УДК 517.97

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ

© Ибрагимов Н. С.

Бакинский Государственный Университет
Кафедра экономической информатики
ул. Академика Захид Халилова 23, AZ 1148, г. Баку, AZ-1073/1,
Азербайджанская Республика
e-mail: *ns.ibragimov@gmail.com*

Abstract. In this paper we consider the problem of identification problem for one-dimensional nonlinear stationary equation of quasi optics of determining the coefficients in the class of square-integrable functions, where the nonlinear part include purely imaginary coefficient. This proved the existence and uniqueness of solution of the identification problem. In addition, the theorem of existence and uniqueness of solution of the corresponding direct problem is proved.

Введение

Известно, что нелинейное стационарное уравнение квазиоптики возникает при изучении распространения световых волн в нелинейных средах, когда процесс распространения не зависит от времени [1]. При прохождении световых волн через нелинейную среду коэффициенты уравнения, характеризующие показатели преломления и поглощения среды, могут оказаться неизвестными функциями [1, стр.233]. Поэтому изучение подобных процессов делает актуальными исследования обратных задач или задач идентификации об определении коэффициентов нелинейного стационарного уравнения квазиоптики.

Данная работа посвящена изучению задачи идентификации для одномерного нелинейного стационарного уравнения квазиоптики об определении коэффициентов уравнения в классе квадратично суммируемых функций, когда нелинейная часть уравнения содержит чисто мнимый коэффициент. Следует отметить, что задачи идентификации об определении только начального фазового профиля распространения световых волн с известными показателями или только показателя преломления среды с известным начальным фазовым профилем ранее подробно изучены, например, в работах [1 – 11] и др.

1. Постановка задачи

Пусть $l > 0, L > 0$ – заданные числа, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq z \leq L$, $\Omega_z = (0,l) \times (0,z)$, $\Omega = \Omega_L$; $L_p(0,l)$ – лебегово пространство измеримых функций на $(0,l)$, суммируемых со со степенью $p \geq 1$; $C^k([0,L],B)$ – банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, L]$ функций со значениями в банаховом пространстве B; $W_p^k(0, l)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$ – соболевы пространства функций с обобщенными производными порядка $k \geq 0$ по переменной x и $m \geq 0$ по переменной z, соответственно, которые суммируемы со степенью $p \geq 1$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$ – подпространство пространства $W_2^1(0, l)$, элементы которого обращаются в нуль на концах отрезка $[0, l]$, $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0, l) \equiv W_2^2(0, l) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, l)$; символ $\overset{\circ}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через $c_j, j = 0, 1, 2, ...$

Рассмотрим процесс, состояние которого описывается следующим одномерным нелинейным стационарным уравнением квазиоптики [1]:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi + ia_1|\psi|^2\psi = f(x, z), \ \ (x, z) \in \Omega, \quad (1)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\psi = \psi(x, z)$ – волновая функция, $a_1 > 0$ – заданное вещественное число, $a_0(x), a(x)$ – заданные вещественнозначные измеримые ограниченные функции, удовлетворяюшие условиям:

$$0 < \mu_0 \leq a_0(x) \leq \mu_1, \ \left|\frac{da_0(x)}{dx}\right| \leq \mu_2, \ \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0, l), \mu_0, \mu_1, \mu_2 = const > 0, \quad (2)$$

$$0 \leq a(x) \leq \mu_3, \ \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0, l), \mu_3 = const > 0, \quad (3)$$

$f(x, z)$ – заданная комплекснозначная измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$f \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (4)$$

$v_0(x), v_1(x)$ – неизвестные коэффициенты уравнения.

Пусть для уравнения (1) заданы следующие начальное и краевое условия:

$$\psi(x, 0) = \varphi(x), \ x \in (0, l), \ \ \psi(0, z) = \psi(l, z) = 0, \ z \in (0, L), \quad (5)$$

где $\varphi(x)$ – заданная комплекснозначная измеримая функция, удовлетворяющая условию:

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0, l). \quad (6)$$

Наша цель заключается в определении неизвестных коэффициентов $v_0(x), v_1(x)$ на основе дополнительной информации:

$$\psi(x, L) = y(x), \quad x \in (0, l), \quad (7)$$

где $y = y(x)$ – заданная комплекснозначная функция из $L_2(0, l)$.

Пусть $v = (v_0, v_1)$, где $v_0 = v_0(x), v_1 = v_1(x)$. Элемент $v = v(x)$ будет найден на множестве:

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1) : v_m \in L_2(0,l), \|v_m\|_{L_2(0,l)} \leq b_m, m = 0, 1, v_1(x) \geq b_2, \overset{\circ}{\forall}\, x \in (0,l) \right\},$$

где $b_m, m = 0, 1, 2$ – заданные положительные числа. Множество V будем называть множеством допустимых элементов. Определение $v = (v_0, v_1)$ из множества V при условиях (1), (5), (7) является задачей идентификации по финальному наблюдению для уравнения квазиоптики вида (1). Вариационная формулировка этой задачи заключается в минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \|\psi(., L) - y\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha \|v - \omega\|^2_H \tag{8}$$

на множестве V при условиях (1), (5), где $\alpha \geq 0$ – заданное число, $\omega \in H$ – заданный элемент, $H \equiv L_2(0,l) \times L_2(0,l)$. Эту задачу в дальнейшем будем называть задачей идентификации (1), (5), (7).

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v)$ из условий (1), (5) при каждом $v \in V$ будем называть прямой задачей. Под решением этой задачи будем понимать функцию $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v)$ из пространства $B_0 \equiv C^0([0,L], \overset{\circ}{W}{}^2_2(0,l)) \cap C^1([0,L], L_2(0,l))$, удовлетворяющую уравнению (1) для любого $z \in [0,L]$ и почти всех $x \in (0,l)$, а условиям (2) для почти всех $x \in (0,l)$ и $z \in (0,L)$, соответственно.

2. Разрешимость прямой задачи

Прямую задачу для одномерного нелинейного стационарного уравнения квазиоптики вида (1) можно рассмотреть как прямую задачу для одномерного нелинейного нестационарного уравнения Шредингера с комплекснозначным квантовомеханическим потенциалом. Известно, что прямая задача, то есть начально-краевая задача для одномерного нелинейного нестационарного уравенеия Шредингера с вещественнозначным квантовомеханическим потенциалом, зависящим от переменной x, ранее изучена в работах [4–6, 8, 10–12] и др., когда потенциал является функцией из класса измеримых ограниченных или квадратично суммируемых функций, имеющих обобщенные производные первого порядка. В настоящей работе потенциал является комплекснозначным и принадлежит классу квадратично суммируемых функций. Поэтому результаты, полученные в этих работах относительно разрешимости начально-краевой задачи для одномерного нелинейного уравнения Шредингера, не достаточны для исследования задачи идентификации (1), (5), (8) по определению комплекснозначных потенциалов и возникает необходимость изучения разрешимости прямой задачи (1), (5) при $v \in V$.

Теорема 1. *Пусть функции* $a_0(x), a(x), f(x,z), \varphi(x)$ *удовлетворяют условиям (2)–(4), (6). Тогда при каждом* $v \in V$ *прямая задача (1), (5) имеет единственное решение из пространства* B_0 *и для этого решения справедлива оценка:*

$$\|\psi(.,z)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi(.,z)}{\partial z}\right\|_{L_2(0,l)} \leq c_0 \left(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} + (\tilde{c}_0)^{3/2}\right) \quad (9)$$

для $\forall z \in [0,L]$, *где* $c_0 > 0$ – *некоторая постоянная, а постоянная* $\tilde{c}_0$ *определяется формулой:*

$$\tilde{c}_0 = \left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}\right).$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать метод Галеркина. Возьмем какую-либо фундаментальную в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$ и ортонормированную в $L_2(0,l)$ систему функций $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), \quad x \in (0,l), \quad X(0) = X(l) = 0, \quad (10)$$

при $\lambda = \lambda_k, k = 1,2,...$, где оператор L определяется формулой:

$$L = -\frac{d}{dx}\left(a_0(x)\frac{d}{dx}\right) + a(x). \quad (11)$$

Известно, что задача (10) есть спектральная задача, изученная, например, в [13]. Она имеет нетривиальные решения $u_k(x), k = 1,2,...$ при $\lambda = \lambda_k, k = 1,2,...$, образующих спектр задачи (10) и эти решения образуют базис в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$ и ради удобства предположим, что эти функции ортонормированы в $L_2(0,l)$:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x)u_m(x)dx = \delta_k^m, \quad k,m = 1,2,..., \quad (12)$$

где δ_k^m символы Кронекера:

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad k,m = 1,2,\dots .$$

Ясно, что функции $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ ортогональны и в следующем смысле:

$$[u_k, u_m] = L(u_k, u_m) = (u_k, u_m)_{W_2^1(0,l)} =$$

$$= \int_0^l \left(a_0(x)\frac{du_k(x)}{dx}\frac{du_m(x)}{dx} + a(x)u_k(x)u_m(x)\right)dx = \lambda_k\delta_k^m, \quad k,m = 1,2,..., \quad (13)$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(0,l)} = (u_k, u_m)_{W_2^2(0,l)} = \lambda_k^2\delta_k^m, \quad k,m = 1,2,\dots . \quad (14)$$

В силу предположения $a(x) \geq 0$ все собственные значения $\lambda_k, k = 1, 2, ...$ вещественны, положительны и расположены в порядке возрастания и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Предположим также, что

$$\|u_k\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} \leq d_k, \quad k = 1, 2, ..., \tag{15}$$

где $d_k, k = 1, 2, ...,$ – положительные постоянные.

Приближенное решение прямой задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$\psi^N(x,z) = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(z) u_k(x), \tag{16}$$

где $c_k^N(z) = (\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)}, k = \overline{1,N}$, определяются из условий:

$$i\frac{d}{dz}(\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)} - (L\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)} + (v_0\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)} +$$

$$+(iv_1\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)} + (ia_1 \left|\psi^N(.,z)\right|^2 \psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)} = f_k(z), \quad k = \overline{1,N}, \tag{17}$$

$$c_k^N(0) = (\psi^N(.,0), u_k)_{L_2(0,l)} = (\varphi^N, u_k)_{L_2(0,l)} = \varphi_k^N, \quad k = \overline{1,N}, \tag{18}$$

$f_k(z) = (f(.,z), u_k)_{L_2(0,l)}, \ \ k = \overline{1,N}$.

Система (17) есть не что иное, как система N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При $v \in V$ из предположений (2) – (4) и из свойства функций $u_k(x), k = 1, 2, ...$, следует, что второе-пятое слагаемые левой части, а также правая часть являются непрерывными на каждом множестве $\{z \in [0, L], |c_k^N| \leq const\}$ функции $z, c_k^N, k = \overline{1,N}$. Поэтому для существования по крайней мере одного решения задачи Коши (17), (18) на всем отрезке $[0, L]$ достаточно знать, что все ее возможные решения равномерно ограничены на $[0, L]$. Такая ограниченность следует из следующей леммы:

Лемма 1. *Для любого $v \in V$ галеркинские приближения удовлетворяют следующей оценке:*

$$\sum_{k=1}^{N} \left|c_k^N(z)\right|^2 + \sum_{k=1}^{N} \left|\frac{dc_k^N(z)}{dz}\right|^2 \leq \left\|\psi^N(.,z)\right\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq$$

$$\leq c_1 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} + (\tilde{c}_0)^3 \right) \tag{19}$$

для $\forall z \in [0, L]$.

Для доказательства этой леммы была использована методика работы [11].

Рассмотрим функции:

$$l_{N,k}(z) = (\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(0,l)}, \quad N, k = 1, 2, \dots . \tag{20}$$

Из равенства (20) и оценки (19), а также из ортонормированности функций $u_k(x), k = 1, 2, ...$, следует справедливость неравенств:

$$|l_{N,k}(z)| \le c_2, \quad \left|\frac{dl_{N,k}(z)}{dz}\right| \le c_3, \quad \forall z \in [0, L], \quad N, k = 1, 2, \dots . \tag{21}$$

Используя систему (17), а также предположение (15), можем установить справедливость соотношений:

$$|l_{N,k}(z + \Delta z) - l_{N,k}(z)| \le c_4 d_k |\Delta z|, \tag{22}$$

$$\left|\frac{dl_{N,k}(z + \Delta z)}{dz} - \frac{dl_{N,k}(z)}{dz}\right| \le c_5 d_k |\Delta z|^{1/2} \tag{23}$$

для $\forall z \in [0, L], N, k = 1, 2, \dots$. Следуя неравенствам (21) – (23) заключаем, что семейство функций $l_{N,k}(z), N, k = 1, 2, ...$ и их производных $\dfrac{dl_{N,k}(z)}{dz}, N, k = 1, 2, ...$ равномерно ограничены на отрезке $[0, L]$ и равностепенно непрерывны при фиксированном k и при произвольном $N \ge k$ на этом отрезке. Тогда можем выбрать подпоследовательность $N_m, m = 1, 2, ...$ по которой функции $l_{N_m,k}(z), m = 1, 2, ...$ и их производные $\dfrac{dl_{N_m,k}(z)}{dz}, N_m, k = 1, 2, ...$ сходятся равномерно на отрезке $[0, L]$ к непрерывным функциям $l_k(z)$ и $\dfrac{dl_k(z)}{dz}$, соответственно, для каждого $k = 1, 2, \dots$. Функции $l_k(z), k = 1, 2, ...$ и их производные определяют функции:

$$\psi(x, z) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(z) u_k(x), \tag{24}$$

$$\frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{dl_k(z)}{dz} u_k(x). \tag{25}$$

Действуя аналогично работам [9,10], доказываем, что подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x, z)\}$, $\left\{\dfrac{\partial \psi^{N_m}(x, z)}{\partial z}\right\}$ сходятся слабо в $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0, l)$ и $L_2(0, l)$ к функциям $\psi(x, z)$, $\dfrac{\partial \psi(x, z)}{\partial z}$, соответственно, равномерно относительно $z \in [0, L]$. Нетрудно установить, что $\{\psi^{N_m}(x, z)\}$, принадлежит пространству B_0. Тогда можем утверждать, что предельная функция $\psi(x, z)$, определенная формулой (24), также принадлежит пространству B_0 и для этой функции справедлива оценка:

$$\|\psi(., z)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi(., z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le$$

$$\le c_1 \left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} + (\tilde{c}_0)^3 \right), \ \forall z \in [0, L], \tag{26}$$

которая следует непосредственно из оценки (19) с переходом к нижнему пределу по подпоследовательности $N = N_m, m = 1, 2, \ldots$. Из этой же оценки следует оценка (9).

Далее действуя, как и в работе [11], доказываем, что предельная функция $\psi(x,z)$ из B_0 является решением прямой задачи (1), (5) при каждом $v \in V$. Кроме того, используя оценку (9) и методику доказательства единственности решения начально-краевых задач, как и в работах [6, 11], устанавливаем единственность решения прямой задачи (1), (5). Теорема 1 доказана. □

3. Существование и единственность решения задачи идентификации

Теперь изучим вопрос существования и единственности решения задачи идентификации (1), (5), (8).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и $y \in L_2(0,l)$. Тогда существует плотное подмножество G пространства H такое, что для любого $\omega \in G$ и при $\alpha > 0$ задача идентификации (1), (5), (8) имеет единственное решение.*

Доказательство. Сперва докажем непрерывность функционала:

$$J_0(v) = \|\psi(.,L) - y\|^2_{L_2(0,l)} \tag{27}$$

на множестве V. Пусть $\delta v \in H$ – приращение любого элемента $v \in V$ такое, что $v+\delta v \in V$ и $\delta\psi = \delta\psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v+\delta v) - \psi(x,z;v)$, где $\psi(x,z;v)$ – решение прямой задачи (1), (5) при $v \in V$. Из условий (1), (5) следует, что функция $\delta\psi = \delta\psi(x,z)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$i\frac{\partial\delta\psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right) - a(x)\delta\psi +$$
$$+(v_0(x)+\delta v_0(x))\delta\psi + i(v_1(x)+\delta v_1(x))\delta\psi + ia_1(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2)\delta\psi +$$
$$+ia_1\psi_\delta\psi\delta\bar{\psi} = -\delta v_0(x)\psi - i\delta v_1(x)\psi, \quad (x,z) \in \Omega, \tag{28}$$

$$\delta\psi(x,0) = 0,\ x \in (0,l), \quad \delta\psi(0,z) = \delta\psi(l,z) = 0,\ z \in (0,L), \tag{29}$$

где $\psi_\delta = \psi_\delta(x,z) \equiv \psi(x,z;v+\delta v)$.

Теперь оценим решение этой начально-краевой задачи. С этой целью обе части уравнения (28) умножим на функцию $\delta\bar{\psi}(x,z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_z. Тогда, из полученного равенства вычитая его комплексное сопряжение и используя начальное условие из (29), имеем:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(D)} + 2\int\limits_{\Omega_z}(v_1(x)+\delta v_1(x))|\delta\psi|^2 dx d\tau = -2\int\limits_{\Omega_z}\mathrm{Im}(\delta v_0(x)\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau -$$

$$-2\int\limits_{\Omega_z}\mathrm{Re}(\delta v_1(x)\psi\delta\bar{\psi})dxd\tau-2a_1\int\limits_{\Omega_z}\mathrm{Re}\left[(|\psi_\delta|^2\psi_\delta-|\psi|^2\psi)\delta\bar{\psi}\right]dxd\tau$$

для $\forall z\in[0,L]$. Отсюда в силу условия $v+\delta v\in V$ получим справедливость неравенства:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(D)}+2b_2\int\limits_{\Omega_z}|\delta\psi|^2dxd\tau\leq 2\int\limits_{\Omega_z}|\delta v_0(x)||\psi||\delta\psi|dxd\tau+2\int\limits_{\Omega_z}|\delta v_1(x)||\psi||\delta\psi|dxd\tau+$$

$$+2a_1\int\limits_{\Omega_z}\left(|\psi_\delta|^2+|\psi|^2+|\psi_\delta\psi|\right)|\delta\psi|^2dxd\tau,\quad\forall z\in[0,L].\tag{30}$$

В силу теоремы вложения пространство $C^0([0,L],\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l))$ вложено в пространство $C(\bar{\Omega})$. Поэтому можем написать следующие неравенства:

$$\max_{(x,z)\in\bar{\Omega}}|\psi(x,z)|^2\leq c_6\|\psi\|^2_{C^0([0,L],\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l))},\quad\max_{(x,z)\in\bar{\Omega}}|\psi_\delta(x,z)|^2\leq c_6\|\psi_\delta\|^2_{C^0([0,L],\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l))}.\tag{31}$$

Учитывая эти неравенства и оценку (9), из неравенства (30) с помощью неравенства Коши-Буняковского и леммы Гронуолла имеем:

$$\|\delta\psi(.,z)\|^2_{L_2(0,l)}\leq c_7\left(\|\delta v_0\|^2_{L_2(0,l)}+\|\delta v_1\|^2_{L_2(0,l)}\right),\quad\forall z\in[0,L].\tag{32}$$

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v\in V$. В силу формулы (27) имеем:

$$\delta J_0(v)=J_0(v+\delta v)-J_0(v)=2\int\limits_0^l\mathrm{Re}[(\psi(x,L)-y(x))\delta\bar{\psi}(x,L)]dx+\|\delta\psi(.,L)\|^2_{L_2(0,l)}.\tag{33}$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского и используя оценки (9), (32), а также условие $y\in L_2(0,l)$, получим справедливость оценки:

$$|\delta J_0(v)|\leq c_8\left(\|\delta v_0\|_{L_2(0,l)}+\|\delta v_1\|_{L_2(0,l)}+\|\delta v_0\|^2_{L_2(0,l)}+\|\delta v_1\|^2_{L_2(0,l)}\right).\tag{34}$$

Из оценки (34) следует соотношение:

$$\delta J_0(v)\to 0\quad\text{при}\quad\|\delta v\|_H\to 0\tag{35}$$

для $\forall v\in V$. Отсюда получаем, что функционал $J_0(v)$ непрерывен на множестве V. Ввиду $J_0(v)\geq 0,\forall v\in V$ функционал снизу ограничен на множестве V. Кроме того, нетрудно установить, что множество V является замкнутым, ограниченным и выпуклым множеством пространства H. А пространство H является равномерно выпуклым пространством [14], поскольку H является гильбертовым. Следовательно, выполняются все условия теоремы работы [15]. Тогда в силу этой же теоремы заключаем, что существует плотное подмножество G из пространства H такое, что для любого

$\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача идентификации (1), (5), (8) имеет единственное решение. Теорема 2 доказана. $\square$

Теперь покажем, что задача идентификации (1), (5), (8) при $\alpha > 0$ и $\forall \omega \in H$ имеет хотя бы одно решение.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда задача идентификации (1), (5), (8) имеет хотя бы одно решение при $\alpha \geq 0$ и $\forall \omega \in H$.*

Доказательство. Возьмем любую минимизирующую последовательность $\{v^k\} \in V$:

$$\lim_{k\to\infty} J_\alpha(v^k) = J_{\alpha^*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v). \tag{36}$$

Положим $\psi_k = \psi_k(x,z) \equiv \psi(x,z;v^k), k = 1,2,\ldots$. Ввиду того, что элемент v^k при каждом k принадлежит множеству V, в силу теоремы 1 можем утверждать, что прямая задача (1), (2) при каждом k имеет единственное решение из B_0 и справедлива оценка:

$$\|\psi_k(.,z)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi_k(.,z)}{\partial z}\right\|_{L_2(0,l)} \leq$$

$$\leq c_0 \left(\|\varphi\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)} + (\tilde{c}_0)^{3/2} \right), \ \ k = 1,2,... \tag{37}$$

для $\forall z \in [0,L]$, где правая часть оценки не зависит от k.

Поскольку множество V есть замкнутое ограниченное и выпуклое множество рефлексивного пространства H, то из последовательности $\{v^k\}$ можно извлечь подпоследовательность, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{v^k\}$, что

$$v_m^k \to v_m \quad \text{слабо в} \quad L_2(0,L), \tag{38}$$

$m = 0,1$ при $k \to \infty$. Кроме того, в силу структуры множества V нетрудно доказать, что оно является слабо замкнутым множеством, то есть $v \in V$. Поэтому можем написать следующее предельное соотношение:

$$\int_0^l v_m^k(x)q(x)dx \to \int_0^l v_m(x)q(x)dx, \ \ m = 0,1 \tag{39}$$

для любой функции $q \in L_2(0,l)$ при $k \to \infty$.

Из оценки (37) следует, что последовательность $\{\psi_k(x,z)\}$ равномерно ограничена в норме пространства B_0. Тогда из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{\psi_k(x,z)\}$, что

$$\psi_m^k(.,z) \to \psi_m(.,z) \text{ слабо в } W_2^2(0,l), \tag{40}$$

$$\frac{\partial\psi_k(.,z)}{\partial z}\to\frac{\partial\psi(.,z)}{\partial z}\text{ слабо в }\ L_2(0,l) \tag{41}$$

для каждого $z\in[0,L]$ при $k\to\infty$.

Ясно, что каждый элемент подпоследовательности $\{\psi_k(x,z)\}\in B_0$ удовлетворяет тождеству:

$$\int_0^l\left(i\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial x}\right)-a(x)\psi_k(x,z)+v_0^k(x)\psi_k(x,z)+iv_1^k(x)\psi_k(x,z)+\right.$$

$$\left.+ia_1|\psi_k(x,z)|^2\psi_k(x,z)-f(x,z)\right)\bar\eta(x)dx=0,\quad k=1,2,... \tag{42}$$

для $\forall z\in[0,L]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$, начальному условию:

$$\psi_k(x,0)=\varphi(x),\quad \overset{\circ}{\forall}\, x\in(0,l),k=1,2,... \tag{43}$$

и краевому условию:

$$\psi_k(0,z)=\psi_k(l,z)=0,\quad \overset{\circ}{\forall}\, z\in(0,L),k=1,2,\dots. \tag{44}$$

Используя предельные соотношения (40), (41) , имеем:

$$\int_0^l\left(i\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi_k(x,z)}{\partial x}\right)-a(x)\psi_k(x,z)\right)\bar\eta(x)dx\to$$

$$\to\int_0^l\left(i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right)-a(x)\psi(x,z)\right)\bar\eta(x)dx \tag{45}$$

для каждого $z\in[0,L]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$.

Теперь докажем, что имеют место соотношения:

$$\int_0^l v_m^k(x)\psi_k(x,z)\bar\eta(x)dx\to\int_0^l v_m(x)\psi(x,z)\bar\eta(x)dx,\ \ m=0,1, \tag{46}$$

$$\int_0^l a_1|\psi_k(x,z)|^2\psi_k(x,z)\bar\eta(x)dx\to\int_0^l a_1|\psi(x,z)|^2\psi(x,z)\bar\eta(x)dx \tag{47}$$

для каждого $z\in[0,L]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$.

Ясно, что имеют место равенства:

$$\int_0^l v_m^k(x)\psi_k(x,z)\bar\eta(x)dx=\int_0^l(v_m^k(x)-v_m(x))\psi(x,z)\bar\eta(x)dx+$$

$$+\int_0^l v_m^k(x)(\psi_k(x,z)-\psi(x,z))\bar{\eta}(x)dx+\int_0^l v_m(x)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx, m=0,1, k=1,2,... \quad (48)$$

для каждого $z \in [0, L]$ и для любой функции $\eta \in L_2(0, l)$. Ввиду того, что для каждого $z \in [0, L]$ функция $\psi(x, z)$ принадлежит пространству $W_2^1(0, l)$, а пространство $W_2^1(0, l)$ вложено в $L_\infty(0, l)$, для функции $\eta \in L_2(0, l)$ имеем:

$$q(., z) = \psi(., z)\bar{\eta} \in L_2(0, l), \quad z \in [0, L].$$

С учетом этого и предельного соотношения (39) получим:

$$\int_0^l v_m^k(x)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx \to \int_0^l v_m(x)\psi(x,z)\bar{\eta}(x)dx, m=0,1 \quad (49)$$

для каждого $z \in [0, L]$ и для любой функции $\eta \in L_2(0, l)$ при $k \to \infty$. В силу теоремы вложения пространство $W_2^1(0, l)$ компактно вложено в пространство $L_\infty(0, l)$. Тогда для слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi_k(x, z)\}$ из $C^0([0, L], W_2^1(0, l))$ справедливо предельное соотношение:

$$\psi_k(., z) \to \psi(., z) \text{ сильно в } L_\infty(0, l) \quad (50)$$

для каждого $z \in [0, L]$. Используя (50) и неравенство:

$$\left|\int_0^l v_m^k(x)(\psi_k(x,z)-\psi(x,z))\bar{\eta}(x)dx\right| \leq$$

$$\leq \|v_m^k\|_{L_2(0,l)}\|\eta\|_{L_2(0,l)}\|\psi_k(.,z)-\psi(.,z)\|_{L_\infty(0,l)}, \; m=0,1 \quad (51)$$

для каждого $z \in [0, L]$, а также условие:

$$\|v_m^k\|_{L_2(0,l)} \leq b_m, \quad m = 0, 1, \quad (52)$$

получим справедливость предельных соотношений:

$$\int_0^l v_m^k(x)(\psi_k(x,z)-\psi(x,z))\bar{\eta}(x)dx \to 0, \quad m=0,1, \quad (53)$$

для каждого $z \in [0, L]$ и для любой функции $\eta \in L_2(0, l)$ при $k \to \infty$. Тогда, используя предельные соотношения (49), (53), если переходить к пределу в равенствах (48), то при $k \to \infty$ получим справедливость предельных соотношений (46). Наряду с этим, используя предельное соотношение (50), нетрудно установить справедливость соотношения (47). Таким образом, с учетом предельных соотношений (45)–(47), если переходить к пределу в интегральном тождестве (42), то при $k \to \infty$ получим справедливость следующего интегрального тождества:

$$\int_0^l \Bigg(i\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial x}\right) - a(x)\psi(x,z) + v_0(x)\psi(x,z) + iv_1(x)\psi(x,z)+$$

$$+ia_1|\psi(x,z)|^2\psi(x,z) - f(x,z)\Bigg)\bar{\eta}(x)dx = 0 \qquad (54)$$

для каждого $z \in [0,L]$ и для любой функции $\eta \in L_2(0,l)$. Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,z)$ для каждого $z \in [0,L]$ и для почти всех $x \in (0,l)$ удовлетворяет уравнению (1).

Действуя аналогично работам [9, 11], можем установить, что предельная функция $\psi(x,z)$ удовлетворяет начальному и краевому условиям (5). Кроме того, для предельной функции $\psi(x,z)$ справедлива оценка (9), которая следует из оценки (37) с переходом к нижнему пределу по слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi_k(x,z)\}$ к функции $\psi(x,z)$ для каждого $z \in [0,L]$. Также установили, что $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;v)$ является решением прямой задачи (1), (5) при $v \in V$. Тогда в силу теоремы 1 предельная функция $\psi(x,z)$ принадлежит пространству B_0.

В силу теоремы вложения пространство B_0 компактно вложено в пространство $C^0([0,L],L_2(0,l))$ (см. [16], [17]). Тогда для слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi_k(x,z)\}$ из B_0 к функции $\psi(x,z)$ имеет место соотношение:

$$\psi_k(.,L) \to \psi(.,L) \quad \text{сильно в} \quad L_2(0,l) \qquad (55)$$

при $k \to \infty$. Используя (55) и слабую полунепрерывность снизу норм в пространствах $L_2(0,l)$ и H при $\alpha \geq 0$ и для любого $\omega \in H$ имеем:

$$J_{\alpha^*} \leq J_\alpha(v) \leq \varliminf_{k\to\infty} J_\alpha(v^k) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha^*}.$$

Отсюда следует, что $v = v(x)$ из множества V предоставляет минимум функционалу (8) при условиях (1), (5), то есть $v \in V$ является решением задачи идентификации (1), (5), (8) при $\alpha \geq 0$ и при любом $\omega \in H$. Теорема 3 доказана. $\square$

Список литературы

1. Воронцов М.А. Принципы адаптивной оптики / М.А. Воронцов, В.И. Шмальгаузен – М.: Наука, 1985. — 336 с.
2. Ягубов Г.Я. Задача оптимального управления для уравнения типа Шредингера / Г.Я. Ягубов // В сб.: «Численные методы и матем. обеспечение ЭВМ». — Баку: изд-во АГУ, 1984. — С. 116–125.

3. Шамеева Т.Ю. Об оптимизации в задаче о распространении светового пучка в неоднородной среде / Т.Ю. Шамеева // Вестн. Московск. ун-та. Сер. вычисл. матем. и киберн. — 1985. — №1. — С. 12–19.
4. Ягубов Г.Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала / А.Д. Искендеров., Г.Я. Ягубов // ДАН СССР. — 1988. — Т.303, № 5. — С. 1044–1048.
5. Ягубов Г.Я. Оптимальное управление нелинейными квантовомеханическими системами / А.Д. Искендеров., Г.Я. Ягубов // Автоматика и телемехан. — 1989. — № 12. — С. 27–38.
6. Ягубов Г.Я. Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера / Г.Я. Ягубов // докт. дисс. — Баку, 1993. — 318 с.;
7. Ягубов Г.Я. О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера / Г.Я. Ягубов, М.А. Мусаева // Изв. АН. Азерб. Сер. физ.-техн.-матем. наук. — 1994. — Т. XV, № 5-6. — С. 56–61.
8. Ягубов Г.Я. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шредингера / Г.Я. Ягубов, М.А. Мусаева // Дифференц. уравнения. — 1997. – Т. 33, № 12. — С. 1691–1698.
9. Искендеров А.Д. Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера / А.Д. Искендеров // В сб.: «Проблемы матем. моделирования и опт.управления». — Баку, 2001. – С. 6 — 36.
10. Iskenderov A.D. Identification problem for time dependent Schrodinger type equation / Iskenderov A.D. // Proceedings of the Lankaran State University. — Lankaran, 2005. — P. 31–53.
11. Ягубов Г.Я. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном и нестационарном уравнении Шредингера / А.Д. Искендеров., Г.Я. Ягубов // Вестник Ленкоранского государственного университета. Серия естественных наук. — Ленкорань, 2007. — С. 3–56.
12. Mahmudov N.M. Solvability of boundary value problems for a Schrodinger equation with pura imaginary coefficient in the nonlinear part of this equation / Mahmudov N.M. // Proc. of IMM of NAS of Azerb. — 2007. — Vol. XXVII. — P. 25–37.
13. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская — М.: Наука, 1973. — 408 с.
14. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
15. Goebel M. On existence of optimal control / M. Goebel // Math. Nachr. — 1978. — Vol. 93. — P. 67–73.
16. Simon J. Compact sets in the space / Simon J. // Ann. Mat. Pura Appl. — 1987. — 146 (4) — P. 65–96.
17. Baudoin L. Regularity for Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control / Baudoin L., Kavian O., Puel J.-P. // J. Differential Equations. — 2005. – 216. — P. 188–222.

Статья поступила в редакцию 06.06.2011