3(t) \,-$$

вероятность нахождения системы в состоянии (3) в момент времени t.

- $(4, \omega_2, \omega_3)$ – система не функционирует, оба подчинённых элемента неисправны, ω_3 – время ремонта одного из них стажёром и ω_2 – время ремонта другого элемента мастером; при этом $\omega_3 < \omega_2$.

$$Q_4(t,x,z) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 4, \omega_2 < x, \omega_3 < z\}, \quad q_4(t,x,z) := \frac{\partial^2 Q_4}{\partial x \partial z}$$

$$\int\limits_0^\infty dz \int\limits_z^\infty q_4(t,x,z)\,dz = Q_4(t,\infty,\infty) =: p_4(t) \,-$$

вероятность нахождения системы в состоянии (4) в момент времени t.

Система интегро–дифференциальных уравнений и граничных условий имеет вид:

$$p_0'(t) + (\beta + 2\alpha)p_0(t) = \int\limits_0^\infty q_2(t,y)\mu_1(y)\,dy + \int\limits_0^\infty q_1(t,x)\mu_2(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial q_1(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial q_1(t,x)}{\partial x} + (\alpha + \beta + \mu_2(x))q_1(t,x) = \int\limits_0^\infty q_3(t,y,x)\mu_1(y)\,dy + \mu_3 \int\limits_0^x q_4(t,x,z)\,dz,$$

$$\frac{\partial q_2(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial q_2(t,y)}{\partial y} + \mu_1(y)q_2(t,y) = \mu_3 \int\limits_0^\infty q_3(t,y,x)\,dx,$$

$$\frac{\partial q_3(t,y,x)}{\partial t} + \frac{\partial q_3(t,y,x)}{\partial y} + (\mu_1(y) + \mu_3) q_3(t,y,x) = 0,$$

$$\frac{\partial q_4(t,x,z)}{\partial t} + \frac{\partial q_4(t,x,z)}{\partial x} + \frac{\partial q_4(t,x,z)}{\partial z} + (\mu_2(x) + \mu_3) q_4(t,x,z) = 0,$$

$$q_1(t,0) = 2\alpha p_0(t) + \int\limits_0^\infty dz \int\limits_z^\infty q_4(t,x,z)\mu_2(x)\,dx,$$

$$q_2(t,0) = \beta p_0(t), \quad q_3(t,0,x) = \beta q_1(t,x), \quad q_4(t,x,0) = \alpha q_1(t,x).$$

Конечное число состояний и неприводимость случайного процесса $\xi(t)$ обеспечивает его эргодичность. Переходя к пределу при $t \to \infty$ и вводя обозначения:

$$p_k := \lim_{t\to\infty} p_k(t),\ k = \overline{0,4} \quad g_k(...) = \lim_{t\to\infty} q_k(t,...),\ k = \overline{1,4}$$

получим систему интегро–дифференциальных уравнений для стационарного режима.

$$(\beta + 2\alpha) p_0 = \int\limits_0^\infty g_2(y)\mu_1(y)\,dy + \int\limits_0^\infty g_1(x)\mu_2(x)\,dx, \tag{1}$$

$$g_1'(x) + (\alpha + \beta + \mu_2(x)) g_1(x) = \int\limits_0^\infty g_3(y,x)\mu_1(y)\,dy + \mu_3 \int\limits_0^x g_4(x,z)\,dz, \tag{2}$$

$$g_2'(y) + \mu_1(y) g_2(y) = \mu_3 \int\limits_0^\infty g_3(y,x)\,dx, \tag{3}$$

$$\frac{\partial g_3(y,x)}{\partial y} + (\mu_1(y) + \mu_3) g_3(y,x) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial g_4(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial g_4(x,z)}{\partial z} + (\mu_2(x) + \mu_3) g_4(x,z) = 0,\ (z \leqslant x) \tag{5}$$

$$g_1(0) = 2\alpha p_0 + \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x g_4(x,z)\mu_2(x)\,dz, \tag{6}$$

$$g_2(0) = \beta p_0, \quad g_3(0,x) = \beta g_1(x), \quad g_4(x,0) = \alpha g_1(x). \tag{7}$$

Заметим, что полученная таким образом система будет избыточной, т.е. одно из уравнений можно будет использовать для контроля (проверки), но для получения стационарных вероятностей p_i, $i = \overline{0,4}$ к системе следует добавить нормировочное равенство $\sum\limits_0^4 p_k = 1$.

3. Решение системы (1)–(7)

В области $0 \leqslant z \leqslant x$ из (5) и (7) получаем

$$g_4(x,z) = \alpha g_1(x-z)\exp(-\mu_3 z)\exp\left(-\int\limits_{x-z}^{x}\mu_2(t)\,dt\right) \tag{8}$$

Из (4) и (7) имеем:

$$g_3(y,x) = \beta g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\exp\left(-\int\limits_0^y \mu_1(t)\,dt\right) = \beta g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y) \tag{9}$$

Для уравнения (3) преобразуем интеграл:

$$\mu_3\int\limits_0^\infty g_3(y,x)\,dx = \mu_3\int\limits_0^\infty \beta g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y),dx = \beta\mu_3 p_1\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y).$$

Уравнение (3) принимает вид:

$$g_2'(y) + \mu_1(y)g_2(y) = \beta\mu_3 p_1\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y).$$

Учитывая начальное условие (7), получаем:

$$g_2(y) = \exp\left(-\int\limits_0^y \mu_1(t)\,dt\right)\left(\beta p_0 + \int\limits_0^y \beta\mu_3 p_1\exp(-\mu_3 t)\Phi_1(t)\exp\left(\int\limits_0^t \mu_1(v)\,dv\right)dt\right) =$$
$$= \Phi_1(y)(\beta p_0 + \beta\mu_3 p_1\frac{1}{\mu_3}(1-\exp(-\mu_3 y))).$$

Окончательно имеем:

$$g_2(y) = \Phi_1(y)(\beta(p_0+p_1) - \beta p_1\exp(-\mu_3 y)) \tag{10}$$

Для уравнения (2) преобразуем интегралы (с учетом (9) и (8)):

$$\int\limits_0^\infty g_3(y,x)\mu_1(y)\,dy = \beta\int\limits_0^\infty g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y)\mu_1(y)\,dy =$$
$$= \beta g_1(x)f_1^*(\mu_3) = \beta g_1(x)(1-\mu_3\Phi_1^*(\mu_3)).$$

Здесь f_1^* и Φ_1^* – преобразования Лапласа функций f_1 и Φ_1 соответственно.

$$\mu_3\int\limits_0^x g_4(x,z)\,dz = \mu_3\int\limits_0^x \alpha g_1(x-z)\exp(-\mu_3 z)\exp\left(-\int\limits_{x-z}^x \mu_2(t)\,dt\right)dz =$$
$$= \mu_3\alpha\int\limits_0^x g_1(y)\exp(-\mu_3(x-y))\exp\left(-\int\limits_y^x \mu_2(t)\,dt\right)dy =$$

$$= \mu_3 \alpha \exp\left(-\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) \int_0^x g_1(y) \exp\left(\int_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right)\,dy$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$g_1'(x) + (\alpha + \beta + \mu_2(x))g_1(x) = \beta(1 - \mu_3 \Phi_1^*(\mu_3))g_1(x) +$$
$$+ \mu_3 \alpha \exp\left(-\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) \int_0^x g_1(y) \exp\left(\int_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right)\,dy$$

или

$$g_1'(x) \exp\left(\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) + (\alpha + \beta\mu_3\Phi_1^*(\mu_3)) +$$
$$+ \mu_2(x))g_1(x) \exp\left(\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) - \mu_3\alpha \int_0^x g_1(y) \exp\left(\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dy = 0$$

В полученном уравнении введём замену:

$$u(x) = \int_0^x g_1(y) \exp\left(\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dy.$$

После этого получим обыкновенное линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$u''(x) + (\alpha - \mu_3 + \beta\mu_3\Phi_1^*)u'(x) - \alpha\mu_3 u(x) = 0$$

с начальными условиями $u(0) = 0,\ u'(0) = g_1(0)$.

Обозначим корни соответствующего характеристического уравнения через r_1 и r_2. Тогда

$$u(x) = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(\exp(r_1 x) - \exp(r_2 x)), \quad u'(x) = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1 \exp(r_1 x) - r_2 \exp(r_2 x)),$$

и для $g_1(x)$ получаем:

$$g_1(x) = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1 \exp(r_1 x) - r_2 \exp(r_2 x)) \exp\left(-\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) =$$
$$= \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1 \exp(-(\mu_3 - r_1)x) - r_2 \exp(-(\mu_3 - r_2)x))\Phi_2(x) \qquad (11)$$

Преобразуем интеграл, входящий в (6) с использованием (8):

$$\int_0^\infty dx \int_0^x g_4(x,z)\mu_2(x)\,dz = \alpha\int_0^\infty \mu_2(x)\,dx \int_0^x g_1(x-z)\exp(-\mu_3 z)\exp\left(-\int_{x-z}^x \mu_2(t)\,dt\right)dz =$$

$$= \alpha \int\limits_0^\infty \exp(-\mu_3 x) \exp\left(-\int\limits_0^x \mu_2(t)\,dt\right) \mu_2(x)\,dx \int\limits_0^x g_1(y) \exp\left(\int\limits_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))dt\right) dy =$$

$$= \alpha \int\limits_0^\infty \exp(-\mu_3 x) f_2(x) u(x)\,dx =$$

$$= \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2} \int\limits_0^\infty (\exp(-(\mu_3 - r_1)x) - \exp(-(\mu_3 - r_2)x)) f_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha g_1(0)}{r_1 - r_2}(f_2^*(\mu_3 - r_1) - f_2^*(\mu_3 - r_2)).$$

Тогда из (6) имеем:

$$g_1(0) = \frac{2\alpha p_0(r_1 - r_2)}{r_1 - r_2 - \alpha(f_2^*(\mu_3 - r_1) - f_2^*(\mu_3 - r_2))} \tag{12}$$

Далее из (8) находим:

$$p_4 = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x g_4(x,z)\,dz = \alpha \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x g_1(x-z) \exp(-\mu_3 z) \exp\left(-\int\limits_{x-z}^x \mu_2(t)\,dt\right) dz =$$

$$= \alpha \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x g_1(y) \exp(-\mu_3(x-y)) \exp\left(-\int\limits_y^x \mu_2(t)\,dt\right) dy =$$

$$\alpha \int\limits_0^\infty \exp\left(-\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dx \int\limits_0^x g_1(y) \exp\left(\int\limits_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dy =$$

$$= \alpha \int\limits_0^\infty \exp(-\mu_3 x) \Phi_2(x) u(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha g_1(0)}{r_1 - r_2} \int\limits_0^\infty (\exp(-(\mu_3 - r_1)x) - \exp(-(\mu_3 - r_2)x)) \Phi_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha g_1(0)}{r_1 - r_2}(\Phi_2^*(\mu_3 - r_1) - \Phi_2^*(\mu_3 - r_2)). \tag{13}$$

Из (9) находим:

$$p_3 = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_3(y,x)\,dy = \beta \int\limits_0^\infty g_1(x)\,dx \int\limits_0^\infty \exp(-\mu_3 y) \Phi_1(y)\,dy = \beta p_1 \Phi_1^*(\mu_3), \tag{14}$$

Из (10) находим:

$$p_2 = \int\limits_0^\infty g_2(y)\,dy = \int\limits_0^\infty (\beta(p_0+p_1)\Phi_1(y) - \beta p_1 \exp(\mu_3 y)\Phi_1(y))dy = \beta(p_0+p_1)\frac{1}{\mu_1} - \beta p_1 \Phi_1^*(\mu_3), \tag{15}$$

где $\dfrac{1}{\mu_1} := M\omega_1 = \int\limits_0^\infty \Phi_1(y)\,dy$

Наконец, из (11) имеем:

$$p_1 = \int\limits_0^\infty g_1(x)\,dx = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}\int\limits_0^\infty (r_1 \exp(-(\mu_3 - r_1)x)\Phi_2(x) - \exp(-(\mu_3 - r_2)x)\Phi_2(x))\,dx =$$

$$= \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1\Phi_2^*(\mu_3 - r_1) - r_2\Phi_2^*(\mu_3 - r_2)). \tag{16}$$

Если теперь к соотношениям (12)–(16) добавить нормировочное соотношение $\sum\limits_0^4 p_k = 1$, то получится линейная алгебраическая система уравнений, из которой можно получить явные выражения для вероятностей $p_k,\ k = \overline{0,4}$ состояний системы в стационарном режиме.

Коэффициент готовности K выражается через стационарные вероятности системы: $K = p_0 + p_1$.

Для определения средней наработки T между отказами вычислим интенсивность Λ потока отказов системы:

$$\Lambda = \sum_{j=2}^{4}\sum_{i=0}^{1} p_i\lambda_{ij},$$

где λ_{ij} – интенсивности перехода из состояния i в состояние j определяются из соотношений:

$$\mathbb{P}\{\xi(t+h) = j/\xi(t) = i\} = \lambda_{ij}h + o(h).$$

В рассматриваемом случае

$$\lambda_{02} = \beta,\ \lambda_{03} = 0,\ \lambda_{04} = 0,\ \lambda_{12} = 0,\ \lambda_{13} = \beta,\ \lambda_{14} = \alpha$$

Тогда $\Lambda = p_0\beta + p_1(\alpha + \beta)$. Величина T получается из соотношения

$$T = \frac{K}{\Lambda} = \frac{p_0 + p_1}{p_0\beta + p_1(\alpha + \beta)}.$$

Выводы

В статье найдены вероятности стационарных состояний исследуемой системы, коэффициент готовности, средняя наработка между отказами в случае, когда время ремонта подчинённого элемента стажёром имеет показательное распределение.

Представляет интерес дальнейшее исследование данной задачи для произвольного распределения времени ремонта.

Список литературы

1. *Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.* Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: «Выща школа», 1987. – 246 с.
2. *Беляев Ю.К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. – Вильнюс. 1962 – С. 309-323.
3. *Коваленко А.И., Стрыгина Н.З.* Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением // Автоматика и телемеханика – М: Российская АН, 1992. – №1. – С.156-164.
4. *Коваленко А.И., Смолич В.П.* Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками // Динамические системы. – 2000. – Вып.16. – С.137-142.

Статья поступила в редакцию 14.05.2007

УДК 517.98

БАНАХОВЫ МОДУЛИ $L_\infty(\nabla, M)$ L_0-ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРЕДСОПРЯЖЕННЫЕ МОДУЛИ

© Б.С. Закиров

Институт математики АН РУз,
ул. Ф. Ходжаева, 29, г. Ташкент, Узбекистан, 100125
e-mail: *batirzakirov@list.ru*

© В.И. Чилин

Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, г. Ташкент, Узбекистан, 100174
e-mail: *chilin@ucd.uz*

Let ∇ be a complete Boolean algebra, m be a strictly positive measure on ∇ with values in the algebra L_0 of all measurable real functions. In the paper is introduced the Banach L_0-bimodule of L_0-bounded functions associated with ∇ and m. It is proved that this bimodule is isometrically isomorphic to the dual of $L_1(\nabla, m)$.

Введение

В связи с развитием общей теории пространств Банаха-Канторовича (см., напр., [1, 2]) естественно возникает вопрос о содержательных примерах таких пространств и об описании сопряженных пространств для них. Теория интегрирования для мер со значениями в алгебре $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых действительных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной мерой μ, позволяет строить "L_0-варианты" классических пространств L_p, $p \in [1, \infty)$ [1, 3], пространств Орлича [4], которые являются полезными примерами пространств Банаха-Канторовича, имеющими одновременно структуру бимодулей над L_0. Следует отметить, что любое пространство Банаха-Канторовича над L_0 допускает L_0-бимодульную структуру, и поэтому класс этих пространств отождествляется с классом банаховых L_0-бимодулей. Множество E^* всех непрерывных эндоморфизмов, заданных на банаховом L_0-бимодуле E и принимающих значения в L_0, при введении естественных алгебраических операций и нормы само становится банаховым L_0-бимодулем. В случае банаховых L_0-бимодулей L_p, $p \in (1, \infty)$, известен "L_0-вариант" описания сопряженного бимодуля $(L_p)^* = L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см., например, [1]). В то же время модульного аналога для известного равенства $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ не имелось, поскольку естественный взгляд на L_∞ как пространство ограниченных измеримых функций в данной ситуации оказывалось неудовлетворительным.

В настоящей работе определяется понятие L_0-ограниченной функции, ассоциированной с полной булевой алгеброй ∇ и строго положительной L_0-значной мерой $m : \nabla \to L_0$. Рассматривается банахов L_0-бимодуль $L_\infty(\nabla, m)$ всех таких L_0-ограниченных функций и показывается, что он изометричен банахову L_0-модулю $(L_1(\nabla, m))^*$.

Используются терминология и обозначения теории решеточно-нормированных пространств из [1, 2], теории булевых алгебр и векторных решеток из [5, 6] и теории векторного интегрирования [2, 3].

1. Банаховы $\mathbf{L_0}$-модули и их эндоморфизмы

В этом разделе напоминаются понятия пространства Банаха-Канторовича, банахова модуля, указывается связь между ними и описываются свойства их непрерывных эндоморфизмов.

Пусть ∇ — произвольная булева алгебра, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — наименьший и наибольший элементы в ∇. Для каждого подмножества $A \subset \nabla$ через $\sup A$ $(\vee A)$, $\inf A$ $(\wedge A)$ обозначаются его точные верхняя и нижняя грани, соответственно. Булева алгебра ∇ называется полной (σ-полной), если для всякого (счетного) подмножества $A \subset \nabla$ существует $\sup A$. Элементы $a, b \in \nabla$ называются дизъюнктными, если $a \wedge b = 0$. Семейство элементов из ∇ называют дизъюнктным, если его члены попарно дизъюнктны. Разбиением единицы в булевой алгебре называется всякое дизъюнктное семейство $(e_i)_{i\in I}$ ее ненулевых элементов, удовлетворяющее условию $\sup\limits_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$.

Говорят, что булева алгебра ∇ имеет счетный тип, если всякое дизъюнктное семейство ненулевых элементов из ∇ не более чем счетно. Всякая σ-полная булева алгебра счетного типа является полной. Булева подалгебра ∇_0 в полной булевой алгебре ∇ называется правильной, если для любого подмножества $A \subset \nabla_0$ элемент $\sup A \in \nabla_0$. Ясно, что правильная подалгебра сама является полной булевой алгеброй.

Нам понадобится следующее важное свойство полных булевых алгебр.

Теорема 1 (Принцип исчерпывания). *(см. [5], гл. III, §2, стр.111). Пусть ∇ — полная булева алгебра, $0 \neq a \in \nabla$. Пусть A — такое подмножество в $\nabla_a := \{b \in \nabla : \ b \leq a\}$, что для всякого $0 \neq b \in \nabla_a$ существует такое ненулевое $c \in A$, что $c \leq b$. Тогда существует дизъюнктное подмножество $A_1 \subset A$, со свойствами:*

1) $\sup A_1 = a = \sup A$;

2) для любого $c \in A_1$ существует элемент $b \in A$ такой, что $c \leq b$.

Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой, $L_0 = L_0(\Omega)$ — алгебра всех измеримых функций на (Ω, Σ, μ) со значениями в поле действительных чисел $\mathbb{R}$ (равные почти всюду функции отождествляются). Относительно естественного частичного порядка в L_0 ($x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$ почти всюду) алгебра L_0 является условно полной векторной решеткой со слабой единицей $\mathbf{1}(\omega) \equiv 1$, $\omega \in \Omega$, а множество $\nabla(\Omega)$ всех идемпотентов в L_0 образует полную булеву алгебру.

Для элемента $x \in L_0(\Omega)$ через $s\,(x)$ обозначается его носитель, т.е. $s\,(x) = \sup\limits_{n\geq 1}\{|x| > n^{-1}\}$, где $\{|x| > \lambda\}$ есть идемпотент, являющийся характеристической функцией χ_{A_λ} множества $A_\lambda = \{\omega \in \Omega : |x(\omega)| > \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ясно, что $xs\,(x) = x$, и если $xy = 0$, то $s\,(x)\,y = 0$, в частности, $|x| \wedge |y| = 0$ тогда и только тогда, когда $s\,(x)\,s\,(y) = 0$.

Для элементов $x, y \in L_0(\Omega)$ будем писать $x > y$, если $x(\omega) > y(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, для которых $x(\omega) \neq 0$.

Для $e = \chi_A \in \nabla(\Omega)$, $A \in \Sigma$ через $L_0(e\Omega)$ обозначим алгебру всех измеримых действительных функций на (A, Σ_A, μ) (равные почти всюду функции отождествляются), где $\Sigma_A = \{B \cap A : B \in \Sigma\}$. Ясно, что $L_0(e\Omega)$ естественным образом можно отождествить с кольцом $eL_0(\Omega)$.

Далее для любого ненулевого $x \in L_0(\Omega)$ рассмотрим элемент x_s^{-1}, обратный к x на его носителе, т.е.

$$x_s^{-1}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\omega)}, & \text{если } x(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{если } x(\omega) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $x_s^{-1} \in L_0(\Omega)$ и $x_s^{-1}x = s(x)$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ элементов из $L_0(\Omega)$ сходится локально по мере μ к элементу $x \in L_0(\Omega)$ (обозначается $x_n \xrightarrow{l.\mu} x$), если для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ последовательность $x_n\chi_A$ сходится по мере μ к элементу $x\chi_A$. Если $\mu(\Omega) < \infty$, то сходимости локально по мере и по мере совпадают. Так как μ — σ-конечна, то существует счетное семейство ненулевых дизъюнктных идемпотентов $\{e_n\} \subset \nabla(\Omega)$ такое, что $\sup e_n = \mathbf{1}$, $\mu(e_n) < \infty$. В $L_0(e_n\Omega)$ рассмотрим топологию t_n сходимости по мере. Базу окрестностей нуля в этой топологии образуют множества

$$W(\varepsilon, \delta) := \{x \in L_0(e_n\Omega) : \text{ существует } e \in \nabla(e_n\Omega) \text{ такое, что}$$

$$\mu(e_n - e) \leq \delta \text{ и } |x(\omega)| \leq \varepsilon \ \text{ для } \ \omega \in e\Omega\}.$$

Ясно, что алгебра $L_0(\Omega)$ совпадает с прямым произведением $\prod\limits_{n=1}^{\infty} L_0(e_n\Omega)$ алгебр $L_0(e_n\Omega)$, и сходимость в тихоновской топологии t совпадает со сходимостью локально по мере в $L_0(\Omega)$. Топологию t в $L_0(\Omega)$ называют топологией сходимости локально по мере. Относительно этой топологии $L_0(\Omega)$ является полной метризуемой топологической векторной решеткой, при этом топология t имеет счетный базис $\{U_n\}$ замкнутых окрестностей нуля, обладающих следующим свойством идеальности: если $|x| \leq |y|$, $y \in U_n$, $x \in L_0(\Omega)$, то $x \in U_n$. Ясно, что из сходимости $x_n \to x$ почти всюду следует сходимость $x_n \xrightarrow{t} x$. Обратно, если $x_n \xrightarrow{t} x$, то существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x$ почти всюду.

Отметим, что сходимость почти всюду в $L_0(\Omega)$ совпадает с (o)-сходимостью в векторной решетке $L_0(\Omega)$ (напомним, что $\{x_n\} \subset L_0(\Omega)$ (o)-сходится к $x \in L_0(\Omega)$ (обозначается $x_n \xrightarrow{(o)} x$), если найдутся такие $y_n, z_n \in L_0(\Omega)$, что $y_n \leq x_n \leq z_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и $y_n \uparrow x$, $z_n \downarrow x$).

Приведем теперь определение пространства Банаха-Канторовича в случае, когда множество значений нормы лежит в $L_0(\Omega)$.

Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $\|\cdot\| : E \to L_0(\Omega)$ называют векторной (L_0-значной) нормой, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(x \in E)$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ x \in E)$;
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in E)$.

Отображение $\|\cdot\|$ называют разложимой нормой или нормой Канторовича, если кроме (1), (2) и (3) выполнена аксиома разложимости:

(4) для любого элемента $x \in E$ и любого разложения $\|x\| = e_1 + e_2$ в сумму положительных элементов $e_1, e_2 \in L_0(\Omega)$ существуют $x_1, x_2 \in E$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_k\| = e_k$ $(k = 1, 2)$.

В том случае, когда условие (4) справедливо лишь для дизъюнктных положительных $e_1, e_2 \in L_0(\Omega)$, норму называют дизъюнктно разложимой или, короче, d-разложимой.

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется решеточно нормированным пространством (сокращенно РНП) над $L_0(\Omega)$, если $\|\cdot\|$ — L_0-значная норма на векторном пространстве E. Если норма $\|\cdot\|$ разложима (d-разложима), то и само пространство $(E, \|\cdot\|)$ называется разложимым (d-разложимым).

Говорят, что последовательность $(x_n) \subset E$ (bo)-сходится к элементу $x \in E$ и пишут $x = (bo)\text{-}\lim x_n$, если последовательность $(\|x_n - x\|)$ (o)-сходится к нулю в решетке $L_0(\Omega)$. Последовательность (x_n) называют (bo)-фундаментальной, если

$$\sup_{n,k \geq m} \|x_n - x_k\| \xrightarrow{(o)} 0, \quad \text{при } m \to \infty.$$

Решеточно нормированное пространство называют (bo)-полным, если всякая (bo)-фундаментальная последовательность в нем (bo)-сходится к элементу этого пространства. Пространством Банаха-Канторовича (или, сокращенно, ПБК) над L_0 называется d-разложимое (bo)-полное РНП над L_0. Известно, что всякое ПБК является разложимым РНП.

Если $(E, \|\cdot\|)$ — РНП и E — векторная решетка, то норма $\|\cdot\|$ называется монотонной, если из $|x| \leq |y|$, $x, y \in E$, следует, что $\|x\| \leq \|y\|$. ПБК, являющееся одновременно векторной решеткой с монотонной нормой, называется решеткой Банаха-Канторовича.

Пусть E — бимодуль над $L_0(\Omega)$ (или, коротко, L_0-модуль), т.е. E — абелева группа относительно операции сложения "+" и на E заданы операции умножения слева и справа на элементы из $L_0(\Omega)$, обладающие свойствами:

1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $(x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda$;
2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu$;
3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; $(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu)$;
4) $\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x$

для всех $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in L_0(\Omega)$.

Бимодуль E над $L_0(\Omega)$ называется нормальным L_0-модулем, если

1) $\lambda x = x\lambda$ для всех $x \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$;
2) для любого ненулевого $e \in \nabla(\Omega)$ существует такое $x \in E$, что $xe \neq 0$;

3) для любого разбиения единицы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \nabla(\Omega)$ и любых $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ существует такое $x \in E$, что $xe_n = x_n e_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$;

4) для любого $x \in E$ и любой последовательности $\{e_n\}$ дизъюнктных элементов из $\nabla(\Omega)$ из равенств $e_n x = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, следует, что $\left(\sup\limits_{n\geq 1} e_n\right) x = 0$.

Нормальный L_0-модуль E называется L_0-векторной решеткой, если в E задан частичный порядок $x \leq y$, относительно которого E является одновременно решеткой, и для любых $x, y, z \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$ из $x \leq y$, $\lambda \geq 0$ вытекает, что $x + z \leq y + z$ и $\lambda x \leq \lambda y$. Простейшим примером L_0-векторной решетки служит само $L_0(\Omega)$, рассмотренное как бимодуль над $L_0(\Omega)$.

Пусть E — нормальный L_0-модуль. L_0-значная норма $\|\cdot\| : E \to L_0(\Omega)$ называется L_0-нормой, согласованной со структурой L_0-модуля E (коротко L_0-норма), если $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для любых $x \in E$ и $\lambda \in L_0(\Omega)$. Пара $(E, \|\cdot\|)$, где E — нормальный L_0-модуль, $\|\cdot\|$ — L_0-норма на E, называется нормированным L_0-модулем.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированный L_0-модуль, t — топология сходимости локально по мере в $L_0(\Omega)$, $\mathcal{U}$ — система всех окрестностей нуля в $(L_0(\Omega), t)$. Через $\Omega(U)$ обозначим совокупность всех $x \in E$, для которых $\|x\| \in U$, где $U \in \mathcal{U}$. Система $\{\Omega(U), U \in \mathcal{U}\}$ определяет в E метризуемую топологию τ такую, что (E, τ) есть топологический бимодуль над $L_0(\Omega)$, при этом $\{\Omega(U), U \in \mathcal{U}\}$ есть базис окрестностей нуля в (E, τ) (в этом случае говорят, что τ порождена нормой $\|\cdot\|$ и топологией t).

Заметим, что $L_0(\Omega)$, рассмотренное как бимодуль над $L_0(\Omega)$, имеет тривиальную L_0-норму, задаваемую формулой $\|\lambda\| = |\lambda|$, $\lambda \in L_0(\Omega)$, при этом топология τ совпадает с топологией t.

Последовательность $\{x_n\}$ из нормированного L_0-модуля E называется (bo)-фундаментальной (t-фундаментальной), если $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{(o)} 0$ (соответственно $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{t} 0$). Нормированный L_0-модуль $(E, \|\cdot\|)$ называется банаховым (t-банаховым), если всякая (bo)-фундаментальная (соответственно t-фундаментальная) последовательность в нем (bo)-сходится (соответственно t-сходится) к элементу этого L_0-модуля. Ясно, что $(E, \|\cdot\|)$ является банаховым L_0-модулем тогда и только тогда, когда $(E, \|\cdot\|)$ — t-банахов L_0-модуль.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — ПБК над $L_0(\Omega)$. Тогда на E можно задать структуру нормального L_0-модуля (т.е. определить операции λx, $x\lambda$, $x \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$ так, что E становится нормальным L_0-модулем). При этом норма $\|\cdot\|$ будет обладать свойством модульности, т.е. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, $\lambda \in L_0(\Omega)$, $x \in E$ (см. [2], п.2.1.8). Поэтому всякое ПБК над $L_0(\Omega)$ является банаховым L_0-модулем. Верно и обратное, любой банахов L_0-модуль $(E, \|\cdot\|)$ является ПБК над $L_0(\Omega)$.

Если нормированный L_0-модуль $(E, \|\cdot\|)$ одновременно является L_0-векторной решеткой и L_0-норма монотонна, то его называют нормированной L_0-векторной решеткой. Всякая нормированная L_0-векторная решетка $(E, \|\cdot\|)$, являющаяся банаховым L_0-модулем, называется банаховой L_0-векторной решеткой. Класс банаховых L_0-векторных решеток в точности совпадает с классом решеток Банаха-Канторовича над $L_0(\Omega)$.

Приведем полезные примеры банаховых L_0-модулей.

Пусть ∇ — полная булева алгебра, $X(\nabla)$ — стоуновский компакт, соответствующий ∇. Положим $L_0(\nabla) := C_\infty(X(\nabla))$ — множество всех непрерывных действительных функций, заданных на $X(\nabla)$, принимающих значение $\pm\infty$ лишь на нигде неплотных множествах из $X(\nabla)$ (см., например, [3], гл.V, §2). При естественном введении алгебраических операций и частичного порядка в $L_0(\nabla)$ оно становится кольцом и расширенной условной полной векторной решеткой. Функция $\mathbf{1}$, тождественно равная единице на $X(\nabla)$, является кольцевой и слабой единицей в $L_0(\nabla)$. Порядковый идеал, порожденный элементом $\mathbf{1}$, совпадает с пространством $C(X(\nabla))$ всех непрерывных числовых функций на $X(\nabla)$.

Отображение $m : \nabla \to L_0(\Omega)$ называется L_0-значной мерой на ∇, если

1) $m(e) \geq 0$ для любого $e \in \nabla$;

2) $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$, если $e, g \in \nabla$ и $e \wedge g = 0$;

3) если $e_n \downarrow 0$, $e_n \in \nabla$, то $m(e_n) \downarrow 0$.

Мера m называется строго положительной, если из $m(e) = 0$, $e \in \nabla$, следует, что $e = 0$.

Каждая строго положительная L_0-значная мера продолжается до интеграла в следующем смысле (см. [2, 3]). В $L_0(\nabla)$ существует наибольший порядковый идеал L, содержащий ∇, и отображение $I_m : L \to L_0(\Omega)$ такие, что

1) $I_m e = m(e)$ для любого $e \in \nabla$;

2) $I_m(ax + by) = aI_m x + bI_m y$, $x, y \in L$, $a, b \in \mathbb{R}$:

3) если $x_n, x \in L$ и $x_n \uparrow x$ или $x_n \downarrow x$, то $I_m x_n \xrightarrow{(o)} I_m x$, при этом отображение I_m, обладающее свойствами 1)–3), определяется по мере m однозначно, и, кроме того, $I_m x \geq 0$, если $x \geq 0$.

Векторная решетка L обозначается через $L_1(\nabla, m)$ или $L_1(m)$, а отображение I_m называется L_0-значным интегралом в $L_0(\nabla)$, соответствующим мере m и обозначается $I_m x := \int x dm$. Определим в $L_1(m)$ норму со значениями в $L_0(\Omega)$: $\|x\|_1 := \int |x| dm$, $x \in L_1(m)$. Тогда $(L_1(m), \|\cdot\|_1)$ является (bo)-полным РНП над $L_0(\Omega)$ (см. [3]).

В дальнейшем будем предполагать, что $\nabla(\Omega)$ есть правильная булева подалгебра в ∇ (этого всегда можно достичь, рассматривая вместо булевой алгебры ∇ полное тензорное произведение $\nabla \overline{\otimes} \nabla(\Omega)$ булевых алгебр ∇ и $\nabla(\Omega)$ (см. [3], гл.VII, §7.2)). Тогда $L_0(\Omega)$ можно отождествить с подалгеброй в $L_0(\nabla)$, которая является одновременно и правильной векторной подрешеткой в $L_0(\nabla)$, т.е. точные верхние и нижние границы для подмножеств из $L_0(\Omega)$ совпадают в $L_0(\nabla)$ и в $L_0(\Omega)$. Ясно, что при таком отождествлении множество $L_0(\nabla)$ становится L_0-векторной решеткой (умножение элементов из $L_0(\nabla)$ на элементы $L_0(\Omega)$ совпадает с естественным умножением в $L_0(\nabla)$).

Далее, для строго положительной меры $m : \nabla \to L_0(\Omega)$ будем требовать следующее дополнительное свойство модульности: $m(ge) = gm(e)$ для всех $e \in \nabla$, $g \in \nabla(\Omega)$. В этом случае $L_1(m)$ становится ПБК над $L_0(\Omega)$ (см. [1], п.6.1.10), а интеграл, построенный по мере m, обладает следующим модульным свойством:

для любых $x \in L_1(m)$, $\alpha \in L_0(\Omega)$ элемент αx также лежит в $L_1(m)$ и $\int \alpha x dm = \alpha \int x dm$, в частности, $L_0(\Omega) \subset L_1(m)$ и $\int \alpha dm = \alpha m(\mathbf{1})$ для всех $\alpha \in L_0(\Omega)$.

Таким образом, пара $(L_1(m), \|\cdot\|)$ становится банаховой L_0-векторной решеткой и потому является решеткой Банаха-Канторовича над $L_0(\Omega)$.

Для каждого $p > 1$ положим

$$L_p(\nabla, m) := \{x \in L_0(\nabla) : |x|^p \in L_1(\nabla, m)\}.$$

Тогда $L_p(\nabla, m)$ есть нормальный L_0-модуль и относительно L_0-нормы $\|x\|_p := \left(\int |x|^p dm\right)^{1/p}$ является банаховой L_0-решеткой (см. [3], гл.VIII, §8.2, [1], п.4.2.2).

Нам понадобится следующий вариант теоремы Радона-Никодима для L_0-значных счетно аддитивных отображений $\nu : \nabla \to L_0(\Omega)$ (ν — счетно аддитивно, если $\nu\left(\sup\limits_{n\geq 1} e_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(e_n)$ для всякого счетного дизъюнктного семейства $\{e_n\} \subset \nabla$ (ряд сходится в топологии t)).

Теорема 2. *(см. [2], п.6.1.11(2)). Пусть m — строго положительная L_0-значная мера на ∇, обладающая свойством модульности, и $\nu : \nabla \to L_0(\Omega)$ — счетно-аддитивное отображение, для которого $|\nu(e)| \in L_0(s(m(e))\Omega)$ для всех $e \in \nabla$. Тогда существует такой элемент $y \in L_1(m)$, что*

$$\nu(e) = \int eydm \quad \text{для каждого } e \in \nabla.$$

Рассмотрим теперь непрерывные эндоморфизмы нормированных L_0-модулей.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ и $(F, \|\cdot\|)$— нормированные L_0-модули. Отображение $T : E \to F$ называется эндоморфизмом, если $T(x+y) = Tx+Ty$, $T(\lambda x) = \lambda Tx$ для всех $x, y \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$. Символом $L_b(E, F)$ будем обозначать множество всех непрерывных эндоморфизмов из (E, τ_E) в (F, τ_F), где τ_E и τ_F — топологии в E и F, соответственно, порожденные L_0-нормой и топологией t. Для произвольных $T, S \in L_b(E, F)$, $\alpha \in L_0(\Omega)$ положим $(T + S)(x) = Tx + Sx$, $(\alpha T)(x) = \alpha Tx$, $(T\alpha)(x) = (Tx)\alpha$, $x \in E$. Ясно, что относительно введенных алгебраических операций $L_b(E, F)$ является бимодулем над $L_0(\Omega)$. Если $F = L_0(\Omega)$, то $E^* := L_b(E, L_0(\Omega))$ — пространство всех L_0-значных непрерывных эндоморфизмов на E — также является L_0-модулем.

Эндоморфизм $T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|)$называется L_0-ограниченным, если существует элемент $0 \leq c \in L_0(\Omega)$ такой, что $\|Tx\| \leq c\|x\|$ для всех $x \in E$.

Следующая теорема является "L_0-вариантом" известной связи между понятием ограниченности и непрерывности для линейных отображений нормированных пространств.

Теорема 3. *Для эндоморфизма $T : E \to F$ следующие условия эквивалентны:*

1) T — L_0-ограничен;

2) T — непрерывен;

3) T — непрерывен в нуле.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть T непрерывен в нуле. Положим $A(T) := \{e \in \nabla(\Omega) : T : eE \to eF$ — $L_0(e\Omega)$-ограничен$\}$, $p = \sup A(T)$. Ясно, что из $q \leq e \in A(T)$, $q \in \nabla(\Omega)$ следует, что $q \in A(T)$. Если $e_1, e_2 \in A(T)$, то $\|Ty\| \leq c_1\|y\|$, $\|Tz\| \leq c_2\|z\|$ для любых $y \in e_1E$,

$z \in e_2F$ и некоторых $c_1 \in L_0(e_1\Omega)$, $c_2 \in L_0(e_2\Omega)$. Пусть $e_3 = e_2 - e_1 \wedge e_2$. Тогда $e_1 \vee e_2 = e_1 + e_3$, $\|Tz\| \leq c_2\|z\|$ для любых $z \in e_3E$, и потому $\|Tx\| \leq (c_1 + c_2)\|x\|$ при $x \in (e_1 \vee e_2)E$, т.е. $e_1 \vee e_2 \in A(T)$. Составляя конечные супремумы $e_{i_1} \vee \dots \vee e_{i_n} \in A(T)$, где $e_{i_k} \in A(T)$, $k = 1, \dots, n$, получим существование возрастающей сети $e_\alpha \uparrow p$, $e_\alpha \in A(T)$. Так как $\nabla(\Omega)$ имеет счетный тип, то найдется последовательность $e_{\alpha_k} \uparrow p$. Положим $g_k = e_{\alpha_{k+1}} - e_{\alpha_k}$. Тогда $g_k \in A(T)$, $g_kg_n = 0$, $k \neq n$, $k, n = 1, 2, \dots$ и $\sup\limits_{k \geq 1} g_k = p$. Поскольку $\|Ty\| \leq c_k\|y\|$ для всех $y \in g_kE$ и некоторого $c_k \in L_0(e_k\Omega)$, то $\|Tx\| \leq \left(\sup\limits_{k\geq 1} c_k\right)\|x\|$ для всех $x \in pE$. Это означает, что $p \in A(T)$, т.е. $A(T) = \{e \in \nabla(\Omega) : e \leq p\}$. Если $p = \mathbf{1}$, то T — L_0-ограничен. Предположим, что $p \neq \mathbf{1}$.

Зафиксируем натуральное число n. Для каждого $0 \neq e \leq (\mathbf{1} - p)$, $e \in \nabla(\Omega)$, оператор T не является $L_0(e\Omega)$-ограниченным в eE. В частности, найдется такое $0 \neq x(e, n) \in eE$, что $\|Tx(e, n)\| \not\leq n\|x(e, n)\|$, т.е. существует такой идемпотент $0 \neq q(e, n) \leq s(\|x(e, n)\|)$, что

$$\|T(x(e,n)q(e,n))\| = \|Tx(e,n)\|q(e,n) > n\|x(e,n)\|q(e,n) =$$

$$= n\|x(e,n)q(e,n)\|.$$

Ясно, что можно считать $s(\|(x(e, n)\|) = q(e, n)$. Согласно принципу исчерпывания (теорема 1) найдется счетный набор ненулевых попарно дизъюнктных идемпотентов $\{q_k\}_{k=1}^\infty \subset \{e \in \nabla(\Omega) : e \leq \mathbf{1} - p\}$ и набор $x_k \in q_kE$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что $\sup\limits_{k\geq 1} q_k = \mathbf{1} - p$, $s(\|x_k\|) = q_k$ и $\|Tx_kq_k\| > n\|x_kq_k\|$ для всех $k = 1, 2, \dots$.

В силу нормальности L_0-модуля E существуют такие $y_n \in E(\mathbf{1} - p)$, что $y_nq_k = x_kq_k$, в частности, $s(\|y_n\|) = \sup\limits_{k\geq 1} q_k = \mathbf{1} - p$. Поскольку $q_kq_m = 0$ при $n \neq m$, то

$$\|Ty_n(\mathbf{1} - p)\| > n\|y_n(\mathbf{1} - p)\|.$$

Положим $z_n = \dfrac{1}{n} y_n \left(\|y_n\|_s^{-1}\right) \in (\mathbf{1} - p)E$. Имеем

$$\|z_n\| = \frac{1}{n}(\mathbf{1} - p) \xrightarrow{1.\mu} 0,$$

при этом

$$\|Tz_n\| = \frac{1}{n}\|Ty_n\| \cdot \|y_n\|_s^{-1} > \mathbf{1} - p,$$

что противоречит непрерывности T. Следовательно, $p = \mathbf{1}$, и оператор T — L_0-ограничен. □

В случае $F = L_0$ полезно следующее описание L_0-значного эндоморфизма на E. Положим $V = \{x \in E : \|x\| \leq \mathbf{1}\}$.

Теорема 4. *Для каждого эндоморфизма* $f : E \to L_0$ *либо* $f(V) = L_0$, *либо существует такое ненулевое* $e \in \nabla(\Omega)$, *что эндоморфизм* $f : eE \to L_0(e\Omega)$ *ограничен и* $f((\mathbf{1} - e)V) = L_0((\mathbf{1} - e)\Omega)$.

Доказательство. Предположим, что $f(V) \neq L_0$ и положим $A = \{g \in \nabla(\Omega) : f(gV) = L_0(g\Omega)\}$, $p = \sup A$. Используя теорему 1, получим, что $p \in A$, и потому $p \neq \mathbf{1}$. Покажем, что для $e = \mathbf{1} - p$ изоморфизм $f : eE \to L_0(e\Omega)$ ограничен. Если это не так,то для любого $0 \neq q \in \nabla(e\Omega)$ существует такое $0 \neq q_1 \leq q$, $q_1 \in \nabla(q\Omega)$, что $f : q_1 E \to L_0(q_1\Omega)$ - неограничен, в частности найдется такое $z_n = z(q_1, n) \in q_1 E, \|z_n\| \leq q_1$, для которого $|f(z_n)| \not\leq nq_1$, и потому существует такой ненулевой идемпотент $q_2 \in \nabla(q_1\Omega)$, что $|f(z_n q_2)| > nq_2$. Таким образом, в силу теоремы 1, $|f(u_n)| > ne$ для некоторого $u_n \in eE$, $\|u_n\| \leq e$.

Пусть $b \in L_0(e\Omega)$. Выберем дизъюнктные идемпотенты $\{r_n\} \subset \nabla(e\Omega)$ так, чтобы $|b|r_n \leq nr_n$, $\sup r_n = e$. Согласно выше доказанному найдутся такие $u_n \in eV$, что $|f(u_n r_n)| > nr_n$. Поскольку E — нормальный L_0-модуль, то существует такое $u \in eE$, для которого $ur_n = u_n r_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $\|u\| \leq e$ и $|f(u)| > |b|$. Поэтому для $v = \frac{b}{f(u)} eu$ имеем $\|v\| \leq e$ и $f(v) = be = b$. Таким образом, $f(eV) = L_0(e\Omega)$, что не так. Следовательно, эндоморфизм $f : \text{y}E \to L_0(e\Omega)$ ограничен. $\square$

Из теоремы 4 вытекает еще один полезный критерий непрерывности L_0-значного эндоморфизма на E.

Следствие 1. *Эндоморфизм $f : E \to L_0$ непрерывен тогда и только тогда, когда $H = f^{-1}(0)$ замкнуто в E.*

Доказательство. Ясно, что из непрерывности f следует замкнутость H в E. Обратно, пусть $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$ замкнуто в E. Согласно теореме 4 найдется такой элемент e из $\nabla(\Omega)$, что $f((\mathbf{1} - e)V) = L_0((\mathbf{1} - e)\Omega)$ и $f : eE \to L_0(e\Omega)$ ограничено. Предположим, что $e \neq \mathbf{1}$, и выберем такое $x_0 \in (\mathbf{1} - e)V$, что $f(x_0) = \mathbf{1} - e$. Тогда $x_0 \notin H_1 = (\mathbf{1} - e)H$. Поскольку H_1 замкнуто в $(\mathbf{1} - e)E$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x_0 + V_\varepsilon) \cap H_1 = \varnothing$, где $V_\varepsilon = \{x \in (\mathbf{1} - e)E : \|x\| \leq \varepsilon(\mathbf{1} - e)\}$.

Так как $f((\mathbf{1} - e)V) = L_0((\mathbf{1} - e)\Omega)$, то найдется такое $y_0 \in (\mathbf{1} - e)V$, что $f(y_0) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{1} - e)$. Тогда $(-\varepsilon y_0) \in V_\varepsilon$, $x_0 - \varepsilon y_0 \in x_0 + V_\varepsilon$ и $f(x_0 - \varepsilon y_0) = (\mathbf{1} - e) - (\mathbf{1} - e) = 0$, т.е. $x_0 - \varepsilon y_0 \in H_1$, что невозможно. Это означает, что $e = \mathbf{1}$, т.е. f — L_0-ограниченнный L_0-значный эндоморфизм на E, и потому f непрерывен. $\square$

Для каждого $f \in E^*$ положим

$$\|f\| := \inf\{c \in L_0(\Omega) : \ |f(x)| \leq c\|x\| \ \text{ для всех } \ x \in E\}.$$

Известно (см. [2], п.2.2.4), что отображение $f \to \|f\|$ является L_0-нормой в E^*, согласованной со структурой L_0-модуля E^*, и при этом выполняется следующее неравенство $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ для всех $x \in E$. L_0-норму в E^* можно вычислять также по следующей формуле (см. [1], п.3.4.9)

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \ x \in E, \|x\| \leq \mathbf{1}\}.$$

E^* является ПБК над $L_0(\Omega)$ (см. [1], п.2.2.4(3)), и поэтому E^* — банахов L_0-модуль. Банахов L_0-модуль E^* называется L_0-*сопряженным* к нормированному L_0-модулю E. Как показано в [1], $(L_p(\nabla, m))^* = L_q(\nabla, m)$, где $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Банаховы $\mathbf{L_0}$-модули $\mathbf{L_\infty(\nabla, m)}$ и их предсопряженные модули

Элемент $x \in L_0(\nabla)$ называется L_0-ограниченным, если существует $0 \leq c \in L_0(\Omega)$, такой, что $|x| \leq c$, т.е. $|x(t)| \leq c(t)$ для всех $t \in X(\nabla)$. Обозначим через $L_\infty(\nabla, m)$ множество всех L_0-ограниченных элементов из $L_0(\nabla)$. Ясно, что $L_0(\Omega) \subset L_\infty(\nabla, m)$, $C(X(\nabla)) \subset L_\infty(\nabla, m) \subset L_1(\nabla, m)$, и $L_\infty(\nabla, m)$ является нормальным бимодулем и векторной решеткой над $L_0(\Omega)$ относительно естественных алгебраических операций и частичного порядка в $L_0(\nabla)$. Для каждого $x \in L_\infty(\nabla, m)$ положим

$$\|x\|_\infty =: \inf\{\lambda \in L_0(\Omega) : |x| \leq \lambda, \lambda \geq 0\}.$$

Нетрудно видеть, что $\|\cdot\|_\infty$ является монотонной L_0-нормой на $L_\infty(\nabla, m)$, т.е. $L_\infty(\nabla, m)$ является нормированной L_0-решеткой.

Следующая теорема показывает, что $L_\infty(\nabla, m)$ является L_0-сопряженным модулем для банахова L_0-модуля $L_1(\nabla, m)$.

Теорема 5. *Для каждого $h \in L_\infty(\nabla, m)$ эндоморфизм f_h, определенный равенством $f_h(x) := \int xhdm$, $x \in L_1(\nabla, m)$, является L_0-ограниченным на $L_1(\nabla, m)$, при этом $\|f_h\| = \|h\|_\infty$. Обратно, для каждого $f \in (L_1(\nabla, m))^*$ существует единственное $h \in L_\infty(\nabla, m)$ такое, что $f = f_h$.*

Доказательство. Пусть $h \in L_\infty(\nabla, m)$ и $x \in L_1(\nabla, m)$. Тогда

$$\|f\|_h = \sup\left\{\left|\int xhdm\right| : \|x\|_1 \leq \mathbf{1}\right\} = \sup\left\{\int |x| \cdot |h| dm : \|x\|_1 \leq \mathbf{1}\right\} \leq \|h\|_\infty.$$

Это означает, что f_h является L_0-ограниченным L_0-значным эндоморфизмом на $L_1(\nabla, m)$.

Пусть $0 \neq e \leq s\left(\|h\|_\infty\right), e \in \nabla(\Omega)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Имеем $(|h| + \varepsilon)e \not\leq \|h\|_\infty e$, т.е. существует $0 \neq e_1 = e_1(\varepsilon) \leq e$, $e_1 \in \nabla(\Omega)$, такое, что $(|h| + \varepsilon)e_1 > \|h\|_\infty e_1$. Пусть $\widetilde{h}(t) := signh(t)$, $t \in X(\nabla)$. Ясно, что $\widetilde{h} \in L_1(\nabla, m)$ и $\left\|\widetilde{h}\right\|_1 = \int \left|\widetilde{h}\right| dm = m(s(\|h\|_\infty))$. Так как $m(s(\|h\|_\infty)) = s(\|h\|_\infty)m(\mathbf{1})$ и элемент $m(\mathbf{1})$ обратим в $L_0(\Omega)$, то

$$\|f_h\|e_1 \geq \left|f_h\left(\widetilde{h}e_1 m(\mathbf{1})^{-1}\right)\right| = \left|\int \widetilde{h}he_1 m(\mathbf{1})^{-1}dm\right| = \int |h|e_1 m(\mathbf{1})^{-1}dm \geq$$

$$\geq \left(\|h\|_\infty - \varepsilon\right)e_1.$$

Согласно принципу исчерпывания, существует счетное семейство ненулевых дизъюнктных идемпотентов $\{p_n\}$ такое, что $\sup\limits_{n\geq 1} p_n = s\left(\|h\|_\infty\right)$ и $\|f_h\|p_n \geq \left(\|h\|_\infty - \varepsilon\right)p_n$. Следовательно,

$$\|f_h\| = \|f_h\|s\left(\|h\|_\infty\right) \geq \left(\|h\|_\infty - \varepsilon\right)s\left(\|h\|_\infty\right).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим, что $\|f_n\| \geq \|h\|_\infty$. Таким образом, $\|f_h\| = \|h\|_\infty$.

Обратно, пусть $f \in (L_1(\nabla, m))^*$. Для любой последовательности дизъюнктных идемпотентов $\{e_n\} \subset \nabla \subset L_1(\nabla, m)$ имеем, что

$$\left\| e - \sum_{n=1}^{k} e_n \right\|_1 = \int \left(\sup_{n \geq k} e_n dm \right) \xrightarrow{(0)} 0.$$

Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{k} f(e_n) = f\left(\sum\limits_{n=1}^{k} e_n\right) \xrightarrow{1.\mu} f(e)$. Это означает, что отображение $f : \nabla \to L_0(\Omega)$ счетно-аддитивно. Так как $f \in L_1(\nabla, m)^*$, то

$$|f(e)| \leq \|f\| \cdot \|e\|_1 = \|f\| s(m(e)) \cdot m(e),$$

и потому $|f(e)| \in L_0(s(m(e))\Omega)$ для всех $e \in \nabla$. По теореме Радона-Никодима (теорема **??**) существует такой элемент $h \in L_1(\nabla, m)$, что

$$f(e) = \int ehdm \quad \text{для всех} \quad e \in \nabla.$$

Для любого простого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in \nabla$, $i = \overline{1, n}$ имеем, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int e_i hdm = \int xhdm.$$

Если x — произвольный положительный элемент из $L_1(\nabla, m)$, то существует последовательность простых элементов $x_n \uparrow x$. Поэтому из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. [2], п.6.1.5) имеем

$$f(x_n) = \int x_n hdm \xrightarrow{1.\mu} \int xhdm.$$

Поскольку f непрерывно, то $f(x_n) \xrightarrow{1.\mu} f(x)$. Следовательно, $f(x) = \int xhdm$.

Используя представление $x \in L_1(\nabla, m)$ в виде $x = x_+ - x_-$, где $x_+, x_- \in L_1(\nabla, m)$, $x_+ \geq 0$, $x_- \geq 0$, получим, что

$$f(x) = f_h(x) = \int xhdm \quad \text{для всех} \quad x \in L_1(\nabla, m).$$

Осталось показать, что $h \in L_\infty(\nabla, m)$.

Пусть $e_0 := \sup\{p \in \nabla : hp \in L_\infty(p\nabla, m)\}$. По приниципу исчерпывания существует семейство дизъюнктных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{p \in \nabla : p \leq e_0\}$, такое, что $\sup e_n = e_0$ и $he_n \in L_\infty(e_n\nabla, m)$, т.е. $|he_n| \leq c_n e_n$ для некоторого $c_n \in L_0(e_n\Omega)$. Положим $c = \sup\limits_{n \geq 1} c_n$. Тогда $c \in L_0(e_0\Omega)$ и $|he_0| \leq ce_0$, т.е. $he_0 \in L_\infty(\nabla, m)$.

Если $e_0 = \mathbf{1}$, то $h \in L_\infty(\nabla, m)$, и теорема доказана. Если $e_0 \neq \mathbf{1}$, то для любого $0 \neq e \leq \mathbf{1} - e_0$, $e \in \nabla(\Omega)$, имеем, что $he \notin L_\infty(e\nabla, m)$. Зафиксируем n. Так как $he \notin L_\infty(e\nabla, m)$, то $|he| \nleq ne$, т.е. существует такое $e_1 \in \nabla(\Omega)$, что $0 \neq e_1 \leq e$ и $|he_1| > ne_1$. Согласно принципу исчерпывания существует такое счетное дизъюнктное множество $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{e \in \nabla : e \leq \mathbf{1} - e_0\}$, что $\sup\limits_{k \geq 1} p_k = \mathbf{1} - e_0$ и $|hp_k| > np_k$.

Следовательно, $|h(\mathbf{1} - e_0)| > n(\mathbf{1} - e_0)$ для любого фиксированного n, что возможно только в случае $\mathbf{1} - e_0 = 0$, т.е. $e_0 = \mathbf{1}$.

Единственность элемента $h \in L_\infty(\nabla, m)$, для которого $f = f_h$, очевидна. $\square$

Из теоремы 5 следует, что эндоморфизм, задаваемый равенством $U(h) = f_h$, является изометрией из нормированного L_0-модуля $L_\infty(\nabla, m)$ на банахов L_0-модуль $(L_1(\nabla, m))^*$. В частности, отсюда вытекает

Следствие 2. $L_\infty(\nabla, m)$ *— банахов L_0-модуль.*

Заключение

Данная работа представляет собой шаг в построении теории обобщенных (модульных) алгебр фон Неймана и AW^*-алгебр, подобной классической теории. В ней определяется понятие L_0-ограниченной функции, ассоциированной с полной булевой алгеброй ∇ и строго положительной L_0-значной мерой $m : \nabla \to L_0$, рассматривается банахов L_0-бимодуль $L_\infty(\nabla, m)$ всех таких L_0-ограниченных функций и показывается, что он изометричен банахову L_0-модулю $(L_1(\nabla, m))^*$. При этом используется аналог теоремы Радона-Никодима для векторнозначных мер.

Список литературы

1. *Кусраев А.Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
2. *Кусраев А.Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003. 619 с.
3. *Сарымсаков Т.А.* Топологические полуполя и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. 192 с.
4. *Закиров Б.С.* Решетки Орлича-Канторовича, ассоциированные с L_0-значной мерой // Узб. матем. журнал. — 2007. — №2.
5. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 319 с.
6. *Вулих Б.З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2007

Деміденко С.В., Жук С.М., Наконечний О.Г. ***До проблеми мінімаксного оцінювання розв'язків одновимірних крайових задач*** // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №1. — С. 7-23.

УДК 519.962.22

У статті вивчається задача гарантованого оцінювання для двоточкової одновимірної крайової задачі спеціального вигляду. Для випадку квадратичних обмежень одержано критерій скінченності мінімаксної похибки середньоквадратичного оцінювання, запропоновано представлення оцінки у вигляді лінійного перетворення від розв'язку двоточкової крайової задачі для невід'ємно означеної гамільтонової системи звичайних диференціальних рівнянь, наведено альтернативне представлення оцінки. Запропоновано спосіб перевірки скінченності мінімаксної похибки для заданого функціонала в термінах фундаментальної матриці вихідного рівняння. Основні результати проілюстровано на прикладах.

Изучается задача гарантированного оценивания для двухточечной одномерной краевой задачи специального вида. Для случая квадратичных ограничений получен критерий конечности минимаксной ошибки середнеквадратического оценивания, предложено представление оценки в виде линейного преобразования решения краевой задачи для неотрицательно определенной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений, приведено альтернативное представление оценки. Описан способ проверки конечности минимаксной ошибки для заданого функционала в терминах фундаментальной матрицы исходного уравнения. Основные результаты проиллюстрированы на примерах.

Щербина О.А. ***Локальные элиминационные алгоритмы для задач удовлетворения ограничений*** // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №1. — С. 24-39.

УДК 519.68

Розглянуто застосування локальних елімінаційних алгоритмів для розв'язання деяких задач штучного інтелекту, таких як задачі задовольняння обмеженням, SAT, фарбування графа.

Рассмотрены локальные элиминационные алгоритмы для решения некоторых задач искусственного интеллекта, таких как задача удовлетворения ограничениям, задачи SAT, задачи раскраски графа.

Чабанюк Я.М. ***Асимптотична нормальність стрибкової процедури з дифузійним збуренням в марковському середовищі*** // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №1. — С. 40-48.

УДК 519.21:62

Отримано достатні умови асимптотичної нормальності стрибкової процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі в схемі дифузійного наближення. Використано розв'язок проблеми сингулярного збурення для генератора трьохкомпонентного марковського процесу.

Получены достаточные условия асимптотической нормальности скачкообразной процедуры стохастической аппроксимации в марковской среде в схеме диффузионного приближения. Использовано решение проблемы сингулярного возмущения для генератора трёхкомпонентного марковского процесса.

Коваленко А.И., Марянин Б.Д., Смолич В.П. ***Исследование надежности трехэлементной системы с приоритетным обслуживанием двумя наладчиками*** // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №1. — С. 49-57.

УДК 519.21

Розглядається ієрархічна система, що складається з одного керуючого і двох підлеглих елементів. Система може виходити з ладу через відмовлення елементів. Ремонт елементів здійснюється двома наладчиками різної кваліфікації при визначених правилах обслуговування. У статті знайдені імовірності станів системи в стаціонарному режимі, коефіцієнт надійності, середній наробіток між відмовленнями.

Рассматривается иерархическая система, состоящая из одного управляющего и двух подчинённых элементов. Система может выходить из строя из-за отказа элементов. Ремонт элементов осуществляется двумя наладчиками разной квалификации при определённых правилах обслуживания. В статье найдены вероятности состояний системы в стационарном режиме, коэффициент надёжности, средняя наработка между отказами.

Закиров Б.С., Чилин В.И. ***Банаховы модули*** $L_\infty(\nabla, m)$ L_0***-ограниченных функций и их предсопряженные модули*** // Таврический вестник информатики и математики. — 2007. — №1. — С. 58-69.

УДК 517.98

Розглядається повна булева алгебра ∇, m суворо позитивна міра со значеннями у алгебрі L_0 усіх вимірних дійсних функцій. У роботі розлянут банахів L_0-бимодуль $L_\infty(\nabla, m)$ усіх L_0-обмежених функцій та доведено, шо він изометричен банахову L_0-модулю $(L_1(\nabla, m))^*$.

Пусть ∇ полная булева алгебра, m строго положительная мера со значениями в алгебре L_0 всех измеримых действительных функций. В настоящей работе рассматривается банахов L_0-бимодуль $L_\infty(\nabla, m)$ всех L_0-ограниченных функций и показывается, что он изометричен банахову L_0-модулю $(L_1(\nabla, m))^*$.

СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

Демиденко Сергей Владимирович — аспирант кафедры системного анализа и теории принятия решений, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка

Жук Сергей Николаевич — м. н. с. лаборатории экономической кибернетики, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
e-mail: beetle@unicyb.kiev.ua

Закиров Батыр Собитович — к.ф.-м.н., с. н. с. Института математики АН Республики Узбекистан,
e-mail: batirzakirov@list.ru

Коваленко Александр Ильич — к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
e-mail: svp54@mail.ru

Марянин Борис Давыдович — к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
e-mail: svp54@mail.ru

Наконечный Александр Григорьевич — д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедры системного анализа и теории принятия решений, Киевский национальный университет им. Тараса Шевченка
e-mail: nakonechniy@unicyb.kiev.ua

Смолич Владимир Павлович — к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
e-mail: svp54@mail.ru

Чабанюк Ярослав Михайлович — к.ф.-м.н., доцент, кафедра вычислительной математики и программирования, Национальный университет «Львівська політехніка»
e-mail: yaroslav_chab@yahoo.com

Чилин Владимир Иванович — д.ф.-м.н., профессор кафедры функционального анализа, Национальный университет Узбекистана,
e-mail: chilin@ucd.uz

Щербина Олег Александрович — к.ф.-м.н., доцент, факультет математики Венского университета, Gastprofessor
e-mail: oleg.shcherbina@univie.ac.at

ДО ВІДОМА АВТОРІВ

Загальні положення

Для опублікування в журналі "Таврійський вісник інформатики і математики" приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.
Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Файл статті на дискеті 3,5" або надісланий електронною поштою за адресою редакції.

Вимоги до рукописів

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. ***Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1*** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

   У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

   Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

   Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор

   Невирішені раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття

   Формулювання цілей статті (постановка задачі)

   У висновку з данного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом)

   результати дослідження *та перспективи подальших розвідок у цьому напрямку*
4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або абревіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою орігіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2000, №2.

6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету twim.sty, який можна отримати за адресою **www.twim.crimea.edu**.

Робота редакції з авторами

1. Матеріали необхідно надіслати електронною поштою, а також у вигляді "твердої" копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м.Симферопіль, Крим, Україна, 95007**, e-mail: **twim_taurida@mail.ru**
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

ДО УВАГИ АВТОРІВ!

Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України

ПОСТАНОВА ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ від 15.01.2003 р. №7-05/1

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання данної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження с повним обгрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України В.В.Скопенко

Вчений секретар Л.М.Артюшин

Подписано к печати 21.05.2007. Формат 38х30/2. Бумага тип ОП. Объем 2.5 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.
Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, Украина, 95007