УДК 519.85

NP-ТРУДНОСТЬ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА

© Е. М. Емец, Ю. Ф. Олексийчук

Полтавский университет экономики и торговли
ул. Коваля, 3, г. Полтава, 36014, Украина
e-mail: *yemetsli@mail.ru, olexijchuk@gmail.com*

Abstract. In article is proposed the maximum flow problem with additional combinatorial restrictions. This problem is generalization of the classical maximum flow problem. In article NP-hard of a problem is proved.

Введение

В статье рассматривается задача нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями и анализируется ее сложность.

Задача нахождения максимального потока хорошо известна [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] и является полиномиальной, для ее решения, в частности, используются методы Форда и Фалкерсона [1], Эдмондса и Карпа [4], Диница [5], Карзанова [6] и др. Рассматриваемая задача является обобщением задачи нахождения максимального потока и впервые была рассмотрена в [8]. Задачу можно свести к евклидовой комбинаторной задаче оптимизации на размещениях [9], для решения которой известны неполиномиальные алгоритмы. Поэтому вопрос о сложности задачи нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями является актуальным.

В работе доказана NP-трудность рассматриваемой задачи и NP-полнота в сильном смысле соответственной задачи распознавания.

1. Задачи евклидовой комбинаторной оптимизации

Рассмотрим основные понятия евклидовой комбинаторной оптимизации [9]. Под мультимножеством будем понимать совокупность элементов, среди которых могут быть и одинаковые. Всякое мультимножество $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_\eta\}$ можно представить его основой $S(G) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, то есть кортежем всех его разных элементов, и первичной спецификацией $[G] = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, где η_i — кратность соответственного элемента основы e_i в мультимножестве. Множество $A^k_{\eta n}(G)$, элементами которого являются разные упорядоченные наборы k элементов из мультимножества G, называют евклидовым комбинаторным множеством размещений.

Евклидовые комбинаторные множества допускают погружение в арифметическое евклидовое пространство, то есть рассмотрение элементов $A^k_{\eta n}(G)$ как точек

k-мерного пространства [9]. Погруженное евклидово комбинаторное множество размещений обозначают $E^k_{\eta n}$.

Линейной задачей евклидовой комбинаторной оптимизации на размещениях называют [10, 9] следующую задачу: найти упорядоченную пару $\langle y^*, f(y^*)\rangle$,

$$f(y^*) = \max_{x \in E^k_{\eta n}} f(y)\,; \quad \mathrm{y}^* = \arg\max_{x \in E^k_{\eta n}} f(y)\,, \tag{1}$$

где $y = (x_1, x_2, \ldots, x_k, y_{k+1}, ..., y_m)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $f(y)$ — линейная функция, при линейных ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq a_{i0} (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

При $m = k$ задачу (2)-(3) называют полностью комбинаторной, при $m > k$ — частично комбинаторной.

Разработке методов решения задач комбинаторной оптимизации, исследованию свойств выпуклых оболочек комбинаторных множеств посвящено много работ (см., в частности, [9, 11, 10, 12]). Методы решения комбинаторных задач на размещениях предложены, например, в [10] и [12]; все они являются неполиномиальными. Заметим, что при $\eta = k$ множество размещений $E^k_{\eta n}$ является множеством перестановок.

2. Задача нахождения максимального потока с дополнительными комбинаторными ограничениями

Пусть дан ориентированный граф $\Gamma = (V, U)$, где V — множество вершин, U — множество дуг. Дугу, соединяющую вершины v_i и v_j, обозначим u_{ij}. Граф может иметь кратные дуги. В таком случае будем обозначать дуги $u_{ij(1)}$, $u_{ij(2)}$, $\ldots$, $u_{ij(p)}$, где p — количество дуг, соединяющих вершины v_i и v_j.

Определение 1. [7] Транспортной сетью называют ориентированный граф $\Gamma = (V, U)$, в котором каждой из дуг $u_{ij(l)}$ присвоено неотрицательное число $b_{ij(l)} \geq 0$, которое называют пропускной способностью дуги. Хотя бы одна из вершин имеет только исходящие дуги. Такую вершину называют источником и обозначают v_s. Вершину, имеющую только входящие дуги, называют стоком и обозначают v_t.

Дальше будем рассматривать транспортные сети с одним источником и одним стоком. Все остальные вершины лежат на пути из v_s в v_t.

Определение 2. [7] Потоком называют функцию $w : U \to R$ со следующими свойствами:

1. Значение функции w на дуге $u_{ij(l)}$ не может превышать пропускную способность дуги, то есть $w\left(u_{ij(l)}\right) \leq b_{ij(l)}$.

2. Сохранение баланса во всех вершинах, кроме стока и источника, то есть $\sum_{u_{iz(l)}\in U} w\left(u_{iz(l)}\right) = \sum_{u_{zj(t)}\in U} w\left(u_{zj(t)}\right) \; \forall z,\, z \neq s,\, z \neq t$.

Определение 3. Величиною потока $|w|$ будем называть сумму значений функции w по исходящим из источника дугам:

$$\sum_{u_{si(l)}\in U} w\left(u_{si(l)}\right) = |w|\,.$$

Величина потока $|w|$ также равна сумме значений функции w по входящим в сток дугам.

Задача нахождения максимального потока формулируется так: найти поток w, для которого величина потока $|w|$ является максимальной.

Потоком по дуге $u_{ij(l)}$ будем называть $w\left(u_{ij(l)}\right)$.

Наложим дополнительные ограничения. Пусть поток по дугам $u_{ij(l)} \in U' \subseteq U$ может принимать значения, которые не превышают число $x_{ij(l)} = g_l \in G$, то есть $w\left(u_{ij(l)}\right) \leq x_{ij(l)}$, где $G = \{g_1, g_2, ..., g_\eta\}$; причем вектор из $x_{ij(l)}$ является размещением элементов из G, то есть $x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, ..., x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k(G)$. Будем называть данную задачу комбинаторной задачей нахождения максимального потока.

Рассмотрим математическую модель задачи. Пусть поток по дуге $u_{ij(l)}$, равен $y_{ij(l)}$, то есть $y_{ij(l)} = w\left(u_{ij(l)}\right)$.

Задача состоит в отыскании максимального значения функции $f(y)$ и соответствующих значений $x_{ij(l)}$, $y_{ij(l)}$:

$$f(y) = \sum_{u_{jt(l)}\in U} y_{jt(l)} \to \max, \tag{3}$$

при выполнении следующих условий:
сохранение баланса в вершинах

$$\sum_{u_{iz(l)}\in U} y_{iz(l)} = \sum_{u_{zj(l)}\in U} y_{zj(l)}, z \neq t, z \neq s, \tag{4}$$

ограничения на пропускную способность дуг

$$0 \leq y_{ij(l)} \leq b_{ij(l)} \forall u_{ij(l)} \in U, \tag{5}$$

дополнительные комбинаторные ограничения

$$y_{ij(l)} \leq x_{ij(l)} \forall u_{ij(l)} \in U, \tag{6}$$

$$x = (x_{i_1 j_1}, x_{i_2 j_2}, ..., x_{i_k j_k}) \in E_{\eta n}^k(G)\,. \tag{7}$$

Задача (4)-(8) является частным случаем линейной задачи евклидовой частично комбинаторной оптимизации на размещениях (2)-(3).

Пример 1. Система трубопроводов задана графом (рис. 1). Каждая из труб (дуга графа) имеет ограниченную пропускную способность (число возле дуги). На каждой из труб необходимо построить насосную станцию. В распоряжение имеются материалы для создания шести насосных станций с пропускной способностью 4, 4, 5, 5, 7, 7 единиц соответственно. Задача состоит в том, что бы найти такое размещение насосных станций, которое позволит максимизировать величину потока из V_s в V_t, и найти этот максимальный поток.

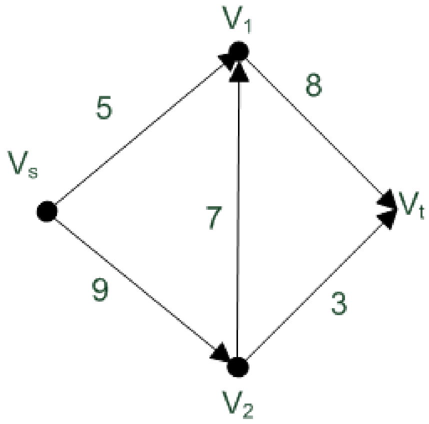

Рис. 1. Транспортная сеть

Построим математическую модель задачи:

$$f(y) = y_{1t} + y_{2t} \to \max$$

при ограничениях:

$$y_{s1} + y_{21} = y_{1t},$$
$$y_{s2} = y_{21} + y_{2t},$$
$$0 \le y_{s1} \le 5,$$
$$0 \le y_{s2} \le 9,$$
$$0 \le y_{21} \le 7,$$
$$0 \le y_{1t} \le 8,$$
$$0 \le y_{2t} \le 3,$$
$$y_{s1} \le x_{s1},\ y_{s2} \le x_{s2},\ y_{21} \le x_{21},\ y_{1t} \le x_{1t},\ y_{2t} \le x_{2t},$$

где $x = (x_{s1}, x_{s2}, x_{21}, x_{1t}, x_{2t}) \in E_{63}^{5}(G)$, $G = \{4^2, 5^2, 7^2\}$.

Отметим, что задача (4)–(6) при отсутствии кратных дуг является моделью классической задачи нахождения максимального потока. В случае кратных дуг, их можно заменить одной, при этом пропускная способность будет равна $b_{ij} = \sum_{l=1}^{p} b_{ij(l)}$.

Аналогично можно наложить комбинаторные ограничения и на другие потоковые задачи. Присвоим каждой дуге $u_{ij(l)}$ стоимость пересылки единицы потока $c_{ij(l)}$ и рассмотрим задачу нахождения потока минимальной стоимости, величина которого не меньше заданного числа W, $W > 0$. Тогда целевой функцией будет

$$f(y) = \sum_{u_{ij(l)} \in U} c_{ij(l)} y_{ij(l)} \to \min, \tag{8}$$

ограничение на величину потока:

$$f(y) = \sum_{u_{ij(l)} \in U} y_{jt(l)} \geq W, W > 0. \tag{9}$$

В [13] рассматривается задача оптимального размещения производства, моделью которой является задача (5)-(10).

В [14] рассматривается комбинаторная транспортная задача на перестановках. Отличие от классической транспортной задачи в том, что вектор количеств перевезенных ресурсов может быть только перестановкой или размещением элементов из некоторого мультимножества G. С помощью ввода фиктивных источника и стока, которые соединены со всеми пунктами отправления и потребления соответственно, задача может быть сведена к задаче нахождения потока заданной величины минимальной стоимости.

Задача (5)-(10) является обобщением задачи нахождения потока минимальной стоимости [2].

3. Оценка сложности задачи

Перейдем от задачи оптимизации к задаче распознавания [15] , заменив условие (4) следующим: найти значения функции $f(y)$ и соответственных значений $x_{ij(l)}$, $y_{ij(l)}$, для которых выполняется условие (10).

То есть, задача состоит в том, чтобы отыскать поток не меньше указанной величины.

Напомним вспомогательную NP-полную в сильном смысле задачу «3-разбиение» [15].

Задача 3-разбиение. Условие. Заданы множество A, состоящее из $3m$ элементов, граница $B \in Z^+$ и «размеры» $s(a) \in Z^+$ всех элементов $a \in A$, причем $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$ и $\sum_{a \in A} s(a) = mB$.

Вопрос. Можно ли A так разбить на m непересекающихся подмножеств $S_1, S_2 \ldots, S_m$, что для $1 \le i \le m$ выполняется $\sum_{a \in S_i} s(a) = B$.

Теорема 1. *Задача (10), (5)–(8) нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-полной в сильном смысле.*

Доказательство. Задача, очевидно, принадлежит классу NP.

Рассмотрим частный случай задачи. Пусть транспортная сеть задана графом следующей структуры (рис. 2): имеется $m+1$ вершина (учитывая источник и сток), поочередно соединена дугами кратности 3 (всего $3m$ дуг).

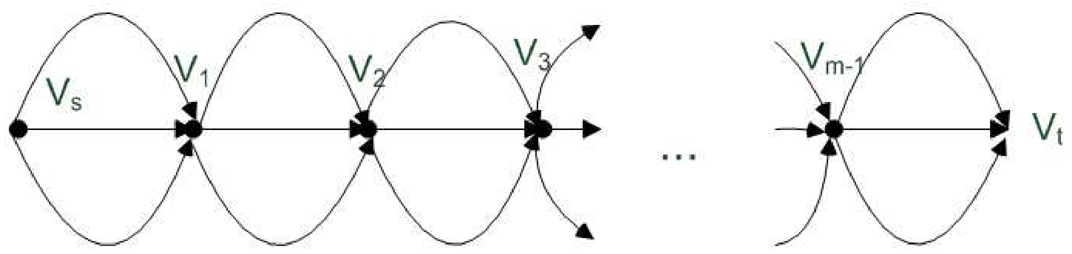

Рис. 2. Структура графа

Пусть пропускная способность каждой из дуг неограниченна, $b_{ij(l)} = \infty$ (или достаточно взять $b_{ij(l)} \ge \max(s(a))$, $\forall i, j, l$), то есть в задаче будут учитываться только дополнительные комбинаторные ограничения. А мультимножество $G = \{s(a_1), s(a_2), ..., s(a_{3m})\}$, причем $\frac{B}{4} < s(a) < \frac{B}{2}$. Таким образом, на значение потока по каждой из дуг будет наложено ограничение $w\left(u_{ij(k)}\right) \le x_{ij(l)}$, причем вектор $x = \left(x_{s1(1)}, x_{s1(2)}, ..., x_{ij(k)}, ..., x_{m-1,t(3)}\right) \in E_{3m}(G)$, где $E_{3m}(G)$ — множество перестановок из $3m$ элементов [9] (частный случай множества размещений при $k = \eta$). Пусть нужно найти поток, величина которого не меньше $W = B$.

Величина потока не может превышать пропускную способность минимального разреза [1]. Граф имеет m разных разрезов. Очевидно, что максимальное значение мощности минимального разреза достигается в случае равности мощностей всех разрезов и равно $\frac{mB}{m} = B$. То есть максимальное значение величины потока не может превышать B.

Если решение задачи будет найдено, то легко получить решение задачи 3-разбиение. Тогда $S_1 = \left\{x_{s1(1)}, x_{s1(2)}, x_{s1(3)}\right\}$, $S_2 = \left\{x_{12(1)}, x_{12(2)}, x_{12(3)}\right\}$, $\ldots$, $S_i = \left\{x_{i-1,i(1)}, x_{i-1,i(2)}, x_{i-1,i(3)}\right\}$, $\ldots$, $S_m = \left\{x_{m-1,t(1)}, x_{m-1,t(2)}, x_{m-1,t(3)}\right\}$. Не трудно убедиться, что сведение задачи 3-разбиение к рассматриваемой задаче осуществляется за полиномиальное время.

Таким образом, задача нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-полной.

NP-полнота задачи в сильном смысле следует из того, что NP-полная в сильном смысле задача 3-разбиение была сведена к частному случаю задачи: с ограничеными числовыми значениями и графом особой структуры. □

Замечание 1. Условие допустимости кратных дуг, которое использовалось при доказательстве, на самом деле не является обязательным. Каждую из дуг графа (рис. 2) можно разбить новой вершиной на две. В результате получим граф с $4m+1$ вершиной и $6m$ дугами (рис. 3). Дополнительные комбинаторные условия следует наложить в каждой паре на одну из двух полученных дуг. Все остальные рассуждения остаются без изменений.

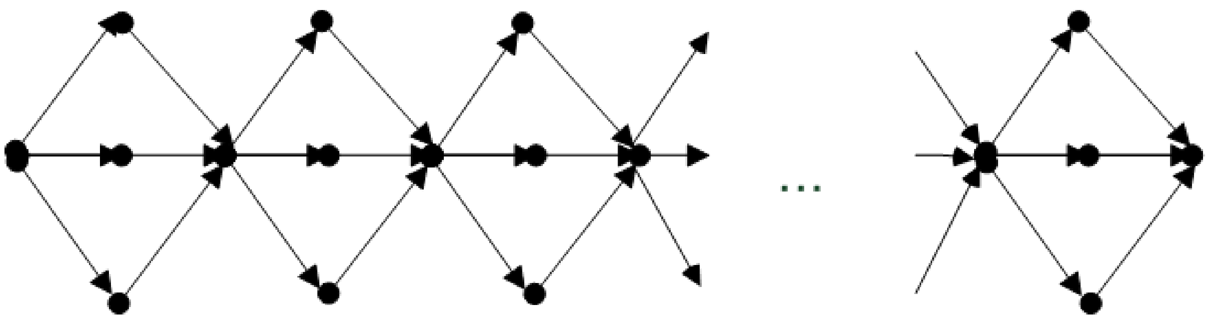

Рис. 3. Структура графа без кратных дуг

Следствие 1. *Задача (4)–(8) нахождения потока максимальной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-трудной.*

Доказательство. Решив оптимизационную задачу, можно получить решение задачи распознавания. Если величина максимального потока не меньше W, то это решение и будет решением задачи нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными ограничениями; иначе задача не имеет решения.

Таким образом, оптимизационная задача не проще задачи распознавания. Из этого можно сделать вывод, что задача нахождения потока максимальной величины с дополнительными комбинаторными условиями является NP-трудной. □

Заключение

В работе рассмотрена задача нахождения потока максимальной величины с дополнительными комбинаторными условиями. Доказана NP-трудность задачи и NP-полнота в сильном смысле задачи нахождения потока не меньше указанной величины с дополнительными комбинаторными условиями. Сложность задачи подтверждает применимость методов решения ее, как задачи комбинаторной оптимизации на размещениях. Актуальной остается задача выделения полиномиальных случаев и разработка соответсвующих методов.

Список литературы

1. Форд Л. Потоки в сетях / Л. Форд, Д. Фалкерсон. — М.: Мир, 1966. — 277 с.
2. Ху Т. Ч. Комбинаторные алгоритмы / Т. Ч. Ху, М. Т. Шинг. — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н. И. Лобачевского, 2004. — 330 с.
3. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях / Т. Ху. — М.: «Мир», 1974. — 519 с.
4. Edmonds J. Theoretical Improvements in Algorithmic Efficiency for Network Flow Problems / Edmonds J., Karp R. M. // J. ACM. — 1972. — Vol. 19, №2. — P. 248–264.
5. Диниц Е. А. Алгоритм решения задачи о максимальном потоке в сети со степенной оценкой / У. А. Диниц // Докл. АН СССР. — 1970. — Т. 194, №4. — С. 754–757.
6. Карзанов А. А. Нахождение максимального потока в сети методом предпотоков / А. А. Карзанов // Докл. АН СССР. — 1974. — Т.215, №1. — С. 49–53.
7. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн. — М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. — 1296 с.
8. Ємець О. О. Знаходження максимального потоку в мережі з додатковими комбінаторними обмеженнями / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Таврический вестник информатики и математики. — 2011. — №1. — С. 43–50.
9. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К.: ІСДО, 1993. — 188 с.
   http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/487
10. Емец О. А. Комбинаторная оптимизация на размещениях / О. А. Емец, Т. Н. Барболина. — К.: Наук. думка, 2008. — 159 с.
    http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/473
11. Стоян Ю. Г. Оптимізація на полірозміщеннях: теорія та методи / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець, Є. М. Ємець. — Полтава: РВЦ ПУСКУ, 2005. — 103 с.
    http://dspace.uccu.org.ua/handle/123456789/376

12. Ємець О. О. Прямий метод відсікання для задач комбінаторної оптимізації на розміщеннях / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей. Фізико-математичні науки. — Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2011, №1. — С. 36–43.
13. Ємець О. О. Задача оптимального розміщення виробництва / О. О. Ємець, Є. М. Ємець, Ю. Ф. Олексійчук // Інформатика та системні науки (ІСН-2012): Матеріали III Всеукраїн. наук.-практ. конф. (1-3 березня 2012, Полтава). — Полтава: РВВ ПУЕТ. — С. 80–83.
14. Емец О. А. Транспортные задачи на перестановках: свойства оценок в методе ветвей и границ / О. А. Емец, Т. А. Парфенова // Кибернетика и систем. анализ. — 2010. — №6. — С. 106–112.
15. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон — М.: Мир, 1982. — 416 с.

Статья поступила в редакцию 10.11.2012