УДК 519.6

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ РОЗРИВНИМИ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАНТАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРАПЕЦЕВИДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

© Литвин О. М., Першина Ю. І.

Українська інженерно-педагогічна академія
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61003, Україна
e-mail: *academ@kharkov.ua*

Abstract. In work the general method of construction explosive a spline-interlination for rectangular element having the trapeze form for the purpose of their use for approach of explosive functions of two variables is offered, which too can have (and can and not have) ruptures of the first sort on the lines forming rectangular elements having the trapeze form. The constructed splines as a special case, explosive splines and continuous splines include. Are formulated and proved interlinational properties of such explosive designs.

Вступ

На даний час основна увага в теорії наближення функцій багатьох змінних сплайнами приділена наближенню неперервних і диференційовних функцій неперервними та диференційовними сплайнами [1-4]. В той же час практика показує, що серед багатовимірних об'єктів, які потрібно досліджувати, значно більша їх кількість описується розривними функціями. Наприклад, в методах комп'ютерної томографії на даний час не достатньо є дослідженим використання інформації про те, що внутрішня структура тіла людини складається з органів різної форми та різної щільності, тобто ми маємо розривну функцію. При дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду при переході від однієї складової кори до іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо. Тому актуальною є розробка методів наближення розривних функцій.

Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту. Наприклад, в роботі [5] пропонується використовувати рівняння поверхні черепа людини і, таким чином, більш точно відновлювати внутрішню структур тіла.

В статті [6] авторами були побудовані розривні лінійні інтерполяційні сплайни для наближення функцій однієї змінної, що може мати розриви першого роду. В роботі [7] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних з ректангульованою областю визначення розривними інтерполяційними білінійними сплайнами.

Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії. Для цього доцільніше використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що інтерлінація є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями. В роботі [8] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних з ректангульованою областю визначення розривними інтерлінаційними сплайнами. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [9].

В даній роботі будуються та досліджуються інтерлінаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на прямокутні трапеції та прямокутні трикутники.

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x,y)$ в області $D=[0,1]^2$. Будемо вважати, що область D розбивається прямими $x_0=0<x_1<x_2<...<x_m=1$, $y_0=0<y_1<y_2<...<y_n=1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається похилою лінією на прямокутну трапецію та прямокутний трикутник. Трапеції та трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x,y)$ має розриви першого роду на границях між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою роботи є побудува та дослідження операторів розривної сплайн-інтерлінації таких, які в кожній трапеції є операторами сплайн-інтерлінації функції $f(x,y)$.

1. Метод побудови наближуючого розривного сплайн-інтерлінанта

Якщо (x_i,y_j) — вузол, в якому знаходиться прямий кут прямокутника, то може зустрітися чотири типи трапецій (рис. 1):

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}=\{x_i<x<x_{i+1},y_j<y<g_{j+1}^{(1)}(x)\},\mathrm{TP}_{ij}^{(2)}=\{x_{i-1}<x<x_i,y_j<y<g_{j+1}^{(2)}(x)\},$$
$$\mathrm{TP}_{ij}^{(3)}=\{x_i<x<x_{i+1},g_{j-1}^{(3)}(x)<y<y_j\},\mathrm{TP}_{ij}^{(4)}=\{x_i<x<x_{i+1},g_{j-1}^{(4)}(x)<y<y_j\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(5)} = \{x_i < x < q_{i+1}^{(5)}(y), y_j < y < y_{j+1}\}, \mathrm{TP}_{ij}^{(6)} = \{q_{i-1}^{(6)}(y) < x < x_i, y_j < y < y_{j+1}\},$$

$$\mathrm{TP}_{ij}^{(7)} = \{q_{i-1}^{(7)}(y) < x < x_i, y_{j-1} < y < y_j\}, \mathrm{TP}_{ij}^{(8)} = \{x_i < x < q_{i+1}^{(8)}(y), y_{j-1} < y < y_j\},$$

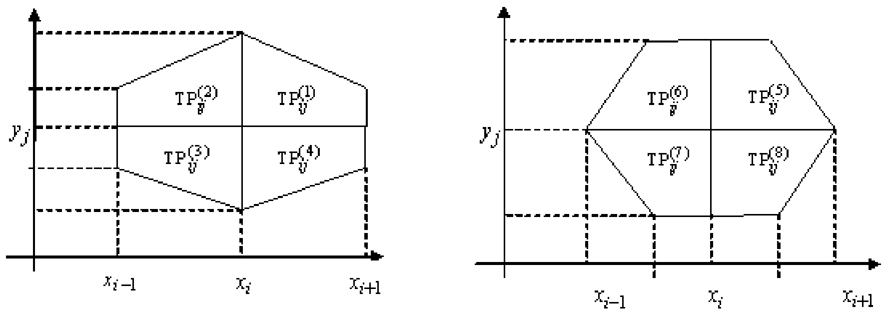

Рис. 1. Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду. Розглянемо трапецію типу $\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}$.

Вважаємо заданими:

1. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \to x_i+0} f(x, y) = f(x_i + 0, y),$$

$$\varphi m_i(y) = \lim_{x \to x_i-0} f(x, y) = f(x_i - 0, y).$$

Значення в кутових точках (x_i, y_j) та $(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i))$ визначаються наступним чином:

$$\varphi pp_{ij} = \varphi p_i(y_j) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi pm_{i,j+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0).$$

2. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_{i+1}$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x \to x_{i+1}+0} f(x, y) = f(x_{i+1} + 0, y),$$

$$\varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x \to x_{i+1}-0} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y).$$

Значення в кутових точках (x_{i+1}, y_j) та $(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))$ визначаються наступним чином:

$$\varphi mp_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$\varphi mm_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

3. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \to y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0),$$

$$\psi m_j(x) = \lim_{y \to y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

та значення у відповідних кутових точках:

$$\psi pp_{i,j} = \psi p_j(x_i) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi mp_{i+1,j} = \psi p_j(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

4. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$ (під та над прямою відповідно):

$$\psi m_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0),$$

$$\psi p_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)} + 0)$$

та значення у відповідних кутових точках:

$$\psi pm_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0),$$

$$\psi mm_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

Означення. Будемо називати розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в трапецевидному елементі $\mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$ наступну функцію:

$$Lf(x, y) = (L_1 + L_2 - L_2 L_1) f(x, y), \tag{1}$$

де

$$L_1 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \varphi m_{i+1}(y),$$

$$L_2 f(x,y) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}\psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}\psi p_j(x).$$

Теорема 1. Якщо сліди функції $f(x,y)$ задовольняють співвідношенням:

$$\varphi pp_{ij} = \psi pp_{ij}, \varphi mp_{i+1,j} = \psi mp_{i+1,j},$$

$$\varphi pm_{i,j+1} = \psi pm_{i,j+1}, \varphi mm_{i+1,j+1} = \psi mm_{i+1,j+1},$$

то оператор (1) інтерлінує $f(x,y)$ на $\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}$: $Lf(x,y)|_{\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}} = f(x,y)|_{\partial \mathrm{TP}_{ij}^{(1)}}$, тобто

$$Lf(x_i,y) = \varphi p_i(y), Lf(x_{i+1},y) = \varphi m_{i+1}(y), \tag{2}$$

$$Lf(x,y_j) = \psi p_j(x), Lf(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) = \psi m_{j+1}(x). \tag{3}$$

Доведення. Щоб перевірити виконання цих умов, знайдемо

$$\begin{aligned} L_2 L_1 f(x,y) &= L_2\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\varphi m_{i+1}(y)\right) = \\ &= \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}\left[\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\varphi pm_{i+1,j} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\varphi mm_{i+1,j+1}\right] + \\ &+ \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}\left[\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\varphi pp_{i,j} + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\varphi mp_{i+1,j}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Перевіримо виконання умов (2), (3):

$$Lf(x_i,y) = L_1 f(x_i,y) + L_2 f(x_i,y) - L_2 L_1 f(x_i,y) =$$

$$= \varphi p_i(y) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i) - y_j}\psi m_{j+1}(x_i) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x_i)}\psi p_j(x_i) -$$

$$- \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_i) - y_j}\varphi pm_{i+1,j} - \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x_i)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x_i)}\varphi pp_{i,j} = \varphi p_i(y),$$

оскільки з умови теореми маємо, що $\psi m_{j+1}(x_i) = \psi pm_{i,j+1} = \varphi pm_{i,j+1}$ та $\psi p_j(x_i) = \psi pp_{i,j} = \varphi pp_{i,j}$.

$$Lf(x_{i+1},y) = L_1 f(x_{i+1},y) + L_2 f(x_{i+1},y) - L_2 L_1 f(x_{i+1},y) =$$

$$= \varphi m_{i+1}(y) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - y_j}\psi m_{j+1}(x_{i+1}) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x_{j+1})}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}\psi p_j(x_{i+1}) -$$

$$-\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})-y_j}\varphi mm_{i+1,j+1}-\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})}\varphi mp_{i+1,j}=\varphi m_{i+1}(y),$$

оскільки з умови теореми маємо, що $\psi m_{j+1}(x_{i+1}) = \psi mm_{i+1,j+1} = \varphi mm_{i,j+1}$ та $\psi p_j(x_{i+1}) = \psi mp_{i+1,j} = \varphi mp_{i+1,j}$.

$$Lf(x,y_j)=L_1f(x,y_j)+L_2f(x,y_j)-L_2L_1f(x,y_j)=$$
$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi p_i(y_j)+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi m_{i+1}(y_j)+$$
$$+\psi p_j(x)-\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi pp_{i,j}-\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi mp_{i+1,j}=\psi p_j(x).$$
$$Lf(x,g_j((1))(x))=L_1f(x,g_j^{(1)}(x))+L_2f(x,g_j^{(1)}(x))-L_2L_1f(x,g_j^{(1)}(x))=$$
$$=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x))+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x))+$$
$$+\psi m_{j+1}(x)-\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\varphi pm_{i+1,j}-\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\varphi mm_{i+1,j+1}]=\psi m_{j+1}(x).$$

Таким чином, перевірено виконання інтерлінаційних властивостей (2),(3) оператора (1).

Теорема 1 доведена. □

Зауваження. Перестановність операторів відсутня, тобто $L_1L_2 \neq L_2L_1$.

Для знаходження загального вигляду залишкового члена та його оцінки скористаємося результатами роботи [10], в якій представлений залишковий член для наближення неперервної функції трьох змінних оператором інтерфлетації на паралелепіпеді з криволінійною гранню.

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1, тоді для залишкового члена $Rf(x,y) = (I-L)f(x,y)$ виконується рівність

$$Rf(x,y)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2}P_{1,k}(x)P_{2,m}(x,y)\int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{y_m(x)}^{y}f^{(p,q)}(\xi,\eta)\frac{(x_k-\xi)^{p-1}(y_m-\eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!}d\xi d\eta, \quad (5)$$

$1 \le p,q \le 2$, $y_1(x) = y_j, y_2(x) = g_{j+1}^{(1)}(x)$, а поліноми $P_{1,k}(x)$, $P_{2,m}(x,y)$ мають вигляд

$$P_{1,1}(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, P_{1,2}(x)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},$$

$$P_{2,1}(x,y)=\frac{y-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}, P_{2,2}(x,y)=\frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x)}.$$

Доведення. Спочатку зауважимо, що оскільки одна із сторін трапеції $\mathrm{TP}^{(1)}_{\mathrm{ij}}$ задана функцією від змінної x, то $L_1L_2 \neq L_2L_1$.

Використаємо рівність

$$1-(1-l_1)(1-l_2)=l_1+l_2-l_2l_2,$$

де l_1, l_2-деякі дійсні числа.

Підставимо замість 1 тотожній оператор I, а замість чисел l_1, l_2 оператори L_1, L_2 відповідно.

$$I-(I-L_1)(I-L_2)=L_1+L_2-L_2L_1=L,$$

тобто отримали оператор $Lf(x,y)$.

Тоді для залишку $Rf(x,y)$ запишемо рівність

$$Rf(x,y)=(I-L)f(x,y)=(I-L_2)(I-L_1)f(x,y). \qquad (6)$$

Для доведення формули (5) скористаємося тим фактом, що залишкові члени формули Лагранжа в інтегральній формі за кожною із змінних мають вигляд

$$(I-L_1)f(x,y)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\int\limits_{x_i}^{x}\frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial \xi^p}\frac{(x_i-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}d\xi+$$

$$+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\int\limits_{x_{i+1}}^{x}\frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial \xi^p}\frac{(x_{i+1}-\xi)^{p-1}}{(p-1)!}d\xi,$$

$$(I-L_2)f(x,y)=\frac{y-g^{(1)}_{j+1}(x)}{y_j-g^{(1)}_{j+1}(x)}\int\limits_{y_j}^{y}\frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial \eta^q}\frac{(y_j-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}d\eta+$$

$$+\frac{x-y_j}{g^{(1)}_{j+1}(x)-y_j}\int\limits_{g^{(1)}_{j+1}(x)}^{y}\frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial \eta^q}\frac{(g^{(1)}_{j+1}(x)-\eta)^{q-1}}{(q-1)!}d\eta.$$

Підставимо ці рівності у формулу (6)

$$Rf(x,y)=(I-L_2)(I-L_1)f(x,y)=$$

$$= \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} (\int\limits_{y_j}^{y} \frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial \eta^q} \frac{(y_j - \eta)^{q-1}}{(q-1)!} d\eta +$$

$$+ \frac{x - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \int\limits_{g_{j+1}^{(1)}(x)}^{y} \frac{\partial^q f(x,\eta)}{\partial \eta^q} \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{q-1}}{(q-1)!} d\eta) \times$$

$$\times \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} (\int\limits_{x_i}^{x} \frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial \xi^p} \frac{(x_i - \xi)^{p-1}}{(p-1)!} d\xi + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \int\limits_{x_{i+1}}^{x} \frac{\partial^p f(\xi,y)}{\partial \xi^p} \frac{(x_{i+1} - \xi)^{p-1}}{(p-1)!} d\xi)$$

Після розкриття скобок отримаємо рівність (5).

Теорема 2 доведена. $\square$

Оцінимо похибку наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованим розривним інтерлінантом $Lf(x,y)$, визначеним формулою (1) в трапецевидному елементі $\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}$.

Теорема 3. Нехай $f(x,y) \in C^{p,q}(\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)})$, $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$ та виконуються умови теореми 1, тоді для залишкового члена $Rf(x,y)$ має місце оцінка

$$\|Rf(x,y)\|_{C(\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)})} \le M \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} |G_1(x,\xi) G_2(x,y,\eta)| d\xi d\eta, \tag{7}$$

де

$$M = \max_{(x,y)\in \mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}} |f^{(p,q)}(x,y)|,$$

$$G_1(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{(x_i - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i \le \xi < x; \\ -\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x_{i+1} - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x \le \xi \le x_{i+1}, \end{cases}$$

$$G_2(x,y,\eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{i+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{i+1}^{(1)}(x)} \frac{(y_j - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j \le \eta < y; \\ -\frac{y - y_j}{g_{i+1}^{(1)}(x) - y_j} \frac{(g_{i+1}^{(1)}(x) - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y \le \eta \le g_{i+1}^{(1)}(x). \end{cases}$$

Доведення. Згідно теореми 2, формулу для залишкового члена можна записати у вигляді

$$Rf(x,y) = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(p,q)}(\xi,\eta) G_1(x,\xi) G_2(x,y,\eta) d\xi d\eta.$$

Застосовуючи для цього інтеграла нерівність Гельдера, одержуємо

$$|Rf(x,y)| \le \ |f^{(p,q)}(x,y)\|_{L_\mu(\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)})}[\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)}(G_1(x,\xi)G_2(x,y,\eta))^\nu d\xi d\eta]^{\frac{1}{\nu}},$$

$$\mu \ge 1, \nu \ge 1, \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}=1.$$

Тому для похибки наближення отримаємо нерівність (7).

Теорема 3 доведена. □

Зауваження. Якщо односторонні сліди функції на відповідних лініях, що утворюють границі трапецевидних елементів, збігаються, то розривна функція перетворюється в неперервну.

2. Приклад

Нехай функція $f(x,y)$ задана в одиничному квадраті $[0,1]^2$ таким чином (рис. 2):

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0.5<x<1, 0.5<y<0.5+\sqrt{0.09[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}]};\\ x^2+y, & 0<x<0.5, 0.5<y<0.5+\sqrt{0.09[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}]};\\ x+y^2, & 0<x<0.5, 0.5-\sqrt{0.09[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}]}<y<0.5;\\ x^2+y^2, & 0.5<x<1, 0.5-\sqrt{0.09[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}]}<y<0.5.\end{cases}$$

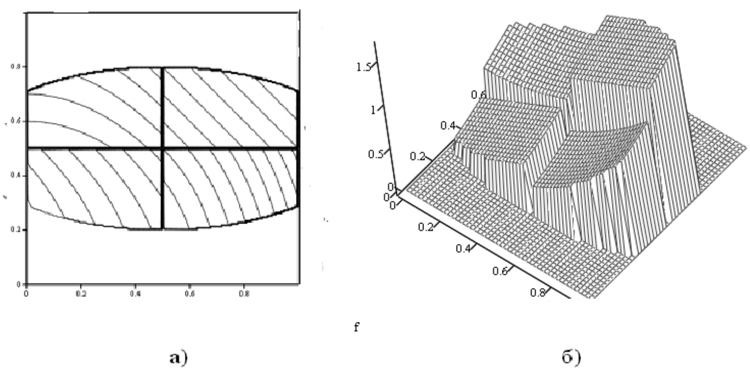

Рис. 2. Графічне зображення: а) області визначення функції $f(x,y)$; б) функції $f(x,y)$

Тобто на лінії еліпса $\frac{(x-0.5)^2}{0.49}+\frac{(y-0.5)^2}{0.09}=1$ функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії:

$$x_1=0, x_2=0.5, x_3=1,$$

$$y_1=0.5-\sqrt{0.09[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}]},$$

$$y_2=0.5+\sqrt{0.09[1-\frac{(x-0.5)^2}{0.49}]}.$$

Вони розбивають область визначення функції $f(x,y)$ на вісім трапецевидних елементів з однією криволінійною стороною в кожному елементі.

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $\mathrm{TP}_{\mathrm{ij}}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x,y)=L_1L_2f(x,y)=\varphi pp_{ij}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+\varphi mp_{i+1,j}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j-g_{j+1}^{(1)}(x)}+$$

$$+\varphi pm_{i,j+1}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j}+\varphi mm_{i+1,j+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x)-y_j},$$

при умові, що виконуються рівності $\varphi pm_{i,j+1}=\psi pm_{i,j+1}$, $\varphi pp_{i,j}=\psi pp_{i,j}$, $\varphi mm_{i+1,j+1}=\psi mm_{i+1,j+1}$, $\varphi mp_{i+1,j}=\psi mp_{i+1,j}$.

Графічний вигляд такого інтерполяційного сплайна наведений на рис. 3.

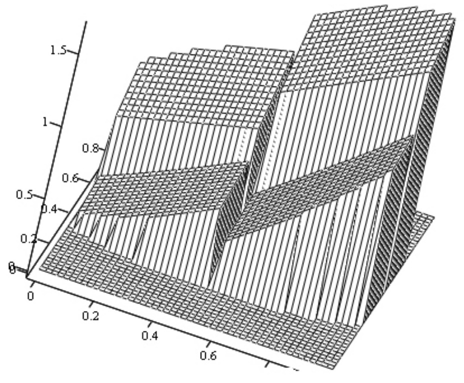

Рис. 3. Графічний вигляд розривного сплайн-інтерполянта для функції $f(x,y)$

Знайдемо оцінку похибки наближення розривної функції $f(x,y)$ побудованою розривною конструкцією $S(x,y)$

$$\max|f(x,y) - S(x,y)| \simeq 0.025$$

Тепер побудуємо на заданій сітці розривний інтерлінаційний сплайн $Lf(x,y)$ за формулою (1). Після перетворень можна побачити, що аналітично цей сплайн повністю збігається із заданою функцією $f(x,y)$, тобто $Lf(x,y) = f(x,y)$.

Можемо зробити висновок, що інтерлінаційний розривний сплайн точно відновлює задану розривну функцію на заданій сітці вузлів.

Висновки

Таким чином, в даній статті запропоновано загальний метод побудови розривних сплайн-інтерлінантів для трапецевидних елементів. Ці сплайни, як частинний випадок, включають в себе розривні сплайни та неперервні сплайни. Сформульовано і доведено теореми про інтерлінаційні властивості таких розривних конструкцій. Зокрема, з цих властивостей витікає наступна точка зору авторів: розривні в деяких точках або на деяких лініях функції від двох змінних краще наближувати розривними сплайн-інтерлінантами. При цьому можна отримати однаково високі оцінки похибки наближення в кожному елементі розбиття, притаманні неперервно-диференційовним сплайн-інтерлінантам.

Наступним кроком автори планують застосувати розроблену теорію наближення розривних функцій розривними сплайн-інтерлінантами до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

Список літератури

1. Стечкин С.Б. Сплайны в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. — М.: Наука, 1976.
2. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко — М.: Наука. 1976.
3. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы / В.А. Василенко. — Новосибирск; Наука, 1983
4. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О.М. Литвин — Х.: Основа, 2002. — 504 с.
5. Литвин О.М. Про один метод розв'язання 3D задачі комп'ютерної томографії / О.М. Литвин, О.О. Литвин // Тезисы докладов Международной конференции АППММ'06. — Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. — 2006. — С 18.

6. Литвин О.М. Наближення розривної функції за допомогою розривних сплайнів / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 122–131.
7. Литвин О.М. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Таврійский вісник інформатики та математики. — Симферополь. — 2011. — №1. — С. 63–72.
8. Литвин О.Н. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) / О.Н. Литвин, Ю.И. Першина // Компьютерная математика. — Киев, 2011. — №1. — С. 96–105.
9. Литвин О.М. Наближення розривних функцій двох змінних з розривами на лініях тріангуляції двовимірної області за допомогою операторів сплайн-інтерлінації / О.М. Литвин, Ю.І. Першина // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): матеріали II Всеукраїнської науково-практичної конференції 17-19 березня 2011 р. — Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. — С. 178–181.
10. Литвин О.М. Інтерфлетація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності / О.М. Литвин, Л.І. Гулік. — К.: Наукова думка, 2011. — 210 с.

Статья поступила в редакцию 24.10.2011