УДК 621.391:517.518:510.52

НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛАГРАНЖЕВОЇ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ

© О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер

Українська інженерно-педагогічна академія
кафедра вищої та прикладної математики
вул. Університетська 16, м. Харків, 61003, Україна
e-mail: *olesya@email.com*

Abstract. Formula of the evaluating of multiple integrals with using Lagrange polynomial interlineation was submitted. Cubature formula is investigated in the case when information about function is set of values on lines in $G=[-1,1]^2$ on the class of functions with condition $\left|f^{(p_1,p_2)}(x,y)\right| \leqslant M$. The estimation of error of approaching of the cubature formula is presented.

Вступ

Задача наближеного обчислення кратних інтегралів є однією з найбільш важливих задач обчислювальної математики. Однак на цей час виникає необхідність наближеного обчислення інтегралів від функцій багатьох змінних за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функцій на системі взаємноперпендикулярних ліній або площин. Таку задачу ефективно дозволяє розв'язувати апарат інтерлінації функцій [1]. В роботах [1], [2] у випадку, коли інформація про функцію задана у вузлових точках, проведено порівняння наближеного обчислення інтегралу від функції двох змінних за кубатурою формулою центральних прямокутників та мішаною кубатурною формулою центральних прямокутників за точністю та кількістю використаної інформації. В цих же роботах наведений алгоритм розв'язання задачі наближеного обчислення інтегралу від функції двох змінних з використанням класичних базисних сплайнів, а також з використанням сплайн-інтерлінації функцій. Доведено, що для досягнення однієї і тієї ж точності кубатурні формули, що використовують сплайн-інтерлінацію використовують на порядок меншу кількість значень підінтегральної функції порівняно з класичними кубатурними формулами. Не дослідженим залишилось питання побудови кубатурних формул з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації. Це питання є важливим і актуальним, оскільки піднімає питання оптимального вибору вузлів або ліній, при побудові кубатурних формул обчислення інтегралу від функції двох змінних.

Постановка задачі: побудувати кубатурну формулу наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації функцій на класі дійсних функцій, визначених на $G = [-1,1]^2$ і таких, що $\left|f^{(p_1,p_2)}(x,y)\right| \leqslant M$, у випадку, коли інформація про функцію задана на лініях. Отримати оцінку похибки кубатурної формули.

1. Найкраща в $L_q[-1,1]^2, q = \infty, 1, 2$ лагранжева поліноміальна інтерлінація

Наведемо деякі теореми.

Теорема 1. [3] *Нехай* $g(t) \in C^r(I),\ I = [0,1],\ 1 \leqslant r \leqslant n,\ L_{n-1}g(t)$ *— інтерполяційний поліном Лагранжа степеня* $n-1$ *функції* $g(t)$, *із властивостями*

$$L_{n-1}g(t) = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)\ell_{n-1,k}(t), \quad \ell_{n-1,k}(t) = \prod_{i=1,i\neq k}^{n} \frac{t-t_i}{t_k-t_i}, \ \ k = \overline{1,n}.$$

Тоді для залишку $R_n g(t) := g(t) - L_{n-1}g(t)$ *справедливе інтегральне зображення*

$$R_n g(t) = \sum_{k=1}^{n} \ell_{n-1,k}(t) \int_{t_k}^{t} g^{(r)}(\tau)\frac{(t_k-\tau)^{r-1}}{(r-1)!}d\tau.$$

При знаходженні найкращої в $L_q[-1,1]^2$, $q = \infty, 1, 2$ лагранжевої поліноміальної інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих слід враховувати, що:

1) залишок інтерлінації дорівнює операторному добуткові залишків по кожній змінній окремо;
2) поліноми степеня n з найменшим відхиленням від нуля в метриці $L_q[-1,1]$ — це поліноми з коефіцієнтом одиниця при старшому степені, що є розв'язком екстремальної задачі

$$\max_{t\in[-1,1]}\left|t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k\right| \to \min_{c_0,\ldots,c_{n-1}}, \ q = \infty,$$

$$\int_{-1}^{1}\left|t^n - \sum_{k=0}^{n-1} c_k t^k\right|^q dt \to \min_{c_0,\ldots,c_{n-1}}, \ 1 \leqslant q < \infty.$$

Для них справедлива наступна теорема.

Теорема 2. [2] *При $q = \infty, 1, 2$ поліномами найкращого наближення є відповідно поліноми Чебишова 1-го роду*

$$T_{n,}(t) = \frac{\cos(n \times \arccos t)}{2^{n-1}},$$

поліноми Чебишова 2-го роду

$$T_{n,1}(t) = \frac{\sin\left((n+1)\arccos t\right)}{2^n\sqrt{1-t^2}},$$

поліноми Лежандра

$$T_{n,2}(t) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

Це означає, що при побудові поліноміальних інтерлінантів треба вибирати прямі інтерлінації $x = x_i$, $i = \overline{1,m}$; $y = y_j$, $j = \overline{1,n}$, так, щоб числа x_i, $i = \overline{1,m}$; y_j, $j = \overline{1,n}$, були коренями відповідних поліномів з найменшим відхиленням. Зокрема, при $q = 1$ справедлива наступна теорема.

Теорема 3. [1] *Нехай $p = (p_1, p_2)$, $f(x_1, x_2) \in C^p(J^2)$, $J = [-1, 1]$, $D^p = \dfrac{\partial^{p_1+p_2}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}}$, $B^p = \left\{g(x)|g \in C^p(J^2),\ D^p g = 0\right\}$, $E(f)$ — величина найкращого наближення функції множиною B^p за нормою $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_1(J^2)}$; $g^* \in B^p$ — елемент найкращого наближення; $x_{1i_1} = \cos(i_1\pi/(p_1+1))$, $i_1 = \overline{1,p_1}$, $x_{2i_2} = \cos(i_2\pi/(p_2+1))$, $i_2 = \overline{1,p_2}$ — нулі поліномів Чебишова 2-го роду відповідно степеня p_1 та p_2:*

$$U_m(t) = \frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta}, \quad \cos\theta = t, \quad m = 0, 1, \ldots,$$

$l_{kp_ki_k}$ — базисні поліноми Лагранжа, $l_{kp_ki_k}(x_{ki'_k}) = \delta_{i_ki'_k}$,

$$g^*(x) = \sum_{i_1=1}^{p_1} f(x_{1i_1}, x_2)l_{1p_1i_1}(x_1) + \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_1, x_{2i_2})l_{2p_2i_2}(x_2) - \tag{1}$$

$$-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1}, x_{2i_2})l_{1p_1i_1}(x_1)l_{2p_2i_2}(x_2).$$

Для $f(x)$ існує єдиний найближчий до $f(x)$ за нормою $\|\cdot\|$ елемент $g^* \in B^p$ і цей елемент має вигляд (1) тобто є інтерлінантом, який інтерлінує $f(x)$ на лініях $x_k = x_{ki_k}$, $i_k = \overline{1,p_k}$; $k = 1, 2$. Залишок наближення функції $f(x)$ найкращим елементом, має наступний вид.

$$f(x) - g^*(x) = \frac{U_{p_1}(x_1)U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}f^{(p_1,p_2)}(\xi_1, \xi_2), (\xi_1, \xi_2) \in J^2, \tag{2}$$

де (ξ_1, ξ_2) — деяка точка, що залежить від $(x_1, x_2) \in J^2$. Тому найменше значення величини $\| f(x) - g^*(x) \|$ досягається на тих g^*, для яких величина $\left\| \prod_{k=1}^{2} \prod_{i_k=1}^{p_k} (x_k - x_{ki_k}) \right\|$ є найменшою. Цю умову задовольняють поліноми, вузли яких є нулями поліномів Чебишова 2-го роду.

2. Кубатурна формула наближеного обчислення кратного інтегралу з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації функцій

Для наближеного обчислення інтегралу

$$I(f) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

пропонується кубатурна формула

$$\tilde{I}(f) = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} Lf(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

де

$$Lf(x_1, x_2) = \sum_{i_1=1}^{p_1} f(x_{1i_1}, x_2) l_{1p_1i_1}(x_1) + \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_1, x_{2i_2}) l_{2p_2i_2}(x_2) -$$

$$- \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}) l_{1p_1i_1}(x_1) l_{2p_2i_2}(x_2).$$

В розгорнутому вигляді кубатурна формула має вид:

$$\tilde{I}(f) = \sum_{i_1=1}^{p_1} \int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}} l_{1p_1i_1}(x_1) dx_1 \int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}} f(x_{1i_1}, x_2) dx_2 +$$

$$+ \sum_{i_2=1}^{p_2} \int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}} l_{2p_2i_2}(x_2) dx_2 \int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}} f(x_1, x_{2i_2}) dx_1 -$$

$$- \sum_{i_1=1}^{p_1} \sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1}, x_{2i_2}) \int_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}} l_{1p_1i_1}(x_1) dx_1 \int_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}} l_{2p_2i_2}(x_2) dx_2.$$

Теорема 4. *Справедлива наступна оцінка похибки наближення інтегралу $I(f)$ кубатурою формулою $\tilde{I}\,(f)$*

$$\left|I\,(f)-\tilde{I}\,(f)\right|\leqslant\frac{Mp_1p_2\pi^2}{2^{p_1+p_2}(p_1+1)!(p_2+1)!}.$$

Доведення. Знайдемо оцінку похибки наближення. Маємо

$$\left|I\,(f)-\tilde{I}\,(f)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1}|f\,(x_1,x_2)-Lf\,(x_1,x_2)|dx_1dx_2=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\left|\frac{U_{p_1}(x_1)U_{p_2}(x_2)}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}f^{(p_1,p_2)}(\xi_1,\xi_2)\right|dx_1dx_2\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\frac{|U_{p_1}(x_1)|\,|U_{p_2}(x_2)|}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}dx_1dx_2=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}|U_{p_1}(x_1)|\,dx_1\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}|U_{p_2}(x_2)|dx_2=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\times$$

$$\times\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\left|\frac{\sin\left((p_1+1)\arccos x_1\right)}{\sqrt{1-x_1^2}}\right|dx_1\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\left|\frac{\sin\left((p_2+1)\arccos x_2\right)}{\sqrt{1-x_2^2}}\right|dx_2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\int\limits_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}\int\limits_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2^2}}=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x_1\right)\Bigg|_{x_{1i_1}}^{x_{1i_1+1}}\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x_2\right)\Bigg|_{x_{2i_2}}^{x_{2i_2+1}}=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\left(\arccos x_{1i_1}-\arccos x_{1i_1+1}\right)\left(\arccos x_{2i_2}-\arccos x_{2i_2+1}\right)=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\left(\frac{\pi i_1}{p_1+1}-\frac{\pi\,(i_1+1)}{p_1+1}\right)\left(\frac{\pi i_2}{p_2+1}-\frac{\pi\,(i_2+1)}{p_2+1}\right)=$$

$$=\frac{M}{2^{p_1+p_2}p_1!p_2!}\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\frac{\pi}{p_1+1}\frac{\pi}{p_2+1}=\frac{Mp_1p_2\pi^2}{2^{p_1+p_2}(p_1+1)!(p_2+1)!}.$$

Теорема доведена. □

3. Чисельний експеримент

Для функції

$$f\left(x_1, x_2\right) = \cos\left(x_1 + x_2\right),$$

у якої

$$\left|f^{(p_1,p_2)}\left(x_1, x_2\right)\right| \leqslant 1,$$

наведемо в таблиці наближені значення інтегралів за кубатурною формулою $\tilde{I}\left(f\right)$.

Точне значення

$$I\left(f\right) = \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 = 2.83229367309428.$$

Оцінку похибки наближення інтегралу $I(f)$ кубатурою формулою $\tilde{I}\left(f\right)$, знайдену теоретично позначимо, через

$$\varepsilon = \frac{p_1 p_2 \pi^2}{2^{p_1+p_2}(p_1+1)!(p_2+1)!}.$$

Таблица 1. Наближене обчислення інтегралу $I(f)$ за кубатурою формулою $\tilde{I}\left(f\right)$.

$p_1 = p_2 = \ell$	$\tilde{I}\left(f\right)$	$\left\lvert I\left(f\right) - \tilde{I}\left(f\right)\right\rvert$	ε
2	2.82707748909675	0.005216183997534	0.068538919452009
3	2.83228683047443	0.000006842619856	0.002409571386985
4	2.83229271424136	0.000000958852927	0.000042836824658
5	2.83229367288868	0.000000000205606	0.000000464809295
6	2.83229367305887	0.000000000035412	0.000000003414925
7	2.83229367309428	$1.3 \cdot 10^{-15}$	0.000000000018157

Заключення

На цей час актуальною є задача наближеного обчислення інтегралів від функцій багатьох змінних у випадку, коли в якості даних можуть бути сліди функцій на системі взаємноперпендикулярних ліній. Таку задачу ефективно дозволяє розв'язувати апарат інтерлінації функцій. В роботі розглянута кубатурна формула наближеного обчислення інтегралу від функцій двох змінних з використанням лагранжевої поліноміальної інтерлінації функцій на класі дійсних функцій, визначених на $G = [-1, 1]^2$ і таких, що $\left|f^{(p_1,p_2)}(x, y)\right| \leqslant M$. Отримана оцінка похибки кубатурної формули. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

Побудована кубатурна формула є першим кроком в дослідженні питання оптимального вибору вузлів, ліній, площин при побудові кубатурних формул наближеного обчислення, як кратних інтегралів, так і інтегралів від швидкоосцилюючих функцій багатьох змінних.

Список літератури

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О.М. Литвин. — Харків.: Основа, 2002. — 544 с.
2. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. Навчальний посібник / О.М. Литвин. — К.: Наукова думка, 2005. — 331 с.
3. Литвин О.М. Интерполирование функций. Учеб. пособ. / О.М. Литвин. — Киев: Учеб.-метод. каб. высш. образования (УМК ВО), 1988. — 31 с.

Статья поступила в редакцию 27.12.2011