УДК 519.8

ПРЕДФРАКТАЛЬНІ ПЕРЕСТАВНІ КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ

© О. О. Ємець, О. В. Тур

Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014, Україна
e-mail: *yemetsli@mail.ru, tur.poltava@gmail.com*

Abstract. Isomorphisms between the set of permutations without repetition and the set of graphs are introduced in this article. The operation of replacing graph vertices by a seeding agent for the graph, which corresponding to the permutations, is defined. This operation is defined in terms of permutations and substitutions too.

Вступ

Розвиток більш адекватного моделювання для оптимізації об'єктів і систем, що мають комбінаторні властивості, приводить до необхідності вивчення цих властивостей разом з їх фрактальними особливостями. Не зважаючи на величезну кількість праць з комбінаторної оптимізації (див. зокрема [1, 2, 3]) та з математичних аспектів фрактальних конструкцій (див. [4, 5]) практично не відомо робіт, в яких ставляться та розв'язуються задачі дослідження комбінаторних конфігурацій, що мають фрактальні властивості (див. [6, 7, 8, 9]).

Є потреба ввести необхідні поняття для дослідження комбінаторно-фрактальних властивостей об'єктів. Важливим тут вбачається встановлення ізоморфізмів між комбінаторними множинами та множинами графів, оскільки добре відомі [4, 5] підходи до дослідження фрактальних властивостей графів, які можуть стати при нагоді у дослідженні фрактальних властивостей комбінаторний об'єктів.

1. Ізоморфізм множини перестановок без повторень з множиною графів

Нехай є множина перестановок k перших натуральних чисел $E_k\left(J_k\right)$ [3], де $J_k = \{1, 2, .., k\}$.

Розглянемо перестановку $(i_1, ..., i_k) \in E_k\left(J_k\right)$. Його можна інтерпретувати як підстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k \\ i_1 & i_2 & ... & i_k \end{pmatrix}$.

Поставимо у відповідність переставленню $(i_1, ..., i_k)$ (теж саме, що підстановці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k \\ i_1 & i_2 & ... & i_k \end{pmatrix}$) граф $\Gamma = (J_k; S_j)$, де J_k виступає як множина вершин графа, а S — множина дуг, яка визначається стовпцями підстановки, тобто $S = \{(1, i_1), (2, i_2), ..., (k, i_k)\}$.

Будемо називати граф, що відповідає переставленню, графом переставлення.

Приклад 1. Переставленню $(1, 5, 4, 3, 2)$ відповідає граф $\Gamma = (J_k;\ \{(1,1), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2)\})$ (див. рис. 1).

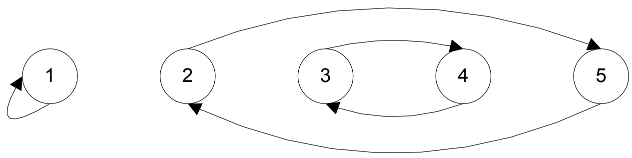

Рис. 1. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$.

Очевидно, що відповідність є взаємно однозначною, тобто ця відповідність є ізоморфізмом.

Множину графів, ізоморфних множині переставлень $E_k(J_k)$ позначимо $\Gamma_k(J_k)$.

В роботах розглянуто індуктивне введення фрактального графа на основі побудови предфрактальних графів. Використаємо цей підхід до графів переставлень.

Згідно [4, 5] треба ввести поняття початкового (вихідного) графу, затравки та сформулювати правило заміщення вершини графа затравкою.

В якості графа, який назвемо вихідний (початковим) використовується деякий граф $\Gamma \in \Gamma_k(J_k)$, тобто граф переставлення.

В якості затравки будемо використовувати граф, що визначається наступним чином.

Нехай є переставлення з $n - k$ чисел $k + 1, ..., n$, які об'єднані в множину $I_{k+1}^n = \{k+1,\ k+2,\ ...,\ n\} = J_n \backslash J_k$. Множину таких переставлень позначимо $E_{n-k}\left(I_{k+1}^n\right)$. Кожному переставленню $\pi = (\pi_1, ..., \pi_{n-k}) \in E_{n-k}\left(I_{k+1}^n\right)$ поставимо у відповідність підстановку $\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & ... & n \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_{n-k} \end{pmatrix}$.

Графу П та відповідній йому підстановці взаємно відповідним є граф $\Gamma_I = \left(I_{k+1}^n, S_I\right)$, де множина дуг S_I — це: $S_I = \{(k+1, \pi_1),\ (k+2, \pi_2),\ \ldots,\ (n, \pi_{n-k})\}$.

Приклад 2. $\pi = (6, 8, 10, 9, 7)$; $k = 5$; $n = 10$. Переставленню π є відповідною підстановка $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Відповідний граф на рис. 2.

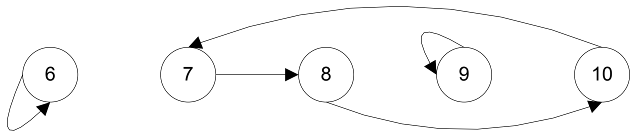

Рис. 2. Зображення графа переставлення $\pi = (6, 8, 10, 9, 7)$.

Заміщення вершини затравкою. Вершина має одне вхідну дугу, тобто в підстановці при заміні вершини t нас цікавлять два стовпці $\begin{pmatrix} ... & t & ... & \tau \\ ... & i_t & ... & t \end{pmatrix}$. Треба вирішити, яку дугу використовувати при заміщенні.

Приклад 3. На основі прикладів 1–2 виконаємо заміщення вершини затравкою.

Виконаємо заміщення ізольованої вершини під номером ***1*** графа $\Gamma = (J_k; \{(1,1), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2)\})$ затравкою $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

а) Використаємо при заміщенні петлю ***(6,6)***, тобто: ***6*** <−> ***6***; якщо взяти дугу, що виходить з ***6*** і замінити дугою з ***1*** в ***1***, на ***6***<−>***6*** то воно знову відійде в ***6***. (див. рис. 3).

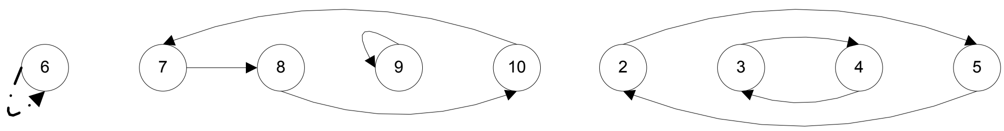

Рис. 3. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером ***1***. На цьому та наступних рисунках — пунктирна з крапкою стрілка означає стару і нову дугу.

б) Використаємо при заміщенні дугу ***(7,8)***, тобто: ***7***<−>***8.*** Якщо взяти дугу що виходило з 7, то вона знову відійде в 8 і тоді маємо граф, що зображено на рис. 4.

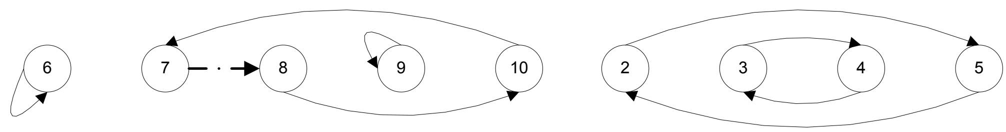

Рис. 4. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером.

Очевидно, якщо будемо в якості вершини t що заміщується брати ізольовану (з петлею), то граф, що одержуємо є ***сумою двох графів***, один — вихідний граф без ізольованої вершини, а другий — затравка.

Розглянемо випадок коли t — не ізольована вершина.

Як приклад виконаємо заміщення не ізольованої вершини під номером ***2***. Маємо 5 варіантів замін дуг з яких зобразимо два (рис. 5–6).

1. Заміна дуги ***(6,6)*** зображено на рис. 5.

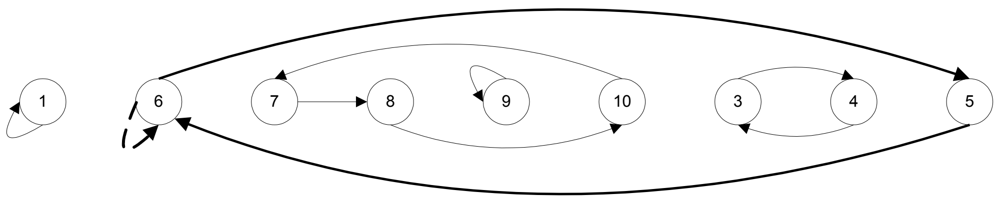

Рис. 5. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером ***2*** з використанням дуги ***(6,6)***. На цьому та наступних рисунках дуга, яка використовується при заміщенні показана пунктирною лінією, а нові дуги – товстою лінією.

2. Заміна дуги ***(7,8)***. (див. рис. 6).

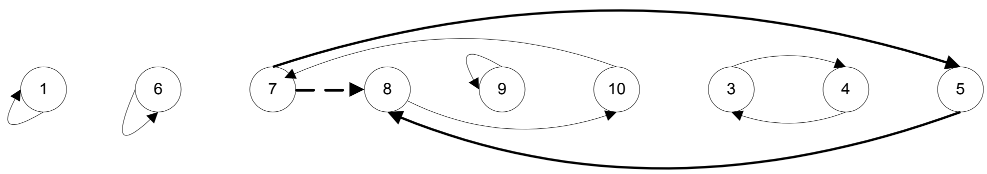

Рис. 6. Зображення графа переставлення $(1, 5, 4, 3, 2)$ з заміщенням вершини під номером ***2*** з використанням дуги ***(7,8).***

2. Дії по заміні вершини затравкою в термінах підстановок та перестановок

Розглянемо ці дії на прикладі. Ініціатор та затравку представимо підстановками. Нехай ініціатор – це $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, а затравка – це $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Розглянемо заміну вершину у двох випадках: 1) вершина ізольована; 2) вершина неізольована.

В першому випадку, коли вершина ізольована, в підстановці-ініціаторі є стовпчик з однаковим значенням в обох рядках (в прикладі – це стовпчик з одиницями). Всі інші стовпці підстановки в приладі відповідають не ізольованим вершинам. Тобто, в першому випадку модифікується підстановка, зміною елемента підстановки, що стоїть одночасно і в першому і в другому рядку одного стовпця. В другому випадку – модифікується підстановка, за рахунок заміни стовпця з номером з першого рядка (що відповідає номеру вершини графа, який заміняється) та заміни стовпця підстановки з цим номером в другому рядку.

Перший випадок. В прикладі, візьмемо стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Використаємо стовпець затравки $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, який відповідає у графі петлі ізольованої вершини. Одержимо:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ * & 5 & 4 & 3 & 2 & | & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & | & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Тут зірочка означає стовпець, який зникає в результуючій підстановці (або іншими словами елемент в результуючій перестановці). Зліва будемо писати ініціатор, а справа – затравку. В підстановці (1) вони розділені рискою. Ілюстрацію цього графа див. рис. 3.

Зауважимо, що якщо в затравці беремо стовпець з різними елементами (наприклад $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, що відповідають дузі ***(7,8)***), то результат той же самий, що і в формулі (1).

Другий випадок. Використовується стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$, $t_i \neq \tau_i$. Тоді з ініціатора викреслюється стовпець $\begin{pmatrix} t_i \\ * \end{pmatrix}$, який отримують з стовпця $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$ заміною τ_i на зірочку. Справа в підстановку приписуємо затравку. Далі дії визначаються стовпцем $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix}$ затравки, що використовується. Стовпець $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix}$ замінюється на стовпець $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix}$: позначка $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix}$. Стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix}$ замінюємо на стовпець $\begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix}$: позначка $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix}$.

Приклад 4. Замінимо стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ затравкою взявши стовпець:

1. Якщо $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, тоді маємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & 2 & | & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$; визначаємо стовпці для заміни: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Заміняємо стовпці в підстановці. Остаточно з $\begin{pmatrix} 1 & \langle 2\rangle & 3 & 4 & \langle 5\rangle & | & \langle 6\rangle & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & \langle 6\rangle & | & \langle 5\rangle & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ видаленням стовпця з зірочкою отримуємо: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ (див. рис. 5). В формулі в дужки $\langle a\rangle$ взяті використані елементи.

2. Якщо $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$, тоді маємо: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & | & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & 2 & | & 6 & 8 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$; визначаємо стовпці для заміни: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$. Заміняємо стовпці в підстановці. З підстановки $\begin{pmatrix} 1 & \langle 2\rangle & 3 & 4 & \langle 5\rangle & | & 6 & \langle 7\rangle & 8 & 9 & 10 \\ 1 & * & 4 & 3 & \langle 8\rangle & | & 6 & \langle 5\rangle & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ видаленням стовпця з зірочкою одержуємо $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 4 & 3 & 8 & 6 & 5 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$ (ілюстрація на рис. 6).

Приклад 5. Ініціатор та затравку представимо підстановками. Нехай ініціатор — це $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, а затравка — це $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. Замінимо стовпець ініціатора $\begin{pmatrix} t_i \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ затравкою, використавши стовпець затравки: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Тоді маємо: $\begin{pmatrix} t_z \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_z \\ \tau_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x \\ t_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \tau_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$; в підстановці ставимо * під $2 = t_i$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 4 & 5 & 6 \\ 2 & * & 1 & | & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, далі виконуємо видалення стовпця з зіркою в підстановці $\begin{pmatrix} \langle 1\rangle & \langle 2\rangle & 3 & | & 4 & \langle 5\rangle & 6 \\ \langle 6\rangle & * & 1 & | & 5 & \langle 3\rangle & 4 \end{pmatrix}$, одержуємо як результат підстановку $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Ізоморфізм Бовмани між графами і перестановками та його використання для побудови предфрактальних переставних конфігурацій

Нехай є повний орієнтований граф $F^o = (V, U)$ без петель, де V — множина його kвершин, U — множина, що містить $|U| = k\,(k-1)$ дуг $(i, j)\,, i \neq j, \;\; i, j \in V$, тобто $U = \{(i, j) \;\; |i \neq j; \;\; i, j \in V\}$.

Розглянемо частинний граф $F_k^o = (V, U^o)$, де $U^o \subset U$, причому, якщо $(i, j) \in U^o$, то $(j, i) \notin U^0$ та $\forall i, j \in V$ або $(i, j) \in U^o$ або $(j, i) \in U^o$.

Позначимо $N\,(i)$ — зовнішній ранг вершини i графа F_k^o — тобто кількість дуг, що виходять з вершини i. Позначимо $\{F_k^o\}$ множину всіх можливих графів F_k^o. Нехай $\{\Gamma^*\}$ — підмножина множини $\{F_k^o\}$,$\{\Gamma^*\} \subset \{F_k^o\}$, яка складається з таких графів $\Gamma^* = F_k^o$, які не містять циклів.

Розглянемо евклідову множину k-переставлень $E_k\,(J_k)$[1], де $J_k = \{1, 2, ..., k\}$ — множина перших kнатуральних чисел.

Як відомо [10], множина переставлень $E_k\,(J_k)$ ізоморфна множині графів $\{\Gamma^*\}$. Ізоморфізм графів Γ^* та переставлень $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k) \in E_k\,(J_k)$ встановлюється правилом: $\pi_i = N\,(i) + 1, \;\; \forall i \in J_k$.

Назвемо цей ізоморфізм ізоморфізмом Бовмана.

Приклад 6. Нехай є переставлення $\pi = (4, 1, 2, 3) \in E_4\,(J_4)$. Йому відповідає граф, що зображено на рис. 7. Зовнішні ранги $N\,(1) = 3;\;\; N\,(2) = 0;\; N\,(3) = 1;\;\; N\,(4) = 2$.

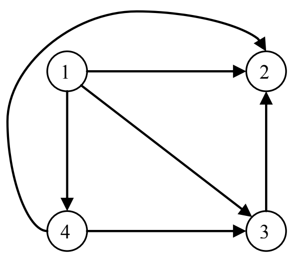

Рис. 7. Приклад відповідного до переставлення $(4, 1, 2, 3)$ графа.

Алгоритм побудови графа $\Gamma^*(\pi)$ ізоморфного за Бовманом переставленню $\pi \in E_k(J_k)$.

Побудова графа $\Gamma^*(\pi)$, ізоморфного за Бовманом переставленню $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k) \in E_k(J_k)$ може бути здійснена за правилом:

1. За переставленням $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k)$ записують підстановку $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k \\ \pi_1 & \pi_2 & ... & \pi_k \end{pmatrix}$, та підрахувати зовнішні ранги вершин 1, 2, ..., i, ..., k як $\pi_1 - 1,\ \pi_2 - 1,\ ...,\ \pi_i - 1,\ ...,\ \pi_k - 1$ відповідно.
2. Спершу (при $t = 1$) будують ребра з вершини $i_t = i_1$, що має максимальний зовнішній ранг $\pi_{i_1} - 1 = k - 1$ (тобто $\pi_{i_1} = k$), з'єднуючи всі вершини $j \neq i_1$ з вершиною i_1 ребрами $(i, j)\,,\ j \in J_k$;
3. Якщо $t = k$, зупинка, інакше вибирають вершину i_tз максимальним рангом $k - t$, з'єднуючи всі вершини j (крім вершин $i_1, ..., i_t$ з вершиною i_t ребром $(i_t, j)\,,\ j \in J_k$;
4. Збільшують t на одиницю, перехід на крок 2.

Твердження. *Граф $\Gamma^*(\pi)$, побудований згідно наведеного алгоритму є ізоморфний за Бовманом переставленню π.*

Доведення. Очевидно, що граф містить k вершин, у кожній з яких зовнішній ранг – це одне з чисел з множини $\{0, 1, 2, ..., k-1\}$. Причому, якщо у вершині i ранг $N(i)$, то за побудовою $N(i) + 1 = \pi_i \quad \forall i \in J_k$. Граф $\Gamma^*(\pi)$ за побудовою не має петель.

Оскільки ребра для вершин будують згідно алгоритму з вершини в нерозглянуті ще вершини, то цикли не утворюються. За побудовою наступна вибрана вершина і з'єднується ребром (i, j) з усіма ще не розглянутими вершинами j. Отже, $\forall i, j \in V$ або (i, j), або (j, i) є в графі. Тобто, побудовано граф $\Gamma^*(\pi) \subset \{F_k^o\}$, який не містить циклів та зв'язний з $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k)$ алгоритмом $\pi_i = N(i) + 1$, тобто ізоморфний за Бовманом: $\Gamma^*(\pi) \in \{\Gamma^*\}$. Що і треба було довести. □

Приклад 7. Нехай є граф Γ^* (рис. 8). Побудуємо відповідне йому за ізоморфізмом Бовмана переставлення. Для цього підрахуємо зовнішні ранги вершини: $N(1) = 2;\ N(2) = 1;\ N(3) = 3;\ N(4) = 0$, отже переставлення відповідне до графа Γ^* таке: $(3, 2, 4, 1)$.

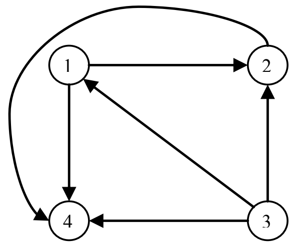

Рис. 8. Приклад відповідного до переставлення $(3, 2, 4, 1)$ графа.

Ізоморфізм Бовмана можна використовувати для побудови комбінаторних конфігурації, що мають фрактальні властивості.

Алгоритм побудови предфрактальних переставних конфігурацій.

Задається переставлення π.

В якості вихідного графа вибираємо граф $\Gamma^*(\pi)$, ізоморфний за Бовманом переставлення $\pi = (\pi_1, ..., \pi_k) \in E_k(J_k)$.

В якості затравки вибираємо граф, ізоморфний за Бовманом деякому переставленню $\pi_z \in E_m(J_m)$.

Зауваження. Кількість елементів в π (число k) та π_z (число m) є не залежними один від одної величинами.

Правило заміщення вершини затравкою.

1. Кожен елемент π_i^z переставлення $\pi_z = (\pi_1^z, ..., \pi_i^z, ..., \pi_m^z)$ перетворюємо в число $\pi_i^z + k$, позначивши, переставлення, що утворилося π_z^{+k}. (Це переставлення з множини $E_m(J_{m+k} \backslash J_k)$).
2. Вибираємо (фіксуємо) вершину i^*, з зовнішнім рангом π_{i^*}, яка заміщується затравкою.
3. Утворюється граф, що має $k + m - 1$ вершин з номерами $1, 2, ..., k, k + 1, ..., k + m - 1$.
4. Вершинам $1, 2, ..., k$, крім вершині i^*, привласнюють ті ж зовнішні ранги, що були у вершин з такими ж номерами в графі $\Gamma^*(\pi)$.
5. Вершині i^* привласнюється зовнішній ранг $N(i^*) = \pi_m^z + k - 1$.
6. Вершинам $j \in \{k + 1, k + 2, ..., k + m - 1\}$ привласнюють зовнішній ранг $N(j) \in \{\pi_1^z + k - 1, \pi_2^z + k - 1, ..., \pi_{m-1}^z + k - 1\}$ відповідно до правила: $N(k + i) = \pi_i^z + k - 1 \; \forall i \in J_{m-1}$.
7. У вершини, ранг якої рівний числу $k + m - 1$ (згідно п.6), замінюємо ранг на ранг вершини i^*, тобто на число $\pi_{i^*} - 1$.

Приклад 8. Вихідний граф на рис. 8. Йому відповідає переставлення $\pi = (3, 2, 4, 1)$. Затравка $\pi_z = (2, 3, 1)$. Вибрана для заміщення вершина $i^* = 1$ з зовнішнім рангом $\pi_{i^*} = 3$.

Розв'язок. Застосуємо правило заміни вершини затравкою.

Крок 1. Кожен елемент переставлення $\pi_z = (2, 3, 1)$ перетворимо додавши $k = 4$, одержимо $z_z^{+4} = (6, 7, 5) \in E_3(\{5, 6, 7\})$.

Крок 2. $i^* = 1$; $\pi_{i^*} = \pi_1 = 3$

Крок 3. Утворюємо граф, що має $k + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ вершин з номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Крок 4. Вершинам 2, 3, 4 (крім вершини 1) привласнюємо ті ж зовнішні ранги, що були: $N(2) = 1$; $N(3) = 3$; $N(4) = 0$.

Крок 5. Вершині $i^* = 1$ привласнюють зовнішні ранги $N(1) = \pi_3^z + 4 - 1 = 1 + 4 - 1 = 4$.

Крок 6. Вершинам $k + 1$, ..., $k + m - 1$ (тобто 5, 6) привласнюють зовнішні ранги $N(k + i) = \pi_i^z + k - 1$, тобто $N(k + 1) = N(5) = \pi_1^z + 4 - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$; $N(k + 2) = N(6) = \pi_2^z + 4 - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Крок 7. Рангу вершині i, що рівний $k + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$, тобто вершині $i = 6$ привласнюємо нове значення $N(6) = \pi_{i^*} - 1 = 3 - 1 = 2$.

Граф побудовано. Маємо такі зовнішні ранги $N(1) = 4$; $N(2) = 1$; $N(3) = 3$; $N(4) = 0$; $N(5) = 5$; $N(6) = 2$. Відповідне йому переставлення $(5, 2, 4, 1, 6, 3)$.

Результат дії алгоритму заміщення вершини затравкою на рис. 9.

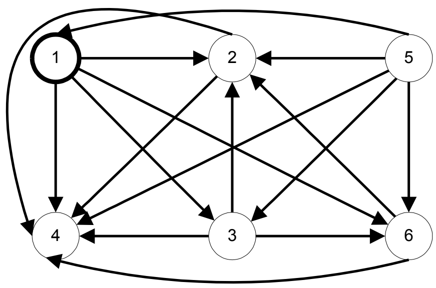

Рис. 9. Приклад заміщення вершини $i^* = 3$ затравкою $\pi^z = (2, 3, 1)$.

Звертаємо увагу, що ребра графа на рис. 8 збереглися на рис. 9, крім ребра $(3, 1)$ яке змінилося на $(1, 3)$.

Граф, що отримується в результаті викладеного алгоритму будемо називати предфрактальним переставним графом другого покоління. Вихідний граф називати ініціатором.

При повторенні цієї процедури l раз отримаємо предфрактальний переставний граф $(l+1)$-го покоління. Цей алгоритм можна викласти в термінах переставлення $\pi \in E_k(J_k)$ та $\pi_z \in E_m(J_m)$.

Висновок

Запропоновано підхід до введення предфрактальних комбінаторних (переставних) конфігурацій. Доцільно дослідити це і для розміщень.

Список літератури

1. Сергиенко И. В. Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации / И. В. Сергиенко, М. Ф. Каспшицкая. — К.: Наук. думка, 1981. — 288 с.
2. Гуляницкий Л. Ф. Розробка моделей і наближених методів комбінаторної оптимізації та їх застосування в інформаційних технологіях: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук: 01.05.02 / Л. Ф. Гуляницкий. — К., 2005. — 32 с.
3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян , О. О. Ємець. — К.: Ін-т системн. досліджень освіти, 1993. — 188 с.
4. Перепелиця В. А. К проблеме распознавания фрактальних графов / Перепелиця В. А., Сергиенко Н. В., Кочкаров А. М.// Кибернетика и системній аналіз. — 1999. — №4. С. 72–89
5. Сергеева Л. Н. Нелинейная економика: модели и методы / Л. Н. Сергеева. — Запорожье: «Полиграф» 2003. — 218 с.
6. Ємець О. О. Ізоморфізм Бовмана між графами і переставленнями та його використання для побудови предфрактальних переставних конфігурацій / О. О. Ємець, О. В. Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини: Матер. Всеукрю наук. сем. 26–27 серпня 2011 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — С. 54-57.
7. Ємець О. О. Деякі предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації / О. О. Ємець, О. В. Тур // Інформатика та системні науки: Матер. III Всеукр. наук.-практ. конф. 1–3 березня 2012 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. — С. 98-104.
8. Ємець О. О. Комбінаторні предфрактали як слова над заданим алфавітом та деякі їх властивості / О. О. Ємець, О. В. Тур // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини: Матер. Всеукрю наук. сем. 7–8 вересня 2012 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2012. — С. 43–49.
9. Ємець О. О. Деякі предфрактальні переставні комбінаторні конфігурації для переставлень з повтореннями / О. О. Ємець, О. В. Тур // 13 Міжвуз. наук.-практ. сем. "Комбінаторні конфігурації та їх застосування", 13–14.04.2012. — Кіровоград, 2012. — С. 55–58.
10. Bowman V. J. Permutation polyhedra / V. J. Bowman // SIAM J. Appl. Math. — 1972. — V. 22. — № 4. — P. 580–589.

Статья поступила в редакцию 14.05.2013