

# ТАВРИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАТИКИ И МАТЕМАТИКИ

№2 2006

МЕЖДУНАРОДНОЕ НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ  
КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО

ОСНОВАН В 2002 ГОДУ

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації  
КВ №7826 від 04.09.2003

Згідно до постанови ВАК України від 30 червня 2004 р. 3—05/7, перелік №4, журнал "Таврійський вісник інформатики та математики" внесено до переліку журналів ВАК України, у яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів кандидата й доктора наук за спеціальностями "Теоретичні основи інформатики та кібернетики", "Математичне моделювання та обчислювальні методи", "Математичне і програмне забезпечення обчислювальних машин і систем", "Системний аналіз і теорія оптимальних рішень".

## СОДЕРЖАНИЕ

Копачевский Н.Д. Собственные колебания вращающегося слоя идеальной жидкости.....	3
Щербина О.А. Элиминационные алгоритмы декомпозиции.....	28
Карпенко И.И. Дефектные подмодули кососимметрических операторов в гильбертовых кватернионных бимодулях.....	42
Муратов М.А., Пашкова Ю.С. Доминантная теорема в пространствах Орлича.....	47
Лукьянова Е.А. Метод верификации свойств реактивной системы на модели.....	60
Махина Г.А. Тупиковые доопределения частичных монотонных булевых функций из класса $(n, 1, k)$ .....	69
Шульгин В.В. Решение задачи преследования методами нейроэволюции.....	75
Козлов А.И. АСМ-олимпиады как форма подготовки специалистов в области информационных технологий.....	85
Рефераты.....	89
Список авторов номера.....	92
К сведению авторов.....	93

**КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
И МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ  
ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. В.И. ВЕРНАДСКОГО**

**ЧЛЕНЫ РЕДАКЦИОННОГО СОВЕТА**

<b>В.И. ДОНСКОЙ,</b>	главный редактор, профессор, доктор физико-математических наук
<b>Ю.И. ЖУРАВЛЁВ,</b>	академик НАН Украины, академик РАН, доктор физико-математических наук
<b>Н.Д. КОПАЧЕВСКИЙ,</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>И.В. ОРЛОВ,</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>Е.А. ПАВЛОВ,</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>С.К. ПОЛУМИЕНКО,</b>	доктор физико-математических наук
<b>К.В. РУДАКОВ,</b>	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук
<b>Ю.С. САМОЙЛЕНКО,</b>	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук
<b>А.А. САПОЖЕНКО,</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>В.Н. ЧЕХОВ,</b>	профессор, доктор физико-математических наук
<b>А.А. ЧИКРИЙ,</b>	член-корреспондент НАН Украины, доктор физико-математических наук

**СЕКРЕТАРИАТ РЕДАКЦИИ: А.С. АНАФИЕВ** — секретарь, **В.Ф. БЛЫЩИК, В.П. ЛОПАТА**

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

Крымский научный центр Национальной Академии наук  
и Министерства образования и науки Украины  
Украина, Крым, г.Симферополь, пр-т Вернадского, 2, 95007

**ДЛЯ ПЕРЕПИСКИ:**

факультет математики и информатики ТНУ  
Украина, Крым, г.Симферополь, пр-т Вернадского, 4, 95007

Тел. гл.редактора: (0652) 63-75-42  
Тел. редакции: (0652) 230-325  
e-mail (гл.редактор): donscoy@ccssu.crimea.ua  
e-mail (для переписки): twim\_taurida@mail.ru  
сайт журнала: www.twim.crimea.edu

**Журнал публикует оригинальные и обзорные статьи  
по вопросам теоретической и прикладной информатики и математики**

**Ведущие тематические разделы:**

Функциональный анализ и его приложения	Математические модели и методы прогнозирования
Интегральные, дифференциальные уравнения и динамические системы	Машинное обучение, нейронные сети, извлечение закономерностей
Нелинейный анализ и его применение	Дедуктивные системы и базы знаний
Спектральные и эволюционные задачи	Знаниеориентированные и гибридные математические модели принятия решений
Математические проблемы гидродинамики	Синтез моделей принятия решений при неполной начальной информации
Дискретная оптимизация	Математические модели биологических процессов
Математическая логика, теория алгоритмов и теория сложности вычислений	Математическая теория, алгоритмы и системы распознавания образов
Вычислительная математика	

Печатается по решению научно технического Совета  
КНЦ НАН и Министерства образования и науки Украины  
Протокол №6 от 11 декабря 2006 г.

**(С) КРЫМСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР  
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК И  
МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
УКРАИНЫ**

## СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Копачевский Н.Д.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: *kopachevsky@crimea.edu*

In the paper, eigenoscillations of a thin layer of a rotating ideal fluid (shallow water approximation) are considered. It's proved that this limiting case is an adequate model for investigating of surface waves and isn't an adequate one for study of inner inertial waves due to Corioles force.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Данная работа является продолжением работы [1], где изучалась проблема малых движений вращающегося слоя идеальной жидкости. Исследования задач гидродинамики идеальной и вязкой жидкости в течение последнего полувека проводятся методами функционального анализа. При этом существенно используется теория полугрупп операторов, спектральная теория линейных оператор-функций, действующих в гильбертовом либо банаховом пространстве, теория линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой и другие методы. Эти методы и результаты исследований отражены во многих монографиях. Применительно к задачам о колебаниях идеальной вращающейся жидкости они развиты, например, в монографии [2], а также в первом томе монографии [3].

В работе [1] доказана теорема об однозначной разрешимости в определенных классах функций начально-краевой задачи о малых движениях слоя идеальной жидкости, близких к равномерному вращению. Соответствующие уравнения и краевые условия исследовались в так называемом приближении мелкой воды (теория приливных, или длинных, волн), когда характерный поперечный размер слоя существенно меньше продольного, а движение жидкости в основном происходит в горизонтальном направлении.

В данной работе изучается проблема, естественно возникающая после исследования начально-краевой задачи. Это проблема собственных колебаний, т.е. решений начально-краевой задачи о свободных движениях гидросистемы, зависящих от времени  $t$  по экспоненциальному закону  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  — частота колебаний. При этом для соответствующих амплитудных функций возникает спектральная проблема, которая здесь подробно исследуется методами функционального анализа.

Целью данной работы является изучение структуры спектра частот колебаний, вопросы полноты и базисности системы собственных функций, а также вопрос о том, является ли приближение мелкой воды, использованное здесь, адекватным при изучении поверхностных и внутренних волн в тонком слое вращающейся идеальной жидкости.

Перейдем теперь к подробной постановке задачи (см. [1]). Будем считать, что тонкий слой идеальной жидкости заполняет некоторый водоем (бассейн, море, озеро) и в

невозмущенном состоянии равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega_0 = f/2$ , где величину  $f$  называют параметром Кориолиса. Если  $f$  достаточно мало, то в состоянии равномерного вращения свободную поверхность жидкости  $\Gamma$  считают горизонтальной. Область  $\Omega$ , занятая жидкостью, при этом представляет собой тонкий слой переменной глубины, характерный размер которой существенно меньше диаметра поверхности  $\Gamma$ .

В теории мелкой воды вертикальную координату «растягивают» таким образом, чтобы характерная величина новой вертикальной координаты была сравнима по порядку с диаметром  $\Gamma$ . В итоге возникает вместо трехмерной двумерная задача о нахождении горизонтальных компонент поля скорости и функции отклонения свободной движущейся поверхности от равновесной горизонтальной свободной поверхности  $\Gamma$ .

Пусть  $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$  — искомое поле скорости идеальной жидкости в приближении мелкой воды,  $\eta = \eta(t, x)$  — поле вертикальных отклонений свободной поверхности,  $\rho > 0$  и  $g > 0$  — плотность жидкости и ускорение силы тяжести,  $x = (x_1, x_2) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ,  $h = h(x)$  — глубина жидкости, а  $\vec{e}_3$  — орт вертикальной оси. Тогда формулировка начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости выглядит следующим образом (см. [4], с. 192, а также [1]):

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \rho f(\vec{u} \times \vec{e}_3) + \rho g \nabla \eta = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.2)$$

$$u_n := \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \eta d\Gamma = 0, \quad (1.3)$$

$$\vec{u}(0, x) = \vec{u}^0(x), \quad \eta(0, x) = \eta^0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1.4)$$

Здесь  $\nabla := \sum_{k=1}^2 \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}$  — двумерный градиент,  $\operatorname{div} \vec{u} = \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$  — соответствующая дивергенция, а  $\vec{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Gamma$ . Далее в работе предполагается, что функция  $h = h(x_1, x_2)$  непрерывно дифференцируема на  $\Gamma$  и выполнено условие

$$h(x_1, x_2) \geq h_0 > 0. \quad (1.5)$$

Отметим еще, что первое условие (1.3) есть условие непротекания жидкости через боковые стенки бассейна, а второе условие есть следствие сохранения объема жидкости при малых колебаниях.

Осуществим в (1.1)–(1.4) с учетом (1.5) переход к новым искомым функциям согласно формулам

$$\rho^{1/2} h^{1/2} \vec{u} =: \vec{v}, \quad g^{1/2} \rho^{1/2} \eta =: \zeta. \quad (1.6)$$

Тогда вместо (1.1) – (1.4) приходим к начально-краевой задаче

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - f(\vec{v} \times \vec{e}_3) + g^{1/2} h^{1/2} \nabla \zeta = \vec{0} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + g^{1/2} \operatorname{div}(h^{1/2} \vec{v}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.8)$$

$$v_n := \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0, \quad (1.9)$$

$$\vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x) := \rho^{1/2} h^{1/2}(x) \vec{u}^0(x), \quad \zeta(0, x) = \zeta^0(x) := g^{1/2} \rho^{1/2} \eta^0(x), \quad (1.10)$$

которая имеет более симметричный вид, чем исходная.

Назовем *собственными колебаниями* такие решения задач (1.1)–(1.3) и соответственно (1.7)–(1.9), которые зависят от  $t$  по закону  $\exp(i\omega t)$ , т.е.

$$\vec{u}(t, x) = e^{i\omega t} \vec{u}(x), \quad \eta(t, x) = e^{i\omega t} \eta(x), \quad \vec{v}(t, x) = e^{i\omega t} \vec{v}(x), \quad \zeta(t, x) = e^{i\omega t} \zeta(x). \quad (1.11)$$

Здесь  $\omega$  — частота колебаний гидросистемы, а  $\vec{u}(x)$ ,  $\eta(x)$ ,  $\vec{v}(x)$  и  $\zeta(x)$  — амплитудные функции, отвечающие частоте  $\omega$ . Так как в данной гидросистеме полная энергия жидкости сохраняется (см. [1], п.3), то эта система консервативна и диссипация энергии отсутствует. Поэтому частоты колебаний  $\omega$  вещественны.

Для амплитудных функций (1.11) из задач (1.1)–(1.3) и (1.7)–(1.9) возникает задача на собственные значения

$$-\rho f(\vec{u} \times \vec{e}_3) + \rho g \nabla \eta = -i\omega \rho \vec{u} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.12)$$

$$\operatorname{div}(h\vec{u}) = -i\omega \eta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.13)$$

$$u_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \eta \, d\Gamma = 0, \quad (1.14)$$

а также задача

$$-f(\vec{v} \times \vec{e}_3) + g^{1/2} h^{1/2} \nabla \zeta = -i\omega \vec{v} \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.15)$$

$$g^{1/2} \operatorname{div}(h^{1/2} \vec{v}) = -i\omega \zeta \quad (\text{на } \Gamma), \quad (1.16)$$

$$v_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta \, d\Gamma = 0. \quad (1.17)$$

Эти спектральные задачи и являются предметом исследования в данной работе.

## 2. ПЕРЕХОД К ОПЕРАТОРНОМУ УРАВНЕНИЮ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

При исследовании задачи (1.15)–(1.17) методами функционального анализа можно осуществить те же преобразования и использовать те же функциональные пространства и операторы, которые в работе [1] позволили перейти от (1.7)–(1.9) к задаче Коши вида

$$\frac{dy}{dt} = i\mathcal{B}y, \quad y(0) = y^0, \quad (2.1)$$

с неограниченным самосопряженным оператором  $\mathcal{B}$ , действующим в некотором гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ . Для собственных колебаний вида (1.11), т.е. для решений  $y(t) = ye^{i\omega t}$ ,  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ , задачи (2.1) теперь возникает спектральная проблема

$$\mathcal{B}y = \omega y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}, \quad (2.2)$$

которая ниже и будет изучаться.

Повторяя выкладки из [2], опишем свойства оператора  $\mathcal{B}$ , его структуру, а также соответствующие функциональные пространства. Пусть  $L_2(\Gamma)$  — гильбертово пространство комплекснозначных скалярных функций  $\{\zeta(x)\}$  с нормой

$$(\zeta, \zeta)_0 = \|\zeta\|_0^2 := \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma. \quad (2.3)$$

Тогда последнее условие (1.17) принимает вид

$$(\zeta, 1_{\Gamma})_0 = 0 \iff \zeta \in H := L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}, \quad (2.4)$$

где  $1_{\Gamma}$  — функция, заданная на  $\Gamma$  и тождественно равная единице.

Далее, пусть  $\vec{L}_2(\Gamma)$  — пространство комплекснозначных вектор-функций  $\{\vec{v}(x)\}$  со скалярным произведением

$$(\vec{v}, \vec{w}) := \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot \bar{\vec{w}} d\Gamma \quad (2.5)$$

и соответствующей нормой. Как известно (см., например, [2], с. 103),

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma), \quad \vec{G}(\Gamma) := \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \vec{u} = \nabla\varphi, \quad \int_{\partial\Gamma} \varphi d\Gamma = 0 \right\}, \quad (2.6)$$

$$\vec{J}_0(\Gamma) := \left\{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Gamma) : \operatorname{div} \vec{w} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad w_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma) \right\}, \quad (2.7)$$

где операции  $\operatorname{div} \vec{w}$  и  $w_n$  для элементов из  $\vec{L}_2(\Gamma)$  понимаются в смысле обобщенных функций (распределений), см. [2], с. 101–102.

Пусть  $P_0$  и  $P_G$  — ортопроекторы на  $\vec{J}_0(\Gamma)$  и  $\vec{G}(\Gamma)$  соответственно. Представляя  $\vec{v} \in \vec{L}_2(\Gamma)$  из (1.15)–(1.17) в виде

$$\vec{v} = \vec{w} + \nabla\varphi, \quad \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma), \quad \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma), \quad (2.8)$$

и прокируя (1.15) на  $\vec{J}_0(\Gamma)$  и  $\vec{G}(\Gamma)$  соответственно, приходим вместо (1.15)–(1.17) к задаче вида

$$\begin{pmatrix} fA_{11} & fA_{12} & -g^{1/2}A_{13} \\ fA_{21} & fA_{22} & -g^{1/2}A_{23} \\ -g^{1/2}A_{31} & -g^{1/2}A_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \nabla\varphi \\ \zeta \end{pmatrix} = i\omega \begin{pmatrix} \vec{w} \\ \nabla\varphi \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_{11}\vec{w} &:= P_0(\vec{w} \times \vec{e}_3), & A_{21}\vec{w} &:= P_G(\vec{w} \times \vec{e}_3), & \forall \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma); \\ A_{12}\nabla\varphi &:= P_0(\nabla\varphi \times \vec{e}_3), & A_{22}\nabla\varphi &:= P_G(\nabla\varphi \times \vec{e}_3), & \forall \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma); \\ A_{31}\vec{w} &:= \nabla h^{1/2} \cdot \vec{w}, & \forall \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma); & & A_{32}\nabla\varphi := \operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi); \\ A_{13}\zeta &:= P_0(h^{1/2}\nabla\zeta), & A_{23}\zeta &:= P_G(h^{1/2}\nabla\zeta); & A_{33}\zeta &:= 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коротко задачу (2.9) можно записать в виде

$$\mathcal{A}y = i\omega y, \quad y := (\vec{w}; \nabla\varphi; \zeta)^t, \quad (2.11)$$

где  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  — вектор-столбец искоемых элементов, а  $\mathcal{A}$  — операторная матрица из (2.9). Вводя еще операторную матрицу  $\mathcal{B}$  согласно соотношению

$$\mathcal{A} = i\mathcal{B}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad (2.12)$$

приходим вместо (2.11) к задаче (2.2), где теперь

$$\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \quad (2.13)$$

а элементы  $B_{ik}$  операторной матрицы  $\mathcal{B}$  связаны с элементами (2.10) соотношениями

$$iB_{kj} = A_{kj}, \quad k, j = 1, 2, 3. \quad (2.14)$$

Таким образом, далее изучается задача (2.2), где все обозначения уже введены.

### 3. СВОЙСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Перечислим сначала те свойства операторных коэффициентов  $A_{ik}$  из (2.10), которые уже доказаны в [1].

**Свойство 1.** Операторы  $A_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , являются ограниченными операторами, нормы которых не превышают единицы. Построенная по ним операторная матрица  $A := (A_{ij})_{i,j=1}^2$  является ограниченным оператором, действующим в  $\vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) = \vec{L}_2(\Gamma)$  и обладающим свойствами

$$\|A\| \leq 1, \quad A^* = -A. \quad \square \quad (3.1)$$

**Свойство 2.** Оператор  $A_{31} : \vec{J}_0(\Gamma) \rightarrow H$  ограничен. Оператор  $A_{13}$ , заданный на плотном множестве

$$\mathcal{D}(A_{13}) := \{\zeta \in H : \zeta(x) \in C^1(\bar{\Gamma})\} \subset H, \quad (3.2)$$

обладает свойством  $A_{13} \subset -A_{31}^*$ , а после замыкания по непрерывности с  $\mathcal{D}(A_{13})$  на все  $H$  — свойствами

$$\overline{A_{13}} = -A_{31}^*, \quad \mathcal{D}(\overline{A_{13}}) = H. \quad \square \quad (3.3)$$

Опираясь на это свойство, далее будем считать, что оператор  $A_{13}$  уже расширен на все  $H$  и для этого расширения сохраним то же обозначение.

**Свойство 3.** Оператор  $A_{23}$ , действующий по закону  $A_{23}\zeta := P_G(h^{1/2}\nabla\zeta)$  и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(A_{23}) := H_\Gamma^1 := \left\{ \zeta \in H : \|\zeta(x)\|_{1,0}^2 := \int_\Gamma |\nabla\zeta|^2 d\Gamma < \infty \right\}, \quad (3.4)$$

является замкнутым оператором. Оператор  $A_{32}$ , действующий по закону  $A_{32}\nabla\varphi := \operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi)$  и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(A_{32}) := \left\{ \nabla\varphi \in \vec{C}^1(\bar{\Gamma}) \subset \vec{G}(\Gamma) : \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\partial\Gamma} = 0 \right\}, \quad (3.5)$$

обладает свойством

$$A_{32} \subset -A_{23}^*. \quad (3.6)$$

После расширения на множество

$$\mathcal{D}(\tilde{A}_{32}) := \vec{G}(\Gamma) \cap \left\{ \nabla\varphi \in \vec{H}^1(\Gamma) : \frac{\partial\varphi}{\partial n} \Big|_{\partial\Gamma} = 0 \right\} \quad (3.7)$$

расширенный оператор  $\tilde{A}_{32}$  обладает свойствами

$$\tilde{A}_{32} = \overline{A}_{32} = -A_{23}^*. \quad \square \quad (3.8)$$

Далее  $A_{32}$  будем считать расширенным на множество (3.7) и обозначать этот оператор тем же символом.

**Свойство 4.** Оператор  $A_{32}$  допускает факторизацию

$$A_{32} = -B\nabla^{-1}, \quad (3.9)$$

где  $B : \mathcal{D}(B) \subset H \rightarrow H$  — оператор краевой задачи

$$B\varphi := -\Delta_h\varphi := -\operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi) = \psi \in H, \quad (3.10)$$

$$\mathcal{D}(B) := \left\{ \varphi \in H^2(\Gamma) : \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma) \right\}, \quad (3.11)$$

а  $\nabla^{-1}$  — оператор, обратный оператору  $\nabla$ , рассматриваемому как (ограниченный изометрический) оператор из  $H_\Gamma^1$  в  $\vec{G}(\Gamma)$ .

Оператор  $A_{32}$  имеет ограниченный и притом компактный обратный оператор  $A_{32}^{-1}$ , действующий из  $H$  в  $\vec{G}(\Gamma)$ .  $\square$

**Свойство 5.** Оператор  $A_{23}$  имеет ограниченный и притом компактный оператор  $A_{23}^{-1}$  действующий из  $\vec{G}(\Gamma)$  в  $H$ .  $\square$

Введем далее операторную матрицу

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & A_{23} \\ A_{32} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{H}_0 := \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \quad (3.12)$$

$$\mathcal{D}(A_0) := \mathcal{D}(A_{32}) \oplus \mathcal{D}(A_{23}) \subset \mathcal{H}_0, \quad (3.13)$$

где  $\mathcal{D}(A_{32})$  и  $\mathcal{D}(A_{23})$  заданы в (3.7) и (3.4).

**Свойство 6.** Оператор  $A_0$  является неограниченным кососопряженным оператором, т.е.

$$A_0^* = -A_0, \quad \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_0^*). \quad (3.14)$$

Он имеет нулевое ядро, а его спектр  $\sigma(A_0)$  дискретен,  $\sigma(A_0) = \sigma_d(A_0)$ , и расположен на мнимой оси симметрично относительно  $\mathbb{R}$ . При этом две его ветви собственных значений  $\lambda_k^\pm = \lambda_k^\pm(A_0)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k^\pm = \pm ic(A_0)k^{1/2}[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty), \quad c(A_0) := \left( \frac{1}{4\pi} \int_\Gamma h^{-1}(x) d\Gamma \right)^{-1/2}, \quad (3.15)$$

а отвечающие этим числам собственные элементы

$$(\nabla\varphi_k^\pm; \zeta_k^\pm)^t, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$



образуют ортогональный базис в пространстве  $\mathcal{H}_0 = \vec{G}(\Gamma) \oplus H$ .

Обратный оператор  $A_0^{-1}$  является компактным кососимметричным оператором, действующим в  $\mathcal{H}_0$ .  $\square$

Рассмотрим теперь свойства других операторных блоков в операторной матрице (2.9).

**Лемма 1.** *Спектр оператора  $A = (A_{kl})_{k,l=1}^2 : \vec{L}_2(\Gamma) \longrightarrow \vec{L}_2(\Gamma)$ ,  $\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma)$  состоит из двух точек  $\lambda = \pm i$ , являющихся бесконечнократными собственными значениями.*

**Доказательство.** Как следует из определений (2.10) элементов  $A_{kl}$ , представления  $\vec{v}$  в виде суммы ортогональных элементов (см. (2.8) и (2.6)), задача на собственные значения для операторной матрицы  $A$  равносильна уравнению

$$A\vec{v} := \vec{v} \times \vec{e}_3 = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2. \quad (3.17)$$

Отсюда в проекциях получаем систему уравнений

$$v_2 = \lambda v_1, \quad -v_1 = \lambda v_2,$$

откуда следует, что  $\lambda \neq 0$  и  $(1 + \lambda^2)v_1 = (1 + \lambda^2)v_2 = 0$ . Так как  $v_1$  и  $v_2$  не равны нулю одновременно, то  $1 + \lambda^2 = 0$ , т.е.  $\lambda = \pm i$ . Тогда собственные элементы задачи (3.17) имеют соответственно вид

$$v_1(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad v_1(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2).$$

Так как здесь  $v_1 = v_1(x_1, x_2)$  можно выбрать произвольным элементом из  $\vec{L}_2(\Gamma)$ , то каждое из собственных значений  $\lambda = \pm i$  бесконечнократно.

Далее, можно аналогичным образом убедиться, что при  $\lambda \neq \pm i$  и любом  $\vec{w} \in \vec{L}_2(\Gamma)$  уравнение

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{w} \quad (3.18)$$

однозначно разрешимо,

$$\vec{v} = -\frac{1}{(\lambda^2 + 1)} ((\lambda w_1 + w_2)\vec{e}_1 + (\lambda w_2 - w_1)\vec{e}_2), \quad (3.19)$$

т.е. существует ограниченный оператор  $(A - \lambda I)^{-1}$ , заданный на всем  $\vec{L}_2(\Gamma)$ .  $\square$

Введем в рассмотрение прямоугольные операторные матрицы

$$Q := \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix} : H \longrightarrow \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma), \quad Q^* := (A_{13}^*; A_{23}^*) : \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \longrightarrow H, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(A_{23}) = H_\Gamma^1 \subset H, \quad \mathcal{D}(Q^*) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \mathcal{D}(A_{23}^*), \quad (3.21)$$

а также операторную матрицу  $\mathcal{B}_g$  блочного вида,

$$\mathcal{B}_g := \begin{pmatrix} 0 & iQ \\ -iQ^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_g) = \mathcal{D}(Q^*) \oplus \mathcal{D}(Q). \quad (3.22)$$

**Теорема 1.** Оператор  $\mathcal{B}_g$ , заданный на области определения (3.22), является самосопряженным в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H$ . Его ядро  $\text{Ker } \mathcal{B}_g$  бесконечномерно и образует множество

$$\mathcal{H}_0 := \text{Ker } \mathcal{B}_g = \left\{ (\vec{w}; \nabla\varphi; 0)^t : \nabla\varphi = -(A_{23}^*)^{-1} A_{13}^* \vec{w}, \quad \forall \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma) \right\}. \quad (3.23)$$

Сужение  $\mathcal{B}_{g_1} := \mathcal{B}_g|_{(\text{Ker } \mathcal{B}_g)^\perp}$  оператора  $\mathcal{B}_g$  на ортогональное дополнение  $(\text{Ker } \mathcal{B}_g)^\perp =: \mathcal{H}_1$  в  $\mathcal{H}$  является неограниченным самосопряженным оператором с дискретным спектром. При этом собственные значения оператора  $\mathcal{B}_{g_1}$  расположены симметрично (относительно нуля на  $\mathbb{R}$ ) и образуют множество  $\{\lambda_k^\pm(\mathcal{B}_{g_1})_{k=1}^\infty\}$  конечнократных собственных значений, обладающих свойствами

$$-\lambda_k^- = \lambda_k^+ = \mu_k^{1/2}(B_0), \quad B_0 := Q^*Q = A_{13}^*A_{13} + A_{23}^*A_{23}, \quad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_{23}^*A_{23}). \quad (3.24)$$

Здесь  $B_0 : \mathcal{D}(B_0) \subset H \rightarrow H$  — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, имеющий компактный обратный. Собственные значения  $\{\mu_k(B_0)\}_{k=1}^\infty$  оператора  $B_0$  образуют дискретный спектр с предельной точкой  $\mu = +\infty$ . При этом имеют место свойства

$$\lambda_k(A_{23}^*A_{23}) \leq \mu_k(B_0) \leq \|A_{13}\|^2 + \lambda_k(A_{23}^*A_{23}), \quad (3.25)$$

а числа  $\lambda_k(A_{23}^*A_{23})$  имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_{23}^*A_{23}) = \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} h^{-1}(x) d\Gamma \right)^{-1} k[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.26)$$

Собственные элементы оператора  $\mathcal{B}_{g_1}$  образуют ортогональный базис в  $\mathcal{H}_1 = (\text{Ker } \mathcal{B}_g)^\perp$ .

**Доказательство.** Так как  $-iQ$  и  $iQ^*$  — взаимно сопряженные неограниченные операторы и объединение их областей значений есть все пространство  $\mathcal{H}$ , то  $\mathcal{B}_g$  — самосопряженный оператор в  $\mathcal{H}$ .

Условие  $\mathcal{B}_g y = 0$ ,  $y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_g) \subset \mathcal{H}$ , равносильно соотношениям

$$iA_{13}\zeta = 0, \quad iA_{23}\zeta = 0, \quad -i(A_{13}^* \vec{w} + A_{23}^* \nabla\varphi) = \vec{0}. \quad (3.27)$$

Поскольку  $A_{23}$  имеет обратный (см. свойство 5), то  $\zeta = 0$ , и первые два уравнения удовлетворяются. Далее, так как  $A_{23}^* = -A_{32}$  также имеет ограниченный обратный (свойство 4), то из последнего уравнения имеем

$$\nabla\varphi = -(A_{23}^*)^{-1} A_{13}^* \vec{w}, \quad \forall \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma).$$

Отсюда следует, что  $\text{Ker } \mathcal{B}_g$  имеет вид (3.23).

Рассмотрим теперь задачу  $\mathcal{B}_g y = \lambda y$  при  $\lambda \neq 0$ . Имеем

$$iA_{13}\zeta = \lambda \vec{w}, \quad iA_{23}\zeta = \lambda \nabla\varphi, \quad -i(A_{13}^* \vec{w} + A_{23}^* \nabla\varphi) = \lambda \zeta. \quad (3.28)$$

Выражая  $\vec{w}$  и  $\nabla\varphi$  из первых двух уравнений через  $\zeta$  и подставляя в третье, приходим к задаче

$$B_0 \zeta := (A_{13}^*A_{13} + A_{23}^*A_{23})\zeta = \lambda^2 \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(A_{23}^*A_{23}). \quad (3.29)$$

Заметим, что задача

$$A_{23}^* A_{23} \zeta = \mu \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(A_{23}^* A_{23}), \quad (3.30)$$

уже исследована в [1] при доказательстве теоремы 7 этой работы. Там, в частности, доказано, что эта задача имеет дискретный положительный спектр, а собственные значения  $\mu_k$  имеют асимптотическое поведение

$$\mu_k(A_{23}^* A_{23}) = \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} h^{-1}(x) d\Gamma \right)^{-1} k[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty). \quad (3.31)$$

Так как оператор  $A_{13}^* A_{13}$  ограничен и неотрицателен, то легко установить, что задача (3.29) также имеет дискретный спектр  $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ ,  $\mu_k = \mu_k(B_0)$ , и из максиминимального принципа следует, что имеют место неравенства (3.25). Из этих неравенств, в частности, получаем, что числа  $\mu_k(B_0)$  также имеют асимптотическое поведение (3.26).

По числам  $\lambda_k^{\pm} = \pm \sqrt{\mu_k(B_0)}$  и собственным элементам  $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$  оператора  $B_0$ , образующим ортогональный базис в  $H$  и энергетическом пространстве  $H_{B_0} = \mathcal{D}(A_{23}) = H_{\Gamma}^1$  оператора  $B_0$  собственные элементы задачи (3.28) при  $\lambda \neq 0$  строятся по формулам

$$\vec{w}_k^{\pm} = \pm i \mu_k^{-1/2} A_{13} \zeta_k, \quad \nabla \varphi_k^{\pm} = \pm i \mu_k^{-1/2} A_{23} \zeta_k, \quad \zeta_k^{\pm} = \zeta_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

Убедимся, что совокупность собственных элементов

$$y_k^{\pm} := (\vec{w}_k^{\pm}; \nabla \varphi_k^{\pm}; \zeta_k)^t, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.33)$$

отвечающих собственным значениям  $\lambda_k^{\pm} = \pm \sqrt{\mu_k}$ , образует ортогональный базис в  $\mathcal{H}_1$ . Свойство ортогональности этих элементов очевидно, так как  $\mathcal{B}_{g1}$  — самосопряженный оператор. Докажем, что система (3.33) полна в  $\mathcal{H}_1$ .

Пусть  $y_0 = (\vec{w}_0; \nabla \varphi_0; \zeta_0)^t$  — элемент из  $\mathcal{H}$ , ортогональный элементам (3.33). Тогда  $(y_0, y_k^{\pm})_{\mathcal{H}} = 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , т.е.

$$(\vec{w}_0, \vec{w}_k^{\pm}) + (\nabla \varphi_0, \nabla \varphi_k^{\pm}) + (\zeta_0, \zeta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.34)$$

Подставляя сюда выражения для  $\vec{w}_k^{\pm}$  и  $\nabla \varphi_k^{\pm}$  из (3.32), будем иметь соотношения

$$\pm i \mu_k^{-1/2} (\vec{w}_0, A_{13} \zeta_k) \pm i \mu_k^{-1/2} (\nabla \varphi_0, A_{23} \zeta_k) + (\zeta_0, \zeta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

т.е.

$$(\mp i \mu_k^{-1/2} A_{13}^* \vec{w}_0 + \zeta_0, \zeta_k) \mp i \mu_k^{-1/2} (\nabla \varphi_0, A_{23} \zeta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Так как здесь  $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$  — полная ортогональная система в  $H$  и  $H_{\Gamma}^1$ , то отсюда следует, что соотношение (3.35), во-первых, справедливо при любом  $\zeta \in \mathcal{D}(A_{23}) = H_{\Gamma}^1$ , а во-вторых, в силу плотности  $\mathcal{D}(A_{23})$  в  $H$  из этого соотношения следует, что  $\nabla \varphi_0 \in \mathcal{D}(A_{23}^*)$  и

$$\mp i \mu_k^{-1/2} (A_{13}^* \vec{w}_0 + A_{23}^* \nabla \varphi_0) + \zeta_0 = 0.$$

Из этих двух уравнений, отвечающих знакам „+” и „-”, получаем, что  $\zeta_0 = 0$ ,  $\nabla \varphi_0 = -(A_{23}^*)^{-1} A_{13}^* \vec{w}_0$ , т.е.  $y_0 = (\vec{w}_0; \nabla \varphi_0; \zeta_0)^t \in \text{Ker } \mathcal{B}_g$  (см. (3.23)). Теорема доказана.  $\square$

Как следует из теоремы 1, собственные значения  $\lambda_k^\pm(\mathcal{B}_{g_1})$  оператора  $\mathcal{B}_{g_1} = \mathcal{B}_g|_{(\text{Ker } \mathcal{B}_g)^\perp}$  выражаются через собственные значения  $\mu_k(B_0)$  оператора  $B_0 = Q^*Q$  по формулам (3.24), причем спектры операторов  $B_0$  и  $\mathcal{B}_{g_1}$  дискретны. Введем еще в рассмотрение оператор

$$C := QQ^* = \begin{pmatrix} A_{13}A_{13}^* & A_{13}A_{23}^* \\ A_{23}A_{13}^* & A_{23}A_{23}^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(C) := \mathcal{D}(A_{23}A_{13}^*) \oplus (A_{23}A_{23}^*). \quad (3.36)$$

**Теорема 2.** В области  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  спектры операторов  $\mathcal{B}_{g_1}$  и  $C$  совпадают.

**Доказательство.** Задачу на собственные значения (3.28) для оператора  $\mathcal{B}_g$  при  $\lambda \neq 0$ , т.е. для  $\mathcal{B}_{g_1}$ , можно записать в виде

$$iQ\zeta = \lambda\vec{v}, \quad -iQ^*\vec{v} = \lambda\zeta, \quad \vec{v} = \vec{w} + \nabla\varphi. \quad (3.37)$$

Так как  $\lambda \neq 0$ , то отсюда следует, что

$$C\vec{v} := QQ^*\vec{v} = \lambda^2\vec{v}, \quad \vec{v} \in \mathcal{D}(QQ^*) = \mathcal{D}(C). \quad (3.38)$$

С другой стороны, как установлено выше, собственные значения  $\lambda$  задачи (3.37) образуют дискретный спектр,  $\lambda = \lambda_k^\pm = \pm\sqrt{\mu_k(B_0)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Отсюда и из связи задач (3.37) и (3.38) следует, что задача (3.38) при  $\lambda \neq 0$  также имеет дискретный спектр, совпадающий со спектром оператора  $\mathcal{B}_{g_1}$ .

В самом деле, разыскивая резольвенту оператора  $\mathcal{B}_{g_1}$ , рассмотрим задачу

$$iQ\zeta - \lambda\vec{v} = \vec{v}_1, \quad -iQ^*\vec{v} - \lambda\zeta = \zeta_1, \quad (3.39)$$

где  $\vec{v}_1$  и  $\zeta_1$  — заданные элементы. Вычисления показывают, что решение задачи (3.39) существует тогда и только тогда, когда числа  $\lambda^2$  не совпадают с собственными значениями  $\mu = \mu_k(B_0)$ . При этом существуют ограниченные обратные операторы  $(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1}$  и  $(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1}$ , а решение задачи (3.39) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \zeta \end{pmatrix} = R_\lambda(\mathcal{B}_{g_1}) \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1} & iQ(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1} \\ -iQ^*(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1} & \lambda(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

где  $R_\lambda(\mathcal{B}_{g_1})$  — резольвента оператора  $\mathcal{B}_{g_1}$  при  $\lambda \neq 0$ .  $\square$

**Замечание 1.** При выводе формулы (3.40) были использованы соотношения

$$(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1}Q \subset Q(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1}, \quad (Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1}Q^* \subset Q^*(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1}, \quad (3.41)$$

показывающие, что левые части можно расширить по непрерывности на все пространство и эти расширения совпадают с правыми частями.  $\square$

Введем еще один оператор  $\mathcal{B}_f$  формулой

$$\mathcal{B}_f = \text{diag}(B; 0), \quad B := -iA, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_f) = \vec{L}_2(\Gamma) \oplus H, \quad (3.42)$$

где  $A = (A_{kl})_{k,l=1}^2 : \vec{L}_2(\Gamma) \rightarrow \vec{L}_2(\Gamma)$ .

Тогда исследуемая задача (2.2) принимает вид

$$(f\mathcal{B}_f + g^{1/2}\mathcal{B}_g)y = \omega y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_g) \subset \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \quad (3.43)$$

где  $f \in \mathbb{R}$  — параметр Кориолиса, а  $g > 0$  — ускорение силы тяжести. Свойства оператора  $\mathcal{B}_g$  уже изучены в лемме 1, а свойства оператора  $\mathcal{B}_f$  следуют из свойств оператора  $A$ , описанных в лемме 1. В частности, оператор  $B = B^*$  имеет в качестве спектра бесконечнократные собственные значения  $\lambda = \pm 1$ . Отметим, что если изучается задача о собственных колебаниях невращающейся жидкости, то в (3.43) следует положить  $f = 0$ .

#### 4. О СТРУКТУРЕ ЯДРА ОСНОВНОЙ ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим, опираясь на доказанные свойства операторных коэффициентов, спектральную задачу (3.43) при  $\omega = 0$ .

**Теорема 3.** Точка  $\omega = 0$  является бесконечнократным собственным значением задачи (3.43).

**Доказательство.** Если  $f = 0$ , то, очевидно, решения задачи (3.43) при  $\omega = 0$  принадлежат подпространству  $\text{Ker } \mathcal{B}_g = \mathcal{H}_0$  (см. (3.23)),  $\dim \mathcal{H}_0 = \infty$ .

Заметим теперь, что при  $f \neq 0$  и  $\omega = 0$  спектральная задача (3.43), как следует из исходных уравнений (1.7) — (1.9) при  $\vec{v}$  и  $\zeta$ , не зависящих от  $t$ , приводит к краевой задаче

$$-f(\vec{v} \times \vec{e}_3) + g^{1/2}h^{1/2}\nabla\zeta = 0, \quad \text{div}(h^{1/2}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Gamma), \quad (4.1)$$

$$v_n := \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (4.2)$$

Из второго уравнения (4.1) и первого уравнения (4.2) следует, что  $\vec{u} := h^{1/2}\vec{v} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ . Тогда из первого уравнения (4.1) получаем, что векторное поле

$$h\nabla\zeta = fg^{-1/2}(\vec{u} \times \vec{e}_3), \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma), \quad (4.3)$$

является потенциальным, так как  $\text{rot}(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \text{div } \vec{u} = 0$ . Значит,

$$h\nabla\zeta = \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma). \quad (4.4)$$

Для нахождения потенциала  $\varphi$  сформулируем краевую задачу, решения которой позволяют найти  $\zeta = \zeta(x)$ , а потому и  $\varphi = \varphi(x)$ . Вычисляя дивергенцию от левой части (4.4) и используя (4.3), приходим к уравнению

$$\text{div}(h\nabla\zeta) =: \Delta_h\zeta = fg^{-1/2}\text{div}(\vec{u} \times \vec{e}_3) \quad (\text{в } \Gamma). \quad (4.5)$$

Далее, из (4.3) следует, что

$$-fg^{-1/2}\vec{u} = h\nabla\zeta \times \vec{e}_3, \quad (4.6)$$

откуда с использованием (4.2) получаем, что

$$-fg^{-1/2}u_n = h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3) \cdot \vec{n} = h(\vec{e}_3 \times \vec{n}) \cdot \nabla\zeta =: h\vec{\tau} \cdot \nabla\zeta = h\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad (4.7)$$

т.е.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma) \implies \zeta = \text{const} \quad (\text{на } \partial\Gamma). \quad (4.8)$$

Таким образом, функция  $\zeta = \zeta(x)$  является решением задачи

$$\Delta_h \zeta = fg^{-1/2} \operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{e}_3) \quad (\text{в } \Gamma), \quad \zeta = \text{const} \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0. \quad (4.9)$$

Рассмотрим вместо (4.9) задачу

$$\Delta_h \tilde{\zeta} = fg^{-1/2} \operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{e}_3) \quad (\text{в } \Gamma), \quad \tilde{\zeta} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma). \quad (4.10)$$

Нетрудно видеть, что решения задач (4.9) и (4.10) отличаются лишь на константу:

$$\zeta = \tilde{\zeta} - |\Gamma|^{-1} \int_{\Gamma} \tilde{\zeta} d\Gamma =: P_H \tilde{\zeta}, \quad (4.11)$$

где  $P_H$  — ортопроектор из  $L_2(\Gamma)$  на  $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$ .

Покажем, что задача (4.10) имеет единственное обобщенное решение  $\tilde{\zeta} \in H_0^1(\Gamma)$ , а потому и  $\zeta$  определяется однозначно по любому полю  $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ . Введем в  $H_0^1(\Gamma)$  норму по закону

$$\|\tilde{\zeta}\|_{1,\Gamma}^2 := \int_{\Gamma} h(x) |\nabla \tilde{\zeta}|^2 d\Gamma, \quad \tilde{\zeta} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma). \quad (4.12)$$

Так как для  $h = h(x)$  выполнено условие (1.5), то норма (4.12) эквивалентна стандартной норме пространства  $H^1(\Gamma)$ ,

$$\|\tilde{\zeta}\|_{H^1(\Gamma)}^2 := \int_{\Gamma} (|\nabla \tilde{\zeta}|^2 + |\tilde{\zeta}|^2) d\Gamma. \quad (4.13)$$

Легко проверить, опираясь на формулу Грина для эллиптического оператора  $\Delta_h = \operatorname{div}(h\nabla \dots)$ , а также на формулу Гаусса–Остроградского, что обобщенное решение задачи (4.10) определяется тождеством

$$(\tilde{\zeta}, \psi)_{1,\Gamma} = fg^{-1/2} \int_{\Gamma} (\vec{u} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \psi d\Gamma, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Gamma). \quad (4.14)$$

Так как правая часть (4.14) при любом  $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$  является линейным функционалом в пространстве  $H_0^1(\Gamma)$  с нормой (4.12), то задача (4.10) имеет единственное решение

$$\tilde{\zeta} =: fg^{-1/2} V \vec{u}, \quad V : \vec{J}_0(\Gamma) \longrightarrow H_0^1(\Gamma), \quad (4.15)$$

из пространства  $H_0^1(\Gamma)$ , а потому задача (4.9) имеет единственное решение  $\zeta = P_H \tilde{\zeta} \in H^1(\Gamma)$  при любом  $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ .

Эти рассуждения показывают, что  $\operatorname{Ker} \mathcal{B}$  имеет вид

$$\operatorname{Ker} \mathcal{B} = \operatorname{Ker}(f\mathcal{B}_f + g^{1/2}\mathcal{B}_g) = \left\{ y = (\vec{w}; \nabla\varphi; \zeta) : \vec{v} = \vec{w} + \nabla\varphi = h^{-1/2}\vec{u}, \quad \zeta = P_H \tilde{\zeta}, \right. \\ \left. \tilde{\zeta} = fg^{-1/2} V \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma) \right\}, \quad \dim \operatorname{Ker} \mathcal{B} = \infty. \quad (4.16)$$

Отметим еще, что при  $f = 0$  из (4.14) следует, что  $\zeta = 0$  и  $\operatorname{Ker} \mathcal{B} = \operatorname{Ker} \mathcal{B}_g = \mathcal{H}_0$ .

□

## 5. ОСНОВНАЯ ОПЕРАТОРНАЯ МАТРИЦА ПРИ ПОСТОЯННОЙ И ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЕ ЖИДКОСТИ

Рассмотрим теперь свойства спектра задачи (3.43) при  $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Перепишем эту задачу в виде

$$fB\vec{v} + ig^{1/2}Q\zeta = \omega\vec{v}, \quad -ig^{1/2}Q^*\vec{v} = \omega\zeta. \quad (5.1)$$

Так как  $\omega \neq 0$ , то отсюда, исключая  $\zeta$ , приходим к спектральной задаче

$$L(\omega)\vec{v} := (gC + \omega fB - \omega^2 I)\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \in \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(QQ^*) \subset \vec{L}_2(\Gamma). \quad (5.2)$$

Здесь  $B = -iA = B^*$ ,  $\sigma(B) = \{-1; 1\}$ , а  $C = QQ^*$  — неограниченный неотрицательный оператор. Из определения оператора  $C$  следует, что

$$\text{Ker } C = \text{Ker } Q^* = \{ \vec{v} = (\vec{w}; \nabla\varphi)^t : \vec{w} + \nabla\varphi = h^{-1/2}\vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma) \}, \quad (5.3)$$

а из доказательства теоремы 2 видно, что ненулевые собственные значения оператора  $C$  совпадают с собственными значениями оператора  $B_0 = Q^*Q$ , т.е.

$$\mu_k(B_0) = \mu_k(Q^*Q) = \mu_k(QQ^*) = \mu_k(C), \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Поэтому они, как и  $\mu_k(B_0)$ , имеют асимптотическое поведение (3.26):

$$\mu_k(C) = \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} h^{-1}(x) d\Gamma \right)^{-1} k[1 + o(1)] \quad (k \rightarrow \infty). \quad (5.5)$$

Отсюда следует, что сужение оператора  $C$  на ортогональное дополнение к ядру  $\text{Ker } C$  является неограниченным положительно определенным оператором с дискретным спектром, а обратный к нему оператор является компактным положительно определенным оператором класса  $\mathfrak{S}_p$  при  $p > 1$  (определения классов  $\mathfrak{S}_p$  см. в [5], гл. 2,3).

Введем в рассмотрение ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{H}_0 \oplus \vec{H}_1, \quad \vec{H}_0 := \text{Ker } C, \quad \vec{H}_1 := (\text{Ker } C)^\perp = \vec{L}_2(\Gamma) \ominus \vec{H}_0. \quad (5.6)$$

Очевидно, оператор  $C$  в этом ортогональном разложении имеет вид

$$C = \text{diag}(0; C_1), \quad C_1 := P_1 C P_1, \quad (5.7)$$

где  $P_1$  — ортопроектор на  $\vec{H}_1$ . Тогда  $C_1$  — неограниченный положительно определенный оператор, действующий в  $\vec{H}_1$  на области определения  $\mathcal{D}(C_1)$ , плотной в  $\vec{H}_1$ , и имеющий компактный положительный обратный оператор  $C_1^{-1}$ . Собственные значения  $\lambda_k(C_1)$  оператора  $C_1$  имеют асимптотическое поведение (5.5).

С использованием ортопроекторов  $P_0$  и  $P_1$  на подпространства  $\vec{H}_0$  и  $\vec{H}_1$  задачу (5.2) можно переписать в виде двух уравнений

$$f(B_{00}\vec{v}_0 + B_{01}\vec{v}_1) = \omega\vec{v}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = P_0\vec{v} + P_1\vec{v}, \quad (5.8)$$

$$gC_1\vec{v}_1 + \omega f(B_{10}\vec{v}_0 + B_{11}\vec{v}_1) - \omega^2\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad B_{jk} := P_j B P_k, \quad k = 0, 1. \quad (5.9)$$

Введем в (5.9) новый искомый элемент соотношением

$$g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_1 =: \omega\vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \in \mathcal{D}(C_1^{1/2}), \quad \omega \neq 0. \quad (5.10)$$

Тогда задача (5.8)–(5.10) в векторно-матричной форме приобретает вид

$$\begin{pmatrix} f \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{pmatrix} & g^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{1/2} \end{pmatrix} \\ g^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{1/2} \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

в точности такой же, который уже встречался при исследовании колебаний идеальной жидкости в произвольном равномерно вращающемся сосуде (см. [2], с. 217). Поэтому для исследования задачи (5.11), а также задач (5.1), (5.2) при  $\omega \neq 0$ , можно применить, в частности, те же методы, которые были использованы в [2].

Однако задача (5.11) имеет отличия от соответствующей спектральной задачи из [2], на которых сейчас следует остановиться более подробно. С этой целью изучим свойства операторов  $B_{jk}$  из (5.11).

Отметим сначала, что в силу леммы 1 и связи  $B = -iA$  имеем, как уже упоминалось выше, свойства

$$B = B^* = (B_{jk})_{j,k=0}^1, \quad \sigma(B) = \{-1; 1\}, \quad (5.12)$$

причем числа  $-1$  и  $1$  являются бесконечнократными собственными значениями. Значит,  $\|B\| = 1$ ,  $\|B_{jk}\| \leq 1$ ,  $j, k = 0, 1$ .

**Лемма 2.** *Подпространство  $\vec{H}_1$  имеет следующее описание*

$$\vec{H}_1 = \{h^{1/2}\nabla\varphi : \forall \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma)\}. \quad (5.13)$$

При  $h = h_0 = \text{const} > 0$  имеем

$$\vec{H}_0 = \vec{J}_0(\Gamma), \quad \vec{H}_1 = \vec{G}(\Gamma). \quad (5.14)$$

**Доказательство.** Как следует из (5.3)

$$\text{Ker } C = \vec{H}_0 = \{h^{-1/2}\vec{u} : \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)\}. \quad (5.15)$$

Так как  $h^{1/2}\nabla\varphi \perp h^{-1/2}\vec{u}$  при  $\nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma)$  и  $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ , то  $\vec{H}_1$  имеет описание (5.13). Наконец, при  $h = h_0 > 0$  из (5.3) следует, что  $\vec{H}_0 = \vec{J}_0(\Gamma)$  и потому  $\vec{H}_1 = \vec{G}(\Gamma)$ .  $\square$

Изучим, опираясь на лемму 2, свойства операторов  $B_{00}$  и  $B_{11}$  или, что равносильно, операторов  $A_{00}$  и  $A_{11}$ ,  $A_{kk} = iB_{kk}$ ,  $k = 0, 1$ .

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о структуре и свойствах оператора  $B = -iA$  в ортогональных разложениях пространства  $\vec{L}_2(\Gamma)$ , отвечающих постоянной и переменной глубине жидкости  $h = h(x_1, x_2)$ . Сначала используем ортогональное разложение (см., например, [2], с. 103)

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}_1(\Gamma) \oplus \vec{G}_0(\Gamma), \quad (5.16)$$

$$\vec{G}_1(\Gamma) = \{\vec{v} = \nabla\psi : \Delta\psi = 0 \text{ (в } \Gamma)\}, \quad \vec{G}_0(\Gamma) := \{\vec{w} = \nabla\varphi : \varphi = 0 \text{ (на } \partial\Gamma)\}. \quad (5.17)$$

**Теорема 4.** *Если  $h(x_1, x_2) \equiv h_0 > 0$ , то в ортогональном разложении (5.16) пространства  $\vec{L}_2(\Gamma)$  оператор  $B$  представим в виде операторной матрицы*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{22} & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = B_{22}^*, \quad B_{13}^* = B_{31}, \quad (5.18)$$



$$\sigma(B_{22}) = \{1; -1\}, \quad \sigma \begin{pmatrix} 0 & B_{13} \\ B_{31} & 0 \end{pmatrix} = \{-1; 1\}, \quad (5.19)$$

причем точки  $\pm 1$  являются бесконечнократными собственными значениями как первого, так и второго оператора из (5.19)

**Доказательство.**  $1^0$ . Пусть  $\vec{v} = \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ . Тогда

$$B\vec{v} = B\vec{u} = -i(\vec{u} \times \vec{e}_3) = -i(\vec{e}_1 u_2 - \vec{e}_2 u_1).$$

Так как  $\text{rot}(\vec{u} \times \vec{e}_3) = -\vec{e}_3 \text{div} \vec{u} = 0$ , то  $B\vec{v} = B\vec{u}$  — потенциальный вектор, т.е.  $-i(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \nabla \tilde{\varphi} \in \vec{G}(\Gamma)$ . Отсюда следует, что  $\vec{u} = -i\nabla \tilde{\varphi} \times \vec{e}_3$ . Тогда

$$u_n = -i(\nabla \tilde{\varphi} \times \vec{e}_3) \cdot \vec{n} = -i(\vec{e}_3 \times \vec{n}) \cdot \nabla \tilde{\varphi} = -i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} = 0 \implies \tilde{\varphi} = \text{const} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma),$$

т.е.  $\nabla \tilde{\varphi} \in \vec{G}_0(\Gamma)$ .

Это означает, что при  $\vec{v} = \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$  область значений оператора  $B$  содержится в  $\vec{G}_0(\Gamma)$  и потому проекции  $B\vec{u}$  на  $\vec{J}_0(\Gamma)$  и  $\vec{G}_1(\Gamma)$  равны нулю. Значит, в матричном представлении оператора  $B$ , отвечающем ортогональному разложению (5.16), т.е. в представлении

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.20)$$

имеем

$$B_{11} = B_{21} = 0. \quad (5.21)$$

$2^0$ . Пусть теперь  $\vec{v} = \nabla \varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma)$ . Тогда

$$B\vec{v} = -i\nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3 = -i \left\{ \vec{e}_1 \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2} - \vec{e}_2 \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1} \right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{div}(\nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3) = 0 \quad (\text{в } \Gamma), \quad (\nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3) \cdot \vec{n} = (\vec{e}_3 \times \vec{n}) \cdot \nabla \varphi^0 = \frac{\partial \varphi^0}{\partial \tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad (5.22)$$

и потому

$$B\vec{v} = -i\nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3 \in \vec{J}_0(\Gamma).$$

Поэтому

$$B_{23} = B_{33} = 0. \quad (5.23)$$

$3^0$ . Если  $\vec{v} = \nabla \varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma)$ , то  $\Delta \varphi^1 = 0$  (в  $\Gamma$ ) (см. (5.17)). Тогда снова

$$B\vec{v} = -i(\nabla \varphi^1 \times \vec{e}_3) = -i \left\{ \vec{e}_1 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_2} - \vec{e}_2 \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_1} \right\} \quad (5.24)$$

и потому

$$\text{rot}(B\vec{v}) = -i \text{rot}(\nabla \varphi^1 \times \vec{e}_3) = i\vec{e}_3 \Delta \varphi^1 = \vec{0},$$

т.е.  $B\vec{v}$  — потенциальный вектор:

$$-i\nabla \varphi^1 \times \vec{e}_3 = \nabla \psi^1. \quad (5.25)$$

Отсюда и из (5.24) непосредственно выводим, что

$$\Delta\psi^1 = -i \left( \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varphi^1}{\partial x_2 \partial x_1} \right) = 0 \quad (\text{в } \Gamma),$$

т.е.  $B\vec{v} \in \vec{G}_1(\Gamma)$ . Значит,

$$B_{12} = B_{32} = 0. \quad (5.26)$$

Таким образом, ввиду свойств (5.21), (5.23), (5.26) матрица (5.20) имеет вид (5.18). Далее, так как  $B = B^*$ , то  $B_{22} = B_{22}^*$  и  $B_{13}^* = B_{31}$ . Проверим теперь свойства (5.19).

4<sup>0</sup>. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора  $B_{22}$ . Имеем

$$B_{22}\nabla\varphi^1 = \lambda\nabla\varphi^1 \iff -i(\nabla\varphi^1 \times \vec{e}_3) = \lambda\nabla\varphi^1, \quad \nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma). \quad (5.27)$$

Так как  $\sigma(B) = \{-1; 1\}$  (см. лемму 1), то в силу матричной структуры (5.18) оператора  $B$  спектр оператора  $B_{22}$  принадлежит множеству  $\{-1; 1\}$ . Проверим, что оба этих числа входят в спектр оператора  $B_{22}$ . При  $\lambda = 1$  из (5.27) получаем

$$-i\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1}, \quad i\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} \implies \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1} + i\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi^1(x_1, x_2) = f(x_1 + ix_2), \quad (5.28)$$

т.е. является произвольной аналитической функцией переменной  $z = x_1 + ix_2$ , а потому число  $\lambda = 1$  является бесконечнократным собственным значением  $B_{22}$ .

Аналогичные выкладки при  $\lambda = -1$  показывают, что в этом случае  $\varphi^1(x_1, x_2) = f(x_1 - ix_2) = f(\bar{z})$ , т.е. является произвольной антианалитической функцией.

5<sup>0</sup>. Рассмотрим теперь для элементов вида  $(\vec{u}; \nabla\varphi^0)^t \in \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}_0(\Gamma)$  задачу на собственные значения для операторной матрицы из (5.19), т.е. задачу

$$B_{13}\nabla\varphi^0 = \lambda\vec{u}, \quad B_{31}\vec{u} = \lambda\nabla\varphi^0. \quad (5.29)$$

Здесь снова в качестве собственных значений могут быть лишь числа  $\pm 1$ . В самом деле, при  $\lambda = 1$  имеем уравнения

$$-i(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = \vec{u}, \quad -i(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \nabla\varphi^0. \quad (5.30)$$

Отсюда следует, что

$$u_1 = -i\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_2}, \quad u_2 = i\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_1}, \quad \forall \varphi^0 \in H_0^1(\Gamma), \quad (5.31)$$

т.е.  $\lambda = 1$  является бесконечнократным собственным значением задачи (5.29). При этом условия  $\operatorname{div}\vec{u} = 0$  (в  $\Gamma$ ) и  $u_n = 0$  (на  $\partial\Gamma$ ) для функции  $\vec{u} = \sum_{k=1}^2 u_k \vec{e}_k \in \vec{J}_0(\Gamma)$  с компонентами (5.31) выполнены автоматически.

Аналогично разбирается случай  $\lambda = -1$ . Теорема доказана.  $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению матричной структуры оператора  $B = -iA$  при переменной глубине жидкости  $h = h(x_1, x_2)$ . Предварительно построим ортогональное разложение пространства  $\vec{L}_2(\Gamma)$  на три подпространства, обобщающее разложение (5.16) на случай переменной  $h = h(x_1, x_2)$ .

Из леммы 2 и из (5.3) следует, что при  $h \neq h_0$  имеет место ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma; h) \oplus \vec{G}(\Gamma; h), \quad (5.32)$$

$$\vec{J}_0(\Gamma; h) := \text{Ker } C = \left\{ h^{-1/2} \vec{u} : \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma) \right\}, \quad (5.33)$$

$$\vec{G}(\Gamma; h) := \vec{H}_1 = \left\{ h^{1/2} \nabla \varphi : \nabla \varphi \in \vec{G}(\Gamma), \int_{\partial \Gamma} \varphi ds = 0 \right\}. \quad (5.34)$$

Введем подпространство

$$\vec{G}_0(\Gamma; h) := \{ h^{1/2} \nabla \psi : \psi = 0 \text{ на } \partial \Gamma \} \subset \vec{G}(\Gamma; h) \quad (5.35)$$

и найдем ортогональное дополнение  $\vec{G}_1(\Gamma; h)$  к  $\vec{G}_0(\Gamma; h)$  в  $\vec{G}(\Gamma; h)$ .

**Лемма 3.** *Имеет место ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma; h) \oplus \vec{G}_1(\Gamma; h) \oplus \vec{G}_0(\Gamma; h), \quad (5.36)$$

$$\vec{G}_1(\Gamma; h) := \left\{ h^{1/2} \nabla \varphi^1 : \Delta_h \varphi^1 := \text{div}(h \nabla \varphi^1) = 0 \text{ в } \Gamma, \int_{\partial \Gamma} \varphi^1 ds = 0 \right\}. \quad (5.37)$$

**Доказательство.** Пусть  $h^{1/2} \nabla \psi$  и  $h^{1/2} \nabla \varphi^1$  — гладкие элементы из  $\vec{G}_0(\Gamma; h)$  и  $\vec{G}_1(\Gamma; h)$  соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} (h^{1/2} \nabla \psi, h^{1/2} \nabla \varphi^1) &= \int_{\Gamma} h \nabla \psi \cdot \overline{\nabla \varphi^1} d\Gamma = - \int_{\Gamma} \text{div}(\psi h \overline{\nabla \varphi^1}) d\Gamma + \int_{\Gamma} \text{div}(h \overline{\nabla \varphi^1}) \psi d\Gamma = \\ &= - \int_{\partial \Gamma} \psi h \overline{\nabla \varphi^1} \cdot \vec{n} ds + \int_{\Gamma} \psi \overline{\Delta_h \varphi^1} d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi \overline{\Delta_h \varphi^1} d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Так как здесь  $\psi$  — произвольный гладкий элемент из пространства  $H_0^1(\Gamma)$ , плотного в  $L_2(\Gamma)$ , то отсюда следует, что  $\varphi^1$  является  $h$ -гармонической функцией, т.е.  $\Delta_h \varphi^1 = 0$ .

Для произвольных (негладких) элементов из  $\vec{G}_1(\Gamma; h)$  свойство ортогональности устанавливается аналогично, если операцию  $\Delta_h \varphi^1$  понимать в смысле обобщенных функций (распределений).

Теперь ортогональное разложение (5.36) следует из (5.32) и доказанного разложения

$$\vec{G}(\Gamma; h) := \vec{G}_1(\Gamma; h) \oplus \vec{G}_0(\Gamma; h). \quad \square \quad (5.38)$$

Заметим, что при  $h(x_1, x_2) \equiv h_0 > 0$  ортогональное разложение (5.36) совпадает с разложением (5.16). Элементы из  $\vec{G}(\Gamma; h)$  можно называть  $h$ -потенциальными элементами с потенциалами  $\varphi(x_1, x_2)$ , образующими пространство  $H^1(\Gamma; h)$  с нормой

$$\|\varphi\|_{H^1(\Gamma; h)}^2 := \int_{\Gamma} h |\nabla \varphi|^2 d\Gamma < \infty, \quad \int_{\partial \Gamma} \varphi d\Gamma = 0, \quad (5.39)$$

эквивалентной в силу (1.5) стандартной норме пространства С.Л. Соболева  $H^1(\Gamma)$ .

Введем в рассмотрение матричное представление оператора  $B$ ,  $B\vec{u} := -i(\vec{u} \times \vec{e}_3)$ , в ортогональное разложение (5.36) пространства  $\vec{L}_2(\Gamma)$ , отвечающем переменной глубине жидкости  $h = h(x_1, x_2)$ . Будем иметь

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Введем также диагональную матрицу

$$\hat{h} := \text{diag}(h; h^{-1}; h^{-1}), \quad (5.41)$$

отвечающую разложению (5.36). Нетрудно видеть, что в силу условия (1.5) матрица  $\hat{h}$  является положительно определенным ограниченным оператором, действующим в  $\vec{L}_2(\Gamma)$ , причем обратный оператор  $\hat{h}^{-1}$  обладает этими же свойствами.

**Теорема 5.** *В ортогональном разложении (5.36) матрица  $B$  имеет антидиагональный вид и обладает свойствами (5.18), (5.19), т.е. такими же, как и в случае  $h(x_1, x_2) \equiv h_0 > 0$ .*

**Доказательство.** Установим сначала, что матрица

$$\tilde{B} := B\hat{h} = \begin{pmatrix} B_{11}h & B_{12}h^{-1} & B_{13}h^{-1} \\ B_{21}h & B_{22}h^{-1} & B_{23}h^{-1} \\ B_{31}h & B_{32}h^{-1} & B_{33}h^{-1} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & \tilde{B}_{13} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & \tilde{B}_{23} \\ \tilde{B}_{31} & \tilde{B}_{32} & \tilde{B}_{33} \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

является антидиагональной.

Пусть  $\vec{v} = h^{-1/2}\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma; h)$ . Тогда  $\hat{h}\vec{v} = h^{1/2}\vec{u}$  и потому

$$\tilde{B}\vec{v} = (B\hat{h})\vec{v} = -i(\hat{h}\vec{v} \times \vec{e}_3) = -ih^{1/2}\vec{u} \times \vec{e}_3 = h^{1/2}\nabla\varphi^0 \in \vec{G}(\Gamma; h). \quad (5.43)$$

В самом деле, так как  $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ , то  $-i\vec{u} \times \vec{e}_3 = \nabla\varphi^0$ ,  $\nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma)$ . Этот факт уже установлен при доказательстве теоремы 4 в п. 1<sup>0</sup>. Приведенное свойство означает, что выполнены свойства

$$\tilde{B}_{11}\vec{v} = 0, \quad \tilde{B}_{21}\vec{v} = 0, \quad \tilde{B}_{31}\vec{v} \in \vec{G}_0(\Gamma; h), \quad \forall \vec{v} \in \vec{J}_0(\Gamma; h), \quad (5.44)$$

т.е.  $\tilde{B}_{11} = \tilde{B}_{21} = 0$ .

Далее, пусть  $\vec{w} = h^{1/2}\nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma; h)$ . Тогда  $\hat{h}\vec{w} = h^{-1/2}\nabla\varphi^0$  и

$$\tilde{B}\vec{w} = (B\hat{h})\vec{w} = -ih^{-1/2}(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = h^{-1/2}\vec{u}, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma). \quad (5.45)$$

Действительно, свойство  $-i(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$  установлено при доказательстве п. 2 теоремы 4 (см. (5.22)). Отсюда имеем свойства  $\tilde{B}_{23} = \tilde{B}_{22} = 0$ .

Из доказанных соотношений и связей (5.42) между матричными элементами матриц  $\tilde{B}$  и  $B$  получаем, что для матрицы  $B$  из (5.40) выполнены свойства

$$B_{11} = B_{21} = B_{23} = B_{33} = 0. \quad (5.46)$$

Так как матрица  $B$  является самосопряженным оператором, то отсюда имеем также свойства

$$B_{12}(= B_{21}^*) = B_{32}(= B_{23}^*) = 0, \quad (5.47)$$

т.е.  $B$  действительно имеет антидиагональный вид (5.18) и при переменной глубине жидкости.

Убедимся теперь, что последнее утверждение теоремы 4 имеет место и при  $h(x_1, x_2) \not\equiv h_0 > 0$ .

Пусть  $\vec{v} = h^{1/2} \nabla \varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma; h)$ . Тогда задача  $B_{22} \vec{v} = \lambda \vec{v}$  приводит к соотношению

$$-ih^{1/2} \nabla \varphi^1 \times \vec{e}_3 = \lambda h^{1/2} \nabla \varphi^1 \iff -i \nabla \varphi^1 \times \vec{e}_3 = \lambda \nabla \varphi^1. \quad (5.48)$$

Однако вторая задача (5.48) уже разобрана в п. 4<sup>0</sup> доказательства теоремы 4 (см. (5.27)), и там установлено, что числа  $\lambda = \pm 1$  являются бесконечнократными собственными значениями.

Аналогичное рассмотрение задачи

$$B_{31} \vec{v} = \lambda \vec{w}, \quad B_{13} \vec{w} = \lambda \vec{v}, \quad \vec{v} = h^{-1/2} \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma; h), \quad \vec{w} = h^{1/2} \nabla \varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma; h), \quad (5.49)$$

приводит к уравнениям

$$-ih^{-1/2} \vec{u} \times \vec{e}_3 = \lambda h^{1/2} \nabla \varphi^0, \quad -ih^{1/2} \nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3 = \lambda h^{-1/2} \vec{u}, \quad (5.50)$$

из которых следует, что

$$h^{1/2} (\nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3) = \lambda^2 h^{1/2} (\nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3), \quad \nabla \varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma), \quad (5.51)$$

а потому числа  $\lambda = \pm 1$  являются бесконечнократными собственными значениями, а собственные элементы имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} h^{-1/2} \vec{u} \\ \mp ih^{-1/2} \vec{u} \times \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp ih^{1/2} \nabla \varphi^0 \times \vec{e}_3 \\ h^{1/2} \nabla \varphi^0 \end{pmatrix}, \quad \forall \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma) \iff \forall \nabla \varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma). \quad (5.52)$$

Теорема доказана.  $\square$

Следствием из теорем 4 и 5 является такой важный для дальнейшего факт: как при постоянной, так и при переменной глубине жидкости  $h(x_1, x_2)$  матричное представление оператора  $B = -iA$  в ортогональном разложении

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{H}_0 \oplus \vec{H}_1 = \vec{J}_0(\Gamma; h) \oplus \vec{G}(\Gamma; h), \quad \vec{H}_0 \in \text{Ker } C, \quad (5.53)$$

имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{01} \\ B_{10} & B_1 \end{pmatrix}, \quad (5.54)$$

$$B_{01} = (0; B_{13}), \quad B_{10} = B_{01}^*, \quad B_1 = \text{diag}(B_{22}; 0), \quad (5.55)$$

где  $B_{13}$ ,  $B_{31}$  и  $B_{22}$  — элементы антидиагональной матрицы (5.18), отвечающей как случаю  $h \equiv h_0$ , так и случаю  $h \not\equiv h_0$ .

Такая структура операторной матрицы  $B$  ниже будет существенно использована при рассмотрении свойств решений изучаемой спектральной задачи.

## 6. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О СПЕКТРЕ

Вернемся к изучению спектральной задачи (5.11) при  $\omega \neq 0$  и учтем (5.54). Возникает проблема

$$\begin{pmatrix} f \begin{pmatrix} 0 & B_{01} \\ B_{10} & B_1 \end{pmatrix} & g^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{1/2} \end{pmatrix} \\ g^{1/2} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{1/2} \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

$$\vec{v}_0 = h^{-1/2}\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma; h), \quad \vec{v}_1 = h^{1/2}\nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma; h); \quad \vec{v}_2 = h^{1/2}\nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma; h), \quad (6.2)$$

которая приводит к системе уравнений

$$fB_{01}\vec{v}_1 = \omega\vec{v}_0, \quad fB_{10}\vec{v}_0 + fB_1\vec{v}_1 + g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_2 = \omega\vec{v}_1, \quad g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_1 = \omega\vec{v}_2. \quad (6.3)$$

Исключая из этой системы  $\vec{v}_0$  и  $\vec{v}_2$ , приходим к спектральной задаче для нахождения элементов  $\vec{v}_1 = h^{1/2}\nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma; h)$ :

$$gC_1\vec{v}_1 + \omega fB_1\vec{v}_1 + f^2B_{10}B_{01}\vec{v}_1 - \omega^2\vec{v}_1 = 0. \quad (6.4)$$

Здесь  $C_1$  — неограниченный положительно определенный оператор, имеющий компактный обратный оператор и степенную асимптотику собственных значений (см. (5.5)–(5.7)), а операторы  $B_1$  и  $B_{01}$ ,  $B_{10} = B_{01}^*$  ограничены.

Осуществим в (6.4) замену искомых элементов по формуле

$$g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_1 = \vec{\eta} (= \omega\vec{v}_2) \quad (6.5)$$

и подействуем слева (ограниченным) оператором  $g^{-1/2}C_1^{-1/2}$ . Тогда возникает задача

$$\left( I + f^2g^{-1}T + \omega fg^{-1}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2} - \omega^2g^{-1}C_1^{-1} \right) \vec{\eta} = \vec{0}, \quad T := C_1^{-1/2}B_{10}B_{01}C_1^{-1/2}, \quad (6.6)$$

где все операторные коэффициенты, кроме единичного, компактные и самосопряженные операторы, а потому квадратный (относительно  $\omega$ ) операторный пучок также самосопряженный.

Линеаризуем задачу (6.6) по параметру  $\omega$ , введя еще одну замену

$$\vec{\xi} = \omega g^{-1/2}C_1^{-1/2}\vec{\eta}. \quad (6.7)$$

Это приводит к уравнению

$$\begin{pmatrix} I + f^2g^{-1}T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} - \omega \begin{pmatrix} -fg^{-1}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2} & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

в пространстве  $(\vec{G}_1(\Gamma; h))^2$ .

**Теорема 6.** *Задача (6.8) имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей положительных и отрицательных собственных значений  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  с предельными точками  $\pm\infty$  и асимптотическим поведением*

$$\omega_k^\pm = \pm g^{1/2}\lambda_k(C_1^{1/2})[1 + o(1)] =$$

$$= \pm [g(4\pi)^{-1} \int_{\Gamma} h^{-1}(x) d\Gamma]^{-1} k^{1/2} [1 + o(1)], \quad k \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

**Доказательство.** Оно основано на теореме А.С. Маркуса и В.И. Мацаева из [7], [8]. Действительно, так как  $C_1^{-1}$  имеет степенную асимптотику собственных значений, то вторая операторная матрица из (6.8), допускающая представление

$$\begin{pmatrix} -fg^{-1}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2} & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -fg^{-1/2}C_1^{-1/2}B_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

является слабым возмущением самосопряженного оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

поскольку  $C_1^{-1/2}B_1$  — компактный оператор. Далее, оператор (6.11) имеет две ветви собственных значений  $\{\pm g^{-1/2}\lambda_k(C_1^{-1/2})\}_{k=1}^{\infty}$ , которые также имеют степенную асимптотику, как это следует из (5.5)–(5.7). Поэтому по теореме А.С. Маркуса и В.И. Мацаева оператор (6.10) имеет две ветви собственных значений, а эти ветви — ту же асимптотику при  $k \rightarrow \infty$ . Наконец, задача (6.8) в силу компактности оператора  $T$  опять-таки по теореме А.С. Маркуса и В.И. Мацаева имеет две ветви собственных значений с той же асимптотикой, что и у оператора (6.11).  $\square$

**Теорема 7.** Собственные элементы  $\{(\vec{\eta}_k^{\pm}; \vec{\xi}_k^{\pm})\}_{k=1}^{\infty}$  задачи (6.8), отвечающие собственным значениям  $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ , образуют базис, ортогональный по квадратичным формам операторных матриц из (6.8).

**Доказательство.** Осуществим в (6.8) замену искомого элемента, пользуясь свойством неотрицательности оператора  $T$ :

$$(I + f^2g^{-1}T)^{1/2}\vec{\eta} =: \vec{\psi}. \quad (6.12)$$

Тогда взамен (6.8) приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} - \omega \mathcal{N} \begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} -(I + f^2g^{-1}T)^{-1/2}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2}(I + f^2g^{-1}T)^{-1/2} & g^{-1/2}(I + f^2g^{-1}T)^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2}(I + f^2g^{-1}T)^{-1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. к проблеме отыскания характеристических чисел операторной матрицы, являющейся компактным самосопряженным оператором в пространстве  $(\vec{G}_1(\Gamma; h))^2$ , причем этот оператор имеет нулевое ядро.

Поэтому по теореме Гильберта – Шмидта совокупность собственных элементов  $\{(\vec{\psi}_k^{\pm}; \vec{\xi}_k^{\pm})_{k=1}^{\infty}\}$  задачи (6.13), отвечающая собственным значениям  $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ , образует базис, ортогональный как в пространстве  $(\vec{G}_1(\Gamma; h))^2$ , так и по форме операторной

матрицы (6.13). Отсюда, возвращаясь от (6.13) к задаче (6.8) путем обратной замены (6.12), приходим к утверждению теоремы.  $\square$

Слукдствием доказанных теорем является такой важный вывод.

**Теорема 8** (Основная теорема о спектре). *Спектральная задача (3.43) имеет чисто точечный спектр, состоящий из бесконечнократного собственного значения  $\omega = 0$ , которому отвечает собственное подпространство  $\text{Ker } \mathcal{B}$  из (4.16), и двух ветвей  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  ненулевых конечнократных собственных значений с предельными точками  $\omega = \pm\infty$ . Этому спектру отвечает совокупность собственных элементов, образующая базис, ортогональный в пространстве  $\vec{L}_2(\Gamma) \oplus H$  и по форме оператора  $\mathcal{B}$ .*

**Доказательство.** Свойство ортогональности собственных элементов, отвечающих различным собственным значениям, очевидно, так как  $\mathcal{B}$  — самосопряженный оператор. Далее, по теореме 3 точка  $\omega = 0$  является бесконечнократным собственным значением задачи (3.43), которому отвечает собственное подпространство  $\text{Ker } \mathcal{B}$  из (4.16). Наконец, ненулевой спектр задачи (3.43), как доказано выше, дискретен и состоит из двух ветвей конечнократных собственных значений  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  с предельными точками  $\omega = \pm\infty$  (при  $k \rightarrow \infty$ ).

Из этих свойств и общих фактов спектральной теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве (см., например, [9], п.190, а также [10], с.268), приходим к выводу, что спектр задачи (3.43) чисто точечный и потому совокупность всех собственных элементов, отвечающая всем собственным значениям (в том числе и ортонормированная последовательность элементов базиса из  $\text{Ker } \mathcal{B}$ ), образует ортогональный базис в  $\vec{L}_2(\Gamma) \oplus H$  и по форме оператора  $\mathcal{B}$ .  $\square$

В качестве замечания к этой теореме отметим, что для собственных значений  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  задачи (3.43) можно получить двусторонние оценки по той же самой схеме, по которой в ([2], с. 222 – 225) устанавливались аналогичные оценки для операторной матрицы из ([2], с. 217, уравн. (5.6)). Не приводя подробных выводов, сформулируем лишь окончательный результат, который аналогичен формулам (5.46) и (6.8) из [2] и имеет вид

$$\sqrt{f^2 + 4g\lambda_k(C_1)} - f \leq 2|\omega_k^\pm| \leq \sqrt{f^2 + 4g\lambda_k(C_1)} + f, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

Отсюда, в частности, также следуют асимптотические формулы (6.9).

## 7. О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Переходя к рассмотрению этого вопроса, осуществим в системе уравнений (1.15)–(1.17) замену искомой функции по формуле

$$h^{1/2} \vec{v} (= \rho^{1/2} h \vec{u}) = \vec{w}. \quad (7.1)$$

Приходим к задаче

$$i\omega \vec{w} - f(\vec{w} \times \vec{e}_3) + g^{1/2} h^{1/2} \nabla \zeta = 0, \quad i\omega \zeta + g^{1/2} \text{div} \vec{w} = 0. \quad (7.2)$$



Как уже доказано выше, эта задача имеет вещественный спектр, состоящий из бесконечнократного собственного значения  $\omega = 0$  и дискретного спектра  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  конечнократных собственных значений с предельными точками  $\pm\infty$ .

Будем считать, что  $|\omega| \neq f > 0$ . Тогда векторное поле  $\vec{w}$  из (7.2) можно выразить из первого уравнения (7.2) через  $\nabla\zeta$ :

$$\vec{w} = g^{1/2}h(\omega^2 - f^2)^{-1}[i\omega\nabla\zeta + f(\nabla\zeta \times \vec{e}_3)]. \quad (7.3)$$

(Здесь функция  $\zeta$ , пропорциональная (см. (1.6)) вертикальному смещению свободной поверхности, играет роль функции состояния С.Л. Соболева, см., например, [11], с. 298 – 304, используемой для вращающейся идеальной жидкости взамен потенциала скорости или потенциала смещения.)

Подставляя (7.3) во второе уравнение (7.2), приходим к уравнению

$$g\omega\Delta_h\zeta + \omega(\omega^2 - f^2)\zeta - igf\operatorname{div}[h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3)] = 0, \quad \Delta_h\zeta := \operatorname{div}(h\nabla\zeta) \quad (\text{в } \Gamma). \quad (7.4)$$

Краевое условие  $w_n = 0$  (на  $\partial\Gamma$ ) приводит к связи

$$i\omega\frac{\partial\zeta}{\partial n} + f\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma). \quad (7.5)$$

Таким образом, для функции  $\zeta = \zeta(x_1, x_2)$  возникает спектральная задача (7.4)–(7.5), причем спектральный параметр  $\omega$  входит в уравнение (7.4) в наибольшей третьей степени, а в краевое условие (7.5) — в первой.

Заметим, что если рассматривается случай невращающейся жидкости, т.е.  $f = 0$ , то задача (7.4)–(7.5) переходит при  $\omega \neq 0$  в задачу

$$\Delta_h\zeta + \omega^2\zeta = 0 \quad (\text{в } \Gamma), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \quad (7.6)$$

которая ранее исследовалась, например, в [3], т.1, с. 259 – 261.

Определим далее обобщенное решение задачи (7.4)–(7.5). Пусть  $H^1(\Gamma)$  — гильбертово пространство с квадратом нормы

$$\|\zeta\|_{H^1(\Gamma)}^2 := \int_{\Gamma} h|\nabla\zeta|^2 d\Gamma + \left( \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma \right)^2, \quad (7.7)$$

эквивалентной стандартной норме, а  $H_{\Gamma}^1$  — его подпространство (коразмерности 1) тех элементов, для которых выполнено последнее условие (7.6). Тогда

$$\|\zeta\|_{H_{\Gamma}^1}^2 = \int_{\Gamma} h|\nabla\zeta|^2 d\Gamma, \quad \forall \zeta \in H_{\Gamma}^1. \quad (7.8)$$

Пусть  $\eta = \eta(x_1, x_2) \in H_{\Gamma}^1$  — произвольный элемент. Тогда, умножая обе части уравнения (7.4) на  $\eta$ , интегрируя по  $\Gamma$  и используя формулу Грина и условие (7.5), для решений  $\zeta = \zeta(x)$  задачи (7.4) приходим к тождеству

$$\omega g(\zeta, \eta)_{H_{\Gamma}^1} - \omega(\omega^2 - f^2)(\zeta, \eta)_{L_2(\Gamma)} - ifg \int_{\Gamma} h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\nabla\eta} d\Gamma = 0. \quad (7.9)$$

Будем говорить, что пара  $\{\omega; \zeta(x_1, x_2)\}$  является обобщенным решением задачи (7.4), (7.5) из пространства  $H_\Gamma^1$ , если выполнено тождество (7.9) при любом  $\eta \in H_\Gamma^1$ .

Нетрудно видеть, что (7.9) представляет собой равенство нулю первой вариации (кубического по  $\omega$ ) квадратичного функционала

$$F(\zeta; \omega) := \omega g \|\zeta\|_{H_\Gamma^1}^2 - \omega(\omega^2 - f^2) \|\zeta\|_{L_2(\Gamma)}^2 - ifg \int_\Gamma h(\nabla \zeta \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\nabla \zeta} d\Gamma, \quad (7.10)$$

который обращается в нуль на решениях задачи (7.4) — (7.5).

**Теорема 9.** *Стационарным значениям функционала (7.10) отвечают обобщенные решения  $\{\omega; \zeta(x_1, x_2)\}$  задачи (7.4)–(7.5) из пространства  $H_\Gamma^1$ . Они могут быть найдены по методу Рунца – Галеркина, причем для точных решений не только уравнение задачи (7.4), но и краевое условие (7.5) в пределе при возрастании числа координатных функций будут выполнены автоматически, так как они являются естественными.*  $\square$

Доказательство этой теоремы не приводим, оно следует из предыдущих рассуждений и из формул Грина (в частности, из формулы Грина для оператора  $\Delta_h$  в случае липшицевой границы  $\partial\Gamma$ ).

Пусть  $\{\eta_k(x_1, x_2)_{k=1}^\infty\}$  — полная система элементов в  $H_\Gamma^1$ . Представляя приближенное решение  $\zeta = \zeta(x_1, x_2)$  в виде

$$\zeta^{(n)}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n a_k \eta_k(x_1, x_2) \quad (7.11)$$

с неизвестными коэффициентами  $\{a_k\}_{k=1}^n$ , для приближенного нахождения собственных значений  $\omega$  задачи (7.10) приходим к характеристическому уравнению

$$\det (\omega g \alpha_{kj} - \omega(\omega^2 - f^2) \beta_{kj} - ifg \gamma_{kj})_{k,j=1}^n = 0, \quad (7.12)$$

$$\alpha_{kj} := \int_\Gamma h \nabla \eta_k \cdot \overline{\nabla \eta_j} d\Gamma, \quad \beta_{kj} := \int_\Gamma \eta_k \overline{\eta_j} d\Gamma, \quad \gamma_{kj} := \int_\Gamma h(\nabla \eta_k \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\nabla \eta_j} d\Gamma. \quad (7.13)$$

Такая схема вычислений реализована в работах Ю.Б. Иванова (см. [12], [13]).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги исследования спектральной задачи (1.12)–(1.14) о собственных колебаниях идеальной вращающейся жидкости в приближении мелкой воды, сформулируем окончательные выводы.

1<sup>0</sup>. Задача (1.12)–(1.14) имеет точечный вещественный спектр, состоящий из бесконечнократного нулевого собственного значения и двух ветвей  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  конечнократных собственных значений с предельными точками  $\omega = \pm\infty$ .

2<sup>0</sup>. Собственные элементы задачи (3.43) образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве  $\vec{J}_0(\Gamma) \oplus H$ .

3<sup>0</sup>. Уравнения мелкой воды (1.12)–(1.14), по-видимому, адекватно описывают процесс собственных колебаний тонкого слоя вращающейся жидкости при изучении

поверхностных волн и даже качественно не описывают внутренние инерционные волны, обусловленные действием кориолисовых сил. В самом деле, здесь спектр внутренних волн вместо отрезка  $[-f, f]$  (см. [2], с. 226 – 233) вырождается в точку нуль, т.е. предельный спектр  $[-f, f]$  заменяется на  $\{0\}$ .

4<sup>0</sup>. Все результаты в данной работе получены в предположении (1.5). Если это условие не выполнено и  $h(x_1, x_2)$  может обращаться в нуль в некоторых точках, то структура спектра задачи (1.12)–(1.14) может быть иной. Так, в круговом цилиндрическом сосуде с параболическим дном (см. [6], с.365–367) дополнительно появляется ветвь собственных значений с предельной точкой  $\omega = 0$ .

5<sup>0</sup>. Приближенно собственные значения  $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$  задачи (1.15)–(1.17) и соответствующие собственные функции  $\{\zeta_k^\pm(x_1, x_2)\}_{k=1}^\infty$  можно находить, применяя метод Ритца – Галеркина к функционалу (7.10).

Автор благодарит Ю.Б. Иванова за внимание к работе и полезные дискуссии.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.Б. Иванов, Н.Д. Копачевский. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики. Симферополь.: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2003, № 1. – С. 61–77.
2. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
3. Koprachevsky N.D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag. – Basel, Boston, Berlin, – 2001. (Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 128). – 377 pp.; Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhauser Verlag. – Basel, Boston, Berlin. – 2003. (Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 146). – 444 pp.
4. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. 1. – М.: Мир, 1981. – 480 с.
5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
6. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: ГИТТЛ, 1965. – 928 с.
7. Маркус А.С., Мацаев В.И. Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики // Труды Московского матем. об-ва, 45, 1982. – С. 133–181.
8. Маркус А.С., Мацаев В.И. Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики для пучков Келдыша // Матем. сборник, 123 (165), № 3, 1984. – С. 391–406.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.5. – М.: ГИТТЛ, 1960. – 656 с.
10. Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
11. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
12. Иванов Ю.Б. Моделирование баротропных сейш в Черном море // Доповіді НАН України. – 1999. – № 7, С. 117 – 120.
13. Иванов Ю.Б. Обобщенные решения спектральной задачи для системы уравнений теории мелкой воды // Ученые записки Таврич. нац. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика.

## ЭЛИМИНАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

О.А. Щербина

UNIVERSITY OF VIENNA,  
INSTITUT FÜR MATHEMATIK  
NORDBERGSTR. 15, VIENNA 1090, AUSTRIA  
E-MAIL: *oleg.shcherbina@univie.ac.at*

### Abstract

In this paper a class of elimination algorithms of decomposition of discrete optimization problems including local algorithms of decomposition, nonserial dynamic programming algorithms, bucket elimination algorithms, tree decomposition techniques is considered. The review is made and the basic features of the elimination algorithms of decomposition representing rather promising approach allowing in some cases to solve large-scale discrete optimization problems are described.

### ВВЕДЕНИЕ

Использование моделей и алгоритмов дискретной оптимизации (ДО) позволяет решать многие практические задачи, такие, как задачи теории расписаний, оптимизации на сетях, маршрутизации трафика в коммуникационных сетях, задачи размещения экономических объектов, доказательство теорем, задачи искусственного интеллекта и др. К сожалению, большинство интересных задач ДО являются NP-трудными и решение их в худшем случае может требовать построения дерева поиска решений экспоненциального размера. В настоящее время практически никто не ожидает появления полиномиального алгоритма решения NP-трудных задач [10]. Многие практические задачи ДО содержат огромное число переменных и/или ограничений, что создает сложности при попытке решения этих задач с помощью современных решателей.

Теория сложности доказывает, что универсальность и эффективность являются противоречивыми требованиями к сложности алгоритма. Однако сложность некоторого класса задач ДО снижается, если этот класс может быть разбит на подклассы и специальная структура этих подклассов может быть учтена при построении алгоритма. В последнее время наблюдается потребность в построении и анализе алгоритмов, существенно более быстрых, чем полный перебор, хотя и не полиномиальных (так называемые супер-полиномиальные алгоритмы, с помощью которых находятся оптимальные решения NP-полных задач – см. обзор WOEGERINGER [22]). Перспективной представляется разработка декомпозиционных методов в ДО ([14], [20], [21]), позволяющих справиться с решением NP-трудных задач ДО, что чрезвычайно актуально по вышеизложенным причинам. Обычно прикладные задачи ДО имеют специальную структуру, и матрицы ограничений характеризуются большим количеством нулей (разреженные матрицы). Перспективными декомпозиционными методами, использующими разреженность матрицы ограничений задач ДО представляется класс элиминационных алгоритмов декомпозиции, включающая локальные алгоритмы декомпозиции [2], [4], алгоритмы несериального динамического программирования (НСДП)

([7], [15], [16]), алгоритмы сегментной элиминации [8], методы древовидной декомпозиции [13]. Исторически НСДП появилось чуть позже обычного динамического программирования (ДП), но в настоящее время слабо известно среди специалистов в области теории оптимизации, особенно в отечественной научной литературе. Связь НСДП с локальными алгоритмами ([2], [4], [3]) обусловлена тем, что, как и локальные алгоритмы, НСДП решает задачи, преобразуя локальную информацию в глобальную. Интересные аналогии прослеживаются между НСДП и методом исключения переменных Гаусса при решении систем линейных переменных. Одной из общих для этих методов графовых интерпретаций является *элиминационная игра* (PARTER [17]).

В настоящей статье рассмотрен класс элиминационных алгоритмов декомпозиции задач дискретной оптимизации, включающий локальные алгоритмы декомпозиции, алгоритмы несериального динамического программирования, алгоритмы сегментной элиминации, методы древовидной декомпозиции. Сделан обзор и описаны основные черты элиминационных алгоритмов декомпозиции, представляющих собой весьма перспективный подход, позволяющий в ряде случаев решать задачи дискретной оптимизации большой размерности.

## 1. СЕРИАЛЬНАЯ И НЕСЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ИХ ГРАФОВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Согласно [7], динамическое программирование (ДП) и НСДП, в частности, рассматривается как общий подход (парадигма) к решению задач, основанный на декомпозиции исходной задачи на меньшие подзадачи. ДП, известное также как метод элиминации переменных, исключает (или элиминирует) переменные в определенном порядке и выводящее новые зависимости (новые компоненты целевой функции – в случае задачи оптимизации) среди оставшихся переменных.

Напомним, что **сериальной** (т.е. последовательной) задачей ДП без ограничений называется следующая задача:

$$\min_X f(X) = \min_X \sum_{i \in K} f_i(X^i),$$

где  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  - множество дискретных переменных,

$$K = \{1, 2, \dots, n-1\}; X^i = \{x_i, x_{i+1}\}.$$

Функция  $f(X)$  называется целевой функцией (ЦФ), а функции  $f_i(X^i)$  - компонентами ЦФ и могут задаваться таблично. На рис.1 показан граф взаимосвязей этой задачи.

Согласно [7], несериальная задача оптимизации без ограничений имеет вид:

$$\min_X f(X) = \min_X \sum_{i \in K} f_i(X^i),$$

где  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  – множество дискретных переменных,

$$K = \{1, 2, \dots, t\}; X^i \subset X.$$

Здесь  $t$  – число компонентов ЦФ.

**Определение 1.** [7]. Две переменные  $x \in X$  и  $y \in Y$  взаимосвязаны в несериальной задаче оптимизации без ограничений, если существует такой компонент ЦФ  $f_k(X^k)$ , что обе переменные  $x$  и  $y$  принадлежат  $X^k$  (иногда говорят, что переменные  $x$  и  $y$  являются соседними или смежными по компоненту  $f_k(X^k)$ ).

Рассмотрим несериальную задачу ДО с ограничениями следующего вида:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k \in K} f_k(Y^k) \rightarrow \max \quad (1)$$

при ограничениях

$$g_i(X^i) R_i 0, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (2)$$

$$x_j \in D_j, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (3)$$

где

$$Y^k \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad k \in K = \{1, 2, \dots, t\}; \quad (4)$$

$$X^i \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad R_i \in \{\leq, =, \geq\}, \quad i \in M = \{1, 2, \dots, m\}. \quad (5)$$

**Определение 2.** [7]. Две переменные  $x \in X$  и  $y \in Y$  взаимосвязаны в несериальной задаче оптимизации с ограничениями, если они появляются вместе в одном компоненте ЦФ или в одном и том же ограничении (другими словами, если переменные входят одновременно во множество  $X^i$  или во множество  $Y^k$ ).

Введем графовое представление (интерпретацию) несериальной задачи оптимизации, что позволит в дальнейшем использовать ДП для решения этой задачи. Нам потребуется понятие графа взаимосвязей (interaction graph [7]), естественным образом представляющего структуру задачи ДО.

**Определение 3.** **Графом взаимосвязей** несериальной задачи оптимизации (без ограничений или с ограничениями) называется неориентированный граф  $G = (V, X)$ , для которого

1. множество вершин  $X$  графа соответствует множеству переменных задачи оптимизации;
2. две вершины графа смежны тогда и только тогда, когда соответствующие им переменные взаимосвязаны.

**Определение 4.** Множество переменных, взаимосвязанных с переменной  $x \in X$ , обозначается  $Nb(x)$  и называется **окрестностью** переменной  $x$ .

## 2. ПРОЦЕДУРА ЭЛИМИНАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ

### Сериальная задача без ограничений

В сериальной задаче ДО вначале рассмотрим переменную  $x_1$ . Поскольку лишь компонент  $f_1(X^1) = f_1(x_1, x_2)$  зависит от  $x_1$ , для минимизации  $f(X)$  по отношению



Рис. 1. Граф взаимосвязей переменных в сериальной задаче ДО

к  $x_1$  достаточно вычислить

$$\min_{\{x_1\}} f_1(x_1, x_2) = h_1(x_2)$$

для всех возможных значений  $x_2$ , так как  $x_1$  взаимосвязан лишь с  $x_2$ , и запомнить оптимальные значения  $x_1^*(x_2)$ . Функция  $f_1(x_1, x_2)$  заменяется таблично заданной функцией  $h_1(x_2)$ , которая становится новым компонентом ЦФ. В результате выполнения описанной операции, называемой **элиминацией** переменной  $x_1$  [7], задача принимает вид:

$$\min_{X-\{x_1\}} \left[ h_1(x_2) + \sum_{i \in K-\{1\}} f_i(X^i) \right].$$

Далее производится элиминация переменной  $x_2$  из этой новой задачи. Поскольку переменная  $x_2$  взаимосвязана лишь с  $x_3$ , то вычисляется оптимальное значение  $x_2$  при всех возможных значений  $x_3$  и в результате запоминается функция  $h_2(x_3)$  и оптимальные значения  $x_2^*(x_3)$ .

Применяя далее описанную процедуру, последовательно производя элиминацию переменных  $x_3, x_4, \dots, x_n$ , в конце концов получим оптимальное значение  $f(X)$ . Оптимальное решение  $X$  может быть найдено с помощью обратного шага процедуры ДП, который определяет последовательно  $x_n^*, x_{n-1}^*, \dots, x_1^*$  из сохраненных таблиц значений  $x_n^*, x_{n-1}^*(x_n), \dots, x_1^*(x_2)$ .

**Несериальная задача без ограничений**

Рассмотрим какое-либо упорядочение (одно из  $n!$  возможных) переменных из множества  $X$

$$\alpha = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Для этого упорядочения задача может быть решена с помощью описанной выше процедуры ДП, которую можно разбить на две части.

**а. ПРЯМАЯ ЧАСТЬ**

Вначале рассмотрим переменную  $y_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \min_X f(X) &= \min_{X-\{y_1\}} \min_{\{y_1\}} \sum_{i \in K} f(X^i) = \min_{X-\{y_1\}} \left( \sum_{i \in K-K_1} f_i(X^i) + \min_{\{y_1\}} \sum_{i \in K_1} f_i(X^i) \right) = \\ &= \min_{X-\{y_1\}} \left( \sum_{i \in K-K_1} f_i(X^i) + h_1(Nb(y_1)) \right), \end{aligned}$$

где

$$K_1 = \{i : X^i \cap \{y_1\} \neq \emptyset\}.$$

Первый шаг оптимизационной процедуры состоит из вычисления с помощью полного перебора

$$\min_{\{y_1\}} \sum_{i \in K_1} f_i(X^i) = h_1(Nb(y_1))$$

и запоминания оптимальных частичных решений  $y_1$  как функции  $Nb(y_1)$ , а именно,  $y_1^*(Nb(y_1))$ .

Минимизацию  $f(X)$  по отношению к переменной  $y_1$ , для всех возможных наборов  $Nb(y_1)$ , будем называть **элиминацией** переменной  $y_1$ . После элиминации  $y_1$  задача имеет вид:

$$\min_{X - \{y_1\}} \left( \sum_{i \in K - K_1} f_i(X^i) + h_1(Nb(y_1)) \right),$$

т.е. имеет тот же вид, что и исходная задача, причем функция  $h_1(Nb(y_1))$  может быть рассмотрена как компонент новой ЦФ. Далее та же процедура может быть применена для поочередной элиминации переменных  $y_2, \dots, y_n$ . На каждом шаге  $j$  запоминаются новый компонент  $h_j$  и оптимальные наборы  $y_j^*$  как функции множества переменных  $Nb(y_j | y_1, \dots, y_{j-1})$ , взаимосвязанных с переменной  $y_j$  в текущей задаче, полученной из исходной задачи путем элиминации  $y_1, \dots, y_{j-1}$ . Так как множество  $Nb(y_n | y_1, \dots, y_{n-1})$  пусто, то элиминация  $y_n$  дает оптимальное значение  $f(X)$ .

### В. Обратная часть.

Эта часть процедуры состоит в последовательном определении  $y_n^*, y_{n-1}^*, \dots, y_1^*$  - оптимальных наборов из заполненных таблиц  $y_1^*(Nb(y_1)), y_2^*(Nb(y_2 | y_1)), \dots, y_n^*$ .

В [1] приведен пример решения несериальной задачи ДО без ограничений.

## 3. ПРОЦЕДУРА ЭЛИМИНАЦИИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Рассмотрим задачу ДО с ограничениями и предположим без потери общности, что порядок элиминации переменных следующий:  $x_1, \dots, x_n$ . Опишем процедуру элиминации для переменной  $x_1$ . Переменная  $x_1$  входит в подмножество  $K_1$  компонентов ЦФ:

$$K_1 = \{k | x_1 \in Y^k\}$$

и в подмножество ограничений  $U_1$ :

$$U_1 = \{i | x_1 \in X^i\}.$$

Одновременно с  $x_1$  в компоненты ЦФ  $Y^k$ ,  $k \in K_1$  и в ограничения  $U_1$  входят переменные из окрестности  $Nb(x_1)$ .

Переменной  $x_1$  соответствует следующая подзадача  $P_1$  исходной задачи ДО:

$$h_1(Nb(x_1)) = \max_{x_1} \left\{ \sum_{k \in K_1} f_k(Y^k) | g_i(X^i) \leq 0, i \in U_1, x_j \in D_j, x_j \in Nb(x_1) \right\}.$$



Исходная задача ДО может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned} & \max_{x_1, \dots, x_n} \left\{ \sum f_k(Y^k) \mid g_i(X^i) R_i 0, i \in M, x_j \in D_j, j \in N \right\} = \\ & = \max_{x_1, \dots, x_{n-1}} \left\{ \sum_{k \in K - K_1} f_k(Y^k) + h_1(Nb(x_1) \mid g_i(X^i) R_i 0, i \in M - U_1, x_j \in D_j, j \in X - \{x_1\}) \right\}. \end{aligned}$$

В новой задаче  $n - 1$  переменная; по сравнению с исходной задачей в ней исключены ограничения с индексами из  $U_1$  и компоненты ЦФ  $\sum_{k \in K_1} f_k(Y^k)$ , но появился новый компонент ЦФ  $h_1(Nb(x_1))$ .

Процедура элиминации элиминирует оставшиеся переменные одну за другой аналогичным образом. При этом, подобно выше описанным процедурам элиминации, необходимо запоминать таблицы с оптимальными частичными решениями на каждом шаге процесса.

На шаге  $n$  описанного процесса мы элиминируем переменную  $x_n$  и находим оптимальное значение ЦФ. Затем нужно выполнить обратную часть процедуры элиминации для нахождения оптимального решения. Решение задачи ДО с помощью НСДП подробно описано в [3]. Ниже рассмотрено решение несериальной задачи ДО с ограничениями с помощью сегментной элиминации.

В качестве примера несериальной задачи с ограничениями рассмотрим задачу целочисленного линейного программирования:

**Пример 1.**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 4x_5 + 6x_6 + x_7 & \rightarrow \max \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 & \leq 6, \quad (C_1) \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 & \leq 5, \quad (C_2) \\ 2x_2 + 3x_5 & \leq 4, \quad (C_3) \\ 2x_3 + 3x_6 + 2x_7 & \leq 5, \quad (C_4) \end{aligned}$$

$$x_j = 0, 1, j = 1, \dots, 7.$$

**4. ЭЛИМИНАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС И ЭЛИМИНАЦИОННАЯ ИГРА ПАРТЕРА**

Рассмотрим неориентированный граф  $G = (V, E)$  и вершину  $y \in V$ .

**Определение 5.** [7] Граф, полученный из графа  $G = (V, E)$  с помощью

- удаления вершины  $y$  и всех ребер  $O(y)$ , исходящих из нее и
- соединения всех ранее несмежных вершин в  $Nb(y)$ ,

а именно, граф  $(V - \{y\}, (E - O(y)) \cup I^*(Nb(y)))$ , называется *y-элиминационным графом* графа  $G$  и обозначается  $G_y$ . Описанная операция называется *элиминацией вершины y*.

Здесь  $I^*(Y)$  - множество ребер полного графа с множеством вершин  $Y$ .

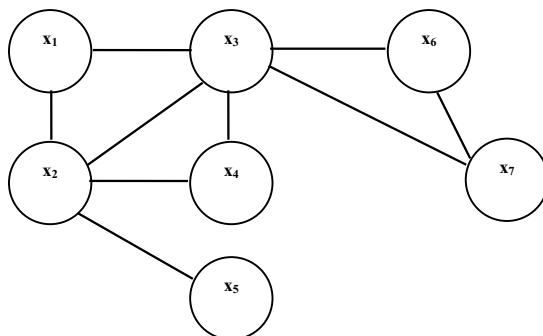


Рис. 2. Граф взаимосвязей переменных в несериальной задаче ДО с ограничениями из примера 1.

Для данного упорядочения  $\alpha = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  элиминационный процесс состоит в последовательной элиминации вершин  $y_1, y_2, \dots, y_n$  в текущем графе. Этот процесс порождает последовательность графов:

$$G^0 = G, G^1, \dots, G^{j-1}, G^j, \dots, G^n,$$

так что  $G^j$  –  $y_j$ -элиминационный граф графа  $G^{j-1}$ , а  $G^n$  – пустой граф.

Возникает вопрос, зависит ли вид элиминационного графа от порядка прохождения вершин. Ответ дан в следующей теореме:

**Теорема 1** (Теорема об инвариантности). [7]. *Любой граф, полученный из графа  $G = (V, E)$  с помощью поочередной элиминации всех вершин из некоторого подмножества  $Y \subset V$ , не зависит от порядка элиминации вершин.*

**Определение 6.** Граф, полученный из  $G$  с помощью элиминации всех вершин  $Y$  в некотором порядке, называется  $Y$ -элиминационным графом графа  $G$  и обозначается  $G_Y$ ; эта операция называется элиминацией подмножества  $Y$ .

**Теорема 2.** (Финальная теорема) [7]. *Если  $G = (V, E)$  – граф,  $\Sigma$  – полное в  $G$  подмножество вершин  $V$ , тогда существует оптимальное упорядочение, в котором вершины  $\Sigma$  по порядку являются последними.*

Процесс преобразования первичного графа взаимодействия переменных, соответствующий процедуре НСДП, известен как *элиминационная игра*, которая впервые была введена Партером [17], как графовая интерпретация метода исключения Гаусса. Входом для алгоритма элиминационной игры является граф  $G$  и упорядочение  $\alpha$  вершин графа  $G$  (т.е.  $\alpha(v) = i$ , если  $v$  –  $i$ -я вершина в упорядочении  $\alpha$ ). Процесс преобразования первичного графа взаимосвязей, соответствующий процедуре НСДП, известен как «*элиминационная игра*», которая впервые была введена Партером [17],

как графовая интерпретация метода исключения Гаусса. Входом для алгоритма элиминационной игры является граф  $G$  и упорядочение  $\alpha$  вершин графа  $G$  (т.е.  $\alpha(v) = i$ , если  $v$  —  $i$ -я вершина в упорядочении  $\alpha$ ). Алгоритм состоит в следующем. Выбирается первая, согласно упорядочению  $\alpha$ , вершина  $v$ , добавляем, если нужно необходимые ребра, чтобы все вершины, смежные с  $v$ , образовывали клику. Затем удаляем вершину  $v$  из измененного графа и продолжаем процесс, выбирая следующую вершину нового графа согласно упорядочению  $\alpha$ . После прохождения всех вершин добавляем в исходном графе все добавленные на каждом шаге ребра. Результатом этого алгоритма является пополненный граф  $G_\alpha^+$ , в котором, по сравнению с исходным графом, добавлены ребра.

FULKERSON & GROSS [11] показали, что:

1. Пополненный граф  $G_\alpha^+$ , порожденный с помощью элиминационной игры, является хордальным графом, т.е. триангуляцией графа  $G$ ;
2. Пополненные графы, полученные с помощью элиминационной игры, образуют в точности класс хордальных графов.

Эти результаты показывают возможность построения древовидных декомпозиций для задачи ДО, используя элиминационную игру, так как для хордальных графов достаточно просто находятся максимальные клики и строится *дерево клик*, являющееся древовидной декомпозицией.

Различные пополненные графы получаются в результате обработки вершин графа  $G$  в различном порядке. Поэтому для получения небольшого пополнения перед использованием элиминационной игры необходимо найти хороший порядок вершин данного графа. Отметим, что задача нахождения упорядочения, обеспечивающего минимальное пополнение, является NP-трудной [24].

Элиминационная игра может быть использована таким образом, чтобы упорядочение  $\alpha$  порождалось в процессе работы алгоритма. В этом случае мы можем на каждом шаге  $i$  выбирать вершину  $v$  графа  $G^{i-1}$  согласно любому желательному для нас критерию, и положить  $\alpha(v) = i$ , определяя тем самым порядок элиминации  $\alpha$ . Одной из популярных эвристик является эвристика «Minimum Degree», которая выбирает на каждом шаге  $i$  вершину  $v$  с минимальной степенью в  $G^{i-1}$ .

## 5. БЛОЧНАЯ ЭЛИМИНАЦИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В ряде случаев целесообразно использовать в процедуре НСДП так называемую «блочную элиминацию» ([7], [2], [4]), которая осуществляет элиминацию нескольких вершин за один раз. Рассмотрим упорядоченное разбиение переменных множества  $X$  на блоки:

$$\Psi = (Y_1, \dots, Y_m), \quad m \leq n.$$

Для этого упорядоченного разбиения задача оптимизации может быть решена с помощью НСДП.

### А. Прямая часть

Рассмотрим вначале блок  $Y_1$ . Тогда

$$\min_X f(X) = \min_{X-Y_1} \min_{Y_1} \sum_{i \in K} f(X^i) = \min_{X-Y_1} \left( \sum_{i \in K-K_1} f_i(X^i) + \min_{Y_1} \sum_{i \in K_1} f_i(X^i) \right) =$$

$$= \min_{X-Y_1} \left( \sum_{i \in K-K_1} f_i(X^i) + h_1(Nb(Y_1)) \right),$$

где

$$K_1 = \{i : X^i \cap Y_1 \neq \emptyset\}.$$

Первый шаг процедуры оптимизации состоит в вычислении функции

$$h_1(Nb(Y_1)) = \min_{Y_1} \sum_{i \in K_1} f_i(X^i),$$

используя полный перебор и запоминая оптимальные наборы  $Y_1$  как функцию переменных из окрестности  $Nb(Y_1)$ , а именно  $Y_1^*(Nb(Y_1))$ .

На втором шаге производится минимизация  $f(X)$  по всем возможным наборам  $Nb(Y_1)$  называется элиминацией или исключением блока  $Y_1$ . Задача оптимизации, оставшаяся после исключения  $Y_1$ , выглядит так:

$$\min_{X-Y_1} \left( \sum_{i \in K-K_1} f_i(X^i) + h_1(Nb(Y_1)) \right).$$

Отметим, что она имеет тот же вид, что и исходная задача, причем функция  $h_1(Nb(Y_1))$  может быть рассмотрена как компонент новой ЦФ. Далее та же процедура может быть применена для поочередной элиминации блоков  $Y_2, \dots, Y_m$ . На каждом шаге  $j$  запоминаются новая компонента  $h_j$  и оптимальные частичные решения  $Y_j^*$  как функции  $Nb(Y_j | Y_1, \dots, Y_{j-1})$  множества переменных, взаимодействующих, по крайней мере, с одной переменной  $Y_j$  в текущей задаче, полученной из исходной задачи путем элиминации  $Y_1, \dots, Y_{j-1}$ . Так как множество  $Nb(Y_m | Y_1, \dots, Y_{m-1})$  пусто, то элиминация  $Y_m$  дает оптимальное значение  $f(X)$ .

### В. Обратная часть.

Эта часть процедуры состоит в последовательном определении  $Y_m^*, Y_{m-1}^*, \dots, Y_1^*$  - оптимальных наборов из заполненных таблиц  $Y_1^*(Nb(Y_1)), Y_2^*(Nb(Y_2 | Y_1)), \dots, Y_m^*$ .

Одним из возможных способов выбора множеств  $Y^j$  является определение их в виде множеств “неотличимых” переменных [5] (две переменные  $x_i$  и  $x_j$  называются неотличимыми, если  $Nb(x_i) = Nb(x_j)$ ). Тогда, если переменная  $x_i$  отобрана для элиминации, то  $x_j$  может быть отобрана также без порождения дополнительного пополнения. Целесообразно выбрать для элиминации  $x_i$  и  $x_j$  вместе, или “блоком”. В этом случае возможно ввести новую блочную переменную  $\{x_i, x_j\}$  (в [5] она названа супер-переменной). Понятно, что подобные супер-переменные содержатся в одних и тех же ограничениях.

В качестве другой возможности можно рассмотреть переменные  $x_i, x_j$  с вложенными окрестностями (т.е. если  $Nb(x_j) \subseteq Nb(x_i)$ ). В этом случае мы можем рассматривать эти 2 переменные вместе, “блоком”. Локальный алгоритм декомпозиции, предложенный в [4], фактически реализует алгоритм блочной элиминации.

Рассмотрим неориентированный граф  $G = (V, E)$ ;  $Y \subset V$ .

**Определение 7.** Граф, полученный из графа  $G$  с помощью

- удаления вершин из  $Y$  и всех ребер  $I(Y) \cup O(Y)$ , где  $O(Y)$  - множество ребер, соединяющих вершины  $Y$  и  $V - Y$ , и
- соединения всех ранее несмежных вершин в  $Nb(Y)$ ,

а именно, граф  $(V - Y, I(V - Y) \cup I^*(Nb(Y)))$ , называется  $Y$ -*блочной-элиминационным графом* графа  $G$  и обозначается  $G^Y$ . Описанная операция называется **блочной элиминацией** множества  $Y$ .

## 6. МЕТОД СЕГМЕНТНОЙ ЭЛИМИНАЦИИ

Алгоритм сегментной элиминации (bucket elimination), предложен ДЕСНТЕР [8] для упорядочения процесса вычислений элиминационных алгоритмов. Здесь этот алгоритм переформулирован для решения задач ДО.

Алгоритм сегментной элиминации использует в качестве входной информации упорядоченное множество переменных и множество ограничений. Каждой переменной  $x_j$  ставится в соответствие сегмент (подмножество)  $\Sigma^{(x_j)}$  ограничений и компонентов ЦФ, построенный следующим образом: все ограничения и компоненты ЦФ, включающие переменную  $x_j$ , и не включающие переменных с бóльшим индексом (согласно заданному упорядочению переменных), помещаются в сегмент  $\Sigma^{(x_j)}$ . После того, как все сегменты построены, алгоритм элиминации начинает проходить их с конца до начала. Алгоритм находит новые компоненты ЦФ, применяя так называемый «оператор элиминации» (в нашем случае – решая соответствующие подзадачи оптимизации) ко всем ограничениям и компонентам ЦФ рассматриваемого сегмента. Новые компоненты ЦФ, учитывающие влияние переменной  $x_j$  на оставшуюся часть задачи, помещаются в соответствующие сегменты ниже.

Рассмотрим применение метода сегментной элиминации для несериальной задачи ДО с ограничениями, описанной выше в примере 1. Для решения используем порядок элиминации переменных  $\alpha = \{x_5, x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_7\}$ , полученный с помощью эвристики «Minimum Degree». Строим сегменты (подмножества ограничений), начиная с последней (согласно порядку  $\alpha$ ) переменной  $x_7$ . В сегмент  $\Sigma^{(x_7)}$  включаем все ограничения задачи ДО, содержащие переменную  $x_7$ , т.е. сегмент  $\Sigma^{(x_7)}$  состоит из ограничения  $C_4$ :

$$\Sigma^{(x_7)} = \{C_4\}.$$

Далее ограничение  $C_4$  из рассмотрения исключается. Аналогично получаем:  $\Sigma^{(x_6)} = \emptyset$ ,  $\Sigma^{(x_3)} = \{C_1, C_2\}$ ,  $\Sigma^{(x_4)} = \emptyset$ ,  $\Sigma^{(x_2)} = \{C_3\}$ ,  $\Sigma^{(x_1)} = \emptyset$ ,  $\Sigma^{(x_5)} = \emptyset$ .

Решаем подзадачу оптимизации, соответствующую сегменту  $\Sigma^{(x_7)}$ :  
Для каждого набора значений  $x_3$  и  $x_6$ , вычислить значение  $x_7$ , для которого:

$$h_7(x_3, x_6) = \max_{x_7} \{x_7 \mid 2x_3 + 3x_6 + 2x_7 \leq 5, x_j \in \{0, 1\}\}.$$

Полученную функцию  $h_7(x_3, x_6)$  помещаем в сегмент  $\Sigma^{(x_6)}$ , рассматриваем для этого сегмента задачу

$$h_6(x_3) = \max_{x_6} \{6x_6 + h_7(x_3, x_6) \mid x_j \in \{0, 1\}\}$$

и строим таблицу 2.

Таблица 1. Вычисление  $h_7(x_3, x_6)$ 

$x_3$	$x_6$	$h_7$	$x_7^*$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Таблица 2. Вычисление  $h_6(x_3)$ 

$x_3$	$h_6$	$x_6^*$
0	7	1
1	6	1

Полученную функцию  $h_6(x_3)$  помещаем в сегмент  $\Sigma^{(x_3)}$  и решаем соответствующую задачу

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = \max_{x_3} [x_3 + h_6(x_3)]$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 6, \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &\leq 5, \\ x_j &= 0, 1, j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Таблица 3. Вычисление  $h_3(x_1, x_2, x_4)$ 

$x_1$	$x_2$	$x_4$	$h_3$	$x_3^*$
0	0	0	7	1
0	0	1	7	0
0	1	0	7	1
0	1	1	7	0
1	0	0	7	1
1	0	1	7	0
1	1	0	—	—
1	1	1	—	—

Функцию  $h_3(x_1, x_2, x_4)$  запишем в сегмент  $\Sigma^{(x_4)}$  и решим задачу

$$h_4(x_1, x_2) = \max_{x_4} \{5x_4 + h_3(x_1, x_2, x_4) \mid x_j \in \{0, 1\}\}.$$

Получим таблицу:

Функцию  $h_4(x_1, x_2)$  запишем в сегмент  $\Sigma^{(x_2)}$  и решим задачу

$$h_2(x_1, x_5) = \max_{x_2} \{3x_2 + h_4(x_1, x_2) \mid 2x_2 + 3x_5 \leq 4, x_j \in \{0, 1\}\}$$

Таблица 4. Вычисление  $h_4(x_1, x_2)$

$x_1$	$x_2$	$h_4$	$x_4^*$
0	0	12	1
0	1	12	1
1	0	12	1
1	1	–	–

Таблица 5. Вычисление  $h_2(x_1, x_5)$

$x_1$	$x_5$	$h_2$	$x_2^*$
0	0	15	1
0	1	12	0
1	0	12	0
1	1	12	0

Полученную функцию  $h_2(x_1, x_5)$  помещаем в сегмент  $\Sigma^{(x_1)}$  и рассматриваем соответствующую задачу

$$h_1(x_5) = \max_{x_1} \{2x_1 + h_2(x_1, x_5) \mid x_j \in \{0, 1\}\}.$$

Таблица 6. Вычисление  $h_1(x_5)$

$x_5$	$h_1$	$x_1^*$
0	15	0
1	14	1

Переместим  $h_1$  в последний сегмент  $\Sigma^{(x_5)}$  и решим задачу

$$h_5 = \max_{x_5} \{4x_5 + h_1(x_5) \mid x_j \in \{0, 1\}\}.$$

Получим:  $h_5 = 18$ ,  $x_5^* = 1$ . Итак, оптимальное значение ЦФ равно 18. Перейдем к обратному шагу процедуры, следуя по сегментам в обратном порядке, и найдем оптимальные значения переменных.

Итак,  $x_5^* = 1$ . В таблице 1 для  $h_1$ , найдем для  $x_5 = 1$  соответствующее значение  $x_1^* = 1$ . Далее в таблице 2 для  $h_2$ :  $x_1 = 1$ ,  $x_5 = 1$  соответствует  $x_2^* = 0$ .

Рассмотрим таблицу 3 для  $h_4$ :  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0 \Rightarrow x_4^* = 1$ .

Таблица 4 для  $h_3$ :  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_4 = 1 \Rightarrow x_3^* = 0$ .

Таблица 5 для  $h_6$ :  $x_3 = 0 \Rightarrow x_6^* = 1$ .

Таблица 6 для  $h_7$ :  $x_3 = 0$ ,  $x_6 = 1 \Rightarrow x_7^* = 1$ .

Итак, найдено оптимальное решение: (1, 0, 0, 1, 1, 1, 1), оптимальное значение ЦФ равно 18.

## 7. ДРЕВОВИДНАЯ ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В связи с отсутствием циклов в деревьях, многие задачи оптимизации, которые являются трудными на общих графах, легко решаются на деревьях [23]. При решении задачи на дереве обычно возможно найти «локальные» или частичные решения для поддерева. Эти локальные решения можно далее использовать при решении задачи ДО с помощью ДП и, в частности, с помощью локальных алгоритмов декомпозиции. ДП начинает с листьев дерева и переходит от меньших к большим подзадачам (соответствующим поддеревьям). В связи с этим понятна перспективность поиска и выявления древовидных структур на графах. Это может быть осуществлено с использованием методов древовидной декомпозиции [18], использующих реструктуризацию задачи ДО, основанную на выделении древовидной структуры в графе взаимосвязей задачи. При этом вершины древовидной структуры включают множества переменных исходной структуры, каждое из которых рассматривается как единая вершина древовидной структуры. Следует отметить, что после выделения древовидной структуры в задачах ДО применяются локальные алгоритмы декомпозиции, представляющие собой по сути алгоритмы блочной элиминации, рассмотренные выше [3].

Используя динамическое программирование на древовидных декомпозициях с ограниченной древовидной шириной, трудные оптимизационные задачи на графах часто могут быть решены за полиномиальное время [6].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Элиминационные алгоритмы декомпозиции задач дискретной оптимизации — перспективный подход, делающий возможным решение практических разреженных задач дискретной оптимизации.

*Перспективными направлениями* дальнейших исследований являются разработка эффективных схем несериального динамического программирования при решении конкретных задач дискретной оптимизации, обладающих специальной структурой, применение постоптимального анализа при решении пакетов задач, получающихся в результате применения блочной элиминационной схемы, построение многоуровневых элиминационных схем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыжаков А.Н., Щербина О.А., Никольский В.Н. Математическое программирование. – Симферополь: Крымский институт бизнеса. – 2005. – 264 с.
2. Финкельштейн Ю.Ю. О решении задач дискретного программирования специального вида // Экономика и математические методы. – 1965. – 1, N 2. – Р. 262–270.
3. Щербина О.А. О несериальной модификации локального алгоритма декомпозиции задач дискретной оптимизации // Динамические системы. – 2005. – Вып.19. – С. 179–190.



4. *Щербина О.А.* О локальных алгоритмах решения задач дискретной оптимизации // Проблемы кибернетики. – 1983. – N 40. – P. 171-200.
5. *Amestoy P.R., Davis T.A., Duff I.S.* An approximate minimum degree ordering algorithm // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 1996. – 17, N. 4. – P. 886-905.
6. *Arnborg S., Lagergren J., Seese D.* Easy problems for tree-decomposable graphs // J. of Alg. – 1991. – 12. – P. 308-340.
7. *Bertele U., Brioschi F.* Nonserial Dynamic Programming. – New York: Academic Press. – 1972.
8. *Dechter R.* Bucket elimination: A unifying framework for reasoning // Artificial Intelligence. – 1999. – 113. – P. 41-85.
9. *Dechter R., El Fattah Y.* Topological parameters for time-space tradeoff // Artificial Intelligence. – 2001. – 125, No. 1-2, P. 93-118.
10. *Fomin F. V., Todinca I., Kratsch D.* Exact (exponential) algorithms for treewidth and minimum fill-in. – Report N 268. – Bergen: University of Bergen, Department of Informatics. – 2004.
11. *Fulkerson D.R., Gross O.A.* Incidence matrices and interval graphs // Pacific Journal of Math. – 1965. – 15. – P. 835–855.
12. *Heggernes P.* Minimal triangulations of graphs: A survey // Discrete Mathematics. – 2006. – 306, 3. – P. 297-317.
13. *Hicks I.V., Koster A.M.C.A., Kolotoglu E.* Branch and Tree Decomposition Techniques for Discrete Optimization // In: Tutorials in Operations Research. – New Orleans: INFORMS – 2005. – P. 1-29. (<http://ie.tamu.edu/People/faculty/Hicks/bwtw.pdf>)
14. *Nowak I.* Lagrangian decomposition of block-separable mixed-integer all-quadratic programs // Math. Programming. – 2005. – 102, N 2. P. 295-312.
15. *Neumaier A., Shcherbina O.* Nonserial dynamic programming and local decomposition algorithms in discrete programming (submitted). Available online: [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2006/03/1351.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2006/03/1351.html)
16. *Rosenthal A.* Dynamic programming is optimal for nonserial optimization problems // SIAM J. Comput. – 1982. – V.11, N 1. – P. 47-59.
17. *Parter S.* The use of linear graphs in Gauss elimination // SIAM Review. – 1961. – 3. – P. 119–130.
18. *Robertson N., Seymour P.D.* Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree width // J.Algorithms. – 1986. – 7. – P. 309-322.
19. *Shcherbina O.A.* Nonserial Dynamic Programming and Tree Decomposition in Discrete Optimization // Applied Optimization and Metaheuristic Innovations (Abstracts of Int.Conference, Yalta, July 19–21, 2006). – 2006. – P. 45-46.
20. *Vanderbeck F., Savelsbergh M.W.P.* A Generic View of Dantzig-Wolfe Decomposition for Integer Programming // Operations Research Letters. – 2006. – 34, P. 296-306.
21. *Van Roy T.J.* Cross decomposition for mixed integer programming with applications to facility location. // In: J.P. Brans (ed.), Operations Research. – 1981. – 81. – Amsterdam: North-Holland. – P. 579-587.
22. *Woeginger G.J.* Exact algorithms for NP-hard problems: A survey // In: M. Juenger, G. Reinelt and G. Rinaldi (eds.) «Combinatorial Optimization - Eureka! You shrink!». – LNCS 2570. – Springer. – 2003. – P. 185-207.
23. *Wolfe T.* Computational aspects of treewidth, lower bounds and networks reliability. – Dissertation: UU Universiteit Utrecht. – 2005. – 158 pp. <http://igitur-archive.library.uu.nl/dissertations/2005-0614-200103/index.htm>
24. *Yannakakis M.* Computing the minimum fill-in is NP-complete // SIAM J. Alg. Disc. Meth. – 1981. – 2. – P. 77–79.

# ДЕФЕКТНЫЕ ПОДМОДУЛИ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ КВАТЕРНИОННЫХ БИМОДУЛЯХ

И.И. Карпенко

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: *i\_karpenko@inbox.ru*

## Abstract

In this paper the defect submodule of skew-symmetric operator acting in a quaternionic Hilbert bimodule is constructed. The relation between defect submodules of the such operator and its symplectic image is received, so the analogue of von Neumann formulaes for the adjoint operator are given.

## ВВЕДЕНИЕ

Циклы работ М.М.Маламуда, В.А.Деркача [1], [2] создали определенное направление в области исследования регулярных расширений симметрических операторов в комплексных гильбертовых пространствах. Эти расширения охватывают такой важнейший класс линейных операторов, как дифференциальные операторы. В то же время для физических приложений [3] представляют интерес кососимметрические операторы в гильбертовых кватернионных модулях. Поэтому возникает реальная проблема построить аналогичный аппарат для исследования регулярных расширений таких кососимметрических операторов. В теории расширений симметрических операторов центральное место занимает понятие дефектных подпространств, характеризующих отклонение оператора от самосопряженного. Поэтому решение аналогичных задач в кватернионных модулях естественно начинается с анализа возможных подходов к определению дефектных подмодулей.

*Целью работы является* изучение свойств дефектных подмодулей кососимметрического оператора, обусловленных природой кватернионной линейности оператора.

## 1. ДЕФЕКТНЫЕ ПОДМОДУЛИ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В $\mathbb{H}$ -БИМОДУЛЯХ

Пусть  $\mathbb{H}$  — тело кватернионов,  $[q] = \{uq\bar{u} \mid u \in \mathbb{H}, |u| = 1\}$  — класс сопряженности элемента  $q$  в мультипликативной группе кватернионов  $\mathbb{H}^*$ . Всюду в данной работе  $\mathbb{F} \supset \mathbb{R}$  — не вещественное поле в  $\mathbb{H}$ , вещественным базисом которого являются кватернионы  $1, f$ , где  $f^2 = -1$ . Тогда, в соответствии с работой [4], существует такой кватернион  $\varepsilon$ :  $\varepsilon^2 = -1$ , что кватернионы  $1, f, \varepsilon, f\varepsilon$  образуют вещественный базис в  $\mathbb{H}$ , при этом всякий кватернион  $q$  можно представить в виде  $q = u + v\varepsilon$ , где  $u, v \in \mathbb{F}$ . Элемент поля  $\mathbb{F}$ , определяемый равенством  $\mathbb{F}(q) := u$ , называется  $\mathbb{F}$ -частью кватерниона  $q$ .

Рассмотрим гильбертов кватернионный бимодуль  $H$  со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Пусть  $L[H]$  — алгебра линейных ограниченных операторов над  $H$ .

**Определение 1.** Оператор  $A \in L[H]$  называется *кососимметрическим*, если его область определения  $D(A)$  плотна в  $H$ , и для любых векторов  $x, y \in D(A)$  выполняется равенство

$$\langle Ax, y \rangle + \langle x, Ay \rangle = 0.$$

Нетрудно показать, что для кососимметрического линейного оператора  $A$  в гильбертовом кватернионном бимодуле  $H$  всякий кватернион  $q$  с ненулевой вещественной частью является точкой регулярного типа, т.е.  $\|(A - R_q)x\| \geq k\|x\|$  ( $\forall x \in D(A)$ ). При этом множество значений  $\mathfrak{Im}(A - R_q)$  оператора  $A - R_q$ , где  $R_q x := xq$ , есть замкнутое множество в  $H$ .

**Предложение 1.** Для кососимметрического оператора  $A$  множество  $\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$  является правым  $\mathbb{H}$ -подмодулем.

**Доказательство.** Очевидно, что данное множество является аддитивной группой. Докажем его замкнутость относительно умножения на произвольный кватернион.

Рассмотрим поле  $\mathbb{F} = \mathbb{R}\langle 1, \vec{q} \rangle$ ,  $\mathbb{H} = \mathbb{F} + \mathbb{F}\varepsilon$ . Так как  $q, \bar{q} \in \mathbb{F}$ , то операторы  $A - R_q, A - R_{\bar{q}}$  являются  $\mathbb{F}$ -линейными, и, следовательно, их образы являются правыми  $\mathbb{F}$ -подмодулями. Поэтому поставленная задача будет решена, если мы докажем замкнутость данного множества относительно умножения на  $\varepsilon$ . Пусть  $x \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$ . Тогда существуют  $y, z \in D(A)$  такие, что  $x = (A - R_q)y, x = (A - R_{\bar{q}})z$ . В таком случае

$$\begin{aligned} x\varepsilon &= R_\varepsilon(A - R_q)y = R_\varepsilon(Ay - yq) = A(y\varepsilon) - (y\varepsilon)\bar{q} = (A - R_{\bar{q}})(y\varepsilon), \\ x\varepsilon &= R_\varepsilon(A - R_{\bar{q}})z = R_\varepsilon(Az - z\bar{q}) = A(z\varepsilon) - (z\varepsilon)q = (A - R_q)(z\varepsilon) \end{aligned}$$

Так как векторы  $y\varepsilon, z\varepsilon \in D(A)$ , то  $x\varepsilon \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$ . Таким образом, мы доказали, что  $\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$  - правый  $\mathbb{H}$ -модуль.

**Предложение 2.** Для любой пары кватернионов  $q$  и  $p$  из одного класса сопряженности верно равенство

$$\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}}) = \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{p}}). \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$ . Тогда существуют  $y, z \in D(A)$  такие, что  $x = (A - R_q)y, x = (A - R_{\bar{q}})z$ .

Так как  $p \in [q]$ , то  $p = uq\bar{u}$  для некоторого такого, что  $|u| = 1$ .

Пусть  $y_1 = y\bar{u}, z_1 = z\bar{u}$ . Тогда

$$\begin{aligned} (A - R_p)y_1 &= Ay_1 - y_1p = Ay\bar{u} - y\bar{u}uq\bar{u} = (Ay - yq)\bar{u} = x\bar{u}, \\ (A - R_{\bar{p}})z_1 &= Az_1 - z_1\bar{p} = Az\bar{u} - z\bar{u}uq\bar{u} = (Az - z\bar{q})\bar{u} = x\bar{u} \end{aligned}$$

Таким образом,  $x\bar{u} \in \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{p}})$ . Так как  $\mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{p}})$  - правый  $\mathbb{H}$ -модуль, то из последнего включения следует, что  $x \in \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{p}})$ .

Аналогично доказывается, что если  $x \in \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{p}})$ , то  $x \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$ .

Теперь в силу равенства (1) корректным будет следующее определение.

**Определение 2.** Дефектным подмодулем кососимметрического оператора  $A$ , соответствующим классу  $[q]$ , где  $q$  — кватернион с ненулевой вещественной частью, будем называть множество  $\mathfrak{N}_q = \left( \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}}) \right)^\perp$ .

## 2. ДЕФЕКТНЫЕ ПОДМОДУЛИ СИМПЛЕКТИЧЕСКОГО ОБРАЗА КОСОСИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И ФОРМУЛЫ ФОН НЕЙМАНА

Рассмотрим симплектический образ  $A^s$  оператора  $A$  относительно фиксированного поля  $\mathbb{F}$ . Напомним, что оператор  $A^s$  действует в  $\mathbb{F}$ -бимодуле  $H^\mathbb{F}$ , который также является гильбертовым относительно согласованного скалярного произведения  $(x, y) := \mathbb{F}(\langle x, y \rangle)$ . Очевидно, что оператор  $A^s$  также является кососимметрическим оператором в  $H^\mathbb{F}$ .

Возьмем точку  $q \in \mathbb{F}$  с ненулевой вещественной частью и, следуя общепринятым обозначениям, обозначим через  $\mathfrak{N}_q^\circ = \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})^{\perp_{\mathbb{F}}}$  дефектный  $\mathbb{F}$ -подмодуль оператора  $A^s$ . (Здесь символ  $\perp_{\mathbb{F}}$  означает ортогональное дополнение в  $H^\mathbb{F}$ .) Очевидно, что  $\mathfrak{N}_q^\circ = \ker(A^* - R_q)$ .

Как известно, для кососимметрического оператора размерности дефектных подмодулей  $\mathfrak{N}_q^\circ$  и  $\mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ$  совпадают. В нашем случае, когда кососимметрический оператор является симплектическим образом кватернионно линейного оператора, имеет место более сильное утверждение.

**Предложение 3.** Справедливо следующее равенство

$$\mathfrak{N}_q^\circ = R_\varepsilon \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ. \quad (1)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ$ , т.е.  $(A^* - R_{\bar{q}})x = 0$ . Тогда  $(A^* - R_q)(x\varepsilon) = R_\varepsilon(A^* - R_{\bar{q}})x = 0$ , откуда  $x\varepsilon \in \mathfrak{N}_q^\circ$ .

Аналогично доказывается обратное утверждение.

**Замечание 2.** Возникает естественный вопрос, можно ли дефектный подмодуль кососимметрического (и симметрического) оператора в  $\mathbb{F}$ -модуле определить так же, как в комплексных пространствах:  $\mathfrak{Im}(A - R_q)^\perp$ . По этому поводу интересно отметить, что  $\mathfrak{Im}(A - R_q)^\perp = 0$  для любого невещественного  $q$ . Действительно, если  $y \perp \mathfrak{Im}(A - R_q)$ , то для любого  $x \in D(A)$  имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Ax - xq, y \rangle = \langle Ax, y \rangle - \langle x, y \rangle q = (Ax, y) - (Af\varepsilon, y)\varepsilon - \\ &\quad - (x, y)q + (x\varepsilon, y)\varepsilon q = ((A - R_q)x, y) - ((A - R_{\bar{q}})x\varepsilon, y)\varepsilon. \end{aligned}$$

Данное равенство равносильно системе равенств

$$\begin{cases} ((A - R_q)x, y) = 0 \\ ((A - R_{\bar{q}})x\varepsilon, y)\varepsilon = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что  $y \in \mathfrak{N}_q^\circ \cap \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ = \{0\}$ . Так как данные дефектные подмодули линейно независимы, то  $y = 0$ . Для доказательства была использована обратная связь между скалярными произведениями в  $H$  и  $H^\mathbb{F}$ :

$$\langle x, y \rangle = (x, y) - (x\varepsilon, y)\varepsilon. \quad (2)$$

В дальнейшем весьма существенной является связь между дефектными подмодулями оператора  $A$  и его симплектического образа  $A^s$ .

**Предложение 4.** Имеет место следующее равенство:

$$1. \mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q^\circ \dot{+}_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ.$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathfrak{N}_q^\circ \dot{+}_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ$ , тогда  $x = x_q + x_{\bar{q}}$ , где  $x_q \in \mathfrak{N}_q^\circ$ ,  $x_{\bar{q}} \in \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ$ . С учетом равенства (2) для любого вектора  $y \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}})$ , получим

$$\langle x, y \rangle = \langle x_q, y \rangle + \langle x_{\bar{q}}, y \rangle = (x_q, y) - (x_q \varepsilon, y) \varepsilon + (x_{\bar{q}}, y) - (x_{\bar{q}} \varepsilon, y) \varepsilon = 0.$$

Следовательно,  $\mathfrak{N}_q^\circ \dot{+}_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ \subset \mathfrak{N}_q$ .

Обратное включение следует из очевидного соотношения  $(\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}}))^\perp \subset (\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\bar{q}}))^{\perp_{\mathbb{F}}}$  и свойств ортогонального дополнения в  $H^{\mathbb{F}}$ .

**Замечание 3.** В случае  $q \in \mathbb{R}$  множество  $\mathfrak{Im}(A - R_q)$  является правым  $\mathbb{H}$ -модулем, и дефектный подмодуль, соответствующий классу  $[q] = \{q\}$ , определяется равенством  $\mathfrak{N}_q = \mathfrak{Im}(A - R_q)^\perp$ . В силу предложения 5 в этом случае имеем  $\mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q^\circ$ .

Непосредственным следствием предложения 5 являются следующие утверждения.

**Предложение 5.** Имеет место следующее равенство

$$\dim [\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}] = \dim [\mathfrak{N}_q^\circ : \mathbb{F}]. \tag{3}$$

**Доказательство.** Утверждение следует из очевидных равенств:  $2 \dim [\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}] = \dim [\mathfrak{N}_q : \mathbb{F}] = 2 \dim [\mathfrak{N}_q^\circ : \mathbb{F}]$ .

**Предложение 6.** Если  $[p] \neq [q]$ , то дефектные подмодули  $\mathfrak{N}_q$  и  $\mathfrak{N}_p$  линейно независимы.

**Доказательство.** Пусть  $x \in \mathfrak{N}_q \cap \mathfrak{N}_p$ . Тогда имеют место представления  $x = x_1 + x_2$ ,  $x = y_1 + y_2$ ,  $x_1 \in \mathfrak{N}_q^\circ$ ,  $x_2 \in \mathfrak{N}_{\bar{q}}^\circ$ ,  $y_1 \in \mathfrak{N}_p^\circ$ ,  $y_2 \in \mathfrak{N}_{\bar{p}}^\circ$ . Таким образом, мы имеем равенство

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2. \tag{4}$$

Действуя на это равенство оператором  $A^*$ , получим

$$x_1 q + x_2 \bar{q} = y_1 p + y_2 \bar{p}. \tag{5}$$

Рассматривая совместно уравнения (4), (5), приходим к необходимым равенствам

$$y_1 = \left( x_1(\bar{p} - q) + x_2(\bar{p} - \bar{q}) \right) \frac{p - \bar{p}}{|p - \bar{p}|^2}; \quad y_2 = - \left( x_1(p - q) + x_2(p - \bar{q}) \right) \frac{p - \bar{p}}{|p - \bar{p}|^2}.$$

Но векторы  $y_1, y_2$  должны, кроме того, удовлетворять равенствам  $A^* y_1 = y_1 p$ ,  $A^* y_2 = y_2 \bar{p}$ . Если эти векторы отличны от нуля, то это возможно лишь при условии  $q(\bar{p} - q) = (\bar{p} - q)p$ . Из последнего равенства нетрудно получить, что  $|q| = |p|$ ,  $\operatorname{Re} p = \operatorname{Re} q$ . Это есть условие принадлежности кватернионов одному и тому же классу сопряженности. Полученное противоречие доказывает, что  $y_1 = y_2 = 0$ , и, следовательно,  $x = 0$ .

Свойства дефектных подмодулей симметрических операторов в модулях над полем естественным образом переносятся на дефектные подмодули кососимметрических операторов, а именно: размерность дефектного подмодуля  $\mathfrak{N}_q^\circ$  остается постоянной для всех  $q \in \mathbb{H}$ ,  $\operatorname{Re} q > 0$ , а также для всех  $q \in \mathbb{H}$ ,  $\operatorname{Re} q < 0$ . На основании предложения 5 аналогичный вывод можно сделать для кососимметрического оператора, действующего в кватернионном бимодуле.

Обозначим  $n_+ = \dim[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}]$ ,  $\operatorname{Re} q > 0$ ;  $n_- = \dim[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}]$ ,  $\operatorname{Re} q < 0$  и назовем числа  $n_\pm$  *дефектными числами* кососимметрического оператора  $A$ .

Для кососимметрического оператора  $A \in [H]$  имеют место формулы фон Неймана.  $A$  именно, справедливо разложение

$$D(A^*) = D(A) \dot{+} \mathfrak{N}_q^\circ \dot{+} \mathfrak{N}_{-\bar{q}}^\circ.$$

Тогда любой вектор  $x$  из  $D(A^*)$  представим в виде

$$x = x_0 + x_q + x_{-\bar{q}}, \quad (6)$$

где  $x_0 \in D(A)$ ,  $x_q \in \mathfrak{N}_q^\circ$ ,  $x_{-\bar{q}} \in \mathfrak{N}_{-\bar{q}}^\circ$ . При этом следует заметить, что

$$A^*x = -Ax_0 + x_q q - x_{-\bar{q}} \bar{q}. \quad (7)$$

Доказательство формул (6), (7) проводится аналогично доказательству соответствующих формул для симметрического оператора в комплексном гильбертовом пространстве.

**Замечание 4.** В силу замечания 3 для вещественного  $q$  имеет место следующее разложение области определения сопряженного оператора:

$$D(A^*) = D(A) \dot{+} \mathfrak{N}_q \dot{+} \mathfrak{N}_{-q},$$

где  $\mathfrak{N}_q$ ,  $\mathfrak{N}_{-q}$  уже  $\mathbb{H}$ -подмодули в  $H$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе всесторонне исследованы свойства дефектных подмодулей кососимметрических операторов, действующих в гильбертовых кватернионных бимодулях, установлена связь между дефектными подмодулями кососимметрического оператора и его симплектического образа. Полученные результаты в дальнейшем предполагается использовать для исследования регулярных расширений кососимметрических операторов методом граничных троек.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Albeverio, J. Brasche, M. Malamud, H. Neidhardt.* Inverse Spectral Theory for Symmetric Operators with Several Gaps: Scalar-Type Weyl Functions // University Bonn SFB 611, Preprint no. 166(2004).
2. *V. Derkach.* On Weyl function and generalized resolvents of a Hermitian operator in a Krein space // Integral Equations and Operator Theory, Birkhauser Basel, Volume 23, Number 4, December 1995 P. 387-415.
3. *Stefano De Leo, G. Ducati.* Quaternionic differential operators // arXiv:math-ph/0005023 v3 8 Aug 2002.
4. *Карпенко И.И., Сухтаев А.И., Тышкевич Д.Л.* Об одном подходе к дифференцированию функций кватернионного переменного // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, т. 17 (56), № 1 (2004), С. 30-37.

## ДОМИНАНТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

**М.А. Муратов, Ю.С. Пашкова**

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА

### Abstract

We study conditions under which Dominated Ergodic Theorems hold in Orlicz spaces for a positive contraction.

### ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [1] — [7]). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема.

**Теорема 1.** (ДЕТ) Пусть  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  пространство с мерой и  $T$  — положительное  $L_1 - L_\infty$  сжатие. Тогда для любой неотрицательной измеримой функции  $f$  имеет место неравенство

$$\|B_T f\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \quad (1 < p < \infty).$$

$$\text{где } B_T f = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f.$$

Доминантная эргодическая теорема рассматривалась Г.Харди и Д.Литлвудом [8] для трансляций, Н.Винером [7] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [9] для положительных сжатий.

В работах [10], [15],[16] были доказаны аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на отрезке  $[0, 1]$  и на полуоси  $[0, +\infty)$ .

Как известно, класс перестановочно инвариантных пространств достаточно широк. Он содержит пространства  $L_p$ ,  $p \geq 1$ , пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича и многие другие (см. например [11]). С другой стороны, каждое перестановочно инвариантное пространство  $E$  является промежуточным между пространствами  $L_1(0, \infty)$  и  $L_\infty(0, \infty)$ :

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

В свою очередь, пространства  $L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty)$  и  $L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  являются пространствами Орлича относительно специальным образом определенных функций Орлича ([12]). Таким образом, пространства Орлича играют особую роль в общей теории перестановочно инвариантных пространств.

В данной статье доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространстве Орлича измеримых функций на полуоси.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [10]—[14].

### 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть  $\mu$  – мера Лебега на полупрямой  $[0, \infty)$  и  $S(0, \infty)$  пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на  $(0, \infty)$ .

**Определение 1.** Функцией распределения функции  $f$  называют функцию  $n_f$ , определяемую для любого  $\tau \in (0, +\infty)$  равенством:

$$n_f(\tau) = n_{|f|}(\tau) = \mu\{t \in (0, \infty) : |f(t)| > \tau\} \quad (1.1)$$

Будем называть функции  $f$  и  $g$  равноизмеримыми [11], если

$$n_{|f|}(\tau) = n_{|g|}(\tau).$$

В дальнейшем будем рассматривать пространство  $S_0(0, +\infty)$  функций из  $S(0, +\infty)$ , для которых функция распределения  $n_f(\tau)$  не равна тождественно  $+\infty$ .

**Определение 2.** Перестановкой функции  $f$  в убывающем порядке или убывающей перестановкой функции  $f$  называют функцию  $f^*$ , определяемую равенством.

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in (0, \infty) : n_{|f(t)|}(\tau) \leq t\}. \quad (1.2)$$

Другими словами, перестановкой функции  $f \in S_0(0, +\infty)$  является убывающая непрерывная справа функция  $f^*$ , равноизмеримая с функцией  $f(t)$ .

**Определение 3.** Банахово пространство  $(E, \|\cdot\|_E)$  функций из  $S_0(0, +\infty)$  называется перестановочно инвариантным или симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^\circ$ . Если  $f \in S_0(0, +\infty)$ ,  $g \in E$  и  $|f(t)| \leq |g(t)|$  почти всюду на  $(0, +\infty)$ , то  $f \in E$  и  $\|f(t)\|_E \leq \|g(t)\|_E$ .

$S2^\circ$ . Если  $f \in S_0(0, +\infty)$ ,  $g \in E$  и  $f^*(t) = g^*(t)$ , то  $f \in E$  и  $\|f(t)\|_E = \|g(t)\|_E$ .

Как уже отмечалось во введении, класс симметричных пространств содержит пространства  $L_p(0, +\infty)$ , Орлича, Лоренца, Марцинкевича.

Имеет место теорема:

**Теорема 2.** Любое симметричное пространство  $(E, \|\cdot\|_E)$  является промежуточным между  $L_1(0, +\infty)$  и  $L_\infty(0, +\infty)$ , то есть

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

(См.[11], теорема 4.1)

**Определение 4.** Пусть  $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ . Функция

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t f^* d\mu, \quad t \in (0, +\infty)$$

называется максимальной функцией Харди-Литлвуда.



Приведем некоторые свойства функции  $f^{**}(t)$ , необходимые в дальнейшем:

1°.  $f^*(t) \leq f^{**}(t)$  для любого  $t \in (0, \infty)$ .

2°.  $f^{**}(t)$  непрерывная, невозрастающая на  $(0, +\infty)$  функция.

3°. Для каждого  $u > f^*(\infty)$  имеет место равенство:

$$f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u.$$

4°.  $f^{**}(\infty) = f^*(\infty)$ .

5°. Для любой функции  $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{G: \mu G=t} \int_G |f(s)| ds.$$

6°. Для любых функций  $f_1, f_2 \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

$$(f_1 + f_2)^{**}(t) \leq f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t).$$

7°. Если  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  и  $\sum_{k=1}^\infty f_k^{**}(t)$  сходится, то для любого множества  $G: \mu(G) = t$  ряд  $\sum_{k=1}^\infty f_k(t)$  сходится почти всюду на  $G$  и

$$\left(\sum_{k=1}^\infty f_k\right)^{**}(t) \leq \sum_{k=1}^\infty f_k^{**}(t).$$

Пусть  $E$  симметричное пространство. Легко видеть, что если  $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  и  $f^{**} \in E$ , то  $f \in E$ . Действительно, из  $0 \leq f^* \leq f^{**}$  следует, что  $f^* \in E$ . Далее, полагая  $g(t) = f^*(t)$ , получим, что  $g \in E$  и  $g^* = (f^*)^* = f^*$ , откуда  $f \in E$ .

Обозначим

$$H(E) = \{f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) : f^{**} \in E\}$$

и положим  $\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E$ .

Ясно, что  $H(E) \subset E$ .

**Предложение 7.** Пространство  $(H(E), \|\cdot\|_{H(E)})$  является симметричным.

**Доказательство.** 1) Пусть  $f \in S_0(0, +\infty)$ ,  $g \in H(E)$  и  $|f| \leq |g|$  почти всюду.

Следовательно,  $n_f(y) \leq n_g(y) \forall y \in [0, +\infty)$  и значит  $f^*(s) \leq g^*(s)$  почти всюду и потому  $f^{**}(t) \leq g^{**}(t) \forall t \in (0, +\infty)$ . Так как  $g \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ ,  $g^{**} \in E$  и  $E$  — симметричное пространство, то  $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  и  $f^{**} \in E$ . Следовательно,  $f \in H(E)$ . Наконец,

$$\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E \leq \|g^{**}\|_E = \|g\|_{H(E)}.$$

2) Пусть  $f \in S_0(0, +\infty)$ ,  $g \in H(E)$  и  $f^* = g^*$ .

Следовательно,  $f^{**} = g^{**}$ . Так как  $g \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  и  $g^{**} \in E$ , то  $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  и  $f^{**} \in E$ , то есть  $f \in H(E)$ . Кроме того,

$$\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E = \|g^{**}\|_E = \|g\|_{H(E)}.$$

3) Покажем, что пространство  $H(E)$  — банахово.

Пусть  $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H(E)$  такая последовательность, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{H(E)} < \infty$ . Так как  $\|f_k\|_{H(E)} = \|f_k^{**}\|_E$ , то  $\{f_k^{**}\}_{k=1}^{\infty} \subset E$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^{**}\|_E < \infty$ . Но  $E$  — банахово пространство. Поэтому существует  $f \in E$  такое, что  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{**} = f$ . Тогда

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)^{**} \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{**} = f.$$

Следовательно,  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L_1(0, +\infty) + L_{\infty}(0, +\infty)$  и  $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k)^{**} \in E$ . Откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in H(E).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k \right\|_{H(E)} &= \left\| \left( \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k \right)^{**} \right\|_E \leq \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k^{**} \right\|_E \leq \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k^{**}\|_E \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\|_{H(E)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ .

Следовательно,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^N f_k \right\|_{H(E)} = 0$$

и поэтому пространство  $H(E)$  банахово

Предложение доказано.

Имеет место следующая цепочка вложений:

$$L_1(0, +\infty) \cap L_{\infty}(0, +\infty) \subset H(E) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_{\infty}(0, +\infty).$$

**Определение 5.** Положительный линейный оператор

$$T: L_1(0, +\infty) + L_{\infty}(0, +\infty) \longrightarrow L_1(0, +\infty) + L_{\infty}(0, +\infty)$$

называется положительным  $L_1 - L_{\infty}$  сжатием или абсолютным сжатием, если

1<sup>o</sup>.  $T$  действует в  $L_1(0, +\infty)$  и  $L_{\infty}(0, +\infty)$ ;

2<sup>o</sup>.  $\|T\|_{L_1 \rightarrow L_1} \leq 1$ ,  $\|T\|_{L_{\infty} \rightarrow L_{\infty}} \leq 1$ .

Обозначим, как и в [10] множество всех положительных  $L_1 - L_{\infty}$  сжатий через  $\mathcal{PC}$ .

Если  $E$  перестановочно инвариантное пространство, то для любого оператора  $T \in \mathcal{PC}$

$$T(H(E)) \subset H(E)$$

и  $\|Tf\|_{H(E)} \leq \|f\|_{H(E)}$ .

## 2. ПРОСТРАНСТВА ОРЛИЧА

**Определение 6.** Функция  $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  называется функцией Орлича, если

- 1)  $\Phi(0) = 0$
- 2)  $\Phi$  непрерывна слева:  $\lim_{u \uparrow u_0} \Phi(u) = \Phi(u_0)$
- 3)  $\Phi$  - неубывающая функция:

$$0 \leq u_1 \leq u_2 \Rightarrow \Phi(u_1) \leq \Phi(u_2)$$

- 4)  $\Phi$  - выпуклая функция, то есть для любых  $u_1, u_2 \in [0, \infty)$

$$\Phi(\alpha u_1 + (1 - \alpha)u_2) \leq \alpha\Phi(u_1) + (1 - \alpha)\Phi(u_2)$$

- 5)  $\Phi$  - нетривиальная функция, то есть существуют такие  $u_1 > 0$  и  $u_2 > 0$ , что

$$\Phi(u_1) > 0 \quad \text{и} \quad \Phi(u_2) < \infty$$

Так как  $\Phi(u)$  - непрерывная слева выпуклая функция, то она имеет односторонние производные  $\Phi'_+(u)$  и  $\Phi'_-(u)$ , причем  $\Phi'_+(u)$  и  $\Phi'_-(u)$  неубывающие,  $\Phi'_+(u) \leq \Phi'_-(u)$ ,  $\Phi'_+(u)$  - непрерывна справа, а  $\Phi'_-(u)$  - непрерывна слева [12]

Обозначим левую производную функции  $\Phi(u)$  через

$$\varphi(u) = \Phi'_-(u) = \Phi'(u)$$

Функцию Орлича можно записать в виде

$$\Phi(u) = \int_0^u \varphi(x) dx, \quad 0 \leq u < \infty.$$

Функция  $\varphi(u)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $\varphi(u) \geq 0$ ;
- 2)  $\varphi(u)$  - неубывающая функция;
- 3)  $\varphi(u)$  непрерывна всюду, за исключением счетного множества точек, в которых она непрерывна слева.
- 4)  $\varphi(u)$  нетривиальна и

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \infty.$$

Пусть  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  - измеримая функция.

**Определение 7.** Модулем Орлича называется интеграл

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(|f|) d\mu$$

Заметим, что  $M_\Phi(f) = M_\Phi(|f|)$ .

**Определение 8.** Пространством Орлича называется множество

$$L_\Phi = \left\{ f \in S(0, \infty) : M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) < \infty \text{ для некоторого } a > 0 \right\}.$$

Рассмотрим важнейшие свойства пространства Орлича.

**Теорема 3.** Пространство  $(L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$  является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_\Phi = \inf\{a > 0 : M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1\},$$

**Доказательство.** Докажем сначала, что  $L_\Phi$  - нормированное линейное пространство. Из определения нормы следует

$$\begin{aligned} \|\alpha f\|_\Phi &= \inf\{a > 0 : M_\Phi\left(\frac{\alpha f}{a}\right) \leq 1\} = \inf\{a > 0 : M_\Phi\left(\frac{f}{a/|\alpha|}\right) \leq 1\} = \\ &= |\alpha| \inf\left\{\frac{a}{|\alpha|} > 0 : M_\Phi\left(\frac{f}{a/|\alpha|}\right) \leq 1\right\} = |\alpha| \inf\left\{a_1 > 0 : M_\Phi\left(\frac{f}{a_1}\right) \leq 1\right\} = \\ &= |\alpha| \|f\|_\Phi. \end{aligned}$$

Поэтому, если  $f \in L_\Phi$ , то  $\alpha f \in L_\Phi$ .

Пусть теперь  $f, g \in L_\Phi$ , и пусть  $a = \|f\|_\Phi$ ,  $b = \|g\|_\Phi$ . Тогда

$$\frac{f}{a}, \frac{g}{b} \in B_\Phi = \{f : M_\Phi(f) \leq 1\},$$

где  $B_\Phi$  - единичный шар Орлича ([12]).

Заметим, что  $B_\Phi$  выпуклое множество, поэтому если

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{a}{a+b}, \quad \text{то} \quad 1 - \alpha = \frac{b}{a+b} \quad \text{и следовательно} \\ \alpha \frac{f}{a} + (1 - \alpha) \frac{g}{b} = \frac{a}{a+b} \frac{f}{a} + \frac{b}{a+b} \frac{g}{b} = \frac{f+g}{a+b} \in B_\Phi. \end{aligned}$$

Тогда

$$\left\| \alpha \frac{f}{a} + (1 - \alpha) \frac{g}{b} \right\|_\Phi = \left\| \frac{f+g}{a+b} \right\|_\Phi \leq 1$$

Следовательно

$$\|f+g\|_\Phi \leq a+b = \|f\|_\Phi + \|g\|_\Phi.$$

Отсюда, в частности, следует, что  $f+g \in L_\Phi$ .

Пусть теперь  $\|f\|_\Phi = 0$ . Тогда  $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1$  для любого  $a > 0$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) = \int \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu \geq \Phi\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) \mu\{|f| > \varepsilon\}.$$

При  $a \rightarrow 0$  получим, что  $\Phi(\varepsilon/a) \rightarrow \infty$ . Поэтому

$$\mu\{|f| > \varepsilon\} = 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

То есть  $f = 0$  почти всюду.

Теперь докажем полноту пространства  $L_\Phi$ .

Рассмотрим последовательность  $f_n \in L_\Phi$  такую, что

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots, \quad \text{и} \quad \|f_n\|_\Phi \leq 1 \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Тогда  $\int \Phi(|f_n|) d\mu \leq 1$ .

Если  $f = \lim f_n$ , то  $\Phi(|f_n|) \rightarrow \Phi(|f|)$  ввиду непрерывности функции  $\Phi$  слева.

Следовательно, по теореме о монотонной сходимости,  $\int \Phi(|f|) d\mu \leq 1$ .

Отсюда  $\|f\|_{\Phi} \leq 1$  и  $f \in L_{\Phi}$ .

Пусть  $\{f_n\}$  - последовательность Коши в  $L_{\Phi}$ . Тогда, найдется такая подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}$ , для которой

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_{\Phi} \leq 2^{-k}.$$

Обозначим

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|.$$

Так как функция  $\Phi$  выпукла и непрерывна слева, имеем:

$$\Phi(g) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|\right) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} 2^k |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \Phi(2^k |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|).$$

Тогда

$$\int \Phi(g) d\mu \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \int \Phi(2^k |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|) d\mu = 1.$$

Поэтому  $\|g\|_{\Phi} \leq 1$  и  $g \in L_{\Phi}$ .

Значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$$

сходится почти всюду. Поэтому ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) + f_{n_0}$$

тоже сходится почти всюду и  $|f - f_{n_0}| \leq g$ . То есть  $f \in L_{\Phi}$  и

$$f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}.$$

Так как  $\{f_n\}$  - последовательность Коши, имеющая сходящуюся подпоследовательность  $\{f_{n_k}\}$ , то  $\{f_n\}$  сходится и

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n.$$

Следовательно  $L_{\Phi}$  - банахово пространство.

Теорема доказана.

Заметим, что  $f \in L_{\Phi}$  тогда и только тогда, когда  $|f| \in L_{\Phi}$  и

$$\||f|\|_{\Phi} = \|f\|_{\Phi}.$$

**Теорема 4.** Пространство  $(L_{\Phi}, \|\cdot\|_{\Phi})$  является симметричным пространством, то есть

1. если  $|g(t)| \leq |f(t)|$ ,  $f(t) \in L_{\Phi}$ , то  $g(t) \in L_{\Phi}$  и  $\|g\|_{\Phi} \leq \|f\|_{\Phi}$ ;
2. если  $f(t) \in L_{\Phi}$ , функция  $g(t)$  равноизмерима с  $f(t)$ , то  $g(t) \in L_{\Phi}$  и  $\|g\|_{\Phi} = \|f\|_{\Phi}$ .

**Доказательство.** 1. Пусть  $|g(t)| \leq |f(t)|$ ,  $f(t) \in L_\Phi$ , следовательно

$$\exists a > 0 : M_\Phi \left( \frac{f}{a} \right) = \int \Phi \left( \frac{|f|}{a} \right) d\mu < \infty.$$

Так как  $|g| \leq |f|$ , то

$$\frac{|g|}{a} \leq \frac{|f|}{a}.$$

Тогда

$$\Phi \left( \frac{|g|}{a} \right) \leq \Phi \left( \frac{|f|}{a} \right) \text{ и } M_\Phi \left( \frac{g}{a} \right) \leq M_\Phi \left( \frac{f}{a} \right) < \infty.$$

Следовательно

$$g \in L_\Phi.$$

Более того, если  $M_\Phi \left( \frac{f}{a} \right) \leq 1$ , то  $M_\Phi \left( \frac{g}{a} \right) \leq 1$ .

Поэтому

$$\|g\|_\Phi = \inf \{ a : M_\Phi \left( \frac{g}{a} \right) \leq 1 \} \leq \inf \{ a : M_\Phi \left( \frac{f}{a} \right) \leq 1 \} = \|f\|_\Phi.$$

2. Пусть  $f \in L_\Phi$  и  $g$  равноизмерима с  $f$ , то есть

$$\mu \{ t : f(t) > \tau \} = \mu \{ t : g(t) > \tau \} \quad \forall \tau > 0.$$

Покажем, что в этом случае  $M_\Phi(g) = M_\Phi(f)$ .

Действительно

$$\begin{aligned} M_\Phi(f) &= \int \Phi(|f|) d\mu = \int_0^\infty n_{\Phi(|f|)}(\tau) d\tau = \int_0^\infty \mu \{ t : \Phi(|f|) > \tau \} d\tau = \\ &= \int_0^\infty \mu \{ t : \Phi(|f|) > \Phi(u) \} \varphi(u) du = \int_0^\infty \mu \{ t : |f| > u \} \varphi(u) du = \\ &= \int_0^\infty \mu \{ t : |g| > u \} \varphi(u) du = M_\Phi(g). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|g\|_\Phi = \inf \{ a : M_\Phi \left( \frac{|g|}{a} \right) \leq 1 \} = \inf \{ a : M_\Phi \left( \frac{|f|}{a} \right) \leq 1 \} = \|f\|_\Phi.$$

Теорема доказана.

3. ДОМИНАНТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

Пусть  $\Phi(u)$  - функция Орлича.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(x) = x \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du$$

**Предложение 8.** Функция  $\Phi_1(x)$  является функцией Орлича.

**Доказательство.** 1)  $\Phi_1(0) = 0 \int_0^0 \frac{\Phi'(u)}{u} du = 0$ .

2) Функция  $\Phi_1(x)$  непрерывна слева, так как

$$\lim_{x \uparrow x_0} \Phi_1(x) = \lim_{x \uparrow x_0} x \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du = x_0 \int_0^{x_0} \frac{\Phi'(u)}{u} du = \Phi_1(x_0).$$

3) Функция  $\Phi_1(x)$  неубывает, так как

$$\Phi_1'(x) = \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du + x \cdot \frac{\Phi'(x)}{x} = \int_0^x \frac{\varphi(u)}{u} du + \varphi(x) \geq 0.$$

4) Для доказательства выпуклости функции  $\Phi_1(x)$  рассмотрим функцию

$$\tilde{\Phi}(x) = x \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du - \Phi(x) = \Phi_1(x) - \Phi(x).$$

Так как

$$\tilde{\Phi}'(x) = \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du + \Phi'(x) - \Phi'(x) = \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du,$$

$$\tilde{\Phi}''(x) = \frac{\Phi'(x)}{x} \geq 0, \text{ при } x \geq 0,$$

то функция  $\tilde{\Phi}(x)$  выпукла и потому функция

$$\Phi_1(x) = \tilde{\Phi}(x) + \Phi(x)$$

тоже выпукла.

5) Функция  $\Phi_1(x)$  нетривиальна, так как нетривиальна функция  $\Phi(x)$ .

Предложение доказано.

**Предложение 9.**  $\Phi(x) \leq \Phi_1(x)$  для любого  $x > 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $x \in (0, \infty)$  и  $u \in (0, x]$ . Тогда

$$\frac{1}{u} \geq \frac{1}{x}, \text{ и поэтому } \frac{\Phi'(u)}{u} \geq \frac{\Phi'(u)}{x}.$$

Следовательно

$$\int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du \geq \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{x} du.$$

Поэтому

$$x \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{u} du \geq x \int_0^x \frac{\Phi'(u)}{x} du = \int_0^x \Phi'(u) du = \Phi(x),$$

то

$$\Phi_1(x) \geq \Phi(x).$$

Предложение доказано.

**Теорема 5.**  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ .

**Доказательство.** Пусть  $f \in H(L_\Phi)$ . Тогда  $f^{**} \in L_\Phi$  и поэтому

$$M_\Phi(f^{**}) < \infty.$$

Пользуясь равенством ([12])

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})(x) dx = \int_0^\infty \Phi'(x) \mu\{f^{**} > x\} dx$$

и неравенством ([15])

$$\frac{1}{x} \int_{f^* > x} f^* d\mu \leq \mu\{f^{**} > x\}, \text{ если } x > f^{**}(+\infty),$$

получим:

$$\begin{aligned} M_\Phi(f^{**}) &= \int_0^\infty \Phi(f^{**})(x) dx = \int_0^\infty \Phi(f^{**}) d\mu = \\ &= \int_0^\infty \Phi'(x) \mu\{f^{**} > x\} dx \geq \int_0^\infty \Phi'(x) \left( \frac{1}{x} \int_{\{f^* > x\}} f^* d\mu \right) dx = \\ &= \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} \left( \int_{\{f^* > x\}} f^* d\mu \right) dx = \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} \left[ x \cdot \mu\{f^* > x\} + \int_x^\infty \mu\{f^* > t\} dt \right] dx = \\ &= \int_0^\infty \Phi'(x) \mu\{f^* > x\} dx + \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} \left[ \int_x^\infty \mu\{f^* > t\} dt \right] dx = \\ &= \int_0^\infty \Phi(f^*)(x) dx + \int_0^\infty \mu\{f^* > t\} \left[ \int_0^t \frac{\Phi'(x)}{x} dx \right] dt = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\infty} \Phi(f^*) dx + \int_0^{\infty} \mu\{f^* > t\}[\Phi'_1(t) - \Phi'(t)] dt = \\
 &= \int_0^{\infty} \Phi(f^*) dx + \int_0^{\infty} \Phi'_1(t)\mu\{f^* > t\} dt - \int_0^{\infty} \Phi'(t)\mu\{f^* > t\} dt = \\
 &\quad \int_0^{\infty} \Phi'_1(t)\mu\{f^* > t\} dt = \int_0^{\infty} \Phi_1(f^*)(x) dx = M_{\Phi_1}(f^*).
 \end{aligned}$$

Следовательно  $M_{\Phi_1}(f^*) < \infty$ , откуда  $f^* \in L_{\Phi_1}$  и  $f \in L_{\Phi_1}$ .  
 Таким образом, мы получили вложение

$$H(L_{\Phi}) \subset L_{\Phi_1}.$$

Пусть теперь  $f \in L_{\Phi_1}$ . Тогда  $f^* \in L_{\Phi_1}$ , и поэтому

$$M_{\Phi_1}(f^*) < \infty.$$

Так как  $\Phi \leq \Phi_1$ , то  $L_{\Phi_1} \subset L_{\Phi}$ . Отсюда

$$f^* \in L_{\Phi} \text{ и } M_{\Phi}(f^*) < \infty.$$

В силу неравенства ([15])

$$\mu\{f^{**} \geq cx\} \leq \frac{1}{(c-1)x} \int_{\{f^* > x\}} f^* d\mu, \quad c > 1,$$

имеем:

$$\begin{aligned}
 M_{\Phi_1}(f^*) &= \int_0^{\infty} \frac{\Phi'(x)}{x} \left( \int_{\{f^* > x\}} f^* d\mu \right) dx \geq \int_0^{\infty} \Phi'(x)(c-1)\mu\{f^{**} \geq cx\} dx = \\
 &= (c-1) \int_0^{\infty} \Phi'(x)\mu\left\{\frac{f^{**}}{c} \geq x\right\} dx = (c-1) \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{f^{**}}{c}\right) dx = (c-1)M_{\Phi}\left(\frac{f^{**}}{c}\right).
 \end{aligned}$$

Следовательно

$$M_{\Phi}\left(\frac{f^{**}}{c}\right) < \infty.$$

Поэтому

$$\frac{f^{**}}{c} \in L_{\Phi}$$

и значит  $f^{**} \in L_{\Phi}$ .

Таким образом  $f \in H(L_{\Phi})$ . Тогда

$$L_{\Phi_1} \subset H(L_{\Phi}).$$

Объединяя полученные вложения, имеем

$$H(L_{\Phi}) = L_{\Phi_1}.$$

Теорема доказана.

**Замечание 5.** Пространство  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$  является банаховым, как относительно нормы  $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$ , так и относительно нормы  $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$ .

**Предложение 10.** Нормы  $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$  и  $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$  эквивалентны на пространстве  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ . Более того, для любой функции  $f \in H(L_\Phi)$ , имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_\Phi} \leq \|f\|_{L_{\Phi_1}} \leq \|f\|_{H(L_\Phi)}.$$

**Доказательство.** Так как пространства  $L_\Phi$  и  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$  симметричны, то без ограничения общности можно считать, что  $f = f^*$ .

Пусть  $f^* \in H(L_\Phi)$ . Тогда  $f^{**} \in L_\Phi$  и, как было показано выше

$$M_\Phi(f^{**}) \geq M_{\Phi_1}(f^*).$$

В свою очередь, из неравенства  $\Phi(x) \leq \Phi_1(x)$ , имеем

$$M_\Phi(f^{**}) \geq M_{\Phi_1}(f^*) \geq M_\Phi(f^*).$$

Поэтому имеет место следующая цепочка вложений

$$\left\{ a : M_\Phi\left(\frac{f^{**}}{a}\right) \leq 1 \right\} \subseteq \left\{ a : M_{\Phi_1}\left(\frac{f^*}{a}\right) \leq 1 \right\} \subseteq \left\{ a : M_\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right) \leq 1 \right\}.$$

Следовательно

$$\|f^*\|_{L_\Phi} \leq \|f^*\|_{L_{\Phi_1}} \leq \|f^{**}\|_{L_\Phi} = \|f^*\|_{H(L_\Phi)}.$$

Таким образом, банаховы нормы  $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$  и  $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$  согласованы и, потому, эквивалентны на пространстве  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$  ([17]).

Предложение доказано.

Для каждого оператора  $T \in \mathcal{PC}$  обозначим:

$$B_T f = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Следующая теорема представляет собой аналог доминантной эргодической теоремы для пространства Орлича  $L_\Phi$ .

**Теорема 6.** Пусть  $(L_\Phi, \|\cdot\|_{L_\Phi})$  пространство Орлича и  $T \in \mathcal{PC}$ .

Тогда из  $f \in L_{\Phi_1}$  следует, что  $B_T f \in L_\Phi$  и

$$\|B_T f\|_{L_\Phi} \leq \|f\|_{H(L_\Phi)} = \|f^{**}\|_{L_\Phi}.$$

**Доказательство.** Пусть  $T \in \mathcal{PC}$ . Так как  $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ , то из  $f \in L_{\Phi_1}$  следует что  $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$  и  $f^{**} \in L_\Phi$ . Как было показано в [15],

$$(B_T f)^*(x) \leq f^{**}(x), \text{ для любого } x \in (0, +\infty).$$

Поэтому,  $(B_T f)^* \in L_\Phi$  и

$$\|(B_T f)^*\|_{L_\Phi} \leq \|f^{**}\|_{L_\Phi}.$$

Но функции  $B_T f$  и  $(B_T f)^*$  имеют одинаковые убывающие перестановки:

$$[(B_T f)^*]^* = (B_T f)^*.$$

Поэтому  $B_T f \in L_\Phi$  и

$$\|B_T f\|_{L_\Phi} = \|(B_T f)^*\|_{L_\Phi} \leq \|f^{**}\|_{L_\Phi} = \|f\|_{H(L_\Phi)}.$$

Теорема доказана.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами данной статьи являются теоремы 5 и 6. Первая из них показывает, что класс  $H(L_\Phi)$  является пространством Орлича, порожденным функцией  $\Phi_1$ , причем банаховы нормы  $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$  и  $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$  согласованы и, потому, эквивалентны. Вторая является аналогом доминантной эргодической теоремы для пространства Орлича  $L_\Phi$ .

В дальнейшем представляется интересным рассмотрение классов Зигмунда  $L \log^n L$  измеримых функций на полуоси.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. von Neumann J. Proof of the qlasiergodic hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 18, 70–82 (1932).
2. Birkhoff G. D. Proof of the ergodic theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 17, 656–660 (1931).
3. Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces Proc. Imp. Acad. Yokyo, No. 14, 292–294 (1938).
4. Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces. Proc. Imp. Acad. Yokyo, No. 14, 295–300 (1938).
5. Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators J. Reinc. Ang. Math., No. 205, 101–106 (1960).
6. Hopf E. The general temporally discrete Markov process, J. Rat. Meca. Anal., No. 3, 13–45 (1954).
7. Weiner N. The ergodic theorem, Duke. Math. J., No. 5, 1–18 (1939).
8. Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application, Acta Math., No. 54, 81–116 (1930).
9. Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages, J. Rat. Mech. Anal., No. 5, 129–178 (1956).
10. Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces, Studia Mathem., No. 128 (2), 145–157 (1998).
11. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978, 400с.
12. Edgar G.A., Sucheston L. Stopping times and directed processes // Cambridge: University press, – 1992. – 430 P.
13. Krengel U., Ergodik Theorems, de Gruyter Stud. Math., de Gruyter, Berlin, 1985, 357 p.
14. Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. function Spaces. Springer. – 1979.
15. М. А. Муратов, Ю. С. Пащкова, Б. А. Рубштейн Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003, Т.17 (56), № 2, С. 36 - 48.
16. Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналогии доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах. – Ученые записки Таврического Национального Университета, 2004. — т. 18 (57), № 1, С. 43 - 51.
17. Антоневич А. Б., Радыно Я. В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. БГУ, Минск. – 2003. – 430 с.

УДК 519.713.1: 51.681.3

## МЕТОД ВЕРИФИКАЦИИ СВОЙСТВ РЕАКТИВНОЙ СИСТЕМЫ НА МОДЕЛИ

Лукьянова Е.А.

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: *lukyanovaea@mail.ru*

A new approach to verification of asynchronous discrete dynamic and active systems is described. This approach is founded on using temporal logic (CTL — Computation Tree Logic), Petri's nets and systems of linear Diophantine equations.

### ВВЕДЕНИЕ

Начиная с самых ранних этапов проектирования реактивной системы, задача обеспечения ее корректности является самой важной. Это связано с тем, что задача исправления ошибки на более поздних этапах проверки становится все более сложной, ответственной и дорогостоящей по времени и материальным затратам. Альтернативой имитационному моделированию и тестированию для проверки правильности проектируемой системы являются методы формальной верификации, обеспечивающие глубокий анализ возможных вариантов поведения системы. Одним из таких подходов является метод верификации на модели. При использовании этого метода для заданной анализируемой системы строится ее абстрактная формальная модель. Проверяемое свойство или требование выражается на формальном математическом языке (например, представляется в виде логической формулы) и верификация программы сводится к проверке выполнимости формализованного требования (спецификации) на абстрактной модели программы [1]. Реактивная система состоит из нескольких компонентов, которые взаимодействуют друг с другом и с внешним окружением системы. В отличие от функциональных систем, в которых семантика представляется как функция от входных и выходных значений, реактивная система определяется временными свойствами. Под временным свойством понимается множество поведенческих характеристик системы во времени. Считается, что система удовлетворяет данной характеристике, если результат каждого выполнения системы принадлежит этому множеству. С логической точки зрения система описывается семантической моделью Крипке [2], а её свойства - логической формулой. Таким образом, доказательство корректности системы равносильно определению выполнимости формул логики на модели системы. Для того чтобы выполнить подобную проверку, необходимо использовать язык моделирования, посредством которого система может быть описана, язык спецификаций для формулировки свойств и дедуктивный алгоритм для собственно проверки. Целью данной работы является теоретическое обоснование построения алгоритма создания модели по заданной системе и алгоритма проверки спецификации на этой модели, что дает возможность построить автоматическую систему верификации программ, удобную для практического применения.

## 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ

В работе предлагается для заданной анализируемой системы строить ее абстрактную формальную модель в виде сети Петри (СП) [3], которая должна отражать аспекты системы, имеющие отношение к проверяемым свойствам, и сохранять, представляющие интерес для анализа, свойства моделируемой системы. Следовательно, модель системы представляет собой тройку  $(S, W, M_0)$ , где  $S$  — сеть,  $W : F \rightarrow N$  — функция кратности дуг ( $F$  — отношение инцидентности или зависимость между местами  $P$  и переходами  $T$ ),  $M_0$  — начальная разметка сети. Под разметкой сети  $S$  понимается функция  $M : P \rightarrow N$ , описывающая количество фишек  $M(p)$ , которые помещаются этой разметкой в каждое место  $p \in P$ . Как правило, разметки представляются как мультимножества множества мест. Например, мультимножество  $\{p_1, 2p_2, 5p_4\}$  представляет разметку, которая ставит одну фишку в место  $p_1$ , две фишки в место  $p_2$ , пять фишек в место  $p_4$  и никаких фишек в другие места.

Используя отношение инцидентности  $F$  и функцию кратности дуг  $W$ , введем функцию инцидентности  $I : (P \times T) \cup (T \times P) \rightarrow N$ , которая определяется так:

$$I(x, y) = \begin{cases} n, & \text{если } (x, y) \in F \wedge W(x, y) = n; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin F. \end{cases} \quad (1)$$

Если предположить, что все места в СП каким-то образом строго упорядочены, т.е.  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , то разметку  $M$  сети (в том числе и начальную) можно задать как вектор чисел  $M = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  такой, что для любого  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  $m_i = M(p_i)$ . Кроме того, каждому переходу  $t$  в такой сети можно сопоставить два вектора  $\bullet F(t)$  и  $F(t) \bullet$  с целыми коэффициентами длины  $n$ , где  $n = |P|$ :  $\bullet F(t) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , где  $b_i = I(p_i, t)$ ;  $F(t) \bullet = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , где  $c_i = I(t, p_i)$ .

Переход  $t$  может сработать при некоторой разметке  $M$  сети  $S$ , если  $\forall p \in \bullet t : M(p) \geq I(p, t)$ , т.е. каждое входное место  $p$  перехода  $t$  имеет разметку не меньшую, чем кратность дуги, которая соединяет  $p$  и  $t$ . Это условие в векторном виде записывается так:  $M \geq \bullet t$ .

Переход  $t \in T$  называется допустимым или возможным при разметке  $M$ , если  $\forall p \in \bullet t : M(p) \geq I(p, t)$ . Если переход  $t$  допустимый при разметке  $M$ , то говорят, что  $t$  срабатывает и порождает при этом новую разметку  $M'$  ( $M \xrightarrow{t} M'$ ), где  $M'(p) = M(p) + I(t, p) - I(p, t)$ . Последовательность переходов  $\sigma = t_1, t_2, \dots, t_r$  допустима для СП  $(S, W, M_0)$ , если существуют разметки  $M_1, M_2, \dots, M_r$  такие, что  $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \xrightarrow{t_2} M_2 \xrightarrow{t_3} \dots \xrightarrow{t_r} M_r$ . При этом разметка  $M_r$  называется достижимой из начальной разметки  $M_0$  с помощью последовательности переходов  $\sigma (M_0 \xrightarrow{\sigma} M_r)$ .

Если для произвольной достижимой разметки  $M$  верно неравенство

$$M(p_i) \leq 1, \forall i (1 \leq i \leq |P|), \quad (2)$$

то место  $p_i$  в СП называется 1-безопасным. Если все места СП 1-безопасны, то СП называется *безопасной*.

СП называется *свободной от дедлоков*, если каждая достижимая разметка СП допускает некоторый переход.

В 1-безопасных СП, где каждое место может иметь не более одной фишки, переход, имеющий  $k$  входных мест является допустимым на разметке  $M$ , если  $M$  размещает хотя бы  $k$  фишек в его входные места. Другими словами, дедлоковские разметки удовлетворяют неравенству  $\sum_{p \in \bullet t} M(p) \leq |\bullet t| - 1$  для каждого перехода  $t \in T$ .

## 2. СОСТАВЛЕНИЕ СПЕЦИФИКАЦИИ

Набор свойств, которым должна удовлетворять тестируемая система, зададим с помощью темпоральной логики — логики CTL (CTL — Computation Tree Logic) [4], которая является удобным формализмом для представления и анализа поведения системы во времени. Формулы CTL-логики строятся из элементарных высказываний, булевских функций и временных операторов. Допускаются временные операторы вида: либо  $\square$  ("для всех путей вычисления"), либо  $\diamond$  ("для некоторого пути вычисления"), между которыми существует отношение двойственности, и за которыми следует один линейный временной оператор  $\circ$  ("следующий момент"),  $\odot$  ("когда-то в будущем"),  $\bullet$  ("всегда"),  $\blacklozenge$  ("до тех пор пока"),  $\ominus$  ("высвободить").

Семантика CTL определяется с помощью структуры Крипке  $K = (G, R, f)$ , где  $G$  — множество состояний,  $R \subseteq G \times G$  — отношение переходов,  $f : G \rightarrow B(P)$ , где  $P$  — множество атомарных высказываний, а  $B(P)$  — булеан множества  $P$ . Путем в  $K$  называется бесконечная последовательность состояний  $\pi = g_1, g_2, \dots : \forall i \geq 0 (g_i, g_{i+1}) \in R$ .

Для каждого состояния  $g \in G$  и каждой CTL-формулы  $\varphi$  ее значением  $g(\varphi)$  в состоянии  $g$  является булева константа 1 или 0, которая определяется индуктивно:

- a) если  $\varphi = p \in P$ , то  $\varphi$  определена в  $K$ ;
- b)  $g(1) \stackrel{def}{=} 1$ ,  $g(0) \stackrel{def}{=} 0$ ;
- c)  $g(\bar{\varphi}) \stackrel{def}{=} \overline{g(\varphi)}$ ,  $g(\varphi \wedge \eta) \stackrel{def}{=} g(\varphi) \wedge g(\eta)$ ,  $g(\varphi \vee \eta) \stackrel{def}{=} g(\varphi) \vee g(\eta)$ ;
- d) значения формул, начинающихся с CTL-операторов, определим следующим образом:
  - 1)  $g(\square \circ \varphi) = 1$ , если для каждого  $g'$ ,  $(g, g') \in R$ ,  $g'(\varphi) = 1$ ;
  - 2)  $g(\diamond \circ \varphi) = 1$ , если существует  $g'$ ,  $(g, g') \in R$ , такое, что имеет место  $g'(\varphi) = 1$ ;
  - 3)  $g(\square \odot \varphi) = 1$ , если для каждого пути  $\pi$  из  $g$  существует состояние  $g' \in \pi$ , такое, что имеет место  $g'(\varphi) = 1$ ;
  - 4)  $g(\diamond \odot \varphi) = 1$ , если существует путь  $\pi$  из  $g$  и существует состояние  $g' \in \pi$ , такое, что имеет место  $g'(\varphi) = 1$ ;
  - 5)  $g(\square \bullet \varphi) = 1$ , если для каждого пути  $\pi$  из  $g$  и для каждого  $g' \in \pi$  имеет место  $g'(\varphi) = 1$ ;
  - 6)  $g(\diamond \bullet \varphi) = 1$ , если существует путь  $\pi$  из  $g$ , такой, что для каждого состояния  $g' \in \pi$  имеет место  $g'(\varphi) = 1$ ;
  - 7)  $g(\square \blacklozenge(\varphi, \eta)) = 1$ , если для каждого пути  $\pi$  из  $g$  существует состояние  $g' \in \pi$ , такое, что
 
$$\begin{cases} g'(\eta) = 1, & \text{и} \\ \forall g'' <_{\pi} g', g''(\varphi) = 1; \end{cases} \quad (1)$$

- 8)  $g(\diamond\bullet(\varphi, \eta)) = 1$ , если существует путь  $\pi$  из  $g$  и существует состояние  $g' \in \pi$ , такое, что имеет место (3);  
 9)  $g(\square\ominus(\varphi, \eta)) = 1$ , если для каждого пути  $\pi$  из  $g$  и для каждого  $g' \in \pi$

$$\left[ \begin{array}{l} g'(\eta) = 1, \quad \text{или} \\ \exists g'' <_{\pi} g', g''(\varphi) = 1; \end{array} \right. \quad (2)$$

- 10)  $g(\diamond\ominus(\varphi, \eta)) = 1$ , если существует путь  $\pi$  из  $g$  такой, что для каждого состояния  $g' \in \pi$  имеет место (4).

Произвольную СТЛ-формулу  $\varphi$  можно заменить СТЛ-формулой  $\psi$  ей эквивалентной — такой, что для каждого состояния  $g$  в любой  $K$  выполняется  $g(\varphi) = g(\psi)$ , при этом в СТЛ-формулу  $\psi$  входят только связки  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$  и СТЛ-операторы  $\diamond\circ$ ,  $\diamond\bullet$ ,  $\diamond\ominus$ . Действительно, нетрудно показать, что имеют место следующие соотношения:

- 1) законы де Моргана:  $\overline{\psi \wedge \varphi} = \overline{\psi} \vee \overline{\varphi}$ ,  $\overline{\psi \vee \varphi} = \overline{\psi} \wedge \overline{\varphi}$ ,  $\overline{\overline{\psi}} = \psi$
- 2)  $\square\circ\psi = \overline{\diamond\circ\overline{\psi}}$
- 3)  $\diamond\odot\psi = \overline{\diamond\bullet(1, \psi)}$
- 4)  $\square\odot\psi = \overline{\diamond\bullet\overline{\psi}}$
- 5)  $\square\bullet\psi = \overline{\diamond\circ(1, \overline{\psi})}$
- 6)  $\square\bullet(\psi, \varphi) = \overline{\diamond\bullet(\overline{\varphi}, \overline{\psi} \wedge \overline{\varphi})} \wedge \overline{\diamond\bullet\overline{\varphi}}$
- 7)  $\square\ominus(\psi, \varphi) = \overline{\diamond\bullet(\psi, \overline{\varphi})}$
- 8)  $\diamond\ominus(\psi, \varphi) = \overline{\diamond\bullet(\varphi, \psi \wedge \varphi)} \vee \overline{\diamond\bullet\varphi}$ .

Формула СТЛ-логики выполняется на структуре  $K$ , если эта формула истина во всех начальных состояниях структуры  $K$ . Спецификация тестируемой системы (т.е. формула  $\varphi$ , представляющая набор свойств, которым должна удовлетворять наша СП) задается СТЛ-формулой.

### 3. ПРОВЕРКА ВЫПОЛНИМОСТИ

Предлагается алгоритм проверки выполнимости СТЛ-формулы на модели  $(S, W, M_0)$ , исследуемой системы. С этой целью для заданной формулы, определяется множество состояний, представленных с помощью СП, в которых подформула (как и сама формула) истинна. Алгоритм проверки истинности заданной формулы начинается с проверки истинности атомарных высказываний этой формулы.

1. Для СП  $(S, W, M_0)$  с  $n$  переходами и  $m$  местами строится матрица инцидентности  $A$  размера  $n \times m$  с целыми коэффициентами  $a_{ij} = I(t_j, p_i) - I(p_i, t_j)$ , где  $I$  — отношение инцидентности данной СП, а коэффициенты  $a_{ij}$  представляют число фишек, которые перемещаются, изменяются и добавляются в место  $p_i$  при срабатывании перехода  $t_j$  в системе  $(S, W, M_0)$ . По матрице инцидентности  $A$  строится:

- а) система уравнений состояний СП  $(S, W, M_0)$

$$A \cdot x = d, \quad (1)$$

где  $d = M_k - M_0$ , ( $M_0, M_k$  — соответственно начальная и конечная разметки СП), а  $x = \sum_{j=1}^k u_j$ , где  $u_k$  ( $k = 1, 2 \dots$ ) —  $n \times 1$  вектор — столбец (вектор контроля), состоящий из  $n - 1$  нулевых компонент и одной  $j$ -ой компоненты равной 1, сигнализирующей о срабатывании на  $k$ -м шаге перехода  $t_j$ . В случае достижимости разметки  $M_k$  из разметки  $M_0$  система (1) всегда имеет решение [5];

- б) система линейных однородных диофантовых неравенств  $A^T \cdot y \leq 0$ , из совместности которой устанавливается структурная ограниченность СП ( $S, W, M_0$ ).

2. Для СП ( $S, W, M_0$ ) строится множество  $T$ -инвариантов (решения  $x$  системы линейных однородных диофантовых уравнений (СЛОДУ)  $A \cdot x = 0$  (когда в (2)  $M_0 = M_k$ )) и множество  $S$ -инвариантов (решения  $y$  СЛОДУ  $A^T \cdot y = 0$ ), посредством которых исследуются структурные свойства СП (проверка на ограниченность, живучесть, отсутствие дедлоков и т.д.).

Пусть имеется некоторая СП с  $t$  местами и  $n$  переходами.

**Теорема 1.** а) Вектор  $y$  размерности  $t$  является  $S$ -инвариантом СП тогда и только тогда, когда  $M^T y = M_0^T y$  для произвольной фиксированной начальной разметки  $M_0$  и произвольной достижимой разметки  $M$ .

б). Вектор  $x$  размерности  $n$  является  $T$ -инвариантом СП тогда и только тогда, когда существует разметка  $M_0$  и последовательность срабатываний переходов  $\sigma$ , ведущая от разметки  $M_0$  к  $M_0$ , такие, что  $\sigma = x$ .

Из структурной ограниченности чистых СП, для которых если  $(p, t) \in F$ , то  $(t, p) \in F$  или  $\bullet t \cap t \bullet = \emptyset$ , следует, что существует вектор  $y$  такой, что  $A * y \leq 0$ . Но тогда существует  $x \geq 0$  такой, что  $M = M_0 + A * x$  и  $M^T y = M_0^T y + x^T A^T y$ . Так как  $A^T y \leq 0$ , то  $M^T y \leq M_0^T y$  и, следовательно,

$$M(p) \leq (M_0^T y) / y(p), \quad (2)$$

где  $y(p)$  означает  $p$ -ю компоненту вектора  $y$ .

Полученное неравенство дает верхнюю оценку для числа фишек, которые помещаются в место  $p$ . Эта граница может быть улучшена, если в неравенстве (2) используются все  $S$ -инварианты из минимального порождающего множества  $S$ -инвариантов. Так как инварианты СП являются векторами, то минимальность векторов рассматриваются над множеством натуральных чисел  $N$ , т.е. вектор  $y$  называется минимальным, если не существует другого вектора  $y_1$  такого, что  $y_1(p) \leq y(p)$  для всех мест  $p$ .

**Определение.** Порождающее множество  $S - (T)$ -инвариантов называется минимальным порождающим множеством  $S - (T)$ -инвариантов, если не существует ни одного не пустого его подмножества, которые тоже есть порождающим множеством.

Из теории диофантовых уравнений [5], следует, что усеченное множество решений системы линейных однородных диофантовых уравнений (СЛОДУ), соответствующее данной СП, составляет минимальное порождающее множество  $S - (T)$ -инвариантов) и для построения этого множества можно использовать  $TSS$ -алгоритм.



Таким образом, неравенство (1) приводится к виду

$$M(p) \leq \min[(M_0^T y_i)/y_i(p)], \tag{3}$$

где минимум ищется по всему множеству  $S$ -инвариантов из минимального порождающего множества. В работе [6] сказано, что данную оценку улучшить нельзя ни для каких других инвариантов.

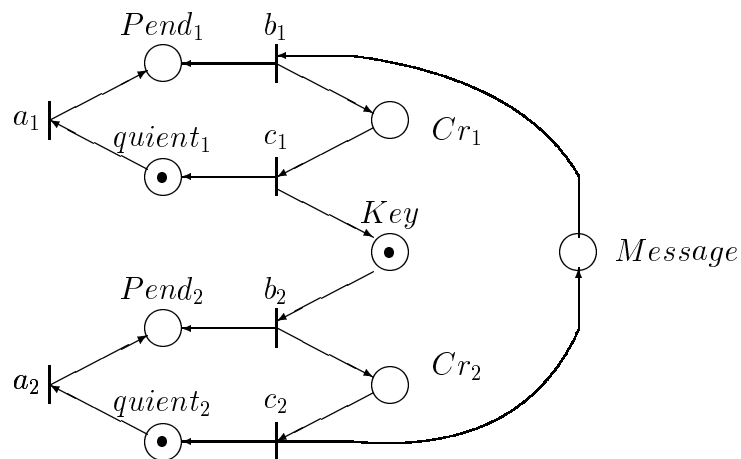
Говорят, что СП покрывается позитивными  $S - (T)$ -инвариантами тогда и только тогда, когда для произвольного места  $p_i$  (переход  $t_i$ ) существует  $S - (T)$ -инвариант такой, что  $y_i > 0 \forall i = 1, 2, \dots |P|$ .

Связь между ограниченностью и инвариантами СП устанавливает

**Теорема 2.** *Если все места СП покрываются позитивными  $S$ -инвариантами, то СП ограничена.*

3. Для данной СП строится транзитивная система  $(S, T, f, g)$ , с множеством состояний  $S$ , множеством переходов  $T$  и двумя отображениями  $f$  и  $g$  из  $T$  в  $S$ , которые ставят в соответствие каждому переходу  $t \in T$  два состояния  $f(t)$  и  $g(t)$ . Транзитивная система в случае ограниченной СП является графом достижимых разметок в СП из начальной разметки  $M_0$ . Пара  $(f, g) : T \rightarrow S \times S$  необязательно инъективное отображение. Такая система представляет собой модель реальной системы и на ней проверяется выполнимость спецификации.

**Пример 2.** Рассмотрим СП, моделирующую альтернативный вариант алгоритма взаимного исключения:



В этой СП 8 мест и 6 переходов. Построим ее матрицу инцидентности, где первый столбец отвечает переходу  $a_1$ , второй столбец переходу  $a_2$ , третий — переходу  $b_1$ , четвертый — переходу  $b_2$ , пятый — переходу  $c_1$  и шестой — переходу  $c_2$ ; строки матрицы отвечают соответственно местам  $quient_1$ ,  $quient_2$ ,  $Pend_1$ ,  $Pend_2$ ,  $Cr_1$ ,  $Cr_2$  и  $Key$ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_0 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$  и  $M = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$  — соответственно начальная и конечная разметки данной СП. Тогда  $M - M_0 = (-1, -1, 0, 0, 1, 1, -1, 0)$  и получаем следующую СЛНДУ (систему линейных неоднородных диофантовых уравнений)

$$A \cdot x = \begin{cases} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & = & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & = & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & = & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & = & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & = & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Строя соответствующую СЛОДУ для данной СЛНДУ и решая ее, получим единственное решение  $x = (1, 1, 1, 1, 1, 0)$ , поскольку последняя координата равна 0, а не 1, то данная СЛНДУ несовместна. Это говорит о том, что оба процесса никогда не будут находиться одновременно в своих критических зонах и условие взаимного исключения имеет место для данной СП. Решение же  $(1, 1, 1, 1, 1, 1)$  говорит о том, что после срабатывания по одному разу всех переходов в сети, она вернется в начальную разметку.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} p_1 &= quient_1, p_2 = Pend_1, p_3 = quient_2, p_4 = Pend_2, p_5 = Cr_1, \\ p_6 &= Cr_2, p_7 = Key, p_8 = Message, t_1 = a_1, t_2 = a_2, t_3 = b_1, \\ t_4 &= c_1, t_5 = b_2, t_6 = c_2. \end{aligned}$$

Покажем, что данная СП является ограниченной и 1-безопасной. Для этого воспользуемся множеством  $S$ -инвариантов и неравенством (3).

Транспонируем матрицу инцидентности СП и построим СЛОДУ  $A^T \cdot y = 0$

$$A \cdot x = \begin{cases} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & = & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & = & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & = & 0 \end{cases}$$

Применяя  $TSS$ -алгоритм, найдем минимальное множество  $S$ -инвариантов данной СП:

$$y_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0), y_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0), y_3 = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1).$$

По полученному множеству инвариантов можно сделать вывод, что все места СП покрываются позитивными  $S$ -инвариантами, а это означает, что данная СП является ограниченной.

Установим 1-безопасность данной СП. Для этого найдем скалярные произведения:

$$M_0^T y_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \cdot (1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)^T = 1,$$

$$M_0^T y_2 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0)^T = 1,$$

$$M_0^T y_3 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)^T = 1$$

Далее, используя неравенство (3), для произвольной разметки  $M$  данной СП получим:

$$M(p_1) = \min[1/1, 1/1, 1/0] = 1$$

$$M(p_2) = \min[1/0, 1/1, 1/0] = 1$$

$$M(p_3) = \min[1/1, 1/0, 1/0] = 1$$

$$M(p_4) = \min[1/0, 1/1, 1/0] = 1$$

$$M(p_5) = \min[1/1, 1/0, 1/1] = 1$$

$$M(p_6) = \min[1/0, 1/1, 1/1] = 1$$

$$M(p_7) = \min[1/0, 1/0, 1/1] = 1$$

$$M(p_8) = \min[1/0, 1/0, 1/1] = 1$$

Таким образом, для каждого места СП справедливо неравенство (2), где  $i \in [1, 8]$ , что и означает 1-безопасность СП.

Покажем теперь, что данная СП свободна от дедлоков при начальной разметке  $M_0$ .

Найдем множества  $\bullet t_i, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ :

$$\bullet t_1 = \{p_1\}, \bullet t_2 = \{p_3\}, \bullet t_3 = \{p_2, p_8\}, \bullet t_4 = \{p_5\}, \bullet t_5 = \{p_4, p_7\}, \bullet t_6 = \{p_6\}.$$

Откуда получим

$$\sum_{p \in \bullet t_1} M_0(p) = M_0(p_1) = 1 \leq |\bullet t_1| - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\sum_{p \in \bullet t_2} M_0(p) = M_0(p_3) = 1 \leq |\bullet t_2| - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\sum_{p \in \bullet t_3} M_0(p) = M_0(p_2) + M_0(p_8) = 1 \leq |\bullet t_3| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$\sum_{p \in \bullet t_4} M_0(p) = M_0(p_5) = 0 \leq |\bullet t_4| - 1 = 1 - 1 = 0,$$

$$\sum_{p \in \bullet t_5} M_0(p) = M_0(p_4) + M_0(p_7) = 1 \leq |\bullet t_5| - 1 = 2 - 1 = 1,$$

$$\sum_{p \in \bullet t_6} M_0(p) = M_0(p_6) = 0 \leq |\bullet t_6| - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Полученная система неравенств является противоречивой, а значит СП-свободной от дедлоков при начальной разметке  $M_0$ .

Для произвольной разметки  $M$ , достижимой из начальной разметки, данное свойство устанавливается аналогично.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлен подход к верификации асинхронных дискретных динамических реактивных систем, основанный на использовании темпоральной СТЛ-логики, сетей Петри (СП) и систем линейных однородных диофантовых ограничений (СЛОДО). При этом введена новая универсальная унификация языка логики СТЛ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Clarke E. M., Grumberg O., Peled D.* Model Checking // The MIT Press, 1999, pp.314.
2. *Семантика модальных и интенциональных логик* // перевод с английского А.А. Мучника, А.Л.Никифорова, З.А. Сокулер. — М.: Наука, 1981. — С. 76-98.
3. *Котов В. Е.* Сети Петри. — М.: Наука, 1984.
4. *Kenneth L. McMillan* Symbolic Model Checking. — CMU-CS-92-131, 1992.
5. *Крытый С. Л.* Алгоритмы решения систем линейных диофантовых уравнений в целочисленных областях // Кибернетика и системный анализ. — 2006. — №2. — С. 3-17
6. *Murata T.* Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. in «Proceedings of the IEEE», 1989, vol. 77, N 4, P. 541-580.

УДК 519.68: 681.513.7

## ТУПИКОВЫЕ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $(n, 1, k)$

Г.А. Махина

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: [gmakhina@yandex.ru](mailto:gmakhina@yandex.ru)

It is proved that any terminal inferring of a partial monotone Boolean function from the  $(n, 1, k)$  class has a zero domain of uncertainty. The conditions of univocal Boolean function inferring are defined in the paper.

### ВВЕДЕНИЕ

Частичные монотонные булевозначные функции возникают в ряде проблем, среди которых в современной литературе упоминаются такие задачи как определение химической канцерогенности, проверка отчетности для определения размеров налогового обложения, определение ценности недвижимого имущества [1], обнаружение рака молочной железы, оценка технической надежности [2], обработка сигналов [3], построение монотонной корректирующей операции для случая булевозначных базовых классификаторов [4, 5].

Задачи распознавания образов, возникающие в указанных приложениях, можно рассматривать как задачу доопределения частичной монотонной булевозначной функции, для решения которой используются логические алгоритмы [6]. Однако в результате работы таких алгоритмов, основанных на использовании свойства монотонности признаков, может возникать область неопределенности. Вполне естественно использовать размер возникающей области неопределенности в качестве характеристики эффективности алгоритма распознавания. Асимптотика максимальной мощности области неопределенности исследуется в работе [7], где приводится пример функции, имеющей тупиковые доопределения как с нулевой областью неопределенности, так и с областью, содержащей почти все точки булева куба.

Отдельный интерес представляет вопрос оценки размера области неопределенности в зависимости от исходных данных, поскольку такая информация может существенно облегчить поиск наиболее эффективных стратегий доопределения монотонных функций.

Случай, когда функция  $f$  задана  $l$  нулями и  $k$  единицами, обозначим через  $(n, l, k)$ , где  $n$  — размерность булевого куба. В данной работе исследуется случай  $(n, 1, k)$  (или, что то же самое, случай  $(n, k, 1)$ ), для которого доказывается, что при любом тупиковом доопределении размер области неопределенности равен нулю. Также для случая  $(n, 1, k)$  рассматриваются условия, при которых доопределение является однозначным.

## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Неопределяемые здесь понятия из булевой алгебры можно найти, например, в [8, 9].

Пусть  $f(\tilde{x}^n)$  — частичная монотонная булева функция и  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$  — двоичный набор. Обозначим через  $\tilde{x}'_i$  набор, полученный из  $\tilde{x}$  путем замены  $i$ -й координаты на противоположную.

Пусть  $\tilde{x} \in N_{\bar{f}}$  ( $\tilde{x} \in N_f$ ). Координата  $x_i$  набора  $\tilde{x}$  называется *существенной*, если существует набор  $\tilde{y} \in N_f$  ( $\tilde{y} \in N_{\bar{f}}$ ) такой, что  $\tilde{x}'_i \geq \tilde{y}$  (соответственно,  $\tilde{x}'_i \leq \tilde{y}$ ). В противном случае координата называется *несущественной*.

Если столбец в таблице функции  $f$ , соответствующий переменной  $x_i$ , не содержит ни одной существенной координаты, то такой столбец и соответствующая ему переменная  $x_i$  называются *несущественными*. В противном случае столбец и соответствующая ему переменная называются *существенными*.

Пусть  $x_i$  — несущественная нулевая координата набора  $\tilde{x} \in N_{\bar{f}}$ . *Операцией поднятия нуля по  $i$ -ой координате* назовем преобразование функции  $f$  в функцию  $g$ , такую что  $N_g = N_f$ ,  $N_{\bar{g}} = (N_{\bar{f}} \setminus \{\tilde{x}\}) \cup \{\tilde{x}'_i\}$ . Обозначим такую операцию символом  $U_i(f, \tilde{x})$ .

Пусть  $x_i$  — несущественная единичная координата набора  $\tilde{x} \in N_f$ . *Операцией опускания единицы по  $i$ -ой координате* назовем преобразование функции  $f$  в функцию  $g$ , такую что  $N_g = N_{\bar{f}}$ ,  $N_g = (N_f \setminus \{\tilde{x}\}) \cup \{\tilde{x}'_i\}$ . Обозначим такую операцию символом  $L_i(f, \tilde{x})$ .

Операцию удаления из функции  $f$  несущественной переменной  $x_i$  обозначим символом  $H_i(f)$ .

Заметим, что при применении операций  $U$ ,  $L$  и  $H$  монотонность функции  $f$  не нарушается, а область неопределенности не увеличивается.

Назовем функцию  $f$  *тупиковой*, если к ней не применима ни одна из операций  $U$ ,  $L$ ,  $H$ .

Доопределением функции  $f$  по монотонности назовем преобразование функции  $f$  в функцию  $g$ , при котором  $N_g = \{\tilde{x} : \tilde{x} \geq \tilde{y}, \tilde{y} \in N_f\}$ ,  $N_{\bar{g}} = \{\tilde{x} : \tilde{x} \leq \tilde{y}, \tilde{y} \in N_{\bar{f}}\}$

Будем говорить, что функция  $g$  *порождена* функцией  $f$ , если она может быть получена из  $f$  путем применения операций  $U$ ,  $L$ ,  $H$  и последующим доопределением по монотонности.

Обозначим через  $J(f)$  множество всех тупиковых функций, порождаемых  $f$ , через  $N_{\bar{g}}$  — область неопределенности функции  $g \in J(f)$  и через  $\nu(g)$  — мощность области неопределенности  $N_{\bar{g}}$ , т.е.  $\nu(g) = |N_{\bar{g}}|$ .

Будем говорить, что набор  $\tilde{x}$  *покрыт* нулем (единицей), если существует набор  $\tilde{y} : f(\tilde{y}) = 0$  ( $f(\tilde{y}) = 1$ ) и  $\tilde{y} \geq \tilde{x}$  (соответственно,  $\tilde{y} \leq \tilde{x}$ ).

В результате применения логического алгоритма распознавания  $A$  к частичной монотонной функции  $f$  получается некоторая тупиковая функция  $g \in J(f)$ . Будем называть *эффективностью* алгоритма  $A$  величину  $E(A) = 1 - \nu(g)/2^n$ .

## 2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОРОЖДЕННЫХ ФУНКЦИЙ

При доопределении произвольной частичной монотонной функции отдельный интерес представляет вопрос, всегда ли можно построить порожденную функцию с нулевой областью неопределенности. Рассмотрим некоторые случаи, когда построение такой функции является достаточно простой процедурой.

**Утверждение 1.** Пусть  $f$  — частичная булева функция из класса  $(n, m, k)$ , не противоречащая условию монотонности, такая, что существует пара координат, в которых все заданные нули имеют значения 0 и 1, а все заданные единицы принимают противоположные значения 1 и 0. Тогда существует монотонная функция  $g$  от  $n$  переменных, порожденная функцией  $f$ , такая что  $\nu(g) = 0$  для любого расположения векторов.

*Доказательство.* Обозначим через  $\tilde{x}^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) наборы, являющиеся нулями функции  $f$ , и через  $\tilde{y}^i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) — единицы функции  $f$ . По условию существует, по крайней мере, пара координат, в которых  $\forall i \tilde{x}^i$  имеют значения 0 и 1 и  $\forall i \tilde{y}^i$  имеют значения 1 и 0. Не ограничивая общности, положим, что этими координатами являются первые две, т.е.  $\forall i x_1^i = 0, x_2^i = 1, \forall j y_1^j = 1, y_2^j = 0$ . Заметим, что, применяя операцию поднятия нуля, все нули функции  $f$  можно поднять до набора  $(011\dots 1)$ , и, применяя операцию опускания единицы, все единицы можно опустить до набора  $(100\dots 0)$ . При этом каждый из нулей можно поднимать, например, вдоль цепи, образованной следующим образом: первой идет вершина, полученная из вектора  $\tilde{x}^i$  путем замены первой нулевой координаты, следующей за  $x_1$ , на единицу; последующие вершины получаются заменой всех последующих нулевых координат на единицы. Аналогичным образом можно осуществить операцию опускания единицы, только при этом необходимо заменять единичные координаты, следующие за  $x_1$ , на нули. В результате после доопределения полученной функции  $g$  по монотонности получаем, что  $\forall \tilde{\alpha} : \alpha_1 = 0$  имеем  $g(\tilde{\alpha}) = 0$  и  $\forall \tilde{\alpha} : \alpha_1 = 1$  имеем  $g(\tilde{\alpha}) = 1$ , т.е. функция  $g$  определена на всем кубе  $B^n$  и соответственно  $\nu(g) = 0$ . Утверждение доказано.  $\square$

Построение доопределения, имеющего нулевую область неопределенности, для частичной функции  $f$  из класса  $(n, 1, k)$  также не представляет особой сложности. В этом случае оказывается, что все функции из класса  $(n, 1, k)$  обладают таким уникальным свойством, что любое их тупиковое доопределение имеет нулевую область неопределенности. Еще одним интересным свойством таких функций является то, что все нижние единицы тупикового доопределения располагаются в первом слое и их количество напрямую связано с номером слоя, в котором расположен верхний ноль. Все эти свойства доказываются в следующей теореме.

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — частичная монотонная булева функция из класса  $(n, 1, k)$ , а  $g$  — произвольное тупиковое доопределение  $f$ . Тогда  $\nu(g) = 0$ .

*Доказательство.* Докажем, что для любого тупикового доопределения  $g$  частичной монотонной булевой функции  $f$  из класса  $(n, 1, k)$  областью определения является весь куб  $B^n$ .

Из определения тупикового доопределения и из условия  $N_{\tilde{f}} = 1$  следует, что  $N_{\tilde{g}} = 1$ . Пусть верхний ноль находится в  $k$ -ом слое. Обозначим его через  $\tilde{\alpha}$ . Без ограничения общности будем считать, что этот набор имеет единицы в первых  $k$  координатах и нули во всех остальных. Покажем, что при этих предположениях все нижние единицы тупикового доопределения  $g$  находятся в первом слое, общее число нижних единиц равно  $n - k$ , причем их единичные координаты имеют номера, большие чем  $k$ . Отсюда будет следовать, что  $\nu(g) = 0$ , поскольку каждый набор из  $B^n$  сравним хотя бы с одним из наборов множества  $N_{\tilde{g}} \cap N_g$ .

Покажем вначале, что все нижние единицы  $g$  находятся в первом слое. Пусть  $\tilde{\beta}$  — некоторая нижняя единица тупикового доопределения  $g$  функции  $f$ . Заметим, что существует хотя бы одна единичная координата набора  $\tilde{\beta}$  с номером, большим  $k$ . Иначе имеем, что  $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ , а это противоречит монотонности функции  $g$ . Пусть  $i : i > k$  — номер этой координаты, а  $\tilde{\gamma}$  — набор из первого слоя с единицей в  $i$ -ом разряде. Рассмотрим три случая:

1) Значение  $g(\tilde{\gamma})$  не определено. В этом случае  $g$  не является тупиковым доопределением, поскольку тогда допустима операция опускания единицы из набора  $\tilde{\beta}$  в набор  $\tilde{\gamma}$ . Эту операцию можно осуществить, например, вдоль цепи, в которой каждый следующий набор получается заменой первой содержащейся в очередном наборе единичной координаты, не равной  $i$ , на ноль. Очевидно, что такая цепь допустима, поскольку все наборы в такой цепи не сравнимы с верхним нулем  $\tilde{\alpha}$ . Таким образом, получаем противоречие;

2)  $g(\tilde{\gamma}) = 0$ . Поскольку  $\tilde{\gamma}$  не сравнима с набором  $\tilde{\alpha}$ , то приходим к противоречию с условием единственности верхнего нуля функции  $g$ ;

3)  $g(\tilde{\gamma}) = 1$ . Здесь возможны два варианта —  $\tilde{\beta} \neq \tilde{\gamma}$  и  $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$ . При  $\tilde{\beta} \neq \tilde{\gamma}$  имеем противоречие, поскольку тогда к  $\tilde{\beta}$  применима операция опускания нуля и, следовательно,  $\tilde{\beta}$  не является нижней единицей. Таким образом, остается случай  $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$ . А это значит, что  $\tilde{\beta}$  лежит в первом слое, что и требовалось доказать.

Покажем, что каждый набор первого слоя, имеющий единицу в координате с номером, большим  $k$ , является нижней единицей функции  $g$ .

Предположим, что существует набор  $\tilde{\delta}$  из первого слоя, имеющий единицу в координате с номером  $j : j > k$ , который не является нижней единицей функции  $g$ . По соображениям, рассмотренным выше,  $g(\tilde{\delta})$  не может быть равным 0. Рассмотрим случай, когда значение функции  $g(\tilde{\delta})$  не определено. Обозначим через  $\tilde{\alpha}'$  набор, получающийся из  $\tilde{\alpha}$  заменой в  $i$ -м разряде нуля на единицу.

Рассмотрим грань  $I = I(\tilde{\delta}, \tilde{\alpha}')$ , натянутую на вектора  $\tilde{\delta}$  и  $\tilde{\alpha}'$ . Заметим, что все наборы грани  $I$  не сравнимы ни с одной нижней единицей функции  $g$ . Также отметим, что применение операции опускания единицы (при условии, что набор  $\tilde{\alpha}$  является верхним нулем) к любому набору из  $I$  (за исключением набора  $\tilde{\delta}$ ) не выводит этот набор за пределы интервала  $I$ . Это очевидно при замене любой из первых  $k$  единиц нулями. При замене же  $i$ -й координаты любого набора из  $I$  на ноль, получается набор, предшествующий  $\tilde{\alpha}$ , т.е. в этом случае операция опускания единицы неприменима.



Пересечение множеств  $I \cap N_g$  не может быть пустым, иначе к набору  $\tilde{\alpha}$  можно было бы применить операцию поднятия нуля, что противоречит тупиковости доопределения  $g$ . Пусть  $\tilde{\omega} \in I \cap N_g$ . По допущению, сделанному выше,  $\tilde{\omega}$  не может совпадать с  $\tilde{\delta}$ , поскольку  $\tilde{\delta} \notin I \cap N_g$ . Так как набор  $\tilde{\omega}$  не лежит в первом слое, то он не может являться нижней единицей (выше было показано, что все нижние единицы лежат в первом слое). Значит, либо в случае, если набор  $\tilde{\omega}$  получил единичное значение в результате доопределения, должна существовать нижняя единица, которая предшествует  $\tilde{\omega}$ . Либо должна существовать нижняя единица, которая была получена из  $\tilde{\omega}$  в результате применения операции опускания единицы (или нескольких операций). Но так как ни одна нижняя единица не сравнима с  $\tilde{\omega}$  и ни одна нижняя единица не может быть получена из  $\tilde{\omega}$ , так как путем применения операции опускания единицы мы не можем получить набор, лежащий вне грани  $I$ , то получаем противоречие. Теорема доказана.  $\square$

### 3. Условия однозначности доопределения функции из класса $(n, 1, k)$

Рассмотрим условия, при которых доопределение функции из класса  $(n, 1, k)$  является однозначной процедурой. В общем случае можно выделить три условия:

1. Если к функции не применима операция поднятия нуля. Т.к. область неопределенности любого тупикового доопределения равна нулю, то очевидна однозначность доопределения данной функции — верхний ноль есть, а нижние единицы — наборы из первого слоя с единицами в позициях нулевых координат верхнего нуля.
2. Если к функции не применима операция опускания единицы. Т.к. к функции не применима операция опускания единицы, то все заданные единицы располагаются в первом слое (что доказано для случая  $(n, 1, k)$ ). Здесь очевидно верхний ноль однозначно поднимается до набора, имеющего нули во всех позициях, которым соответствуют единичные координаты нижних единиц.
3. Если к функции можно применить как операцию поднятия нуля, так и операцию опускания единицы, но при этом не существует координаты, по которой возможно совершить обе операции. Однозначность доопределения следует из того, что область неопределенности для случая  $(n, 1, k)$  равна нулю. Нули поднимаются по всем возможным координатам, аналогично опускаются единицы, при этом множества координат, по которым возможно совершение этих операций, не пересекается.

**Пример 3.** Рассмотрим частичную функцию  $f(x^4) : N_f = \{1010\}, N_f = \{0011\}$ . По первой и четвертой координатам нельзя поднять ноль и нельзя опустить единицу. По второй координате возможно поднять только ноль, но нельзя опустить единицу, по третьей координате можно опустить единицу, но нельзя поднять ноль. Таким образом, этот случай соответствует третьему рассмотренному условию и мы имеем однозначное доопределение — верхний ноль поднимается до набора  $\{0111\}$ , а нижняя единица располагается на наборе  $\{1000\}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе информации об условиях, при которых достигается максимальное значение области неопределенности, можно вырабатывать стратегии, использование которых позволит получать более эффективные доопределения монотонной функции с помощью логических алгоритмов распознавания.

В данной работе доказывается, что любое тупиковое доопределение частичной булевой функции из класса  $(n, 1, k)$  имеет нулевую область неопределенности. Выделено три условия, при которых доопределение функции из класса  $(n, 1, k)$  является однозначным.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Boros E., Hammer P.L., Hooker J.N.* Predicting cause-effect relationships from incomplete discrete observations. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7, 144-153 (1994)
2. *Kovalerchuk B., Triantaphyllou E., Deshpande A. S., Vityaev E.* Interactive Learning of Monotone Boolean Functions. *Information Sciences* 94, 87-118 (1996)
3. *Shmulevich I., T.M. Sellke, and E.J. Coyle,* "Stack Filters and Free Distributive Lattices," *Proceeding of the 1995 IEEE Workshop on Nonlinear Signal Processing, Halkidiki, Greece, June 1995*, pp. 927-930
4. *Рудаков К. В., Воронцов К. В.* О методах оптимизации и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // Докл. РАН. — 1999. — Т. 367, No. 3. — С. 314-317.
5. *Воронцов К. В.* Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции В алгебраическом подходе к проблеме распознавания // ЖВМ и МФ. — 2000. — Т. 40, No. 1. — С. 166-176.
6. *Kovalerchuk B., Triantaphyllou E., Deshpande A.S., Vityaev E.* Interactive Learning of Monotone Boolean Functions. *Information Sciences*, 94 (1-4), pp. 87-118 (1996).
7. *Сапоженко А.А., Сумкина Н.В.* О тупиковых доопределениях частичных монотонных булевых функций // Сб. Математические вопросы кибернетики, Вып. 13, 2004 г., С. 289-294.
8. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2004 г. — 416 с.
9. *Сапоженко А.А.* Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. — М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2005. — 124 с.

УДК 519.8

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ С ПРОСТЫМ ДВИЖЕНИЕМ НА ПЛОСКОСТИ МЕТОДАМИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ НЕЙРОЭВОЛЮЦИИ

В.В. Шульгин

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: v\_i\_c@gala.net

## Abstract

The pursuit problem with simple motion on a plane is considered in this paper. It is shown that if fitness function depends on capture time and target distance and pursuer is being placed onto Archimedean spiral during learning process, then topology neuroevolution method called “NEAT” is able to efficiently solve the problem. Resultant neural network is being compared with two known theoretical solutions via competition series.

## ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую математическую игру: два игрока (назовем их для определенности  $P$  и  $E$ ) управляют своими объектами на плоскости. Объекты обозначены точками  $P(P_x, P_y)$  и  $E(E_x, E_y)$  соответственно. Игрок  $P$  старается *осуществить захват*, то есть сократить расстояние  $|PE|$  до некоторой наперед заданной величины  $L$ , причем за минимально возможное время, игрок  $E$ , в свою очередь, прилагает все силы, чтобы избежать захвата или отсрочить его на максимально возможное время. Так как мы закрепили за игроками их роли, далее игрок  $P$  будет называться *преследователем*, а игрок  $E$  — *преследуемым* или *целью*.

Если объекты движутся так, что их скорость остается постоянной, а направление движения может выбираться произвольно в любой момент времени, то говорят, что объекты обладают *простым движением*. Описанная таким образом игра называется *игрой преследования с простым движением*.

В данной статье *под нейроэволюцией будет пониматься технология развития искусственных нейронных сетей, управляемая генетическими алгоритмами*. Целью работы является применение нейроэволюционных методов для решения задачи преследования, а именно синтезирование искусственной нейронной сети, управляющей объектом-преследователем, которая позволяет эффективно осуществлять захват в рамках проводимого эксперимента.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве естественной платы  $\mathcal{P}$  игры преследования выбирается время, за которое был осуществлен захват (в случае, если игрок  $P$  не в состоянии осуществить захват, полагаем плату равной  $+\infty$ ). Итак, игрок  $P$  минимизирует плату, игрок  $E$  — максимизирует; цена игры

$$\mathcal{V} = \min_P \max_E \mathcal{P}.$$

Пусть  $\omega$  — модуль скорости игрока Е,  $\tau$  — модуль скорости игрока Р; тогда уравнения движения можно записать в виде:

$$\dot{E}_x = \omega \cos u \quad (1)$$

$$\dot{E}_y = \omega \sin u \quad (2)$$

$$\dot{P}_x = \tau \cos v \quad (3)$$

$$\dot{P}_y = \tau \sin v, \quad (4)$$

$$\tau \geq \omega > 0. \quad (5)$$

Величины  $u$  и  $v$ , задающие угол наклона вектора скорости над осью абсцисс, называются *управлениями*.

Координаты объекта на плоскости в совокупности с компонентами его вектора скорости образуют фазовые координаты объекта. Предполагается, что в любой момент времени каждый из игроков знает значения своих и чужих фазовых координат, но ему не известны управления противника.

В теории дискретных игр стратегия игрока состоит из множества решений, указывающих, как следует ему вести себя в каждой из ситуаций, которая может возникнуть на протяжении партии. Естественной аналогией в игре преследования является выбор управлений как функций фазовых координат. Обозначим  $\dot{E} = (\dot{E}_x, \dot{E}_y)$ ,  $\dot{P} = (\dot{P}_x, \dot{P}_y)$ ; тогда стратегиями игроков будут функции

$$u = u(E, P, \dot{E}, \dot{P}) \quad (6)$$

$$v = v(E, P, \dot{E}, \dot{P}). \quad (7)$$

Стратегии  $u'$  и  $v'$  такие, что:

$$\mathcal{P}(u', v') = \min_v \max_u \mathcal{P}(u, v) = \mathcal{V}$$

называются *оптимальными*.

*Задача преследования заключается в нахождении оптимальных стратегий для обоих игроков.*

Известно, что при простом движении оптимальной стратегией для обоих игроков является движение вдоль луча  $PE$  [1]. В дальнейшем, мы будем ссылаться на эту стратегию при помощи термина *О-стратегия*. Игрок Р, следующий О-стратегии, будет называться *О-преследователем*.

По определению оптимальности, если игрок Е отклоняется от оптимальной стратегии, преследователь Р имеет возможность осуществить захват за более короткое время. В дальнейшем будет развиваться ситуация, в которой Е не следует своей оптимальной стратегии.

В [2] рассмотрена так называемая *стратегия параллельного сближения (П-стратегия)*, изначально разработанная для задачи преследования, в которой игроки применяют свою функцию управления дискретно. Она заключается в следующем: пусть в начальный момент времени объекты расположены в точках  $E^0(E_x^0, E_y^0)$  и  $P^0(P_x^0, P_y^0)$ ; применим такое преобразование координат на плоскости, что точки

перейдут в  $E^0(0, 0)$  и  $P^0(0, -b)$ ,  $b \geq 0$  соответственно. Тогда П-стратегия предписывает игроку Р в любой момент времени выбирать свой направляющий вектор  $\dot{P}$  следующим образом:

$$\dot{P}_x = \dot{E}_x \quad (8)$$

$$\dot{P}_y = \sqrt{\tau^2 - \dot{E}_y^2} \quad (9)$$

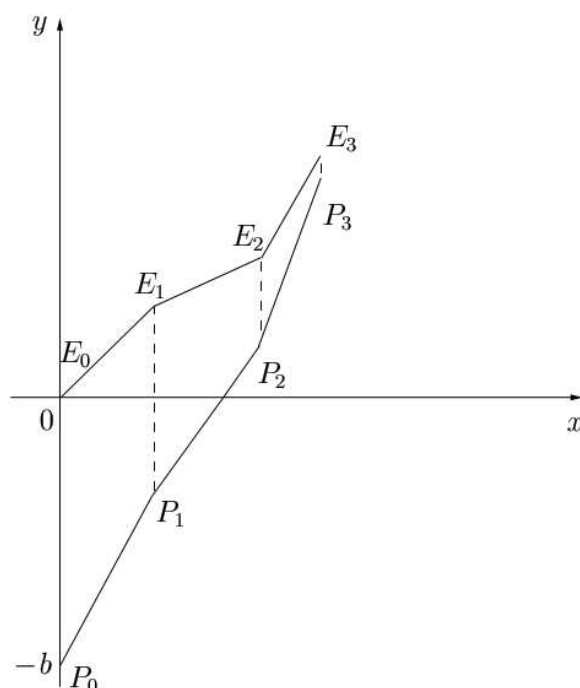


Рис. 3. Поведение игрока Р, пользующегося П-стратегией, при  $\tau = \frac{3}{2}\omega$ .

На рис. 3 показано, как сокращается расстояние  $|PE|$  с течением времени, если игрок Р следует П-стратегии. Такого игрока будем называть *П-преследвателем*.

С точки зрения нейронных сетей, под решением задачи преследования будем понимать *создание нейронной сети, синтезирующей функцию управления для объекта Р, которая позволяет осуществлять захват объекта Е при любом допустимом его поведении*.

## 2. МЕТОД НАРАЩИВАЕМЫХ ТОПОЛОГИЙ

Многие подходы в нейроэволюции подразумевают использование генетических алгоритмов в качестве универсального аппарата многомерной оптимизации для настройки весов нейронных сетей фиксированной топологии, однако, существует и другое направление — TWEANN-методы (Topology and Weight Evolving Artificial Neural

Networks — искусственные нейронные сети, в которых при помощи нейроэволюции настраиваются не только веса, но и топология).

Одним из наиболее перспективных методов является метод NEAT (NeuroEvolution of Augmenting Topologies — нейроэволюция наращиваемых топологий) [3]. Его ключевая особенность заключается в том, что все особи (здесь и далее под термином “особь” будем понимать конкретную нейронную сеть с точки зрения генетических алгоритмов) начинают эволюционировать с минимальной конфигурацией — а именно, имея лишь входной и выходной слои, полностью связанные между собой. Эта особенность позволяет находить максимально простые решения задачи и, при правильной организации процесса, требует меньших временных затрат, чем подходы с фиксированной топологией или TWEANN-методы, работающие со случайной конфигурацией сети. Это объясняется тем, что чем меньше сеть содержит связей, тем меньше размерность пространства поиска оптимальных весов.

Как генетический алгоритм метод NEAT имеет три вида оператора мутации:

- изменение веса связи,
- добавление новой связи между нейронами,
- добавление нового скрытого нейрона.

В соответствии с представлением функции управления (6), архитектура сети выбирается следующим образом. На вход подается девять сигналов: по четыре фазовые координаты обоих игроков, плюс сигнал смещения — постоянный единичный ввод; сеть выдает два выходных значения  $x$  и  $y$  — компоненты направляющего вектора, по которым вычисляется управление

$$u = \arctg \frac{y}{x}, \quad x^2 + y^2 > \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \lll 1, \quad (1)$$

$$u = 0, \quad x^2 + y^2 \leq \varepsilon. \quad (2)$$

В качестве активационного элемента сети используется функция  $\text{th}(x)$  — гиперболический тангенс.

Обучающий эксперимент проводится следующим образом: каждой особи в популяции на протяжении одного поколения предоставляется ряд попыток осуществить захват цели, движущейся по элементарным траекториям, за некоторый отрезок времени. При этом все особи ставятся в равные условия, в том смысле, что имеют сходные начальные условия. Усредненное значение фитнес-функции по всем попыткам считается фитнес-значением данной особи в текущем поколении. В качестве обучающих элементарных траекторий использовались луч и дуга окружности.

### 3. ВЫБОР ФИТНЕС-ФУНКЦИИ

Как и в любой задаче, решаемой генетическими алгоритмами, основной проблемой является выбор адекватной фитнес-функции. Применимо к задаче преследования, ее необходимым свойством должно быть поощрение захвата, ведь именно это является конечной целью эксперимента. Пусть особи  $s$  из  $N$  попыток удастся осуществить  $M$  захватов, тогда простейшая фитнес-функция  $f_1 = \frac{M}{N}$ ; будем предполагать, что фитнес-функция принимает значения из промежутка  $[0, 1]$ . Эта функция обладает

тем недостатком, что она не дает количественной оценки успешности особи в одном опыте, таким образом нельзя решить, обусловлена ли она направленным преследованием или случайным столкновением с целью.

Сконструируем более сложную функцию  $f_2$ , обеспечивающую такую оценку; пусть за захват цели в одном опыте особь  $c$  получает “призовое” фитнес-значение  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$  такое, что:  $f_2(c) \geq p$ , если захват был произведен, и  $f_2(c) \leq p$ , иначе. Среди особей, не сумевших произвести захват, можно наградить те особи, которые в конечный момент времени приблизились к цели на меньшее расстояние. А среди особей, удачно завершивших опыт, выделим тех, которые сделали это за меньшее время. Пусть  $T$  — время, отведенное на опыт,  $T_f$  — время окончания опыта,  $T_f \leq T$ ; положим  $D(t) = ((E_x(t) - P_x(t))^2 + (E_y(t) - P_y(t))^2)^{\frac{1}{2}}$  — расстояние между объектами в момент времени  $t$ ; тогда условием захвата является выполнение  $D_f < L$ , где  $D_f = D(t_f)$ . Определим семейство функций

$$f_2^p = \begin{cases} p + (1-p)(1 - (\frac{T_f}{T})^2), & D_f < L \\ (1-p)(\frac{L}{D_f})^2, & D_f \geq L \end{cases} \quad (1)$$

Чем меньше значение параметра  $p$ , тем слабее проявляется корреляция между значением фитнес-функции и числом осуществленных захватов. Заметим, что использование  $f_1$  равносильно использованию  $f_2^1$ : это упрощает исследование того, как эффективность обучения зависит от выбранной функции.

На рис. 4 изображены тренды функций  $\max f_2^p$  — максимальных фитнес-значений по всем особям в каждом поколении. Видно, что эффективность растет при  $0,5 < p < 0,8$  а затем падает при  $0,8 < p < 1,0$ ; можно сделать следующий вывод: наиболее целесообразным является использование  $f_2^p$  при  $0,7 \leq p \leq 0,8$ .

#### 4. ОБУЧАЮЩАЯ ВЫБОРКА

Другим немаловажным вопросом с точки зрения обучения нейронной сети является организация учебной выборки. С одной стороны, она должна охватывать как можно больше возможных случаев, с другой стороны, она должна быть подобрана так, чтобы не расстроить веса сети. Обучающая выборка в поколении  $C_n$ ,  $n \geq 0$  состоит из:

- начального положения цели  $E^{n,0}$ ;
- начальных положений преследователя  $\{P_i^{n,0}\}_{i=1}^N$  ( $N$  — число попыток для одной особи);
- углового смещения траектории цели  $\beta_n$ .

Пусть  $\xi(a, b)$  — непрерывная равномерно распределенная на отрезке  $[a, b]$  случайная величина; определим  $E^{n,0}$  таким образом:

$$E_x^{0,0} = \xi(-1, 1); \quad (1)$$

$$E_y^{0,0} = \xi(-1, 1); \quad (2)$$

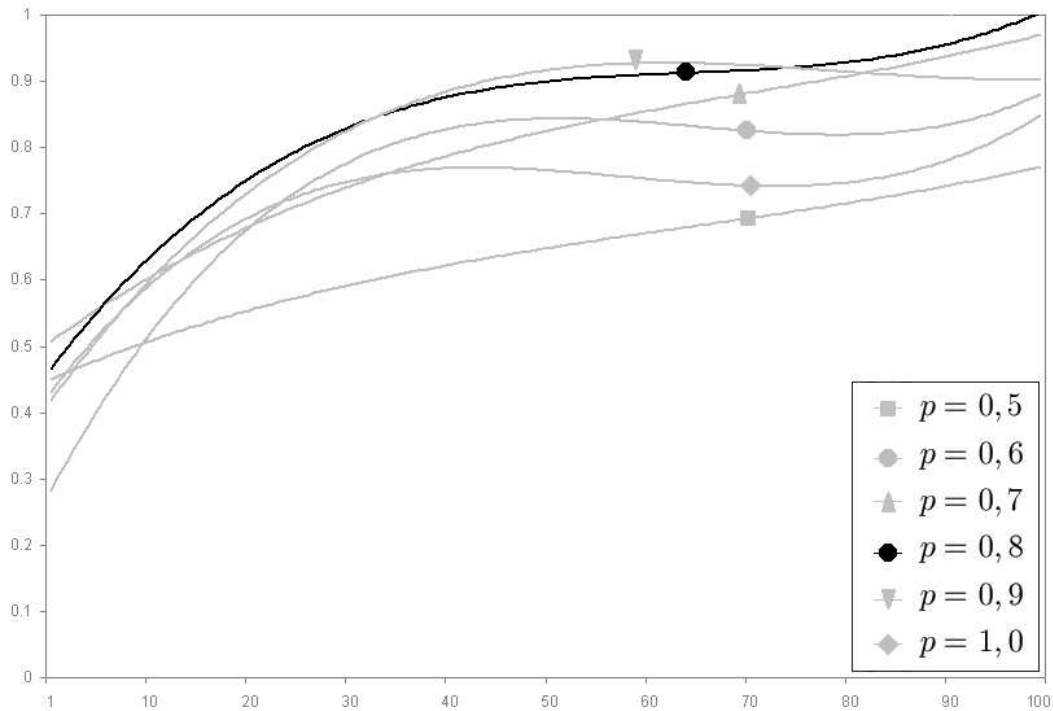


Рис. 4. Тренды  $\max f_2^p$  для 100 поколений, построенные по методу наименьших квадратов при помощи кубических полиномов.

$$\forall n \geq 1 \quad A_E^n = ((E_x^{n-1,0})^2 + (E_y^{n-1,0})^2)^{\frac{1}{4}} + h_E; \quad (3)$$

$$E_x^{n,0} = E_x^{n-1,0} + \xi(-A_E^n, A_E^n); \quad (4)$$

$$E_y^{n,0} = E_y^{n-1,0} + \xi(-A_E^n, A_E^n). \quad (5)$$

Определения (1), (2) задают начальное положение в окрестности начала координат  $O(0,0)$ .  $A_E^n$  — максимальная величина, на которую могут измениться координаты  $E^{n-1,0}$  в следующем поколении ((4), (5)), она рассчитывается как квадратный корень расстояния  $|OE^{n-1,0}|$  плюс малая добавка  $h_E$ , гарантирующая то, что  $E^{n,0}$  не сойдется к  $O$ .

В качестве множества начальных расположений преследователя  $\{P_i^n\}_{i=1}^N$  целесообразно взять архимедову спираль с центром в  $E^{n,0}$ , потому что она формирует равномерное распределение расстояний до цели и равномерное распределение углов направлений на цель. Известно уравнение спирали в полярных координатах  $\rho(\varphi) = k\varphi$ ; требуется равномерно расположить точки на спирали так, что:  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 2\Pi s$ ,  $r \leq \rho(\varphi) \leq R$  ( $r, R, s$  — параметры обучения,  $\varphi_0 = \text{const}$ ). Тогда  $\forall i : 1 \leq i \leq N$

$$r_i = r + \frac{R-r}{N}(i-1); \quad (6)$$

$$\varphi_i = \frac{2\Pi s}{N}(i-1); \quad (7)$$

$$Q_{i,x}^n = E_x^{n,0} + r_i \cos \varphi_i; \quad (8)$$



$$Q_{i,y}^n = E_y^{n,0} + r_i \sin \varphi_i. \quad (9)$$

Точки  $P_i^{n,0}$  выбираются как возмущенные  $Q_i^n$  с максимальным отклонением  $A_P^n = ((E_x^{n,0} - Q_{i,x}^n)^2 + (E_y^{n,0} - Q_{i,y}^n)^2)^{\frac{1}{4}}$  аналогично (4), (5).

Угол наклона  $\beta_n$  рассчитывается по правилу:

$$\beta_0 = 0; \beta_{dev} = \text{const}; \beta_{mul} = \text{const} < -1; \quad (10)$$

$$U = \{u_1 = 1, \forall k > 1 : u_k = u_{k-1} + k\} = \{1, 3, 7, 12, \dots\}; \quad (11)$$

$$\forall k \geq 1, \forall j : 1 \leq j \leq u_k; \beta_{u_k+j-1} = \beta_{u_{k-1}} + \beta_{dev} \cdot (\beta_{mul})^k \cdot j. \quad (12)$$

Этот закон задает колебательные изменения  $\beta_n$  с увеличивающейся амплитудой.

За максимальное время, отведенное для захвата в конкретной попытке, берется величина  $1,5 \cdot T_1$ , где  $T_1$  — время, необходимое для осуществления захвата О-преследователю.

## 5. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача преследования решалась с параметрами, указанными в таблице 7.

Таблица 7

параметр	значение
число попыток $N$	37
шаг времени $\delta t$	0,1
скорость преследуемого $\omega$	1,0
скорость преследователя $\tau$	1,5
радиус захвата $L$	0,25
призовое значение $p$	0,8
нижняя граница радиуса спирали $r$	4,0
верхняя граница радиуса спирали $R$	8,0
число витков спирали $s$	2
величина $h_E$ в (3)	0,1
величина $\beta_{dev}$ в (10)	0,1
величина $\beta_{mul}$ в (10)	-1,1
число поколений	300
число особей в популяции	200
вероятность мутации веса	0,75
вероятность мутации-добавления связи	0,05
вероятность мутации-добавления нейрона	0,01
доля неизменных особей	0,20
использование элитизма	да
селекция методом рулетки	да

Пусть, в поколении  $C_n$  особь  $c \in C_n$  имеет фитнес-значение  $f(c)$ , тогда процесс нейрореволюции можно охарактеризовать функциями

$$f_{max}(C_n) = \max_{c \in C_n} f(c) \quad \text{и} \quad f_{avg}(C_n) = \sum_{c \in C_n} \frac{f(c)}{|C_n|},$$

их графики изображенными на рис. 5.

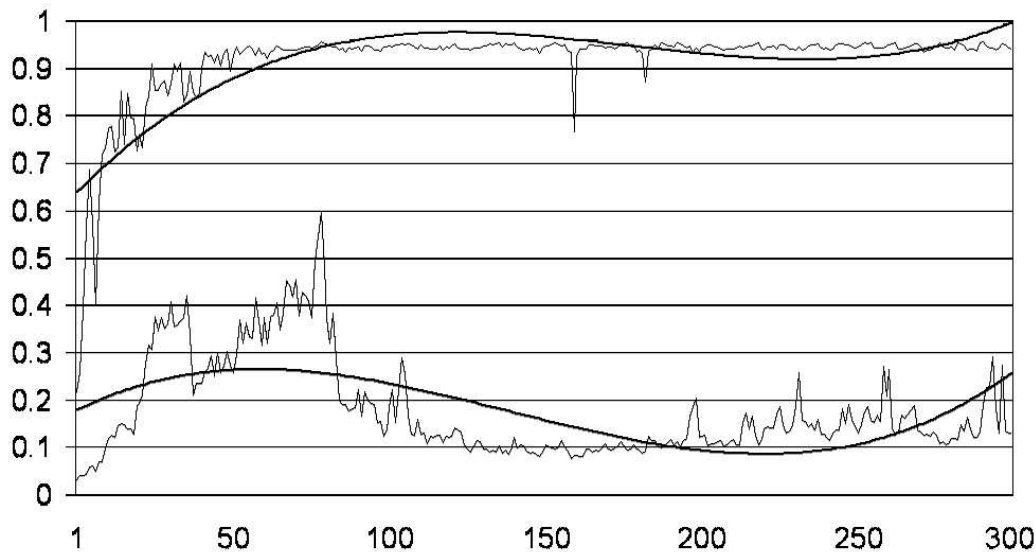


Рис. 5. Графики  $f_{max}$ ,  $f_{avg}$  и их тренды, построенные при помощи кубических полиномов.

Первое решение — особь, осуществившая захват в 100% опытов — было получено в поколении 25, устойчивое решение появилось в поколении 184.

Для сравнительного анализа было проведено 4 серии по 2500 опытов, в которых нейронная сеть соревновалась с П-преследователем и О-преследователем. Так же, как и на этапе обучения, считалось, что нейронная сеть не смогла осуществить захват, если она не смогла это сделать за время  $1,5 \cdot T_1$ , где  $T_1$  — время, необходимое О-преследователю. Время, затраченное на захват П-преследователем, обозначим  $T_2$ .

Вид движения объекта Е зависел от номера серии:

1. по дуге окружности
2. по лучу
3. по дуге окружности с произвольным изменением центра кривизны в моменты времени  $t = 1, 2, 3, \dots$
4. по лучу с произвольным изменением направляющего вектора в моменты времени  $t = 1, 2, 3, \dots$

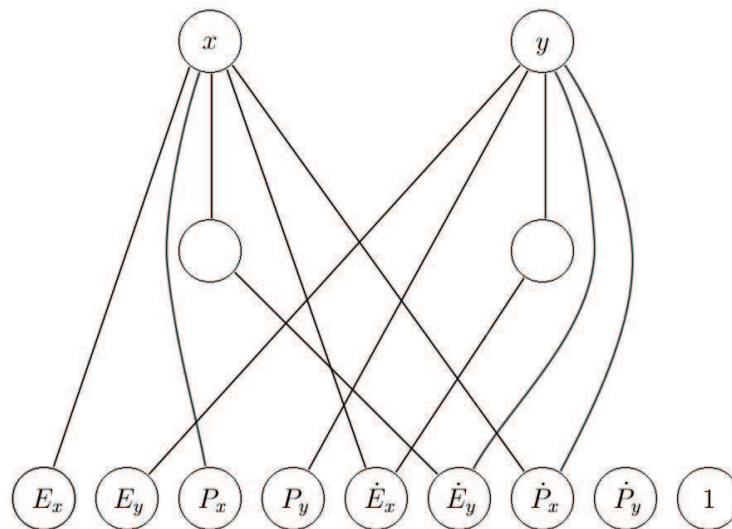


Рис. 6. Топология особи-чемпиона, взятого из поколения 300, проста и имеет всего два скрытых нейрона.

В каждом новом опыте объекты  $P$  и  $E$  помещались на плоскость со случайными координатами в круг радиуса  $R = 32$  с центром в начале координат так, что  $|PE| > L$ ; время изменялось с шагом  $\delta t = 0.001$ . Все остальные параметры имели такие же значения, что и на этапе обучения.

В таблице 8 дана информация об успешных исходах опытов и о частичном превосходстве одной из стратегий над двумя другими. Здесь, под  $p(T_f \leq T_1)$  понимается доля исходов, в которых  $T_f$  не превосходит  $T_1$ , выраженная в процентах (аналогично для других комбинаций из  $T_f$ ,  $T_1$  и  $T_2$ ).

Во-первых, как видно из второго столбца таблицы, сеть справляется с задачей в 100% случаев, причем на множестве входных данных значительно превосходящим множество, использовавшееся на этапе обучения.

Во-вторых, анализ временных характеристик эксперимента дает интересный факт: ни одна из стратегий не превосходит две другие стратегии абсолютно, можно сказать, что они находятся в состоянии некоторого паритета. Так, хотя П-стратегия имеет общее лидерство, в серии 4 она уступает О-стратегии. В свою очередь, О-стратегия в серии 1 проигрывает нейронной сети. В среднем, приблизительно в  $\frac{1}{3}$  случаев, сеть ведет себя лучше, чем О-стратегия и приблизительно в  $\frac{1}{7}$  случаев — лучше П-стратегии (случаи  $T_f = T_1$  и  $T_f = T_2$  маловероятны в виду малости  $\delta t$  и поэтому не рассматриваются).

В таблице 9 приведена числовая оценка того, насколько сеть затрачивает больше времени на захват цели в единственном опыте относительно других стратегий. Здесь, под  $avg(x)$  понимается усредненное значение  $x$  по всем опытам. Значение -3,2% во втором столбце означает, что нейронная сеть в первой серии опытов, в среднем,

Таблица 8

серия	$D(T_f) < L, \%$	$p(T_f \leq T_1), \%$	$p(T_f \leq T_2), \%$	$p(T_1 \leq T_2), \%$
1	100	58,9	10,2	8,0
2	100	28,2	2,9	1,5
3	100	29,7	22,3	4,6
4	100	16,7	21,8	67,4
в среднем	100	33,4	14,3	20,4

осуществляет захват быстрее на 3,2%, чем О-преследователь. По итогам эксперимента, в среднем, сеть для захвата цели затрачивает на 4,7% времени больше, чем О-преследователь и на 14,0% больше, чем П-преследователь.

Таблица 9

серия	$avg(\frac{T_f - T_1}{T_f}), \%$	$avg(\frac{T_f - T_2}{T_f}), \%$
1	-3,2	13,0
2	1,2	22,2
3	4,5	6,4
4	16,2	14,4
в среднем	4,7	14,0

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты свидетельствуют о том, что использование метода нейроэволюции наращиваемых топологий NEAT в качестве аппарата автоматической настройки архитектуры нейронной сети позволяет синтезировать решение рассматриваемой задачи преследования, которое в целом не многим уступает, а в некоторых случаях даже превосходит известные теоретически разработанные решения.

В дальнейшем имеет смысл исследовать применимость метода к модели с более сложным видом движения, а также решение задачи преследования с несколькими кооперирующимися объектами-преследователями.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — С. 32–45.
2. Петросян Л.А., Рухсеев Б.Б. Преследование на плоскости. — М.: Наука, 1991. — С. 23.
3. Stanley K., Miikkulainen R. Efficient Reinforcement Learning through Evolving Neural Network Topologies. — Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-2002) papers.

# АСМ-ОЛИМПИАДЫ КАК ФОРМА ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Козлов А.И.**

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.И. ВЕРНАДСКОГО  
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ  
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, Г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА  
E-MAIL: *kai@cris.net*

The article is devoted to ACM–competitions as a way of training specialists in the field of information technologies.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время одной из наиболее распространенных форм проведения международных студенческих соревнований по программированию являются так называемые АСМ-олимпиады, проводимые при спонсорской и организационной поддержке Ассоциации компьютерной техники и всемирно известной компании IBM. (Ассоциация компьютерной техники, Association for Computing Machinery, — международная общественная организация, объединяющая исследователей, преподавателей и профессионалов, работающих в области компьютерных и информационных технологий, [www.acm.org](http://www.acm.org)). Первый финал АСМ олимпиады в ее современном формате состоялся 2 февраля 1977 году в Атланте, США. В 2005–2006 учебном году в АСМ-олимпиаде приняло участие в общей сложности 5606 команд 1737 университетов из 84 стран мира. 12 апреля 2006 года в Сан-Антонио, США, состоялся 30-ый финал олимпиады. Чемпионом мира стала команда Саратовского государственного университета, Россия. Координирует проведение финалов и отборочных туров АСМ-олимпиады Бэйлорский университет (Baylor University), Техас, США (<http://icpc.baylor.edu>). АСМ-олимпиада проходит в несколько этапов. Национальные туры проводятся внутри стран-участниц, которые, в свою очередь, объединены в регионы по географическому признаку. В настоящее время регионов насчитывается более тридцати. Победители национальных олимпиад участвуют в региональных турах, которые проводятся ответственными за регион университетами. Победители региональных туров встречаются в финале.

## 1. АСМ–олимпиады: АНАЛИЗ ПРОВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Украинские команды принимают участие в АСМ-олимпиадах с 1995 года. С 1997 года Украина входит в регион, объединяющий страны юго-востока Европы, и регулярно принимает участие в соответствующих региональных турах, которые проводятся Политехническим университетом г. Бухареста, Румыния. В настоящее время Украина уверенно занимают в этом регионе лидирующие позиции. Так в 2006 году шесть украинских команд вошли в десятку победителей, при этом абсолютные

первое и третье места были завоеваны командами Национального технического университета Украины «КПИ». В 2003 году команда Киевского национального университета им Т.Г. Шевченко, победив в региональном туре, приняла участие в финале и заняла там абсолютное девятое место, завоевав бронзовые медали. Пока это наивысшее достижение украинских команд в АСМ-олимпиадах. Формат проведения АСМ-олимпиад существенно отличается от того, который принят в Украине для проведения, например, олимпиад по программированию среди школьников, а также различных студенческих олимпиад по дисциплинам, связанным с современными информационными технологиям. АСМ-олимпиады направлены, в первую очередь, на выявление студентов, имеющих не только глубокую теоретическую подготовку по всему спектру математических дисциплин, связанных с теоретической и практической информатикой и прикладной математикой, но и в совершенстве владеющих современными средствами разработки программного обеспечения, то есть способных применять теоретические знания в практическом эффективном программировании. Именно поэтому за право быть спонсором АСМ-олимпиады (и, конечно, приглашать к себе на работу участников олимпиады) ведется настоящая борьба среди ведущих компаний мира — производителей вычислительной техники и программного обеспечения. Это такие компании как АТ&Т (1990–1993 гг.), Microsoft (1994–1997 гг.), с 1998 года спонсором АСМ-олимпиады является компания IBM, а участники финалов и, конечно, победители получают приглашения на работу в различных отделениях компании после завершения учебы в университете. Правила проведения АСМ-олимпиад одинаковы на всех этапах. Это, прежде всего, командные соревнования. В команду входит не более трех студентов, которым предоставляется один компьютер. Соревнование длится, обычно, пять часов, в течение которых необходимо решить от 8 до 10 задач. Решение задачи — это компьютерная программа, написанная на одном из разрешенных правилами алгоритмических языков: С, С++, Java, Pascal (Pascal разрешен только до 2009 года). Проверка решения осуществляется автоматически специальной программой-сервером, которому команда отправляет исходный текст своей программы. Программа компилируется сервером, а затем проверяется на большом количестве входных тестовых данных, которые участникам заранее не известны. Задача считается решенной, если предоставленное решение дает правильный результат для всех входных тестов. Если программа решение дает неверный ответ хотя бы на один тест или не укладывается в отведенные для этой задачи ограничения по времени или памяти, она считается нерешенной, о чем команда получает соответствующее сообщение. После этого команда может исправить решение и послать его на проверку еще раз. Количество дополнительных попыток отправки решения на сервер не ограничено, но за каждую отправку неверного решения команда получает 20 минут штрафного времени, которое будет добавлено к общему штрафному времени после того, как задача будет решена и засчитана сервером. Если задача не была решена, то штрафные минуты за попытки ее решить не начисляются. Если задача прошла все тесты и засчитана сервером, команде начисляется штрафное время, равное времени, затраченному от начала соревнования на решение задачи, плюс штрафные минуты за

дополнительные отправки неверного решения на сервер. Побеждает команда, решившая наибольшее количество задач. В случае одинакового количества решенных задач выше в рейтинге оказывается команда, набравшая меньший суммарный штраф, то есть, затратившая на решение задач меньше времени. Таким образом, для успешного выступления в олимпиаде участники команды должны: Найти эффективный алгоритм решения задачи. Поскольку каждая предлагаемая задача имеет ограничение по времени исполнения и по используемой памяти, применить неэффективный, переборный алгоритм, чаще всего, не возможно. При этом все задачи, предлагаемые на АСМ-олимпиадах можно условно разбить на две группы. Первая группа — это задачи, в которых необходимо применить один из известных эффективных алгоритмов, возможно, модифицировав его с учетом контекста задачи. Вторая группа — это задачи, требующие предварительного достаточно сложного математического решения с использованием знаний из различных разделов классической и прикладной математики. В таких задачах, как правило, если математическое решение найдено, его программная реализация не составляет труда. Разделение на эти две группы достаточно условно, так как модификация известного алгоритма или сведение задачи к его использованию так же, безусловно, основаны на некоторых математических рассуждениях, иногда совсем не простых. Ниже приводится ориентировочный перечень математических дисциплин в порядке убывания значимости, которые должны знать участники АСМ-олимпиад (задачи из соответствующих разделов встречаются на АСМ-олимпиадах):

- построение и анализ эффективных алгоритмов;
- теория графов;
- комбинаторика;
- математическая логика;
- теория чисел;
- теория кодирования;
- теория языков программирования;
- теория групп;
- теория алгоритмов;
- теория множеств;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- математический анализ;
- аналитическая и дифференциальная геометрия;
- линейная алгебра;
- вычислительная математика;
- теоретическая механика;

Быстро и правильно реализовать найденный алгоритм в виде программы на одном из языков программирования. Как правило, во время АСМ-олимпиад участникам предоставляются современные средства разработки программного обеспечения, не владея которыми выступить в олимпиаде успешно невозможно. Кроме того, при написании программы важны практические навыки программирования, развитое алгоритмическое мышление. Таким образом, постоянная работа с компьютером является

существенной частью подготовки к АСМ-олимпиадам, причем для успешного выступления требуется профессиональный уровень владения технологиями разработки программного обеспечения. Участники должны владеть основами системного программирования для различных операционных систем (в первую очередь, Windows, Unix, Linux), знать и использовать различные компиляторы для современных языков программирования, причем необходимо понимать отличия и особенности того или иного компилятора и осознанно использовать эти отличия во время олимпиады. Необходимо знать основные системы разработки программного обеспечения, такие как Microsoft Visual Studio, Borland C++, Borland Delphi, Borland C Builder, Eclipse и т.д., особенности их использования, преимущества и недостатки. Быстро найти и исправить ошибки в программе. Отладка программы является составной частью тех профессиональных навыков в программировании, которыми должны владеть участники АСМ-олимпиад. В случае, когда отосланное на сервер решение не является правильным и не проходит тесты, команда получает сообщение о том, что задача не принята, содержащее только тип ошибки (например, *Wrong answer* — программа выдала неверный ответ на один из входных тестов, *Time limit exceeded* — программа превысила время, отведенное на выполнение одного из тестов, и т.п). Почему произошла ошибка, на каких тестовых данных программа выдала неверный ответ или не уложилась в отведенное время, команде не сообщается. Умение находить ошибки в такой неопределенной ситуации и исправлять их за короткое время достигается только путем длительных практических тренировок и является свидетельством отличной профессиональной подготовки участников АСМ-олимпиад. В настоящее время уровень проведения финалов, и даже полуфиналов (региональные АСМ-олимпиады), таков, что подготовка команды к участию в этих соревнованиях требует длительной дополнительной работы, выходящей далеко за рамки обычного учебного процесса в университете или другом высшем учебном заведении.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Опыт ведущих украинских команд и университетов показывает, что начинать подготовку команды к участию в студенческой АСМ-олимпиаде необходимо уже в школе. За два-три года учебы на младших курсах высшего учебного заведения студенты, во-первых, не успевают выйти на профессиональный уровень владения современными средствами разработки программного обеспечения, и, во-вторых, не успевают изучить в необходимом объеме теоретический материал даже по компьютерным наукам, не говоря о других математических дисциплинах. Безусловно, интенсивная дополнительная работа, основанная на базовых знаниях, полученных в высшем учебном заведении, позволяет подготовить специалистов по информатике высочайшего уровня, которые могут не только работать в ведущих IT-компаниях Украины, но и успешно заниматься научной и преподавательской деятельностью.



---

Копачевский Н.Д. *Собственные колебания вращающегося слоя идеальной жидкости* // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 3-27.

**УДК 532.5: 517.98**

У роботі досліджені власні коливання тонкого шару ідеальної рідини, що обертається, в наближенні малої води. Встановлено, що цей граничний випадок дає адекватну модель при дослідженні поверхневих хвиль і не є адекватною моделлю при вивченні внутрішніх інерційних хвиль, породжених силами Кориоліса.

В работе исследованы собственные колебания тонкого слоя вращающейся идеальной жидкости в приближении малой воды. Установлено, что этот предельный случай дает адекватную модель при исследовании поверхностных волн и не является адекватной моделью при изучении внутренних инерционных волн, порожденных силами Кориолиса.

---

Щербина О.А. *Элиминационные алгоритмы декомпозиции* // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 28-41.

**УДК 519.68**

Розглянуто клас елімінаційних алгоритмів декомпозиції задач дискретної оптимізації, що включає локальні алгоритми декомпозиції, алгоритми несеріального динамічного програмування, алгоритми сегментної елімінації, методи деревоподібної декомпозиції. Зроблено огляд і описані основні риси елімінаційних алгоритмів декомпозиції, що представляють собою досить перспективний підхід, який дозволяє в ряді випадків вирішувати задачі дискретної оптимізації великої розмірності.

Рассмотрен класс элиминационных алгоритмов декомпозиции задач дискретной оптимизации, включающий локальные алгоритмы декомпозиции, алгоритмы несериального динамического программирования, алгоритмы сегментной элиминации, методы древовидной декомпозиции. Сделан обзор и описаны основные черты элиминационных алгоритмов декомпозиции, представляющих собой весьма перспективный подход к решению задач дискретной оптимизации большой размерности.

---

Карпенко И.И. *Дефектные подмодули кососимметрических операторов в гильбертовых кватернионных бимодулях* // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 42-46.

**УДК 517.432**

В роботі вводиться визначення дефектного підмодулю кососиметричного оператора, що дієть у гільбертовому кватерніонному бімодулі. Встановлений зв'язок між дефектними підмодулями кососиметричного оператора та його сімплектичного образу, наведені формули фон Неймана для спряженого оператора.

В настоящей работе вводится определение дефектного подмодуля кососимметричного оператора, действующего в гильбертовом кватернионном бимодуле. Установлена связь между дефектными подмодулями кососимметричного оператора и его симплектического образа, приведены формулы фон Неймана для сопряженного оператора.

---

---

**Муратов М.А., Пашкова Ю.С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 47-59.**

**УДК 517.98**

У даній роботі доведено аналог домінантної ергодичної теореми для абсолютних стисків у просторах Орліча вимірних функцій на додатній напівосі.

В настоящей работе доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространствах Орлича измеримых функций на положительной полуоси.

---

---

**Лукьянова Е.А. Метод верификации свойств реактивной системы на модели // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 60-68.**

**УДК 519.713.1: 51.681.3**

У роботі пропонується метод верифікації асинхронних дискретних динамічних реактивних систем, що ґрунтується на використанні темпоральної логіки (CTL — Computation Tree Logic), мереж Петрі (МП) та систем лінійних однорідних діофантових обмежень (СЛОДО).

В работе описывается подход к верификации асинхронных дискретных динамических реактивных систем, основанный на использовании темпоральной логики (CTL — Computation Tree Logic), сетей Петри (СП) и систем линейных диофантовых ограничений (СЛДО).

---

---

---

Махина Г.А. *Тупиковые доопределения частичных монотонных булевых функций из класса  $(n, 1, k)$*  // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 69-74.

**УДК 519.68: 681.513.7**

У роботі доведено, що будь-яке тупикове довизначення часткової булевої функції з класу  $(n, 1, k)$  має нульову область невизначеності. Виділені умови, при яких довизначення функції з класу  $(n, 1, k)$  є однозначним.

В работе доказано, что любое тупиковое доопределение частичной булевой функции из класса  $(n, 1, k)$  имеет нулевую область неопределенности. Выделены условия, при которых доопределение функции из класса  $(n, 1, k)$  является однозначным.

---

---

Шульгин В.В. *Решение задачи преследования методами нейрорезволюции* // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 75-84.

**УДК 519.8**

У статті розглядається задача переслідування на площині з простим рухом. Показується, що за допомогою спеціально збудованої фітнес-функції, яка оцінює час захвату і відстань до цілі, та при розташуванні переслідувача на архімедовій спіралі під час навчання, обраний метод топологічної нейрорезволюції NEAT здатен ефективно розв'язати задачу. Отримана нейронна сітка порівнюється із двома відомими теоретичними розв'язаннями.

В статье рассматривается задача преследования с простым движением на плоскости. Показывается, что при помощи специально сконструированной фитнес-функции, оценивающей время захвата и расстояние до цели, и при размещении преследователя на архимедовой спирали во время обучения, выбранный метод топологической нейрорезволюции NEAT способен эффективно решить задачу. Полученная нейронная сеть сравнивается с двумя известными теоретическими решениями.

---

---

Козлов А.И. *АСМ-олимпиады как форма подготовки специалистов в области информационных технологий* // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — №2. — С. 85-88.

**УДК 519.8**

Стаття присвячена АСМ-олімпіадам як формі підготовки фахівців в області інформаційних технологій.

Статья посвящена АСМ-олимпиадам как форме подготовки специалистов в области информационных технологий.

---

## СПИСОК АВТОРОВ НОМЕРА

---

- Карпенко Ирина Ивановна** к.ф.-м.н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: i\_karpenko@inbox.ru*
- Козлов Александр Иванович** к.т.н, доцент кафедры прикладной математики, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: kai@cris.net*
- Копачевский Николай Дмитриевич** д.ф.-м.н, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: kopachevsky@crimea.edu*
- Лукьянова Елена Александровна** к.ф.-м.н, доцент кафедры алгебры и функционального анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: lukyanovaea@mail.ru*
- Махина Галина Анатольевна** ассистент кафедры информатики, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: gmakhina@yandex.ru*
- Муратов Мустафа Абдурешитович** к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: mustafa\_muratov@mail.ru*
- Пашкова Юлия Сергеевна** к.ф.-м.н, доцент кафедры математического анализа, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: j\_pashkova@mail.ru*
- Шульгин Виктор Викторович** аспирант кафедры прикладной математики, Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского  
*e-mail: v\_i\_c@gala.net*
- Щербина Олег Александрович** к.ф.-м.н, доцент, факультет математики Венского университета, Gastprofessor  
*e-mail: oleg.shcherbina@univie.ac.at*

## ДО ВІДОМА АВТОРІВ

### *Загальні положення*

Для опублікування в журналі "Таврійський вісник інформатики і математики" приймаються раніше не опубліковані наукові праці в галузі математики та теоретичної інформатики, згідно зі списком провідних тематичних розділів.

Автору(-ам) потрібно надавати такі документи:

1. Відомості про автора(-ів) (прізвище, ім'я, по батькові, учені ступені та звання, місце роботи та посада, адреси проживання та організації, телефон, факс, адреса електронної пошти тощо).
2. Рецензію сторонньої організації (бажано).
3. Статтю, надруковану на принтері.
4. Файл статті на дискеті 3,5" або надісланий електронною поштою за адресою редакції.

### *Вимоги до рукописів*

1. Основні елементи статті розміщуються у такій послідовності: індекс УДК, ініціали та прізвище автора, назва статті, анотація (до 10 рядків) українською, російською та англійською мовами (анотація повинна містити конкретну інформацію про отримані результати), текст, список літератури.
2. Стаття може бути написана українською, російською або англійською мовою. Обсяг статті повинен не перевищувати 10 сторінок разом з малюнками, таблицями, графіками (не більше трьох) та бібліографією. Стаття повинна бути структурована (поділена на розділи із заголовками).
3. **Відповідно до постанови Президії ВАК України від 15 січня 2003 року №7-05/1** текст статті повинен бути викладений лаконічно, зрозуміло і відповідати такій структурній схемі.

У вступі необхідно чітко виділити (курсивом) такі пункти:

*Постановка проблеми* у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями

*Аналіз останніх досліджень і публікацій*, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор

*Невирішені* раніше частини загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття

*Формулювання цілей статті (постановка задачі)*

У висновку з даного дослідження необхідно чітко виділити (курсивом)

*результати дослідження та перспективи подальших розвідок у цьому напрямку*

4. У статті необхідно дотримуватись термінології, прийнятої державним стандартом; використовуючи новий термін або абрєвіатуру, автор повинен розшифрувати та пояснити їх.
5. Використана література наводиться загальним списком наприкінці статті за порядком посилання на неї в тексті (в квадратних дужках) мовою оригіналу, відповідно до форми Ф23 бюлетеню ВАК України, 2000, №2.

6. Стаття має бути підготовлена за допомогою видавничої системи LATEX з використанням стильового пакету twim.sty, який можна отримати за адресою [www.twim.crimea.edu](http://www.twim.crimea.edu).

*Робота редакції з авторами*

1. Матеріали необхідно надіслати електронною поштою, а також у вигляді "твердої" копії за адресою редакції: **Таврійський національний університет ім. В.І. Вернадського, пр-т Вернадського, 4, м.Симферопіль, Крим, Україна, 95007, e-mail: twim\_taurida@mail.ru**
2. Редакція залишає за собою право внесення змін редакційного характеру без згоди з автором (-ами).
3. За необхідності автору (-ам) надсилається коректура статті.
4. Остаточне рішення про публікацію приймає редакційна колегія.
5. Рукопис, який надійшов до редакції з порушенням зазначених правил оформлення, не реєструється і не розглядається, а повертається автору (-ам) для доопрацювання.

**ДО УВАГИ АВТОРІВ!**

**Про підвищення вимог до фахових видань, внесених до переліків ВАК України**

**ПОСТАНОВА  
ПРЕЗИДІЇ ВИЩОЇ АТЕСТАЦІЙНОЇ КОМІСІЇ УКРАЇНИ  
від 15.01.2003 р. №7-05/1**

Необхідною передумовою для внесення видань до переліку наукових фахових видань України є їх відповідність вимогам пункту 7 постанови Президії ВАК України від 10.02.1999 р. №1-02/3 "Про публікації результатів дисертацій на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук та їх апробацію".

... Редакційним колегіям організувати належне рецензування та ретельний відбір статей до друку. Зобов'язати їх приймати до друку у видання 2003 року та й у подальші роки лише наукові статті, які мають такі необхідні елементи: постановку проблеми у загальному вигляді та її зв'язок із важливими науковими чи практичними завданнями; аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв'язання даної проблеми і на які спирається автор; виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, котрим присвячується зазначена стаття; формулювання цілей статті (постановка задачі); виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням наукових результатів; висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.

Голова ВАК України  
Вчений секретар

В.В.Скопенко  
Л.М.Артюшин

Подписано к печати 12.12.2006. Формат 38x30/2. Бумага тип ОП. Объем 3.05 п.л. Тираж 500 экз. Заказ 335.  
Издано в редакционном отделе КНЦ НАНУ  
просп. Вернадского, 2, г. Симферополь, АРК, Украина, 95007