УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ПВО ИЗ ДВУХ ЗРК

© Коваленко А. И., Марянин Б. Д., Смолич В. П.

Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
E-mail: *svp54@mail.ru*

Abstract. A queueing system of type M/G/2/0 is considered. An only customer in service engages both servers. Two customers are served separately. There is a limit on service time. The equilibrium probabilities of the system are obtained in the article.

Введение

В последнее время для исследования надёжностных характеристик систем массового обслуживания чаще привлекаются асимптотические и статистические методы исследования, т.к. аналитическое моделирование приводит к достаточно сложным системам интегро-дифференциальных уравнений, к решению которых приходится применять либо приближённые либо численные методы. Авторы предлагают задачу, математическое моделирование которой не является громоздким и позволяет получать аналитическое решение и вывод точных вероятностных характеристик функционирования соответствующей системы в стационарном режиме.

1. Постановка задачи

Рассмотрим военный объект, безопасность которого обеспечивается двумя различными ЗРК (зенитно-ракетными комплексами). Бомбардировщики, атакующие объект, образуют простейший поток с интенсивностью λ. Время нахождения самолёта над зоной обслуживания — случайная величина γ, распределённая по экспоненциальному закону с параметром μ. Время «обслуживания», самолёта i-й линией (ЗРК) — непрерывная случайная величина ω_i с интенсивностью $\mu_i(x)$, $i = 1, 2$. Ракетные установки (линии обслуживания) могут выходить из строя в моменты обслуживания заявок (подвергаться бомбовым ударам). Потоки поломок линий простейшие с интенсивностями для каждой из линий равными α, если в зоне обслуживания одна заявка и 2α — если две. Время восстановления (ремонта) i-й линии — непрерывная случайная величина θ_i с интенсивностью $\beta_i(x)$.

Правила обслуживания. Поступившая заявка (бомбардировщик) начинает обслуживаться (обстреливаться) немедленно двумя линиями. Если в момент поступления очередной заявки в системе на обслуживании находится одна заявка, то одна из линий переключается на обслуживании новой заявки, при этом, если времена обслуживания текущей заявки были одинаковы ($\omega_1 = \omega_2$), то переключается первая линия, если же времена обслуживания заявки были разными ($\omega_1 \neq \omega_2$), то переключается линия, имевшая большее время обслуживания. Заявка, поступившая в момент, когда в системе обслуживаются две заявки, теряется (самолёт беспрепятственно пролетает зону обслуживания). Если одна из двух обслуживаемых заявок уходит из системы либо в результате окончания обслуживания (самолёт сбит), либо в результате истечения времени γ её пребывания в зоне обслуживания (самолёт вылетел невредимым из зоны обстрела), то ведущая её линия переключается на помощь для обслуживания оставшейся в системе заявки. Заявка, поступившая в момент обслуживания одной из линий предыдущей заявки при неисправной другой линии (или при неисправных обеих линиях), теряется. Восстановленная линия немедленно включается на помощь линии, ведущей обслуживание.

2. Математическое моделирование

Пронумеруем состояния системы двумя индексами: первый индекс несёт информацию о количестве исправных линий, второй – о количестве заявок в системе.

- $(2, 0)$ — обе линии исправны и в системе нет заявок
- $(2, 1_{eq})$ — обе линии ведут обслуживание одной заявки с равными временами обслуживания ($\omega_1 = \omega_2$)
- $(2, 1_{neq})$ — обе линии обслуживают одну заявку с неравными временами обслуживания ($\omega_1 \neq \omega_2$)
- $(2, 2)$ — обе линии обслуживают две заявки (каждая свою)
- $(1_1, 1)$ — исправна только первая линия и она обслуживает одну заявку (вторая линия восстанавливается)
- $(1_2, 1)$ — исправна только вторая линия и она занята обслуживанием (первая линия на ремонте)
- $(1_1, 0)$ — в системе нет заявок, первая линия исправна, вторая на ремонте
- $(1_2, 0)$ — в системе нет заявок, вторая линия исправна, первая восстанавливается
- $(0, 0)$ — обе линии ремонтируются, в системе нет заявок

Пусть $\xi(t)$ – случайный процесс, описывающий эволюцию системы, фазовое пространство которого состоит из девяти состояний системы (i, j).

Введём функции:

$$
\begin{aligned}
p_{i,j}(t) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (i,j)\}, \\
Q_{2,1_{eq}}(t,x) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (2,1_{eq}),\ \omega_1 < x, \omega_1 = \omega_2\}, & q_{2,1_{eq}}(t,x) &:= \frac{\partial Q_{2,1_{eq}}(t,x)}{\partial x} \\
Q_{2,1_{neq}}(t,x,y) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (2,1_{neq}),\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, & q_{2,1_{neq}}(t,x,y) &:= \frac{\partial^2 Q_{2,1_{neq}}(t,x,y)}{\partial x \partial y} \\
Q_{2,2}(t,x,y) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (2,2),\ \omega_1 < x,\ \omega_2 < y\}, & q_{2,2}(t,x,y) &:= \frac{\partial^2 Q_{2,2}(t,x,y)}{\partial x \partial y} \\
Q_{1_1,1}(t,x,z) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (1_1,1),\ \omega_1 < x,\ \theta_2 < y\}, & q_{1_1,1}(t,x,z) &:= \frac{\partial^2 Q_{1_1,1}(t,x,z)}{\partial x \partial z} \\
Q_{1_2,1}(t,y,z) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (1_2,1),\ \omega_2 < y,\ \theta_1 < z\}, & q_{1_2,1}(t,y,z) &:= \frac{\partial^2 Q_{1_2,1}(t,y,z)}{\partial y \partial z} \\
Q_{1_1,0}(t,z) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (1_1,0),\ \theta_2 < z\}, & q_{1_1,0}(t,z) &:= \frac{\partial Q_{1_1,0}(t,z)}{\partial z} \\
Q_{1_2,0}(t,z) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (1_2,0),\ \theta_1 < z\}, & q_{1_2,0}(t,z) &:= \frac{\partial Q_{1_2,0}(t,z)}{\partial z} \\
Q_{0,0}(t,x,y) &:= \mathbb{P}\{\xi(t) = (0,0),\ \theta_1 < x,\ \theta_2 < y\}, & q_{0,0}(t,x,y) &:= \frac{\partial^2 Q_{0,0}(t,x,y)}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
$$

Поскольку система имеет конечное число сообщающихся состояний, существует стационарный режим, т.е. при $t \to +\infty$ существуют пределы всех определённых выше функций. Введём обозначения:

$$
\lim_{t\to+\infty} p_{i,j}(t) = p_{i,j} \qquad \lim_{t\to+\infty} q_{i,j}(t,\ldots) = g_{i,j}(\ldots)
$$

Заметим, что имеют место соотношения:

$$
p_{2,1_{eq}} = \int\limits_0^\infty g_{2,1_{eq}}(x)\,dx,\ p_{2,1_{neq}} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{2,1_{neq}}(x,y)\,dy, \ldots, p_{0,0} = \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{0,0}(x,y)\,dy
$$

Вероятностные рассуждения и предельные переходы приводят к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$
\lambda p_{2,0} = \mu(p_{2,1_{eq}} + p_{2,1_{neq}}) + \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_{2,1_{neq}}(x,y)(\mu_1(x) + \mu_2(y))\,dy +
$$

$$+\int_0^\infty g_{2,1_{eq}}(x)(\mu_1(x)+\mu_2(x))\,dx+\int_0^\infty g_{1_1,0}(z)\beta_2(z)\,dz+\int_0^\infty g_{1_2,0}(z)\beta_1(z)\,dz,$$

$$g'_{2,1_{eq}}(x)+(\lambda+2\alpha+\mu+\mu_1(x)+\mu_2(x))g_{2,1_{eq}}(x)=0, \qquad g_{2,1_{eq}}(0)=\lambda p_{2,0}$$

$$\frac{\partial g_{2,1_{neq}}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial g_{2,1_{neq}}(x,y)}{\partial y}+(\lambda+2\alpha+\mu+\mu_1(x)+\mu_2(y))g_{2,1_{neq}}(x,y)=0,$$

$$g_{2,1_{neq}}(0,y)=\int_0^\infty g_{2,2}(x,y)(\mu+\mu_1(x))dx+\int_0^\infty g_{1_2,1}(y,z)\beta_1(z)dz,$$

$$g_{2,1_{neq}}(x,0)=\int_0^\infty g_{2,2}(x,y)(\mu+\mu_2(y))dy+\int_0^\infty g_{1_1,1}(x,z)\beta_2(z)dz,$$

$$\frac{\partial g_{2,2}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial g_{2,2}(x,y)}{\partial y}+(4\alpha+2\mu+\mu_1(x)+\mu_2(y))g_{2,2}(x,y)=0,$$

$$g_{2,2}(0,y)=\lambda g_{2,1_{eq}}(y)+\lambda\int_y^\infty g_{2,1_{neq}}(x,y)dx, \qquad g_{2,2}(x,0)=\lambda\int_x^\infty g_{2,1_{neq}}(x,y)dy,$$

$$\frac{\partial g_{1_1,1}(x,z)}{\partial x}+\frac{\partial g_{1_1,1}(x,z)}{\partial z}+(\alpha+\mu+\mu_1(x)+\beta_2(z))g_{1_1,1}(x,z)=0,$$

$$g_{1_1,1}(0,z)=\lambda g_{1_1,0}(z), \qquad g_{1_1,1}(x,0)=\alpha g_{2,1_{eq}}(x)+2\alpha\int_0^\infty g_{2,2}(x,y)\,dy+\alpha\int_0^\infty g_{2,1_{neq}}(x,y)\,dy,$$

$$\frac{\partial g_{1_2,1}(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial g_{1_2,1}(y,z)}{\partial z}+(\alpha+\mu+\mu_2(y)+\beta_1(z))g_{1_2,1}(y,z)=0,$$

$$g_{1_2,1}(0,z)=\lambda g_{1_2,0}(z), \qquad g_{1_2,1}(y,0)=\alpha g_{2,1_{eq}}(y)+2\alpha\int_0^\infty g_{2,2}(x,y)\,dx+\alpha\int_0^\infty g_{2,1_{neq}}(x,y)\,dx,$$

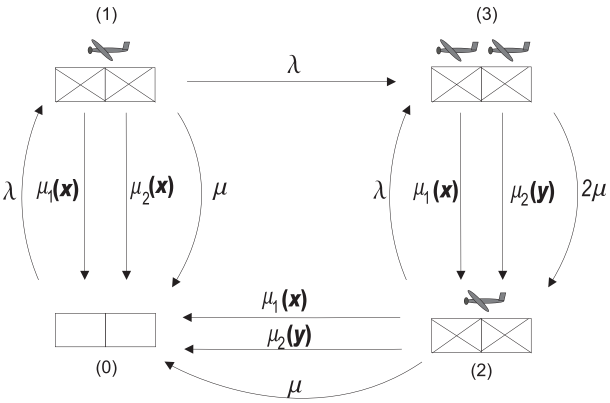
$$g'_{1_1,0}(z)+(\lambda+\beta_2(z))g_{1_1,0}(z)=\int_0^\infty g_{1_1,1}(x,z)(\mu+\mu_1(x))dx+\int_0^\infty g_{0,0}(x,z)\beta_1(x)dx,\ g_{1_1,0}(0)=0,$$

$$g'_{1_2,0}(z)+(\lambda+\beta_1(z))g_{1_2,0}(z)=\int_0^\infty g_{1_2,1}(y,z)(\mu+\mu_2(y))dy+\int_0^\infty g_{0,0}(z,y)\beta_2(y)dy,\ g_{1_2,0}(0)=0,$$

$$\frac{\partial g_{0,0}(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial g_{0,0}(x,y)}{\partial y}+(\beta_1(x)+\beta_2(y))g_{0,0}(x,y)=0,$$

$$g_{0,0}(0,y)=\alpha\int_0^\infty g_{1_1,1}(x,y)dx, \quad g_{0,0}(x,0)=\alpha\int_0^\infty g_{1_2,1}(y,x)dy.$$

3. Основные результаты



Авторам не удалось решить систему уравнений и получить точные выражения для вероятностей $p_{i,j}$ состояний системы в стационарном режиме в такой общей постановке. Рассмотрим эту задачу в частном случае, когда линии не выходят из строя, т.е. $\alpha = 0$, $\beta_1(z) = 0$, $\beta_2(z) = 0$, а также при $\mu_2(x) = \mu_2 = \text{const}$. Число состояний при этом уменьшается до четырёх. Перенумеруем их: $(2,0) = (0)$, $(2,1_{eq}) = (1)$, $(2,1_{neq}) = 2$, $(2,2) = (3)$ (см. рисунок).

Система соответствующих уравнений также упрощается:

$$\lambda p_0 = \int\limits_0^\infty g_1(x)(\mu_1(x)+\mu_2)\,dx + \mu(p_1+p_2) + \int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty g_2(x,y)(\mu_1(x)+\mu_2)\,dy,$$

$$g_1'(x) + (\lambda+\mu+\mu_1(x)+\mu_2)g_1(x) = 0, \quad g_1(0) = \lambda p_0,$$

$$\frac{\partial g_2(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_2(x,y)}{\partial y} + (\lambda+\mu+\mu_1(x)+\mu_2)g_2(x,y) = 0,$$

$$g_2(x,0) = \int\limits_0^\infty g_3(x,y)(\mu+\mu_2)\,dy, \qquad g_2(0,y) = \int\limits_0^\infty g_3(x,y)(\mu+\mu_1(x))\,dx$$

$$\frac{\partial g_3(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial g_3(x,y)}{\partial y} + (2\mu+\mu_1(x)+\mu_2)g_3(x,y) = 0,$$

$$g_3(x,0) = \lambda \int\limits_x^\infty g_2(x,y)\,dy, \qquad g_3(0,y) = \lambda g_1(y) + \lambda \int\limits_y^\infty g_2(x,y)\,dx.$$

И появляется возможность выписать её решение. Точнее, в этом случае система сводится к системе линейных уравнений относительно неизвестных стационарных вероятностей $p_k, k = 0,1,2,3$ и чисел $A = \int_0^\infty g_2(0,y)\,dy$ и $B = \int_0^\infty g_3(0,y)\,dy$:

$$p_1 = \lambda p_0 \Phi_1^*(\beta_1),$$

$$p_2 = \lambda(\mu+\mu_2)A\Phi_1^{***}(\beta_1,\beta_2,\beta_1) + (\mu+\mu_2)B\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + A\Phi_1^*(\beta_1),$$

$$p_3 = \lambda A\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + B\Phi_1^*(\beta_2),$$

$$
\begin{aligned}
A &= \lambda A(f_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + \mu\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2)) + B(f_1^{*}(\beta_2) + \mu\Phi_1^{*}(\beta_2)),\\
B &= \lambda p_1 + \lambda^2(\mu+\mu_2)A\Phi_1^{***}(\beta_1,\beta_2,\beta_1) + \lambda(\mu+\mu_2)B\Phi_1^{**}(\beta_1,\beta_2),\\
\lambda p_0 &= \lambda p_0 f_1^{*}(\beta_1) + \lambda(\mu+\mu_2)f_1^{***}(\beta_1,\beta_2,\beta_1)A+\\
&+B(\mu+\mu_2)f_1^{**}(\beta_1,\beta_2) + Af_1^{*}(\beta_1) + (\mu+\mu_2)(p_1+p_2),\\
&p_0+p_1+p_2+p_3 = 1.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь $\Phi_1(x)$ – функция надёжности, $f_1(x)$ – плотность непрерывной случайной величины ω_1, $\beta_1 = \lambda+\mu+\mu_2$, $\beta_2 = 2\mu+\mu_2$, Φ_1^* и f_1^* – преобразования Лапласа функций $\Phi_1(x)$ и $f_1(x)$ соответственно, а преобразования F^{**} и F^{***} определяются так:

$$F^{**}(s,t) := \int\limits_0^\infty e^{-sy}dy \int\limits_0^\infty e^{-tx}F(x+y)\,dx,$$

$$F^{***}(s,t,u) := \int\limits_0^\infty e^{-sz}dz \int\limits_0^\infty e^{-ty}dy \int\limits_0^\infty e^{-ux}F(x+y+z)\,dx.$$

Полученная система линейных уравнений избыточна. Первые 6 уравнений линейно зависимы, поэтому при решении любое из них можно отбросить и использовать в дальнейшем для проверки результата.

Вероятность потери заявки в стационарном режиме равна, очевидно, p_3.

В случае, когда и $\mu_1(x) = \mu_1 = \text{const}$ стационарные вероятности p_0, p_1, p_2, p_3 легко определяются из так называемой системы уравнений равновесия (СУР) для марковского процесса $\xi(t)$, выписываемой из диаграммы «по стрелкам»:

$$p_0 = \frac{\beta(\beta+\mu)}{\beta^2+(\lambda+\mu)\beta+\lambda\mu+\lambda^2},\quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\beta}p_0,\quad p_2 = \frac{\lambda^2}{\beta(\lambda+\beta)}p_0,\quad p_3 = \frac{\lambda^2}{\beta(\mu+\beta)}p_0.$$

Здесь $\beta = \mu+\mu_1+\mu_2$. Это решение совпадает, как можно убедиться после некоторых выкладок, с решением системы (1).

Заключение

В данной работе рассмотрена система массового обслуживания типа M/G/2/0, т.е. система с двумя каналами обслуживания, пуассоновским потоком поступающих заявок, произвольной функцией распределения времени обслуживания, взаимопомощью между каналами, отказами (поломками) и восстановлением каналов обслуживания. Найдены интегро-дифференциальные уравнения и граничные условия, описывающие данную СМО. Авторам не удалось получить явное решение системы уравнений в общей постановке. В случае отсутствия поломок каналов поставленная задача решается. Удалось найти основные вероятностные характеристики системы в стационарном режиме, в частности, вероятность потери заявки, что в данной интерпретации задачи означает вероятность беспрепятственного пролетания самолета-бомбардировщика через зону, контролируемую ПВО. Под вопросом остается возможность нахождения явного решения для общего случая.

Список литературы

1. Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории массового обслуживания / Л.А. Овчаров // М.: Машиностроение — 1969. — 324 с.
2. Анисимов В.В. Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем / В.В. Анисимов, О.К. Закусило, В.С. Донченко // Киев: Выща школа — 1987. — 246 с.
3. Бочаров П.П. Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин // М.: Изд-во РУДН — 1995. — 529 с.
4. Коваленко А.И. Исследование системы массового обслуживания M/G/1/1 / А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич // Ученые записки ТНУ — серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». — 2002. — т.15(52) — №2. — С. 40-42.
5. Коваленко А.И. Исследование надёжности однолинейной системы с потерями требований / А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — №2.
6. Коваленко А.И. Исследование системы M/D/1 с одной орбитой / А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2004. — №2.
7. Коваленко А.И. Исследование трёхэлементной СМО с отказами, обслуживаемой двумя наладчиками / А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич // Спектральные и эволюционные задачи. — Симферополь — 2007. — т.17. (КРОМШ)
8. Коваленко А.И. Стационарные характеристики системы с поочерёдным обслуживанием заявок двумя линиями / А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич // Динамические системы. — ТНУ, 2008. — Вып. 24 — с. 69-82.
9. Коваленко А.И. Исследование надежности однолинейной системы, обслуживающей два потока заявок, с конечной очередью / А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич // Таврический вестник информатики и математики. — 2009. — №2 — С. 63-70.

Статья поступила в редакцию 06.09.2011