УДК 517.977.58; 517.977.54

ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ В ЗАДАЧІ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

© В. В. Пічкур, Є. М. Страхов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
факультет кібернетики
вул. Володимирська, 64, 01601, Київ, Україна
e-mail: *vpichkur@gmail.com*

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
інститут математики, економіки і механіки
вул. Дворянська, 2, 65026, Одеса, Україна
e-mail: *swebus86@gmail.com*

Abstract. In this paper dynamical system with fixed switching points is considered. Existence conditions for a solution of a structural and parametric optimization problem in a class of structural controls and sufficient conditions for optimality are proved. A numerical method for structural optimization of linear system with quadratic functional is created.

Вступ

При оптимізації складних технічних систем функції керування, як правило, задаються у структурно-параметричній формі. Задачі структурно-параметричної оптимізації вивчалися із застосуванням варіаційного методу, зокрема, в праці [3] були побудовані алгоритми типу градієнтного спуску. Важливим випадком структурного представлення керування є випадок релейних керувань, або, більш широко, керувань, що вибираються з дискретної множини. В [5, 6] описано алгоритми, які використовують структуризацію фазового простору, при цьому керування вибирається в класі кусково-постійних. У роботі [1] обгрунтований принцип оптимальності Беллмана для задачі вибору оптимальної структури, одержано рівняння Беллмана у інтегральній та диференціальній формах. Випадок структур керування, що містять фазову змінну, був розглянутий у статті [7]. Для задачі з фіксованими точками перемикання був доведений принцип оптимальності Беллмана та одержано рівняння Беллмана в інтегральній та інтегро-диференціальній формах.

У статті отримані достатні умови оптимальності в задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання. Для випадку лінійної системи керування доведені умови існування та єдиності розв'язку. Запропонований чисельний алгоритм оптимізації за параметрами лінійної системи з квадратичним критерієм якості.

1. Достатні умови оптимальності в задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання

Розглянемо задачу оптимального керування

$$J(x, u) = \int_{t_0}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T)) \;\to\; \inf \tag{1}$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \; x(t_0) = x_0 . \tag{2}$$

Тут x — вектор фазових координат розмірності n, $x(t) \in X(t) \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, T]$ — фазові обмеження, u — вектор керування розмірності m, $f_0(x, u, t)$, $\Phi(x)$ — неперервні функції, $f(x, u, t)$ — n-вимірна вектор-функція така, що справджуються умови: для будь-якого фіксованого $t \in [t_0, T]$ функція $f(x, u, t)$ є неперервною за x; для будь-яких фіксованих $x \in X$ та u функція $f(x, u, t)$ є вимірною за t; існує така інтегрована функція $p(t)$, що $\|f(x, u, t)\| \le p(t)$, $t \in [t_0, T]$; на проміжку $[t_0, T]$ виконується умова Ліпшиця за керуванням і за фазовою змінною.

Нехай керування в задачі (1)–(2) задано в структурній формі

$$u(t) = \Psi_i(t, b_i, x(t)), \quad t \in [t_i, t_{i+1}) . \tag{3}$$

де $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ — точки перемикання, $b_i \in R_i$ — числові параметри, $R_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $i = 0, ..., N-1$, k_i — натуральні числа. Функції $\Psi_i(t, b_i, x)$, $t \in [t_i, t_{i+1})$ є такими, що: на кожному з відрізків $[t_i, t_{i+1})$ функції $\Psi_i(t, b_i, x)$ є неперервними за t і b_i; на проміжку $[t_0, T]$ виконується умова Ліпшиця за фазовою змінною. Точки перемикання $t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ є фіксованими. Умови на праву частину системи (2) і функцію керування (3) дозволяють задовольнити умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші у формі Каратеодорі [9]. Крім того, мають виконуватись умови продовжуваності розв'язку на інтервал $t \in [t_0, T]$ [1].

Задача (1)–(3) є задачею структурно-параметричної оптимізації з керуванням, заданим в структурному класі (3). Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(3) існує, $u^*(t) = \Psi_i(t, b_i^*, x^*(t))$, $t \in [t_i, t_{i+1})$ — оптимальне керування в класі (3), $x^*(t)$ — оптимальна траєкторія, $\{b_i^*\}$, $i = 0, ..., N-1$ — оптимальний набір параметрів. Розглянемо допоміжну задачу. Зафіксуємо $t_s \in \{t_1, ..., t_{N-1}\}$. Задача полягає в тому,

[1]Продовжуваність розв'язку на довільний інтервал забезпечує, наприклад, умова квазілінійності

щоб мінімізувати функціонал

$$J_s(x, u) = \int_{t_s}^{T} f_0(x(t), u(t), t)\, dt + \Phi(x(T))$$

за умов

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \; x(t_s) = x^*(t_s),$$
$$u(t) = \Psi_i(t, b_i, x(t)), \; t \in [t_i, t_{i+1}) \subset [t_s, T], \; b_i \in R_i.$$

Для задачі (1)–(3) справедливий принцип оптимальності Беллмана [7].

Теорема 1. Якщо набір параметрів $\left\{\tilde{b}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ та траєкторія $\tilde{x}(t)$ є оптимальними у допоміжній задачі, то на відрізку $t \in [t_s, T]$ вони співпадають з оптимальним набором параметрів та оптимальною траєкторією задачі (1)–(3).

Означення 1. [7] Функція

$$B(z, t_s) = \inf_{b_j \in R_j} \left\{ \sum_{j=s}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_0(x(t), \Psi_j(t, b_j, x(t)), t)\, dt + \Phi(x(T)) \right\}, \tag{4}$$

що визначена на розв'язках системи (2) при початковій умові $x(t_s) = z$, називається функцією Беллмана задачі (1)–(3). Тут $z \in X(t_s)$, $x(\cdot)$ — розв'язок системи (2) при допустимому керуванні $u(t) = \Psi(t, b_i, x(t))$, $t \in [t_s, T]$, $t_s \in \{t_0, \dots, t_N\}$, інфінум в правій частині співвідношення (4) береться за допустимими керуваннями при $t \in [t_s, T]$.

За означенням функції Беллмана $B(x_0, t_0)$ дорівнює оптимальному значенню функціоналу (1) для задачі (1)–(3) з фіксованим лівим кінцем $x(t_0) = x_0$, тобто

$$B(x_0, t_0) = J(x^*, u^*).$$

Рівняння Беллмана для задачі (1)–(3) в інтегральній формі має вигляд

$$B(z, t_s) = \inf_{b_s \in R_s} \left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0(x(\tau), \Psi_s(\tau, b_s, x(\tau)), \tau)\, d\tau + B(x(t_{s+1}), t_{s+1}) \right\}.$$

Інтегро-диференціальне рівняння Беллмана задачі (1)–(3) має вигляд

$$\inf_{b_s \in R_s} \left\{ \int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[f_0(x(\tau), \Psi_s(\tau, b_s, x(\tau)), \tau) + \frac{\partial B(x(\tau), \tau)}{\partial \tau} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \langle grad_x B(x(\tau), \tau), f(x(\tau), \Psi_s(\tau, b_s, x(\tau)), \tau)\rangle \right] d\tau \right\} = 0. \tag{5}$$

Має місце така теорема.

Теорема 2 (достатні умови оптимальності)**.** Нехай функція $B(z,t)$ є кусково неперервно диференційованим розв'язком рівняння (5) з граничною умовою $B(z,T)=\Phi(z)$. Параметри $b_s^*, s=0,...,N-1$, знайдені з умов

$$\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[f_0\left(x\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,b_s^*,\,x\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)+\frac{\partial B\left(x\left(\tau\right),\,\tau\right)}{\partial\tau}+\right.$$

$$\left.+\left\langle grad_x B\left(x\left(\tau\right),\,\tau\right),\,f\left(x\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,\,b_s^*,\,x\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)\right\rangle\right]d\tau=$$

$$=\inf_{b_s\in R_s}\left\{\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[f_0\left(x\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,b_s,\,x\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)+\frac{\partial B\left(x\left(\tau\right),\,\tau\right)}{\partial\tau}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\langle grad_x B\left(x\left(\tau\right),\,\tau\right),\,f\left(x\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,\,b_s,\,x\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)\right\rangle\right]d\tau\right\},s=0,...,N-1, \qquad (6)$$

при підстановці у функції керування

$$u_s^*\left(z,t\right)=\Psi_s\left(t,\,b_s^*,\,z\right),s=0,\,\dots,\,N-1$$

породжують при $z=x$ єдиний розв'язок $x^*(\cdot)$ системи (2). Тоді набір параметрів $b_s^*, s=0,...,N-1$ є оптимальним у задачі (1)–(3).

Доведення. Оскільки вектори $b_s^*, s=0,...,N-1$ є розв'язком задачі (6) і для $B(z,t)$ має місце (5), то

$$\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[f_0\left(x^*\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,b_s^*,\,x^*\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)+\frac{\partial B\left(x^*\left(\tau\right),\,\tau\right)}{\partial\tau}+\right.$$

$$\left.+\left\langle grad_x B\left(x^*\left(\tau\right),\,\tau\right),\,f\left(x^*\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,\,b_s^*,\,x^*\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)\right\rangle\right]d\tau=0.$$

Звідси

$$\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}f_0\left(x^*\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,b_s^*,\,x^*\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)d\tau=-\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\frac{\partial B\left(x^*\left(\tau\right),\,\tau\right)}{\partial\tau}+\right.$$

$$\left.+\left\langle grad_x B\left(x^*\left(\tau\right),\,\tau\right),\,f\left(x^*\left(\tau\right),\,\Psi_s\left(\tau,\,b_s^*,\,x^*\left(\tau\right)\right),\,\tau\right)\right\rangle\right]d\tau=$$

$$=-\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\frac{dB\left(x^*(\tau),\tau\right)}{d\tau}d\tau=B\left(x^*\left(t_s\right),t_s\right)-B\left(x^*\left(t_{s+1}\right),t_{s+1}\right).$$

Тоді, з урахуванням останньої рівності, оптимальне значення функціоналу дорівнює

$$J\left(u^*,x^*\right)=\int\limits_{t_0}^{T}f_0\left(x^*(\tau),u^*(\tau),\tau\right)d\tau+\Phi\left(x(T)\right)=$$

$$= \sum_{s=0}^{N-1} \int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0\left(x^*(\tau), \Psi_s\left(\tau, b_s^*,\, x^*\left(\tau\right)\right), \tau\right) d\tau + \Phi\left(x(T)\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{N-1} \left[B\left(x^*\left(t_s\right), t_s\right) - B\left(x^*\left(t_{s+1}\right), t_{s+1}\right)\right] + \Phi(x(T)).$$

Враховуючи, що $B\left(x^*\left(T\right), T\right) = \Phi\left(x(T)\right)$, отримуємо

$$J\left(u^*, x^*\right) = B\left(x^*\left(t_0\right), t_0\right) = B(x_0, t_0). \tag{7}$$

При довільних значеннях $b_s, s = 0, ..., N-1$ з (10) та (9) маємо

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} f_0\left(x\left(\tau\right),\, \Psi_s\left(\tau, b_s,\, x\left(\tau\right)\right),\, \tau\right) d\tau \geq -\int_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\frac{\partial B\left(x\left(\tau\right),\, \tau\right)}{\partial \tau} + \right.$$

$$\left. + \left\langle grad_x B\left(x\left(\tau\right),\, \tau\right),\, f\left(x\left(\tau\right),\, \Psi_s\left(\tau,\, b_s,\, x\left(\tau\right)\right),\, \tau\right)\right\rangle\right] d\tau =$$

$$= -\int_{t_s}^{t_{s+1}} \frac{dB\left(x(\tau), \tau\right)}{d\tau} d\tau = B\left(x\left(t_s\right), t_s\right) - B\left(x\left(t_{s+1}\right), t_{s+1}\right).$$

Тоді, аналогічно до попередніх міркувань, отримаємо нерівність

$$J\left(u, x\right) \geq B\left(x\left(t_0\right), t_0\right). \tag{8}$$

З (7) та (8) випливає, що $J\left(u, x\right) \geq J\left(u^*, x^*\right)$. □

2. Умови існування та єдиності розв'язку для задачі структурно-параметричної оптимізації лінійної системи керування

Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt} = A\left(t\right)\, x\left(t\right) + C\left(t\right) u\left(t\right),\, x\left(t_0\right) = x_0, \tag{9}$$

де x — вектор фазових координат розмірності n, $x\left(t\right) \in X\left(t\right) \subseteq \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, T]$ — фазові обмеження, u — вектор керування розмірності m, $A\left(t\right)$ — матриця розмірності $n \times n$ з неперервними компонентами, $C\left(t\right)$ — матриця розмірності $n \times m$ з неперервними компонентами. Нехай керування задано у вигляді

$$u\left(t\right) = M_i(t)x(t) + N_i(t)b_i + q_i(t),\, t \in \left[t_i,\, t_{i+1}\right),\, i = 0,\, \dots,\, N-1, \tag{10}$$

де $b_i \in R_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$ — невідомі числові параметри, $M_i(t), N_i(t)$ — матриці з неперервними компонентами розмірностей $m \times n$ та $m \times k_i$ відповідно, $q_i(t)$ — вектори розмірності m з неперервними компонентами. Критерій якості має вигляд

$$J\left(x,\, u\right) = \Phi\left(x\left(T\right)\right). \tag{11}$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 3. Якщо у задачі (9)–(11) множина X є опуклою, функція $\Phi(\cdot)$ є строго опуклою на множині X, а множини R_i для всіх $i = 0, ..., N-1$ є опуклими та компактними, то існує точка екстремуму функціоналу $J\left(x,\, u\right)$ за параметрами $b_i \in R_i$, $i = 0, ..., N-1$, причому ця точка єдина.

Доведення. Підставимо вираз (10) у систему (9). В результаті на кожному з проміжків часу $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \dots, N-1$ отримаємо таку систему

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt} = A\left(t\right)\, x\left(t\right) + C\left(t\right)\left[M_i(t)x(t) + N_i(t)b_i + q_i(t)\right].$$

Перепишемо її у вигляді

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt} = \left[A\left(t\right) + C(t)M_i(t)\right]\, x\left(t\right) + C\left(t\right)N_i(t)b_i + C(t)q_i(t),$$

$$t \in \left[t_i,\, t_{i+1}\right),\; i = 0,\, \dots,\, N-1. \tag{12}$$

Запишемо розв'язок системи (12) за допомогою формули Коші. При $t \in [t_0, t_1]$ він має вигляд

$$x(t) = \Theta_0(t,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \Theta_0(t,s)\left[C(s)N_0(s)b_0 + C(s)q_0(s)\right]ds. \tag{13}$$

Тут $\Theta_0(t,t_0)$ — нормована за моментом t_0 фундаментальна матриця системи (12) при $i = 0$. Далі, при $t \in [t_1, t_2]$ розв'язок системи має вигляд

$$x(t) = \Theta_1(t,t_1)x(t_1) + \int\limits_{t_1}^{t} \Theta_1(t,s)\left[C(s)N_1(s)b_1 + C(s)q_1(s)\right]ds. \tag{14}$$

Тут $\Theta_1(t,t_1)$ — нормована за моментом t_1 фундаментальна матриця системи (12) при $i = 1$. З (13) отримаємо вираз для $x(t_1)$

$$x(t_1) = \Theta_0(t_1,t_0)x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \Theta_0(t_1,s)\left[C(s)N_0(s)b_0 + C(s)q_0(s)\right]ds.$$

Підставимо цей вираз у (14). Маємо при $t \in [t_1, t_2]$

$$x(t) = \Theta_1(t,t_1)\Theta_0(t_1,t_0)x_0 + b_0\Theta_1(t,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Theta_0(t_1,s)C(s)N_0(s)ds+$$

$$+\Theta_1(t,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Theta_0(t_1,s)C(s)q_0(s)ds + b_1\int\limits_{t_1}^{t}\Theta_1(t,s)C(s)N_1(s)ds + \int\limits_{t_1}^{t}\Theta_1(t,s)C(s)q_1(s)ds.$$

Тоді

$$x(t_2) = \Theta_1(t_2,t_1)\Theta_0(t_1,t_0)x_0 + b_0\Theta_1(t_2,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Theta_0(t_1,s)C(s)N_0(s)ds+$$

$$+\Theta_1(t_2,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Theta_0(t_1,s)C(s)q_0(s)ds + b_1\int\limits_{t_1}^{t_2}\Theta_1(t_2,s)C(s)N_1(s)ds + \int\limits_{t_1}^{t_2}\Theta_1(t_2,s)C(s)q_1(s)ds.$$

Останній вираз показує, що $x(t_2)$ є лінійним за b_0 та b_1. Продовжуючи цей процес далі для $i = 2, 3, ..., N-1$, можна показати, що $x(t_i)$ лінійно залежить від параметрів $b_0, b_1, ..., b_{i-1}$. Це означає, що $x(T)$ лінійно залежить від усіх параметрів задачі $b_0, b_1, ..., b_{N-1}$. Враховуючи строгу опуклість функції $\Phi(\cdot)$, отримуємо, що функція $\Phi\left(x\left(T\right)\right)$ є строго опуклою на всіх множинах $R_i, i = 0, ..., N-1$ як суперпозиція лінійної та строго опуклої функцій. А це означає, з урахуванням опуклості та компактності множин R_i, що функціонал $J\left(x,\, u\right) = \Phi\left(x\left(T\right)\right)$ має екстремум за параметрами $b_i, i = 0, ..., N-1$, причому цей екстремум єдиний [4]. □

Нехай тепер критерій якості в задачі (9)–(10) має вигляд

$$J\left(x,\, u\right) = \int\limits_{t_0}^{T} f_0\left(x\left(t\right),\, u\left(t\right),\, t\right)\, dt + \Phi\left(x\left(T\right)\right) \;\to\; \inf. \tag{15}$$

Для задачі (9), (10), (15) справедлива теорема, аналогічна теоремі 3.

Теорема 4. Якщо у задачі (9), (10), (15) множина X є опуклою, функція $f_0(x,u,t)$ є опуклою за x та строго опуклою за u, функція $\Phi(\cdot)$ є опуклою за x, а множини R_i для всіх $i = 0, ..., N-1$ є опуклими та компактними, то існує точка екстремуму функціоналу $J\left(x,\, u\right)$ за параметрами $b_i \in R_i$, $i = 0, ..., N-1$, причому ця точка єдина.

Доведення проводиться аналогічно до попередньої теореми.

3. Побудова оптимальної структури лінійної системи з квадратичним критерієм якості

Розглянемо лінійну систему (9) з керуванням вигляду (10). Нехай критерій якості має вигляд

$$J(x,u)=\int\limits_{t_0}^{T}\left(\langle D(\tau)x(\tau),x(\tau)\rangle+\langle E(\tau)u(\tau),u(\tau)\rangle\right)d\tau+\langle P_0x(T),x(T)\rangle\,, \qquad (16)$$

де $D(\tau),P_0$ — невід'ємновизначені симетричні матриці розмірності $n\times n$, $E(\tau)$ — додатновизначена симетрична матриця розмірності $n\times m$. Будемо шукати функцію Беллмана у вигляді квадратичної форми

$$B\left(z,\,t\right)=\left\langle P\left(t\right)\,z,\,z\right\rangle,$$

де $P\left(t\right)$ — невідома матриця розмірності $n\times n$ з абсолютно неперервними компонентами. При цьому

$$\frac{\partial B\left(z,\,\tau\right)}{\partial\tau}=\left\langle\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}\,z,\,z\right\rangle,\; grad_zB\left(z,\,\tau\right)=\left(P\left(\tau\right)+P^T\left(\tau\right)\right)\,z.$$

З означення функції Беллмана випливає, що $P\left(T\right)=P_0$. Запишемо рівняння (5) для цього випадку. Одержуємо

$$\inf_{b_s\in R_s}\left\{\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\Big[\langle D(\tau)x(\tau),x(\tau)\rangle+\langle E(\tau)u(\tau),u(\tau)\rangle+\left\langle\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}\,x\left(\tau\right),\,x\left(\tau\right)\right\rangle+\right.$$
$$\left.+\left\langle\left(P\left(\tau\right)+P^T\left(\tau\right)\right)\,x\left(\tau\right),\,A\left(\tau\right)x\left(\tau\right)+C\left(\tau\right)u\left(\tau\right)\right\rangle\Big]\,d\tau\right\}=0.$$

Підставимо у останній вираз замість $u(\tau)$ вираз (10), зробимо перетворення та згрупуємо подібні члени

$$\inf_{b_s\in R_s}\left\{\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\left\langle\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}x\left(\tau\right),x\left(\tau\right)\right\rangle+\langle D(\tau)x(\tau),x(\tau)\rangle+\right.\right.$$
$$+\langle E(\tau)M_s(\tau)x(\tau)+E(\tau)N_s(\tau)b_s+E(\tau)q_s(\tau),M_s(\tau)x(\tau)+N_s(\tau)b_s+q_s(\tau)\rangle+$$
$$+\left\langle\left(A(\tau)+C(\tau)M_s(\tau)\right)^TP(\tau)x(\tau),x(\tau)\right\rangle+\left\langle\left(A(\tau)+C(\tau)M_s(\tau)\right)^TP^T(\tau)x(\tau),x(\tau)\right\rangle+$$
$$\left.\left.+\left\langle\left(P(\tau)+P^T(\tau)\right)x(\tau),q_s(\tau)\right\rangle+\left\langle N_s^T(\tau)C^T(\tau)\left(P(\tau)+P^T(\tau)\right)x(\tau),b_s\right\rangle\right]d\tau\right\}=$$
$$=\inf_{b_s\in R_s}\left\{\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\left\langle\left(\frac{dP\left(\tau\right)}{d\tau}+D(\tau)+M_s^T(\tau)E(\tau)M_s(\tau)+\right.\right.\right.\right.$$
$$\left.+\left(A(\tau)+C(\tau)M_s(\tau)\right)^TP(\tau)+P(\tau)\left(A(\tau)+C(\tau)M_s(\tau)\right)\Big)x(\tau),x(\tau)\right\rangle+$$

$$+\left\langle\left(E(\tau)M_s(\tau)+E^T(\tau)M_s(\tau)+P(\tau)+P^T(\tau)\right)x(\tau)+E^T(\tau)q_s(\tau),q_s(\tau)\right\rangle+$$
$$+\left\langle\left(N_s^T(\tau)E(\tau)M_s(\tau)+N_s^T(\tau)E^T(\tau)M_s(\tau)+N_s^T(\tau)C^T(\tau)\left(P(\tau)+P^T(\tau)\right)\right)x(\tau)+\right.$$
$$\left.+N_s^T(\tau)E^T(\tau)q_s(\tau)+N_s^T(\tau)E(\tau)q_s(\tau),b_s\right\rangle+\left\langle N_s^T(\tau)E(\tau)N_s(\tau)b_s,b_s\right\rangle\Big]\,d\tau\Big\}=0.$$

Введемо позначення

$$Q_1^s(\tau)=\frac{dP\,(\tau)}{d\tau}+D(\tau)+M_s^T(\tau)E(\tau)M_s(\tau)+$$
$$+\left(A(\tau)+C(\tau)M_s(\tau)\right)^T P(\tau)+P(\tau)\left(A(\tau)+C(\tau)M_s(\tau)\right),$$
$$Q_2^s(\tau)=E(\tau)M_s(\tau)+E^T(\tau)M_s(\tau)+P(\tau)+P^T(\tau),$$
$$Q_3^s(\tau)=E^T(\tau)q_s(\tau),$$
$$Q_4^s(\tau)=N_s^T(\tau)E(\tau)M_s(\tau)+N_s^T(\tau)E^T(\tau)M_s(\tau)+N_s^T(\tau)C^T(\tau)\left(P(\tau)+P^T(\tau)\right),$$
$$Q_5^s(\tau)=N_s^T(\tau)E^T(\tau)q_s(\tau)+N_s^T(\tau)E(\tau)q_s(\tau),$$
$$Q_6^s(\tau)=N_s^T(\tau)E(\tau)N_s(\tau)$$

та перепишемо останню рівність у вигляді

$$\inf_{b_s\in R_s}\left\{\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\langle Q_1^s(\tau)x(\tau),x(\tau)\rangle+\langle Q_2^s(\tau)x(\tau)+Q_3^s(\tau),q_s(\tau)\rangle+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\langle Q_4^s(\tau)x(\tau)+Q_5^s(\tau),b_s\rangle+\langle Q_6^s(\tau)b_s,b_s\rangle\right]d\tau\right\}=0.$$

Нехай матриця $P(t)$ є такою, що $Q_1^s(t)=0$, тобто

$$\frac{dP\,(t)}{dt}=-D(t)-M_s^T(t)E(t)M_s(t)-\left(A(t)+C(t)M_s(t)\right)^T P(t)-P(t)\left(A(t)+C(t)M_s(t)\right),$$
$$t\in[t_s,t_{s+1}),P(T)=P_0. \tag{17}$$

Розв'яжемо задачу $\inf\limits_{b_s\in R_s} I=0$, де

$$I=\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\langle Q_2^s(\tau)x(\tau)+Q_3^s(\tau),q_s(\tau)\rangle+\langle Q_4^s(\tau)x(\tau)+Q_5^s(\tau),b_s\rangle+\langle Q_6^s(\tau)b_s,b_s\rangle\right]d\tau.$$

Запишемо похідну

$$\frac{dI}{db_s}=\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}}\left[\left\langle Q_2^s(\tau)\frac{\partial x\,(\tau)}{\partial b_s},q_s(\tau)\right\rangle+\left\langle Q_4^s(\tau)\frac{\partial x\,(\tau)}{\partial b_s},b_s\right\rangle+\right.$$
$$\left.+Q_4^s(\tau)x(\tau)+Q_5^s(\tau)+\left(Q_6^s(\tau)+\left(Q_6^s\right)^T(\tau)\right)b_s\right]d\tau.$$

Позначимо $U_s(t) = \frac{\partial x(t)}{\partial b_s}$. Матриці чутливості $U_s(t)$, $s = 0, ..., N-1$ задовольняють системам лінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{dU_s(t)}{dt} = [A(t) + C(t)M_s(t)]\,U_s(t) + C(t)N_s(t)\,,\ U_s(t_s) = 0,\ t \in [t_s, t_{s+1}]\,. \tag{18}$$

З умови $\frac{dI}{db_s} = 0$ випливає система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вектору параметрів b_s

$$\left(\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left[(U_s(\tau))^T \left(Q_4^s(\tau)\right)^T + Q_6^s(\tau) + \left(Q_6^s(\tau)\right)^T \right] d\tau \right) b_s =$$

$$= \int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\langle Q_2^s(\tau)U_s(\tau),\, q_s(\tau)\rangle + Q_4^s(\tau)x(\tau) + Q_5^s(\tau) \right] d\tau. \tag{19}$$

Запишемо псевдорозв'язок системи (19)

$$b_s = \left(\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left[(U_s(\tau))^T \left(Q_4^s(\tau)\right)^T + Q_6^s(\tau) + \left(Q_6^s(\tau)\right)^T \right] d\tau \right)^{+} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{t_s}^{t_{s+1}} \left[\langle Q_2^s(\tau)U_s(\tau),\, q_s(\tau)\rangle + Q_4^s(\tau)x(\tau) + Q_5^s(\tau) \right] d\tau \right), \tag{20}$$

де W^+ — псевдообернена матриця до матриці W [2].

Тепер, переписуючи систему (9) з урахуванням структури керування (10) та формули (20), отримуємо, що на кожному відрізкові часу $[t_s, t_{s+1}]$ оптимальна траєкторія задовольняє інтегро-диференціальному рівнянню. Підставляючи оптимальну треєкторію у (20), знаходимо оптимальну структуру системи.

Висновки

Отже, в роботі одержано достатні умови оптимальності для задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання, в якій структура містить фазову змінну. Для лінійної системи керування доведено умови існування та єдиності розв'язку задачі структурно-параметричної оптимізації, отримано алгоритм знаходження оптимальної структури у випадку квадратичного критерію якості.

Список літератури

1. Башняков О. М. Практична стійкість, оцінки та оптимізація / О. М. Башняков, Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. — К.: Київський університет, 2008. — 383 с.
2. Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
3. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко — К.: Наукова думка, 1985. — 304 с.
4. *Карманов В. Г.* Математическое программирование / В. Г. Карманов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 264 с.
5. Михалевич В. С. Методы последовательной оптимизации в дискретных сетевых задачах оптимального распределения ресурсов / В. С. Михалевич, А. И. Кукса — М.: Наука, 1983. — 208 с.
6. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем / Н. Н. Моисеев — М.: Наука, 1975. — 528 с.
7. Пічкур В. В. Застосування методу динамічного програмування до задачі структурно-параметричної оптимізації з фіксованими точками перемикання / В. В. Пічкур, Є. М. Страхов // Вісник Одеського національного університету. Математика і механіка. — 2010. — Т. 15, Вип. 19. — С. 94–102.
8. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — М.: Наука, 1981. — 464 с.
9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 255 с.

Статья поступила в редакцию 16.03.2012