УДК 517

СВЕРТКА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

© Е. А. Павлов

Крымский инженерно-педагогический университет
факультет информатики
Севастопольская, 21, пер. Учебный, 8, г. Симферополь, 295015
e-mail: *pavlov-oe@bk.ru*

Convolution of symmetric spaces.

Pavlov E. A.

Abstract. In this article we discuss a problem of finding the most restricted Marcinkiewicz space that containing a convolution of given Marcinkiewicz spaces.

Введение

Классическое неравенство Юнга (см. [2]) на языке теорем вложения означает вложение

$$\mathscr{L}_p * \mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_r, \tag{1}$$

где $1/p + 1/q = 1 + 1/r, \quad p,\, q,\, r \geq 1$.

Из результата О'Нейла (см. [2]) следует вложение

$$\mathscr{L}_p * \mathscr{L}_q \subset \mathscr{L}_{r,s}, \tag{2}$$

где

$$1/p + 1/q = 1 + 1/r; \quad 1/p + 1/q \geq 1/s; \quad s \geq 1.$$

Справедливо вложение (см. [1], [2])

$$\mathscr{L}_{r,s} \subset \mathscr{L}_r.$$

Таким образом, вложение (2) является более "сильным", чем вложение (1). Возникает задача нахождения самого "узкого" банахова пространства, в которое вложено множество $\mathscr{L}_p * \mathscr{L}_q$, которое, вообще говоря, не является линейным многообразием.

Целью данной работы является определение свертки симметричных банаховых пространств измеримых функций.

Основные определения

Определение 1. Функциональное банахово пространство на полуоси $(0,+\infty)$ с мерой Лебега называется симметричным, если:

1) из того, что $y \in E$ и $|x(t)| \le |y(t)|$ почти всюду на $(0,+\infty)$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$;
2) из того, что $y \in E$ и функция $|x(t)|$ равноизмерима с функцией $|y(t)|$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Определение 2. Пусть $\psi(t)$ — квазивогнутая функция на $(0,+\infty)$. Пространством Марцинкевича M_ψ называется множество измеримых функций f таких, что

$$\sup_{0<h<\infty} \frac{1}{\psi(h)} \int_0^h f^*(s)ds < \infty, \tag{3}$$

где $f^*(s)$ — перестановка (см. [1], [2]) функции $|f(s)|$.

Определение 3. Фундаментальной функцией симметричного пространства E называется функция

$$\varphi_E(t) = \|\chi_{0,t}(s)\|_E.$$

Определение 4. Пусть $\varphi(t)$ — квазивогнутая функция на $(0,+\infty)$. Пространством Лоренца Λ_φ называется множество функций $y(t)$ таких, что

$$\int_0^\infty y^*(t)d\varphi(t) < \infty,$$

где $y^*(t)$ — перестановка (см. [2]) функции $|y(t)|$.

Предложение 1. (Обобщенное неравенство Минковского). Справедливо неравенство

$$\left\| \int_\Omega F(s,t)ds \right\|_{E^{11}} \le \int_\Omega \|F(s,t)\|_E ds,$$

где $E^{11} = (E^1)^1$, где E^1 — ассоциировано с E пространство.

Предложение 2. Из соотношения $E_1 * E_2 \subset E_3$ следует неравенство

$$t \cdot \varphi_{E_3}(t) \le c \cdot \varphi_{E_1}(t) \cdot \varphi_{E_2}(t).$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – квазивогнутые функции, определенные на $(0,+\infty)$ (см. [2]) и обладающие свойствами:*

1) $\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)/t$– *квазивогнута на* $(0,+\infty)$,
2) $\gamma_{\varphi_1}+\gamma_{\varphi_2}>1$.

Тогда для того, чтобы выполнялось соотношение

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}\subset M_{\varphi_3^*},$$

где $\psi^*(t)=t/\psi(t)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$t\cdot\varphi_3(t)\le c\cdot\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t).$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.1 (см. [4]).
Достаточность. Известно (см. [4], [5]) классическое неравенство О'Нейла

$$(f*g)^{**}(t)\le t\cdot f^{**}(t)g^{**}(t)+\int\limits_0^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds. \tag{4}$$

Далее получаем

$$(f*g)^{**}(t)\cdot\varphi_3(t)\le c\cdot(f*g)^{**}(t)\frac{\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)}{t}.$$

Пользуясь неравенством О'Нейла, получаем

$$(f*g)^{**}(t)\cdot\varphi_3(t)\le$$

$$\le c\left[f^{**}(t)\varphi_1(t)\cdot g^{**}(t)\varphi_2(t)+\frac{\varphi_1(t)\cdot\varphi_2(t)}{t}\cdot\int\limits_t^{\infty} f^*(s)g^*(s)ds\right]\le$$

$$\le c\left[\|f\|_{M_{\varphi_1^*}}\cdot\|g\|_{M_{\varphi_2^*}}+\int\limits_t^{\infty} f^{**}(t\cdot\tau)\varphi_1(t)\cdot g^{**}(t\cdot\tau)\varphi_2(t)d\tau\right]\le$$

$$\le c\left[\|f\|_{M_{\varphi_1^*}}\cdot\|g\|_{M_{\varphi_2^*}}+\int\limits_t^{\infty}\|f(t\cdot\tau)\|_{M_{\varphi_1^*}}\|g(t\cdot\tau)\|_{M_{\varphi_2^*}}d\tau\right]\le$$

$$\le c\left[\|f\|_{M_{\varphi_1^*}}\cdot\|g\|_{M_{\varphi_2^*}}\left(1+\int\limits_t^{\infty} M_{\varphi_1^*}\left(\frac{1}{\tau}\right)M_{\varphi_2^*}\left(\frac{1}{\tau}\right)d\tau\right)\right]. \tag{5}$$

Покажем конечность интеграла в правой части неравенства (5).
Из свойств полумультипликативных функций (см. [1]) получаем неравенства

$$M_{\varphi_1^*}\left(\frac{1}{\tau}\right) \leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma_{\varphi_1}-\varepsilon}, \tag{6}$$

$$M_{\varphi_2^*}\left(\frac{1}{\tau}\right) \leq \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\gamma_{\varphi_2}-\varepsilon}, \tag{7}$$

для достаточно больших $\tau > N$.

Неравенства (6) и (7) равносильны неравенствам

$$M_{\varphi_1}\left(\frac{1}{\tau}\right) \leq \tau^{\varepsilon-\gamma_{\varphi_1}},$$

$$M_{\varphi_2}\left(\frac{1}{\tau}\right) \leq \tau^{\varepsilon-\gamma_{\varphi_2}},$$

для достаточно больших $\tau > N$.
Следовательно, справедливо неравенство

$$M_{\varphi_1}\left(\frac{1}{\tau}\right) M_{\varphi_2}\left(\frac{1}{\tau}\right) \leq \tau^{2\varepsilon-\gamma_{\varphi_1}-\gamma_{\varphi_2}}$$

для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и достаточно больших $\tau > N$.

Далее, с учетом условия $\gamma_{\varphi_1} + \gamma_{\varphi_2} > 1$, получаем

$$\int\limits_N^\infty \tau^{2\varepsilon-\gamma_{\varphi_1}-\gamma_{\varphi_2}} d\tau = \tau^{2\varepsilon+1-\gamma_{\varphi_1}-\gamma_{\varphi_2}} \mid_N^\infty = A < \infty. \tag{8}$$

Наконец, учитывая неравенство (8), получаем конечность интеграла в правой части неравенства (5). Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть $M_{\varphi_1^*}$ и $M_{\varphi_2^*}$ – пространства Марцинкевича, где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – квазивогнутые функции, определенные на $(0, +\infty)$. Пространство Марцинкевича $M_{\varphi_3^*}$ является самым "узким" из всех пространств Марцинкевича, где $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)/t$, в которое вложено множество $M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}$, если $\gamma_{\varphi_1} + \gamma_{\varphi_2} > 1$.*

Доказательство. Пусть имеет место вложение

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subset M_{\psi^*}. \tag{9}$$

Тогда из теоремы 3.1 (см. [4]) следует неравенство

$$t \cdot \psi(t) \leq c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t), \tag{10}$$

которое равносильно неравенству

$$\psi(t) \leq c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)/t.$$

Как и в теореме 1 обозначим

$$\varphi_3(t) = c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)/t.$$

Из соотношений (9) и (10) получаем неравенство

$$\psi(t) \leq c \cdot \varphi_3(t).$$

Следовательно, (см. [1]) имеет место вложение

$$M_{\varphi_3^*(t)} \subseteq M_{\psi^*(t)}.$$

Далее, с учетом вложения

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subseteq M_{\varphi_3^*},$$

получаем утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Определение 5. Сверткой двух симметричных пространств E_1 и E_2 называется самое «узкое» симметричное пространство, содержащее множество $E_1 * E_2$.

Замечание 1. Если рассмотреть только класс пространств Марцинкевича, то как следует из теоремы 2, сверткой пространств Марцинкевича $M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}$ в классе пространств Марцинкевича является пространство Марцинкевича $M_{\varphi_3^*}$ при дополнительных условиях:

1) $\varphi_3(t)$ – квазивогнута на $(0, +\infty)$,

2) $\gamma_{\varphi_1} + \gamma_{\varphi_2} > 1$.

Вопрос о самом «узком» симметричном (не только пространстве Марцинкевича) пространстве E, содержащем множество $M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*}$ остается открытым. На основании теоремы 3.1 (см. [4]) можно лишь утверждать, что фундаментальная функция пространства E удовлетворяет неравенству

$$\varphi_E(t) \leq c \cdot \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)/t.$$

Учитывая теорему 2, можно лишь утверждать, что справедливо вложение

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subseteq M_{\varphi_E^*}. \tag{11}$$

Вложение (11) еще не гарантирует справедливости вложения

$$M_{\varphi_1^*} * M_{\varphi_2^*} \subset E,$$

так как (см. [1]) имеет место вложение

$$E \subset M_{\varphi_E^*}.$$

Заключение

Таким образом, в данной работе в классе пространств Марцинкевича найдено самое «узкое» пространство, содержащее свертку двух фиксированных пространств Марцинкевича.

Список литературы

1. Функциональный анализ / Под общей ред. С. Г. Крейна, М.: Наука. — 1972.

   Functional Analysis. 1972. Under Krain, S. G. general edition. Moscow: Nauka.

2. Крейн С. Г. Интерполяция линейных операторов / С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов. — М: Наука. — 1978.

   Krain, S. G., Petunin, Yu. I. and Semenov, E. M. 1978. Interpolation of Linear Operators. Moscow: Nauka.

3. Павлов Е.А. Операция свертки и операторы типа свертки в банаховых функциональных пространствах / Е. А. Павлов. — Диссертация доктора физико-математических наук, Луганск, 1992.

   Pavlov, E. A. 1992. Convolution operation and convolution type operators in Banach function spaces. Dissertation of the doctor of physical and mathematical sciences. Lugansk, Ukraine.

4. Павлов Е. А. О свертках функций из симметричных пространств / Е. А. Павлов // Доклады АН Украины. — 1993. — Т. 23, № 12. — С. 15–29.

   Pavlov, E. A. 1993. The convolutions of functions from symmetric spaces. Reports of the Academy of Sciences of Ukraine, 23 (12), pp. 15–29.

5. Павлов Е. А. Об операции свертки в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Математические заметки. — 1993. — Т. 6, Вып. 2. — С. 257–258.

   Pavlov, E. A. 1993. About the convolution operation in symmetric spaces. Matematicheskiye Zametki, 6 (2), pp. 257–258.

6. Павлов Е. А. Об операторе свертки в симметричных пространствах / Е. А. Павлов // Успехи математических наук. — 1976. — Т. 31, № 1(187). — С. 36–40.

   Pavlov, E. A. 1993. About the convolution operator in symmetric spaces. Advances of Mathematical Sciences, 31 (1), pp. 36–40.

Статья поступила в редакцию 14.01.2014