

УДК 519.6

МИНИМАЛЬНЫЕ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ ДЕРЕВЬЯ ШТЕЙНЕРА: АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ

© А. В. Ильченко, В. Ф. Блыщик

ТАВРИЧЕСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В. И. ВЕРНАДСКОГО
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
ПР-Т ВЕРНАДСКОГО, 4, г. СИМФЕРОПОЛЬ, 95007, УКРАИНА
E-MAIL: *veb@land.ru*

Abstract. The concept of Steiner tree minimal with respect to inclusion is under consideration. The algorithm of constructing all Steiner trees minimal with respect to inclusion and its substantiation are given. The Steiner tree minimal with respect to inclusion which has minimal weight is considered as the solution of the Steiner tree problem.

ВВЕДЕНИЕ

Задача Штейнера используется в качестве математической модели широкого круга задач, связанных с исследованием и разработкой различных сетевых структур. Детальное рассмотрение и обсуждение различных аспектов этой задачи отражено в обзоре [1].

Целью данной работы является рассмотрение понятия минимального по включению дерева Штейнера; описание и обоснование алгоритма построения всех минимальных по включению деревьев Штейнера, как одного из алгоритмов точного решения задачи Штейнера на графе.

1. ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА И МИНИМАЛЬНОЕ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ ДЕРЕВО ШТЕЙНЕРА

Определение 1. Задан связный неориентированный граф $G = (V, E, w)$, где

V — конечное множество вершин;

E — конечное множество рёбер графа;

$w : E \rightarrow R_+^0$ — весовая функция, сопоставляющая каждому ребру графа некоторое неотрицательное число — «вес» этого ребра;

$T \subseteq V$ — непустое подмножество вершин графа. Вершины подмножества T называются терминальными.

Вес любого подграфа — это сумма весов рёбер этого подграфа.

Требуется найти связный подграф наименьшего веса, вершины которого содержат все терминальные вершины исходного графа.

Определение 2. Связный ациклический подграф, вершины которого содержат все терминальные вершины, называется *деревом Штейнера*.

Определение 3. Дерево Штейнера называется *минимальным по включению*, если подграф, получаемый из этого дерева в результате удаления любой его вершины или любого его ребра, не является деревом Штейнера.

Утверждение 1. Для каждого дерева Штейнера существует единственное содержащееся в нём минимальное по включению дерево Штейнера.

Извлечь минимальное по включению дерево Штейнера, содержащееся в ациклическом графе, можно, например, с помощью следующего алгоритма [2]: удалить из исходного дерева все висячие нетерминальные вершины. Этот алгоритм удобно называть «стрижка Штейнера».

Примечание 1. Если в задаче Штейнера исходный граф — ациклический, то минимальное по включению дерево Штейнера является решением задачи Штейнера для этого графа.

Примечание 2. В случае, когда исходный граф содержит циклы, решение задачи Штейнера надо искать среди минимальных по включению деревьев Штейнера. Поэтому, один из возможных подходов к решению задачи заключается в следующем: построить все минимальные по включению деревья Штейнера и из них выбрать дерево наименьшего веса. Если деревьев наименьшего веса окажется несколько, то в качестве решения задачи можно взять любое из этих деревьев.

Именно такой подход рассматривается далее.

Определение 4. Компонента связности, вершины которой содержат все терминальные вершины, называется *компонентой Штейнера (КШ)*.

Примечание 3. Дерево Штейнера — частный случай подграфа, содержащего компоненту Штейнера.

Утверждение 2. Минимальный по включению подграф, содержащий компоненту Штейнера, состоит из одной компоненты связности, то есть, является связным подграфом.

Доведения. Пусть $A \in P(E)$ — минимальный по включению подграф, содержащий компоненту Штейнера. Допустим, что подграф A — не связный и, значит, состоит более, чем из одной компоненты. Удалим из подграфа A те компоненты, которые не являются компонентой Штейнера. Подграф, получившийся в результате такого

удаления, содержит компоненту Штейнера. Следовательно, подграф A не был минимальным по включению подграфом, содержащим компоненту Штейнера. Противоречие. \square

2. РЕШЁТКА РЕБЕРНО-ПОРОЖДЕННЫХ ПОДГРАФОВ

Определение 5. Пусть $G' = (V', E', w)$ — подграф графа G . Подграф G' называется *реберно-порожденным*, если каждая из его вершин инцидентна хотя бы одному из рёбер подмножества E' [3].

Поскольку реберно-порождённый подграф однозначно определяется множеством своих рёбер, то для задания такого подграфа достаточно указать множество его рёбер. Множество всех реберно-порождённых подграфов будем отождествлять с множеством всех подмножеств, порождаемых множеством рёбер E исходного графа $G = (V, E, w)$ и обозначать $P(E)$.

Отношение включения « \subseteq » на элементах семейства $P(E)$ определяет отношение предшествования « \leq » на реберных подграфах.

Определение 6. Пусть $A, B \in P(E)$. Подграф A предшествует подграфу B , если множество рёбер подграфа A является подмножеством множества рёбер подграфа B :

$$A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

В силу свойств отношения включения « \subseteq », отношение предшествования « \leq » является отношением порядка. Семейство реберно-порождённых подграфов $P(E)$, упорядоченное таким образом, является полной решёткой [3].

Обычным образом отношение предшествования « \leq » порождает отношение строгого « $<$ » и непосредственного « \prec » предшествования:

$$A < B \Leftrightarrow A \leq B \ \& \ A \neq B,$$

$$A \prec B \Leftrightarrow A < B \ \& \ \exists C \in P(E) : A < C < B.$$

Утверждение 3. Подграф A непосредственно предшествует подграфу B тогда и только тогда, когда

$$A \subset B \ \& \ |A| = |B| - 1.$$

Множество всех подграфов, непосредственно предшествующих графу A , обозначается $N_-(A)$:

$$N_-(A) = \{B \in P(E) : B \prec A\}.$$

3. СВОЙСТВА ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЁТКИ РЁБЕРНО-ПОРОЖДАЕМЫХ ПОДГРАФОВ

Утверждение 4. *Всякий подграф ациклического графа, не содержащего компоненту Штейнера, является ациклическим подграфом, не содержащим компоненту Штейнера.*

Следствие 1. *Из утверждения 4 следует, что семейство рёберно-порождаемых ациклических подграфов, не содержащих компонент Штейнера, является порядковым идеалом [4] решётки $(P(E), \leq)$.*

Утверждение 5. *Всякий надграф графа, содержащего цикл или компоненту Штейнера, является графом, содержащим цикл или компоненту Штейнера.*

Следствие 2. *Из утверждения 5 следует, что семейство рёберно-порождаемых подграфов, содержащих циклы или компоненты Штейнера, является порядковым фильтром [4] решётки $(P(E), \leq)$.*

Определение 7. Рёберно-порождаемый подграф называется кандидатом (кандидатом в порядковый идеал, состоящий из ациклических подграфов, не содержащих компонент Штейнера), если все строго предшествующие ему рёберно-порождаемые подграфы являются ациклическими подграфами, не содержащими компонент Штейнера.

Утверждение 6. *Рёберно-порождаемый подграф является кандидатом тогда и только тогда, когда каждый непосредственно предшествующий ему рёберно-порождаемый подграф является ациклическим подграфом, не содержащим компоненту Штейнера.*

Утверждение 7. *Кандидат, содержащий компоненту Штейнера, является минимальным по включению подграфом, содержащим компоненту Штейнера.*

Действительно, если подграф — кандидат, то, в соответствии с определением 7, ни один из строго предшествующих ему подграфов не содержит компонент Штейнера. Следовательно, кандидат — минимальный по включению подграф, содержащий компоненту Штейнера.

Утверждение 8. *Кандидат, содержащий компоненту Штейнера, является ациклическим подграфом.*

Доведения. Пусть $A \in P(E)$ — кандидат, содержащий компоненту Штейнера.

Согласно утверждению 7, подграф A — минимальный по включению подграф, содержащий компоненту Штейнера. Следовательно, подграф A состоит из одной компоненты связности (утверждение 2).

Допустим, что A содержит цикл. Удалим одно из рёбер этого цикла. Подграф, получившийся в результате удаления ребра, обозначим B . В силу утверждения 3, подграф B — один из подграфов, непосредственно предшествующих подграфу A .

Удаление ребра не влечёт удаления вершин [3]. Следовательно, множества вершин графа A и его подграфа B совпадают.

Удаление ребра цикла не нарушает связности [3]. Поэтому, подграф B также состоит из одной компоненты. И эта компонента содержит все терминальные вершины. Следовательно, подграф B содержит компоненту Штейнера.

Это противоречит тому, что подграф A — кандидат. □

Утверждение 9. *Кандидат, содержащий компоненту Штейнера, является минимальным по включению деревом Штейнера.*

Доведения. Пусть $A \in P(E)$ — кандидат, содержащий компоненту Штейнера. Тогда A — минимальный по включению подграф, содержащий компоненту Штейнера (утверждение 7). В соответствии с утверждением 2, A — связный подграф.

Кроме этого, A — ациклический подграф (утверждение 8).

Таким образом, A — минимальный по включению связный ациклический подграф, содержащий все терминальные вершины исходного графа. Следовательно, подграф A — минимальное по включению дерево Штейнера. □

Из утверждения 9 следует, что одним из возможных подходов к построению всех минимальных по включению деревьев Штейнера является построение всех кандидатов и отбор тех из них, которые содержат компоненту Штейнера.

Определение 8. Рёберно-порождаемый подграф называется потенциальным кандидатом (ПК), если хотя бы один, из непосредственно предшествующих ему рёберно-порождаемых подграфов, является ациклическим подграфом, не содержащим компоненту Штейнера.

Утверждение 10. *Каждый кандидат является потенциальным кандидатом.*

Утверждение 11. *Потенциальный кандидат не является кандидатом тогда и только тогда, когда среди непосредственно предшествующих ему подграфов есть хотя бы один, содержащий цикл или компоненту Штейнера.*

4. ДИАГРАММА ХАССЕ И ЛИНЕЙНЫЙ ПОРЯДОК НА ЭЛЕМЕНТАХ ОДНОГО УРОВНЯ

Удобно считать, что для ациклических, не содержащих компонент Штейнера подграфов семейства $P(E)$ построена диаграмма Хассе, нумерация уровней в которой проведена следующим образом:

Уровень 0 — подграф, множество рёбер которого пусто;

Уровень 1 — все одно рёберные подграфы;

Уровень 2 — все двух рёберные подграфы;

Уровень k — все k -рёберные подграфы.

В диаграмме Хассе, внутри каждого уровня, подграфы упорядочиваются в каком-либо линейном порядке. Например, лексикографическом. Тогда, для каждого подграфа A , состоящего из k элементов, непосредственно предшествующие ему подграфы (элементы семейства $N_-(A)$), также линейно упорядочены.

Согласно утверждению 3, подграф A может быть построен из любого подграфа семейства $N_-(A)$ добавлением соответствующего ребра. Чтобы избежать дублирования, для порождения подграфа A всегда будет использоваться тот подграф семейства $N_-(A)$, который является линейно наибольшим подграфом этого семейства.

$lexmaxN_-(A)$ — обозначение линейно наибольшего подграфа семейства $N_-(A)$.

Если подграф $lexmaxN_-(A)$ является циклическим или содержит компоненту Штейнера, то он отсутствует в уровне, предшествующем уровню расположения подграфа A . В этом случае подграф A не порождается, так как в соответствии с утверждением 5, все следующие за ним (в решёточном порядке) подграфы исключаются из рассмотрения и не вычисляются.

5. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ МИНИМАЛЬНЫХ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ ДЕРЕВЬЕВ ШТЕЙНЕРА

Таблица 1. Обозначения алгоритма

Обозначение	Пояснение
n	Количество вершин исходного графа G
k	Номер уровня, количество рёбер подграфа, номер итерации
\widetilde{C}_k	Семейство всех k -рёберных потенциальных кандидатов
C_k	Семейство всех k -рёберных кандидатов
L_k	Семейство всех k -рёберных ациклических подграфов, не содержащих компонент Штейнера
S	Семейство всех деревьев Штейнера наименьшего веса

Псевдокод алгоритма

Вход: $G = (V, E, w)$ – связный неориентированный взвешенный граф,
 $w : E \rightarrow R_+$ – весовая функция,
 $T \subseteq V$ – подмножество терминальных вершин,
 S_0 – одно из минимальных по включению деревьев Штейнера.

Выход: S – семейство всех деревьев Штейнера наименьшего веса.

- 1: $W_0 := \text{Вес}(S_0)$;
- 2: $S := \{S_0\}$;
- 3: $n := |V|$;
- 4: $L_0 := \{\emptyset\}$;
- 5: $k := 0$;
- 6: **Цикл пока** $k < n - 1$ и $L_k \neq \emptyset$
- 7: $k := k + 1$;
- 8: $\widetilde{C}_k := \{A \in P(E) \mid \text{lexmax} N_-(A) \in L_{k-1}\}$;
- 9: $C_k := \{C \in \widetilde{C}_k \mid N_-(C) \subseteq L_{k-1}\}$;
- 10: $L_k := \emptyset$
- 11: **Цикл по всем** $A \in C_k$
- 12: **Если** A – ациклический, не содержащий КШ, **то**
- 13: $L_k := L_k \cup \{A\}$;
- 14: **end Если**
- 15: **Если** A – ациклический, содержащий КШ, **то**
- 16: $W^* := \text{Вес}(A)$;
- 17: **Если** $W^* = W_0$ и $A \notin S$, **то**
- 18: $S := S \cup \{A\}$;
- 19: **end Если**
- 20: **Если** $W^* < W_0$, **то**
- 21: $S := \{A\}$;
- 22: $W_0 := W^*$;
- 23: **end Если**
- 24: Конец если $W^* < W_0$
- 25: **end Если**
- 26: Конец если A – ациклический, содержащий КШ
- 27: **end Цикл пока**
- 28: Конец цикла по всем $A \in C_k$
- 29: **end Цикл пока**
- 30: Конец цикла пока $k < n - 1$ и $L_k \neq \emptyset$
- 31: Возврат S ;

Пояснения к псевдокоду алгоритма.

Шаг 1 – определяется вес W_0 минимального по включению дерева Штейнера S_0 .

Подграф S_0 – это одно из минимальных по включению деревьев Штейнера. Метод, с помощью которого получен подграф S_0 , не фиксируется. Например, один из возможных способов получить S_0 следующий:

1. Используя какой-либо известный алгоритм, (например, алгоритм Краскала [3]), вычислить остов минимального веса.
2. К полученному остову применить алгоритм «стрижка Штейнера».

Шаг 2 – текущее семейство деревьев Штейнера наименьшего веса инициализируется подграфом S_0 .

Шаг 3 – определяется количество вершин исходного графа.

Шаг 4 – строятся все 0-рёберные подграфы. Такой подграф один: подграф, множество рёбер которого пусто.

Шаг 5 – инициализируется счётчик итераций.

Шаг 6 – условия $k < n - 1$ и $L_k \neq \emptyset$ определяют условие выполнения очередной итерации, реализующей построение необходимых конструкций следующего уровня из ациклических подграфов, предшествующего уровня, не содержащих компонент Штейнера.

Шаг 7 – определяет номер следующей итерации (номер следующего уровня).

Шаг 8 – формирует \widetilde{C}_k - семейство k -рёберных потенциальных кандидатов, непосредственно следующих за подграфами из семейства L_{k-1} (определение 8).

Шаг 9 – из потенциальных кандидатов семейства \widetilde{C}_k отбираются кандидаты, формирующие семейство C_k (утверждение 6).

Шаг 10 – изначально семейство ациклических подграфов текущего уровня, не содержащих компонент Штейнера – пусто.

Шаг 11 – цикл по всем подграфам-кандидатам k -го уровня.

Шаг 13 – ациклический подграф, не содержащий компоненты Штейнера (шаг 12), добавляется в семейство L_k .

Шаг 14 – если текущий подграф A – ациклический и содержит компоненту Штейнера, то

Шаг 15 – вычислить вес подграфа A .

Шаг 16-17 – если вес текущего подграфа равен порогу W_0 и подграф A не включён в семейство решений задачи, то добавить его в семейство S .

Шаг 18 – если вес текущего подграфа меньше порога W_0 , то

Шаг 19 – текущее подмножество дерева Штейнера наименьшего веса инициализируется подграфом A .

Шаг 20 – в качестве весового порога использовать вес подграфа A .

Шаг 25 – возвращается результат работы алгоритма: множество всех деревьев Штейнера наименьшего веса

Примечание 4. Если желательно ограничиться получением какого-либо одного решения задачи Штейнера, то для этого в семейство S необходимо включать только одно из деревьев Штейнера наименьшего веса. Чтобы это обеспечить, достаточно исключить из рассмотренного алгоритма шаги (шаги 16, 17), добавляющие в текущее семейство S новые подграфы наименьшего веса

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены следующие результаты. Определены понятия минимального по включению дерева Штейнера и минимальной по включению компоненты Штейнера, определено понятие кандидата в порядковый идеал, состоящий из ациклических подграфов, не содержащих компонент Штейнера. Показано, что кандидат, содержащий компоненту Штейнера, является минимальным по включению деревом Штейнера. Предложен алгоритм поуровневого вычисления всех деревьев Штейнера, минимальных по включению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордеев Э. Н. Задача Штейнера. Обзор / Э. Н. Гордеев, О. Г. Тарасцов // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5. Вып. 2. — С. 3–28.
2. Beasley J. An algorithm for the Steiner problem in graphs / J. Beasley // Networks 14 (1984). — 1984. — pp. 147–159.
3. Лекции по теории графов / [Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.] / Изд. 2-е, испр. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 392 с.
4. Биркгоф Г. Теория решеток: Пер. с англ. / Г. Биркгоф — М.: Наука, 1984. — 568 с.

Статья поступила в редакцию 01.06.2012