УДК 517.95

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

© Т. К. Юлдашев, К. Х. Шабадиков

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева
Институт информатики и телекоммуникации
пр-т Красноярский рабочий, 31, г. Красноярск, 660014, Россия
Ферганский государственный университет им. Улугбека
Физико-математический факультет
ул. Мураббийлар, 19, г. Фергана, 150100, Узбекистан
e-mail: *tursunbay@rambler.ru, konak.shabadikov@mail.ru*

The inverse problem for the hyperbolic Fredholm integro-differential equations.

Yuldashev T. K. & Shabadikov K. H.

Abstract. It is studied one value solvability of nonlinear inverse problem for hyperbolic Fredholm integro-differential equation. It is used the method of integral transformation and the method of successive approximation.

Постановка задачи

В бесконечной полосе $\Omega \equiv \Omega_T \times \Re$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \int\limits_0^T K(t,s) \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} ds + f(t,x,\sigma(t)) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ u_t(0,x) = \varphi_2(x),\ x \in \Re, \tag{2}$$

$$u(t,0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)t + N_1 \int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s) f(s,0,\sigma(s))ds, \tag{3}$$

$$u_x(t,0) = \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0)t + N_2 \int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s) f_x(s,0,\sigma(s))ds \tag{4}$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x_0) = \psi(t),\ t \in \Omega_T,\ x_0 \neq 0, \tag{5}$$

$$\sigma(0) = \sigma_0 = const \neq 0, \tag{6}$$

где $f(t,x,\sigma(t)) \in C^{0,2,0}(\Omega \times \Omega_T)$, $\varphi_i(x) \in C^2(\Re)$, $K(t,s) = a(t) \cdot b(s)$, $a(t), b(s) \in C(\Omega_T)$, $\sigma(t)$ — восстанавливаемая функция, N_i — заданные постоянные, $i = 1, 2$, $\Omega_T \equiv [0, T]$, $0 < T < \infty$, $\Re \equiv (-\infty, \infty)$.

Отметим, что изучению дифференциальных уравнений гиперболического типа посвящено много работ. Но, изучению интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа посвящено сравнительно мало. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенностей в вопросе однозначной разрешимости [1], [2]. Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти, например в [3]–[5].

В настоящей работе изучается обратная задача, где восстанавливаемая функция $\sigma(t)$ нелинейно входит в уравнение. Задание условия (6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке $t = 0$.

Основная идея, на которой основан развиваемый в данной работе подход, состоит в том, что *при решении обратной задачи относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое при условии (6) с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода.*

Определение 1. Решением обратной задачи (1)–(6) называется пара функций $\left\{u(t,x) \in C^{2,2}(\Omega), \sigma(t) \in C(\Omega_T)\right\}$, удовлетворяющая уравнению (1) и условиям (2)–(6).

1. Начальная задача (1)–(4)

Используется метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. При помощи обозначения

$$c(x) = \int_0^T b(s) \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} ds \tag{7}$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a(t)c(x) + f(t,x,\sigma(t)).$$

С учетом условия (2) двукратное интегрирование последнего равенства по t дает

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + c(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f(s,x,\sigma(s))ds. \qquad (8)$$

Дифференцируем (8) два раза по x:

$$u_x(t,x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x)t + c'(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f_x(s,x,\sigma(s))ds, \qquad (9)$$

$$u_{xx}(t,x) = \varphi_1''(x) + \varphi_2''(x)t + c''(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f_{xx}(s,x,\sigma(s))ds. \qquad (10)$$

Подставляя (10) в (7), имеем

$$c(x) = \int\limits_0^T b(s)\Big[\varphi_1''(x) + \varphi_2''(x)s +$$

$$+c''(x)\int\limits_0^s (s-\theta)a(\theta)d\theta + \int\limits_0^s (s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta\Big]ds. \qquad (11)$$

Пусть

$$A = \int\limits_0^T b(s)q(s)ds > 0, \qquad (12)$$

где $q(t) = \int\limits_0^t (t-s)a(s)ds$.

Тогда для определения $c(x)$ в (7) получаем из (11) следующее дифференциальное уравнение

$$c''(x) - Bc(x) = F(x), \qquad (13)$$

где

$$B = A^{-1},$$

$$F(x) = -BF_0(x),$$

$$F_0(x) = \int\limits_0^T b(s)\Big[\varphi_1''(x) + \varphi_2''(x)s\Big]ds + \int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta ds.$$

Решая дифференциальное уравнение (13) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c(x) = D_1 \operatorname{ch} \nu x + D_2 \operatorname{sh} \nu x + \frac{1}{\nu} \int\limits_0^x F(y) Q(x,y) dy, \tag{14}$$

где $Q(x,y) = \operatorname{sh} \nu(x+y) + \operatorname{sh} \nu(x-y)$, $\nu = \sqrt{B}$, коэффициенты D_i подлежат определению, $i = 1, 2$.

Из (14) имеем

$$c(0) = D_1,\ c'(0) = \nu D_2. \tag{15}$$

С учетом (15) из (8) и (9) получаем, что

$$u(t,0) = \varphi_1(0) + \varphi_2(0)t + D_1 \int\limits_0^t (t-s) a(s) ds + \int\limits_0^t (t-s) f(s,0,\sigma(s)) ds, \tag{16}$$

$$u_x(t,0) = \varphi_1'(0) + \varphi_2'(0)t + \nu D_2 \int\limits_0^t (t-s) a(s) ds + \int\limits_0^t (t-s) f(s,0,\sigma(s)) ds. \tag{17}$$

Сравнение соотношений (16) и (17) с заданными условиями (3) и (4) дает

$$D_1 = N_1,\ D_2 = \frac{N_2}{\nu},$$

т.е. (14) принимает вид

$$c(x) = N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x + \frac{1}{\nu} \int\limits_0^x F(y) Q(x,y) dy. \tag{18}$$

Подстановка (18) в (8) дает

$$u(t,x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)t + \int\limits_0^t (t-s) f(s,x,\sigma(s)) ds +$$

$$+ q(t) \Big\{ N_1 \operatorname{ch} \nu x + \frac{N_2}{\nu} \operatorname{sh} \nu x - \nu \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^x Q(x,y) \Big[\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y) s \Big] ds dy -$$

$$- \nu \int\limits_0^x Q(x,y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta, y, \sigma(\theta)) d\theta ds dy \Big\}. \tag{19}$$

2. Восстанавливаемая функция

В силу условия (5), из (19) получаем

$$\int\limits_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds =$$

$$= \nu q(t)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy + g(t), \tag{20}$$

где

$$g(t) = \psi(t) - \varphi_1(x_0) + \varphi_2(x_0)t - q(t)\Big[N_1 \operatorname{ch}\nu x_0 + \frac{N_2}{\nu}\operatorname{sh}\nu x_0 -$$

$$-\nu\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\Big(\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y)s\Big)ds dy\Big].$$

Нелинейное интегральное уравнение первого рода (20) при начальном условии (6)эквивалентно следующему интегральному уравнению второго рода (см., напр. [6]–[8]):

$$\sigma(t) = \Big[\sigma(t) + \int\limits_0^t G(s)\sigma(s)ds - \int\limits_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds +$$

$$+\nu q(t)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy + g(t)\Big]e^{-\mu(t)} +$$

$$+\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}\Big[\sigma(t) - \sigma(s) + \int\limits_0^t G(s)\sigma(s)ds - \int\limits_0^s G(\theta)\sigma(\theta)d\theta -$$

$$-\int\limits_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds + \int\limits_0^s (s-\theta)f(\theta,x_0,\sigma(\theta))d\theta +$$

$$+\nu q(t)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy -$$

$$-\nu q(s)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(\theta)\int\limits_0^\theta (\theta-\xi)f_{yy}(\xi,y,\sigma(\xi))d\xi d\theta dy + g(t) - g(s)\Big]ds, \tag{21}$$

где $\mu(t)=\int\limits_0^t G(s)ds>0$ такая, что

$$e^{-\mu(t)}\ll 1;\ 2\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}ds\ll 1.$$

Для произвольной непрерывной функции $h(t)$ в области Ω_T норму вводим следующим образом:

$$\|h(t)\|=\max\left\{|h(t)|:t\in\Omega_T\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\max\left\{|g(t)|:t\in\Omega_T\right\}\le\delta<\infty$*;*
2. $\max\left\{|f(t,x,\sigma(t))|;\ |f_{xx}(t,x,\sigma(t))|\right\}\le\Delta<\infty$*;*
3. $f(t,x,\sigma)\in Lip\{L_{1|\sigma}\}$*,* $0<L_1=const<\infty$*;*
4. $f_{xx}(t,x,\sigma)\in Lip\{L_{2|\sigma}\}$*,* $0<L_2=const<\infty$*;*
5. $\rho=\left[1+\mu_0+L_1\frac{T^2}{2}+\nu q_0L_2\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T\frac{s^2}{2}b(s)dsdy\right]P(T)<1,$
где
$$\mu_0=\max\left\{\mu(t):t\in\Omega_T\right\},\ q_0=\max\left\{|q(t)|:t\in\Omega_T\right\},$$
$$P(t)=e^{-\mu(t)}+2\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}ds.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение (21) имеет единственное решение на отрезке Ω_T*.*

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\sigma_0(t)=0,\ \sigma_1(t)=\Big[-\int\limits_0^t(t-s)f(s,x_0,0)ds+$$

$$+\nu q(t)\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s(s-\theta)f_{yy}(\theta,y,0)d\theta dsdy+g(t)\Big]e^{-\mu(t)}+$$

$$+\int\limits_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}\Big[-\int\limits_0^t(t-s)f(s,x_0,0)ds+\int\limits_0^s(s-\theta)f(\theta,x_0,0)d\theta+$$

$$+\nu q(t)\int\limits_0^{x_0}Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s(s-\theta)f_{yy}(\theta,y,0)d\theta dsdy-$$

$$-\nu q(s)\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T b(\theta)\int\limits_0^\theta (\theta-\xi) f_{yy}(\xi,y,0)d\xi d\theta dy + g(t)-g(s)\Big]ds, \tag{22}$$

$$\sigma_k(t)=\Theta(t;\sigma_{k-1}),\ k=2,3,4,\ \dots\ . \tag{23}$$

В силу условий теоремы, из последовательных приближений (22) и (23) получаем

$$\|\sigma_1(t)-\sigma_0(t)\| \le \Big[\Delta\frac{T^2}{2}+\nu q_0\Delta\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T \frac{s^2}{2} b(s)dsdy+\delta\Big]P(T), \tag{24}$$

где $\delta=\max\big\{|g(t)| : t\in\Omega_T\big\}$;

$$\|\sigma_k(t)-\sigma_{k-1}(t)\| \le \Big[1+\mu_0+L_1\frac{T^2}{2}+\nu q_0 L_2\int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y)\int\limits_0^T \frac{s^2}{2} b(s)dsdy\Big]\times$$

$$\times P(T)\|\sigma_{k-1}(t)-\sigma_{k-1}(t)\|. \tag{25}$$

Из оценок (24) и (25) следует, что оператор в правой части (21) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (21) имеет единственное решение на отрезке Ω_T. □

3. Разрешимость начальной задачи (1) – (4) и основная теорема

Теорема 2. *Пусть:*

1. *Выполняются условия теоремы 1 и условие (12);*
2. $\max\big\{|\varphi_i(x)|\big\}<\infty,\ i=1,2;$
3. $\Big|\int\limits_0^x Q(x,y)\Big(\varphi_1''(y)+\varphi_2''(y)s\Big)dy\Big|<\infty;$
4. $\Big|\int\limits_0^x Q(x,y)f_{yy}(t,y,\sigma(t))dy\Big|<\infty.$

Тогда в области Ω *существует единственное решение начальной задачи (1)–(4).*

Доказательство теоремы 2 следует из того, что подставляя в (19) решение интегрального уравнения (21), получаем искомую функцию $u(t,x)$.

Из справедливости приведенных выше двух теорем следует, что справедлива

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда существует единственная пара решений* $\big\{u(t,x)\in C^{2,2}(\Omega),\sigma(t)\in C(\Omega_T)\big\}$ *задачи (1)–(6).*

Заключение

Изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. При решении обратной задачи относительно восстанавливаемой функции получается нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое с помощью неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода. Поскольку восстанавливаемая функция нелинейно входит в уравнение, задание начального условия (6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке.

Список литературы

1. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. — Фрунзе: Изд-во Кирг. ГУ, 1957. — 328 с.

   Bykov, Ya. V. 1957. *On some problems of the theory of integro-differential equations.* Frunze, Kyrgyzstan: KyrSU Press.

2. *Иманалиев М.* Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе: Илим, 1974. — 352 с.

   Yimanaliyev, M. 1974. *Vibrations and stability of solutions of singularly perturbed integro-differential systems.* Frunze, Kyrgyzstan: Ilim.

3. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: МГУ, 1994. — 285 с.

   Denisov, A. M. 1994. *Introduction to the theory of inverse problems.* Moscow: MSU.

4. *Романов В. Г.* Обратные задачи для математической физики. — М.: Наука, 1984. — 264 с.

   Romanov, V. G. 1984. T*he mathematical physics inverse problems.* Moscow: Nauka.

5. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Линейные операторы и некорректные задачи. — М.: Наука, 1999. — 330 с.

   Lavrentiev, M. M. and Saveliev, L. Ya. 1999. *Linear operators and incorrectly posed problems.* Moscow: Nauka.

6. *Юлдашев Т. К.* Об обратной задаче для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка // Вестник ТомГУ. Математика и Механика. — 2012. — Том 14. — № 2. — С. 56–62.

   Yuldashev, T. K. 2012. On the inverse problem for a quasilinear first order partial differential equations. *Vestnik TomSU. Mathematics and Mechanics*, 14 (2), pp. 56–62.

7. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. — 2012. — Том 28. — № 3. — С. 17–29.

Yuldashev, T. K. 2012. The inverse problem for the nonlinear high order pseudoparabolic operator equation. Vestnik SamSTU. Physics and Mathematics Series, 28 (3), pp. 17–29.

8. *Юлдашев Т. К.* Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени // Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. — 2013. — Том 5. - № 1. — С. 69–75.

   Yuldashev, T. K. 2013. The inverse problem for the nonlinear high order hyperbolic operator integrodifferential equation. Vestnik YuzhnoUralSU. Mathematics. Mechanics. Physics., 5 (1), pp. 69–75.

Статья поступила в редакцию 07.10.2013