УДК 338.468.5+519.95

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОЙ ДОЗАГРУЗКИ РЕКРЕАЦИОННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

© Д. В. Донской

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
Факультет управления
просп. Вернадского, 4, г. Симферополь, 295007, Россия
e-mail: *ddv-ddv@mail.ru*

Mathematical model of optimum additional charge of recreation enterprise.

Donskoy D. V.

Abstract. Mathematical model of optimum additional charge of recreation enterprise for seasons with low intensity of demand is offered. Appropriate heuristic GREEDY algorithm for the decision of the task determined by this model is presented.

Recreation enterprises are counted on maintenance of customers and possess resources, many of which can be used whole-yearly. However much the stream of customers has different intensity which depends on the temporal seasons of year. When a recreation enterprise stands from the shortage of customers, expediently addition loading of him, providing services to other customers, possibly even not on the basic type of enterprise. To that end marketing researches are conducted and new targets accounts come to light. Such actions must be executed constantly with the purpose of filling of store of basic specific resource – input stream of customers.

A store is a file in which with attachment at times descriptions and quantitative indexes are brought on the found targets accounts. It contains information about the possible users of recreation resources of enterprise – additional customers, foremost such which can take advantage of services of recreation enterprise in the seasons of the least demand.

The purpose of this paper is the revision of mathematical model and improvement of algorithm of addition loading of recreation enterprise with the purpose of his steady functioning in the seasons characterized by low intensity of input customer stream. The article continues the researches begun in [2,3].

It is assumed that the number of places in a recreation enterprise is fixed and equal n. In every discrete moment of time $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., t_0 + T - 1$ the current planned load is permanent and equal n^*, and possible addition load makes a size $\Delta n = n - n^*$. Customer with a number j can occupy k_j places of service in the interval of time T (that corresponds to the height of rectangle with a mark τ_j) and to stay in the enterprise of service τ_j in succession going time units (that corresponds to the width of this rectangle). In geometrical interpretation the decided task consists of receipt maximally dense packing of the set rectangular region by the set of the fixed rectangles with limitations on piling.

1. Описание проблемной области и постановка задачи

Рекреационные объекты и процессы являются проблемной областью для широкого применения математических методов и моделей. К этому научному направлению проявляют интерес исследователи во многих странах мира [4, 5, 6].

Рекреационные предприятия рассчитаны на обслуживание рекреантов и обладают ресурсами, многие из которых могут использоваться круглогодично. Однако поток рекреантов имеет различную интенсивность, которая зависит от временных сезонов года. Когда рекреационное предприятие простаивает из-за нехватки рекреантов, целесообразно дозагрузить его, предоставляя услуги другим заказчикам, возможно даже не по основному профилю предприятия. С этой целью проводятся маркетинговые исследования и выявляются новые потенциальные заказчики. Такие действия должны выполняться постоянно с целью наполнения *накопителя основного специфического ресурса — входного потока рекреантов.*

Накопитель представляет собой файл, в который с привязкой по времени заносятся характеристики и количественные показатели по найденным потенциальным заказчикам. Он содержит информацию о возможных потребителях рекреационного ресурса предприятия — дополнительных заказчиках, прежде всего таких, которые могут воспользоваться услугами рекреационного предприятия в сезонах наименьшего спроса.

Целью настоящей работы является доработка математической модели и усовершенствование алгоритма дозагрузки рекреационного предприятия с целью его устойчивого функционирования в сезонах, характеризующихся низкой интенсивностью входного рекреационного потока. Статья продолжает исследования, начатые в работах [2, 3].

Введенное понятие *дозагрузки* в контексте потокового управления рекреационными предприятиями является более точным вариантом термина *доводка*, введенного в логистике. Дозагрузка осуществляется из накопителя основного специфического ресурса.

Для оптимальной (с наибольшей прибыльностью) дозагрузки предприятий можно использовать оптимизационный подход. Прежде чем приступить к его изложению, рассмотрим диаграмму дозагрузки рекреационного предприятия, представленную на рис. 1.

Предполагается, что число мест в рекреационном предприятии фиксировано и равно n. В каждый дискретный момент времени $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, ..., t_0 + T - 1$ текущая плановая загрузка постоянна и равна n^*, а допустимая дозагрузка составляет величину $\Delta n = n - n^*$. Заказчик с номером j может занять k_j мест обслуживания

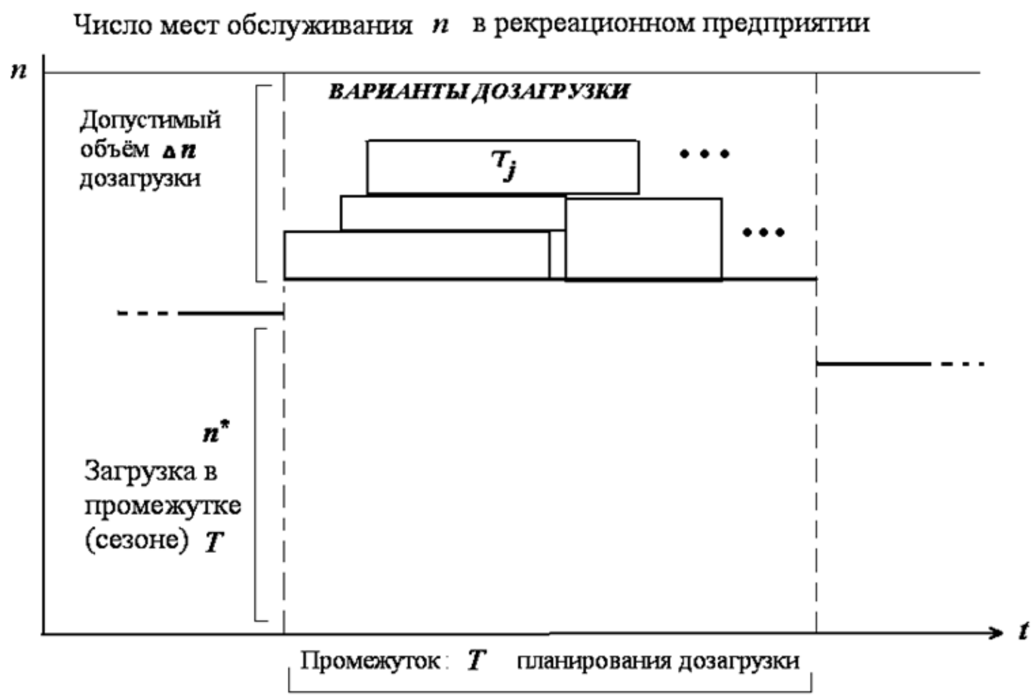

Рис. 1. *Диаграмма дозагрузки рекреационного предприятия*

в промежутке времени T (что соответствует высоте прямоугольника с пометкой τ_j на рис. 1) и пробыть в предприятии обслуживания τ_j подряд идущих единиц времени (что соответствует ширине этого прямоугольника на рис. 1). В геометрической интерпретации решаемая задача состоит в получении максимально плотной упаковки заданной прямоугольной области набором фиксированных прямоугольников с ограничениями на укладку, которые иллюстрируются рисунком 1.

В следующем разделе уточняются все используемые обозначения, необходимые для построения математической модели дозагрузки.

2. Построение модели

Введем следующие обозначения.

n — число мест обслуживания, которыми располагает рекреационное предприятие.

T — некоторый произвольно выбранный временной промежуток (сезон) планирования загрузки рекреационного предприятия; длина этого промежутка обозначается тем же символом T, так что промежуток может быть определён как множество единиц времени $1, 2, ..., t, ..., T$.

n^* — основная уже запланированная нагрузка (число мест) в рассматриваемом временном промежутке T.

$\Delta n = n - n^*$ — максимальный возможный объём дозагрузки рекреационного предприятия.

$C_1, ..., C_j, ..., C_m$ — дополнительные заказчики (потребители) рекреационных услуг, которые предполагают получить обслуживание в указанном временном промежутке T.

$\tau_j \geq 1$ — количество единиц неразрывного времени обслуживания в рекреационном предприятии, требуемого заказчику с номером j.

k_j — количество мест обслуживания, требуемых заказчику с номером j.

g_j — прибыль в единицу времени, получаемая рекреационным предприятием от обслуживания заказчика с номером j.

$t, ..., q, ..., t + \tau_j - 1$ — идущие подряд номера единиц времени, начинающиеся с номера t и в совокупности составляющие непрерывный промежуток обслуживания заказчика с номером j.

На диаграмме дозагрузки (рис. 1) отображается область, соответствующая промежутку планирования T. Внутри этой области прямоугольниками с высотой k_j и шириной τ_j обозначаются заказы, включаемые в обслуживание рекреационным предприятием в промежутке планирования. Суммарная высота таких прямоугольников определяет общий объём дозагрузки, который не должен превышать величину Δn.

Введем логические переменные

$$y_{t,j} = \begin{cases} 1, \text{если заказчик } c \text{ номером } j \text{ обслуживается в момент времени } t; \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$\bar{y}_{t,j} = 1 - y_{t,j}$ — обозначение инверсии логической переменой.

Целевая функция имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} g_j y_{t,j}.$$

В ней внутренняя сумма для каждого значения j выражает прибыль, которая может быть получена при полном выполнении заказа с номером j (если этот заказ в промежутке T не выполняется, то соответствующая внутренняя сумма равна нулю). Двойная сумма выражает полную *дополнительную прибыль* рекреационного предприятия за время работы T (временной отрезок планирования дозагрузки).

Поскольку речь идёт о дозагрузке предприятия и использовании данных из накопителя основного ресурса — потока рекреантов, — нужно учитывать возможность возникновения ситуаций, когда помимо основных внутренних ресурсов предприятия (и внешних природных рекреационных ресурсов) может понадобиться привлечение *дополнительных ресурсов*. Привлечение дополнительных ресурсов требует дополнительных затрат и реальной возможности получить эти ресурсы в планируемом промежутке времени, поэтому вводятся следующие величины.

$R_1, ..., R_r, ..., R_s$ — максимально возможные количества дополнительных привлекаемых ресурсов с номерами $1, ..., r, ..., s$ для обеспечения работы предприятия в течение всего периода T.

$\lambda_{r,j}$ — количество дополнительного ресурса с номером r, потребляемого в единицу времени при выполнении заказа с номером j.

Ограничения, необходимые для точного выполнения условий рекреационного обслуживания в промежутке времени T, могут быть условно разделены на две группы: ресурсные неравенства и логические условия размещения заказов.

a) Ограничения объема дозагрузки:

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \cdot y_{t,j} \leq \Delta n \text{ для всех } t \in 1, ..., T.$$

b) Ограничения по доступным объемам дополнительных ресурсов:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{r,j} \cdot y_{t,j} \leq R_r \text{ для всех } r \in 1, ..., s.$$

c) Логическое ограничение неразрывности обслуживания во времени каждого отдельного заказчика. Для записи этого ограничения следует учесть, что заказ j может либо вовсе не выполняться в промежутке T, либо, если он выполняется в промежутке T, то этот заказ должен "занимать"единственный неразрывный блок единиц времени длины τ_j в этом промежутке T.

Условие

$$\bigwedge_{t=1}^{T} \bar{y}_{t,j} = 1$$

равносильно тому, что заказ с номером j не будет выполняться в промежутке времени T.

Обозначим

$$U_t = \left(\bigwedge_{q=1}^{t-1} \bar{y}_{q,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t}^{t+\tau_j-1} y_{q,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t+\tau_j}^{T} \bar{y}_{q,j} \right).$$

$U_t = 1$ — условие, обеспечивающее неразрывность блока единиц времени длины τ_j в промежутке T, начиная с временного отсчёта t. Тогда условие

$$\left(\bigvee_{t=1}^{T-\tau_j+1} U_t \right) = 1$$

означает существование хотя бы одного блока из τ_j единиц времени в промежутке времени T .

Неравенства

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t,j} \le \tau_j \text{ для всех } j = 1, 2, ..., m$$

обеспечивают наличие в промежутке T не более одного такого блока для каждого заказа.

С учетом введенных обозначений, целевой функции и ограничений, модель оптимальной дозагрузки получает следующий окончательный вид:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} g_j y_{t,j}; \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} k_j \cdot y_{t,j} \le \Delta n \text{ для всех } t \in \{1, 2, ..., T\}; \tag{2}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{m} \lambda_{r,j} \cdot y_{t,j} \le R_r \text{ для всех } r \in \{1, ..., s\}; \tag{3}$$

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t,j} \le \tau_j \text{ для всех } j = 1, 2, ..., m \ ; \tag{4}$$

$$\left(\bigwedge_{t=1}^{T} \bar{y}_{t,j} \right) \vee \left(\bigvee_{t=1}^{T-\tau_j+1} \left(\left(\bigwedge_{q=1}^{t-1} \bar{y}_{q,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t}^{t+\tau_j-1} y_{q,j} \right) \wedge \left(\bigwedge_{q=t+\tau_j}^{T} \bar{y}_{q,j} \right) \right) \right) = 1 \quad \text{для всех } j = 1, 2, ..., m; \tag{5}$$

$$y_{t,j} \in \{0, 1\} \text{для всех } t \in \{1, ..., \tau_j\} \text{ и } j = 1, 2, ..., m. \tag{6}$$

Уточним использованное выше обозначение многоместной конъюнкции. Его следует понимать так:

$$\bigwedge_{q=\alpha}^{\beta} \bar{y}_{q,j} = \begin{cases} \bar{y}_{\alpha,j} \wedge \bar{y}_{\alpha+1,j} \wedge \cdots \wedge \bar{y}_{\beta+1,j}, & \text{если } \alpha \le \beta; \\ 1, & \text{если } \alpha > \beta. \end{cases}$$

Приведенное уточнение связано с тем, что при начальном шаге времени $t = T - \tau_j + 1$ размещение заказа с номером j возможно, поскольку от $t = T - \tau_j + 1$

до T включительно помещается ровно τ_j единиц времени, требуемых для размещения этого заказа. Поэтому при размещении заказа с произвольным номером j в самом конце промежутка T в уравнении (5) появляется выражение

$$\bigwedge_{q=T-\tau_j+1+\tau_j}^{T} \bar{y}_{q,j} = \bigwedge_{q=T+1}^{T} \bar{y}_{q,j} = \bigwedge_{q=\alpha}^{\beta} \bar{y}_{q,j} \text{ где } \alpha > \beta \; . \tag{7}$$

В таком случае свободных единиц времени после размещения заказа не остается, и соответствующих переменных с инверсиями нет. Поэтому конъюнкция (7) заменяется единицей.

Развернутое выражение в левой части уравнения (5) представляет собой дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) следующего вида:

$$\begin{gathered}\mathscr{D}_j(y_{1,j},\cdots,y_{T,j}) = \bar{y}_{1,j}\cdots\bar{y}_{T,j}\vee\\ y_{1,j}y_{2,j}\cdots y_{\tau_j,j}\bar{y}_{\tau_j+1,j}\cdots\bar{y}_{T,j}\vee\\ \bar{y}_{1,j}y_{2,j}\cdots y_{\tau_j+1,j}\bar{y}_{\tau_j+2,j}\cdots\bar{y}_{T,j}\vee\\ \bar{y}_{1,j}\bar{y}_{2,j}y_{3,j}\cdots y_{\tau_j+2,j}\bar{y}_{\tau_j+3,j}\cdots\bar{y}_{T,j}\vee\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot\\ \bar{y}_{1,j}\bar{y}_{2,j}\bar{y}_{3,j}\cdots\bar{y}_{T-\tau_j,j}y_{T-\tau_j+1,j}\cdots y_{T,j}\end{gathered}$$

В этой ДНФ содержится $T-\tau_j+2$ конъюнкций, и такая ДНФ входит в левую часть каждого из $j=1,...,m$ логических ограничений (5). Единичное покрытие

$$N_{\mathscr{D}_j} = \{\sigma_1,...,\sigma_T : \mathscr{D}_j(\sigma_1,...,\sigma_T = 1)\}$$

состоит из $T-\tau_j+2$ точек, соответствующих конъюнкциям из ограничений (5).

Рассмотрим любую пару конъюнкций из $\mathscr{D}_j(y_{1,j},\cdots,y_{T,j})$, не содержащую первую конъюнкцию этой ДНФ. Выберем из конъюнкций, входящих в пару, по одному литералу одной и той же переменной так, чтобы эти литералы были взаимоинверсны. Рис.2 поможет увидеть, что среди оставшихся литералов в этих двух конъюнкциях останется хотя бы одна пара взаимоинверсных литералов. Таким же свойством будет обладать любая пара различных конъюнкций, содержащая *первую* конъюнкцию из $\mathscr{D}_j(y_{1,j},\cdots,y_{T,j})$ при $\tau_j \geq 2$. Поэтому *для любой пары конъюнкций из* $\mathscr{D}_j(y_{1,j},\cdots,y_{T,j})$ *невозможно применение операций склеивания и обобщенного склеивания, приводящих к получению новой конъюнкции.*

Набор ограничений (5), который можно представить в виде $\mathscr{D}_j = 1,\ j = 1,...,m$, где $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_j(y_{1,j},\cdots,y_{T,j})$, можно заменить одним ограничением: $\mathscr{K} = \mathscr{D}_1 \wedge ... \wedge \mathscr{D}_j \wedge ... \wedge \mathscr{D}_m$.

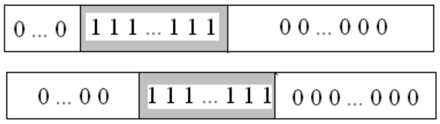

Рис. 2. Размещение положительных (1) и отрицательных (0) литералов в одной паре различных конъюнкций

Заметим, что в любой паре различных ДНФ $\mathscr{D}_j$ и $\mathscr{D}_k$, $1 \leq j < k \leq 1$ из конъюнктивной нормальной формы (КНФ) $\mathscr{K}$ содержатся разные переменные — по вторым индексам j и k. Следствием указанных свойств ДНФ, входящих в ограничения (5) являются следующие утверждения:

I^o ДНФ $\mathscr{D}_j = \mathscr{D}_j(y_{1,j}, \cdots, y_{T,j})$ *не может быть упрощена ни при каком* $j = 1, ..., m$.

II^o КНФ $\mathscr{K} = \mathscr{D}_1 \wedge ... \wedge \mathscr{D}_j \wedge ... \wedge \mathscr{D}_m$ *не может быть упрощена.*

III^o Для приведения КНФ $\mathscr{K}$ к ДНФ понадобится выполнить T^m логических умножений.

IV^o Являясь NP-трудной без ограничения (5), задача (1–6) остается не менее сложной при добавлении этого ограничения.

3. GREEDY алгоритм решения задачи

Построенная модель целочисленного 0-1 программирования содержит достаточно большое число переменных Например, при $T = 45$ дней и $m = 10$ дополнительных источниках дозагрузки будет использовано 450 переменных. При таких параметрах число вариантов размещения в промежутке T одного заказа длительностью 7 дней с учетом только одного ограничения (6) будет равно 39. Прямой перебор размещения десяти таких заказов оценивается сверху 39^{10} вариантами.

Задачи, соответствующие таким моделям, как показано выше, являются очень сложными с вычислительной точки зрения, и для их решения целесообразно применять приближенные, но имеющие существенно более низкую степень сложности чем точные, алгоритмы.

Для приближённого решения задачи оптимальной дозагрузки ниже предлагается алгоритм *АПОД 0.2* (Алгоритм *П*риближённой к *О*птимальной *Дозагрузки*) типа *GREEDY* [1].

Алгоритм АПОД 0.2

1° Выбрать временной промежуток (сезон) планирования.

2° По исходным величинам — числу мест рекреационного предприятия n и объёму основной загрузки n^* (с учётом прогноза) определить максимальную возможную дозагрузку в этом временном промежутке Δn.

3° Упорядочить возможные заказы из накопителя основного ресурса по невозрастанию ожидаемой прибыли, получаемой рекреационным предприятием в единицу времени. В случае равного значения ожидаемой прибыли первым ставится заказ большей продолжительности; если же и продолжительность одинакова — первым ставится любой из рассматриваемых заказов. Далее заказы из накопителя рассматриваются в порядке, полученном в результате указанной в этом пункте сортировки.

4° Обнулить специальный одномерный последовательный числовой массив — *маску использованных заказов*. Номера идущих подряд элементов маски должны соответствовать порядковым номерам заказов, полученным в результате проведенной в предыдущем пункте сортировки. По мере выполнения алгоритма, если заказ будет принят к обслуживанию, то соответствующий элемент маски должен устанавливаться в единицу.

Установить указатель текущего рассматриваемого заказа (далее — *указатель*) на первый элемент маски и положить $j = 1$. По мере выполнения алгоритма *указатель* может смещаться только вправо.

5° Обнулить значения решающих переменных $y_{t,j}$ для всех $t \in \{1, ..., T\}$ и $j = 1, 2, ..., m$.

Инициализировать массив суммарной дозагрузки $L(q) = 0, \;\; q = 1, ..., T$. В этом массиве хранится текущее (по шагам выполнения размещения заказов алгоритмом) суммарное количество дополнительных занятых мест в рекреационном предприятии.

6° Просматривая элементы маски подряд слева направо и перемещая при этом *указатель* из текущего положения вправо, найти первый ноль и зафиксировать *указатель* в позиции j, соответствующий найденному нулевому разряду маски (если ни одного нуля при таком просмотре не встретится или указатель пройдет все элементы маски, то перейти на 9°, поскольку в таком случае все заказы из накопителя основного ресурса, для которых выполнены все ограничения, размещены). Номер j определяет текущий заказ, который алгоритм будет пытаться разместить, не нарушая ограничения.

7° Выполнить цикл проверки возможности размещения заказа по всем единицам времени, начиная с $t = 1, 2, ..., (T - \tau_j + 1)$ (дням) промежутка планирования. Положить $t^* = t$; $L_{min} = 2\Delta$. Установить флажок размещения заказа в ноль: $Flag := 0$.

Начало цикла по t.

Проверяются только ограничения (2) и (3), которые должны удовлетворяться при назначении единиц переменным $y_{q,j}$, $q = t, t+1, ..., t+\tau_j - 1$, где τ_j — необходимое для выполнения рассматриваемого заказа время.

Если указанные ограничения удовлетворяются, то $Flag := 1$ (заказ размещается), и при выполнении условия $L(q) < L_{min}$ выполнить: $L_{min} := L(q)$ и $t^* = t$ для вычисления точки "наилучшего" (это — эвристический элемент алгоритма) начального размещения заказа.

Конец цикла по t.

Если $Flag = 1$, то найденное значение t^* определяет начальную точку времени размещения заказа с номером j. Тогда вполнить следующее:

Учесть дополнительную загрузку за счет включаемого в обслуживание заказа j

$$L(q) := L(q) + k_j,\ q = t^*, t^* + 1, ..., t^* + \tau_j - 1$$

и установить *элемент маски с номером* j *в единицу, а переменным* $y_{q,j}$, $q = t^*, t^* + 1, ..., t^* + \tau_j - 1$, *окончательно присвоить единичные значения*;

в противном случае, если $Flag = 0$, эти переменные и j-й разряд маски остаются нулевыми, а указатель сдвигается на одну позицию вправо.

8° Перейти на 6°.

9° Алгоритм *АПОД 0.2* завершен. Результатом его работы являются значения переменных $y_{t,j}$,$t = 1, ..., T$, $j = 1, .., m$, которые и определяют план дозагрузки. Номера принятых к размещению заказов определяются единичными разрядами маски.

Заключение

В статье предложены математическая модель оптимальной дозагрузки рекреационного предприятия для сезонов с низкой интенсивностью спроса и алгоритм *АПОД 0.2* решения определяемой этой моделью задачи. *АПОД 0.2* основан на идее построения алгоритмов типа *GREEDY* с привлечением эвристик, способствующих получение приближенного решения, близкого к оптимальному. Предложенная модель может использоваться и в других проблемных областях, где требуется находить оптимальное динамическое размещение объектов или действий. Направление дальнейшей работы связано с совершенствованием алгоритма *АПОД 0.2* с целью повышения его точности.

Список литературы

1. *Garey M. R.* Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness / Michael R. Garey, David S. Johnson. — NY.: W. H. Freeman & Co., 1979. — 340 p.

2. *Донской Д. В.* Планирование и оптимизация рекреационных предприятий на основе анализа и прогнозирования потоков рекреантов / Д. В. Донской // Економічний простір, 2009. — №22/1. — С. 278 — 286.

Donskoy D. V. Recreation enterprises optimal planning based on customers flow prediction / *Economic space (Ukraine)*, 2009, 22/1, pp. 278–286.

3. *Донской Д. В.* Планирование сезонной дозагрузки рекреационных предприятий / Д. В. Донской // Экономика: вопросы теории и практики, 2009. — Т. 6. — Вып. 7. — С. 1496–1504.

   Donskoy D. V. Planning of season additional loading of recreation enterprises / *Economics: Theory and Practice (Ukraine)*, 2009, **6**, 7, pp. 1496–1504.

4. *Щербина О. А.* Оптимизация рекреационной деятельности / М. Я.|;Лемешев, О. А. Щербина. — М.: Экономика, 1986. — 160 с.

   Lemeshev M. J. and Shcherbina O. A. *Recreation business optimization.* 1986. Moscow: Economics.

5. *Law R.* Data Mining in Tourism Demand Analysis: A Retrospective Analysis / R. Law, H. Mok, C. Goh // Lecture Notes in Computer Science, 2007. — Vol. 4632. — P. 508–515.

6. *Mason P.* Local Planning for Recreation and Tourism: A Case Study of Mountain Biking from New Zealand's Manawatu Region / P. Mason, S. Leberman // Journal of Sustainable Tourism, 2000. — Vol. 8.— No. 2. — P. 97–115.

Статья поступила в редакцию 04.06.2014