УДК 519.83

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КОМБІНАТОРНИХ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ІГРОВОГО ТИПУ

© О. В. Ольховська

Полтавський університет економіки і торгівлі
вул. Коваля, 3, м. Полтава, 36014, Україна
e-mail: *lena@olhovsky.name*

The estimate of the convergence rate of the iterative method for solving combinatorial optimization problems of the gaming type.

Olkhovskaja E. V.

Abstract. Combinatorial optimization problems of the gaming type in which combinatorial restrictions are imposed on the strategies of the players are an important class of combinatorial optimization problems. For solving this class of problems iterative methods were previously developed such as game-playing and those similar to the method of Brown - Robinson in matrix games . These methods are implemented in software. Numerical experiments conducted on it show that the iterative algorithm is convergent. It's also proved through theoretical study of convergence. The purpose of this publication is to define the a priori estimate of the convergence rate of the iterative method for solving combinatorial optimization problems of the gaming type with restrictions and permutations on the strategy of one player, as well as to spread this estimate on problems of the same class with other combinatorial restrictions. Using the developed software implementation, the theoretical estimate of the convergence rate of the method was compared to the results obtained experimentally. According to the results, the theoretical estimate of the rate of convergence was confirmed experimentally. In particular, the problems with a square matrix of order A that is equal to 10, it was found that the rate of convergence does not exceed its theoretical estimate at the 5th iteration already. This article examines the proof of convergence, the estimate of the convergence rate of the iterative method for solving combinatorial optimization problems with restrictions and permutations that are imposed on the strategies of one player. Since combinatorial restrictions on strategies of players can be represented as different combinatorial sets, we carried out a synthesis of the estimate of the convergence rate of iterative methods for solving combinatorial optimization problems of the gaming type with different types of combinatorial restrictions.

Вступ

У роботах [1-9] введено до розгляду новий клас задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу у яких на стратегії гравців накладаються комбінаторні обмеження.

Даний клас задач є актуальним та певним реальні задачі конкуренції виробників [3]. Для розв'язування даного класу задач розроблено ітераційні методи, які є розігруванням гри та подібні до методу Брауна-Робінсон в матричних іграх. Розроблені методи реалізовані у програмному комплексі. Числові експерименти проведені за його допомогою показують, що ітераційний алгоритм показав має збіжність по ціні гри. Метою даної публікації є визначення апріорної оцінки швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з обмеженнями–переставленнями на стратегії одного гравця, а також поширення цієї оцінки на задачі даного класу з іншими комбінаторними обмеженнями.

Постановка задачі комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях

Розглянемо задачу комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях [5]. Введемо позначення. Нехай P_i^x — елемент мультимножини $P^x = \{P_1^x, P_2^x, ..., P_m^x\}$, що складається з m дійсних чисел, серед яких v різних. Позначимо її основу $S\left(P^x\right)$, а первинну специфікацію – $[P^x] = (\eta_1, ..., \eta_v)$. Нехай $0 \leq P_i^x \leq 1$, $i \in J_m = \{1, 2, ..., m\}$, $\sum\limits_{i=1}^{m} P_i^x = 1$. Тут і далі J_m — множина m перших натуральних чисел. Позначимо $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — вектор-переставлення, елемент x_i — ймовірність застосування стратегії i — належить P^x,$x^i \in P^x$, а сам вектор належить множині $E_{m\nu}\left(P^x\right)$ m-переставлень з елементів мультимножини P^x, тобто $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_{m\nu}\left(P^x\right)$. Очевидно, що $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1$.

Гра полягає в тому, що перший гравець вибирає стратегію-вектор $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E_{mv}\left(P^x\right)$, а другий вибирає стратегію-число $j \in J_n$; і при цьому перший гравець платить другому платежі $a'_{1j}, ..., a'_{mj}$ з ймовірностями $x_1, ..., x_m$ відповідно, де a'_{ij} — задані дійсні числа $\forall i \in J_m \forall j \in J_n$.

Якщо при реалізації гри виконується рівність $\max\limits_{j \in J_n} \min\limits_{X_i \in E_{mv}(P^x)} a_{ij} = \min\limits_{X_i \in E_{mv}(P^x)} \max\limits_{j \in J_n} a_{ij} = v$, то досягаються оптимальні стратегіями першого та другого гравців відповідно та ціна гри, якщо ж ні то ставиться задача пошуку мішаних стратегій.

Для пошуку розв'язку гри введемо поняття мішаних стратегії для такої гри. Позначимо $S_k = \left\{ p = (p_1, p_2, ..., p_k), \ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1, \ p_i \geq 0 \right\}$; $S_n = \left\{ q = (q_1, \ ..., \ q_n), \ \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1, \ \ q_j \geq 0 \ \ \right\}$.

Мішаною стратегією першого гравця є елемент $p \in S_k$. Це вектор $p = (p_1, p_2, ..., p_k)$, де $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$. Тут k — кількість елементів в $E_{Mv}(P^x)$. Аналогічно мішаною стратегією гравця 2 є елемент $q \in S_n$. Тобто вектор $q = (q_1, ..., q_n)$, такий, що $q_j \geq 0, \sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Числа p_i, q_j є ймовірностями застосування стратегій x^i та j першого та другого гравців відповідно. Якщо $p_e = 1$ $(q_e = 1)$, а отже $p_i = 0$ $\forall i \neq e$ ($q_j = 0$, $\forall j \neq e$), то мішана стратегія $(p_1, ..., p_k)$ означає, що з ймовірністю 1 застосовується чиста стратегія e гравця 1, а мішана стратегія $(q_1, ..., q_n)$ — означає, що з ймовірністю 1 застосовується чиста стратегія x^e — гравця 2 відповідно.

Якщо гравець 1 застосовує свою мішану стратегію $p = (p_1, ..., p_k)$, а 2-й — $q = (q_1, ..., q_n)$, то платою гравця 1 гравцю 2 є величина $F(p, q)$, яка являється математичним сподіванням випадкової величини, яка полягає в реалізації випадкової величини — платежу a_{ij} одночасному настанні випадкових подій: вибір стратегії x^i першим гравцем та вибір стратегії j — другим. Ця випадкова величина значення a_{ij}, $\forall i \in J_k$, $\forall j \in J_n$, приймає з ймовірністю $p_i q_j$ (добуток p_i та q_j):

$$F(p, q) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} p_i q_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j, \tag{1}$$

де p_i — ймовірність вибору x^i, а q_j — ймовірність вибору j.

Природно, що очікуваний виграш другого гравця також обчислюється за формулою (1), оскільки гра є грою з нульовою сумою.

Нескладні міркування показують, що гравець 1 може забезпечити собі програш не більше $\min\limits_{p \in S_k} \max\limits_{q \in S_n} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$, а гравець 2 може забезпечити собі виграш не менше $\max\limits_{q \in S_n} \min\limits_{p \in S_k} \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i q_j$.

Якщо(p^*, q^*) — сідлова точка функції $F(p, q)$, що визначається (2), тобто виконуються нерівності $F(p^*, q) \leq F(p^*, q^*) \leq F(p, q^*)$, то p^*, q^* називають оптимальними мішаними стратегіями гравців 1 та 2 відповідно. В цьому випадку, як відомо: $F(p^*, q^*) = \max\limits_{q \in S_n} \min\limits_{p \in S_k} F(p, q) = \min\limits_{p \in S_k} \max\limits_{q \in S_n} F(p, q)$.

При цьому будемо казати, що задача комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях має розв'язок в мішаних стратегіях, а $F(p^*, q^*)$ — ціна гри.

Векторна система ітераційного методу

Позначимо A' матрицю, з елементами a'_{ij}. Середній платіж (математичне сподівання) першого гравця другому (при виборі стратегії $x^i = (x_{1i}, ..., x_{mi}) \in E_{mv}(P^x)$, і стратегії $j \in J_n$ відповідно 1-м і 2-м гравцям, $i \in J_k$) виражається функцією

$$F(x^i, j) = \sum_{t=1}^{m} a'_{tj} x_{it} = a_{ij}, \qquad (2)$$

де $k = |E_{Mv}(P^x)| = \dfrac{m!}{\eta!, ..., \eta_v!}$.

Розглянемо $k \times n$ матрицю $A = (a_{ij})$, де a_{ij} обчислюється за (2). Нехай ймовірність вибору першим гравцем i-го рядка матриці A (тобто переставлення $x^i \in E_{mv}(P^x)$) дорівнює p_i, а ймовірність обрати другим гравцем її j-й стовпчик — q_j, де $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$, $q_j \geq 0$ $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$. Математичне сподівання платежу першого гравця за (2) дорівнює $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$.

Представимо $\sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$, як $p_1 \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j + ... + p_m \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j =$ $= q_1 \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i + ... + q_n \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$, замінивши $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ на $\min\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$ з лівого боку в останній рівності на $\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$ з правого боку та врахувавши, що суми $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1$ та $\sum\limits_{j=1}^{n} q_j = 1$ одержимо: $\min\limits_{1 \leq i \leq k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j \leq \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i$, або

$$\min_{i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq \max_{j} \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i. \qquad (3)$$

З основної теореми теорії ігор [10] випливає, що існують деякі вектори $p^* \in S_k$, $q^* \in S_n$, що в (3) досягається рівність, а значення v ціни гри таке: $v = \min\limits_{1 \leq i \leq k} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} q_i^* = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i^*$, де (p^*, q^*) — оптимальні мішані стратегії.

Для розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу на переставленнях запропоновано ітераційний метод [5]. Ідея ітераційного методу така. Розігрується гра, в якій супротивники застосовують свої стратегії. Експеримент складається з послідовності ходів. Гра починається з того, що один з гравців вибирає довільно одну зі своїх стратегій, інший на це відповідає своєю стратегією, котра йому найбільш вигідна (отже найменш вигідна супротивнику) і т. д. У кожній партії, коли настає черга гравця вибирати стратегію, інший відповідає своєму противнику тієї своєю чистою стратегією, яка є найгіршою для противника з урахуванням усіх його попередніх виборів. Сукупність ходів розглядаються, як своєрідна «мішана стратегія», де чисті стратегії змішані у пропорціях, відповідних частоті їх застосування в минулому. Такий спосіб є моделлю реального практичного «взаємного навчання» гравців, коли кожен з них на досвіді досліджує спосіб поведінки супротивника.

Нагадаємо позначення та формули ітераційного методу з [5, 8], які використовуються і далі. Позначатимемо A матрицю, яка складається з елементів a_{ij} за (2). Нехай B_j — стовпці матриці A $j \in J_n$, а $x^i = (x_{1i}, ..., x_{mi})$ та j — стратегії 1-го і 2-го гравцям відповідно $x^i \in E_{mv}(P^x)$, $i \in J_k$, $j \in J_n$. Тут як і далі, N — кількість ітерацій методу.

При реалізації алгоритму методу з [5] утворюються послідовність n-вимірних векторів чисел $SUM_L(0)$, $SUM_L(1)$, ...та послідовності k-вимірних векторів чисел $SUM_R(0)$, $SUM_R(1)$, ... На нульовій ітерації ці вектори нульові: $SUM_L(0) = \bar{0}_L$, $SUM_R(0) = \bar{0}_R$, де $\bar{0}_L$, $\bar{0}_R$ — відповідної довжини нульові вектори. На $N+1$ кроці алгоритму вектор $SUM_L(N+1)$ є сумою вектора $SUM_L(N)$ на кроці N та вектора скалярних добутків $sum_L(N+1) = ((B_1, x^{i*}(N)), (B_2, x^{i*}(N)), ..., (B_j, x^{i*}(N)), ..., (B_n, x^{i*}(N)))$ на кроці $N+1$, тобто $SUM_L(N+1) = SUM_L(N) + sum_L(N+1)$, де $(B_j, x^i(N))$ — скалярний добуток векторів B_j та x^{i*}, а $x^{i*} = \arg \min\limits_{x^i \in E_{m\nu}(P^x)} (x; SUM_R(N))$.

На $N+1$ кроці алгоритму вектор $SUM_R(N+1)$ є сумою векторів B_j та $SUM_R(N)$ на кроці N, тобто $SUM_R(N+1) = SUM_R(N) + B_j$, де номер j стовпця B_j знаходиться з умови: $(SUM_L(N))_j = \max\limits_{1 \le t \le n} \{(SUM_L(N))_1, ..., (SUM_L(N))_t, ..., (SUM_L(N))_n\}$, а $(SUM_L(N))_t$ — це -та координата вектора $SUM_L(N)$, $t \in J_n$.

Оскільки $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \ge \upsilon$ виконується для $\forall j \in J_n$, в тому числі й для того на якому досягається максимум в лівій частині $\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i \ge \upsilon$, а $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} q_j \le \upsilon$ виконується для $\forall i \in J_k$ в тому числі і для того i, для якого досягається мінімум в правій частині то ціна гри задовольняє нерівність:

$$\min_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le \frac{\min\limits_{x^i \in E_{M\nu}(P^x)} (SUM_R(N), x^i)}{N} \le \upsilon \le \frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N} \le \max_j \sum_{i=1}^{k} a_{ij} p_i. \tag{4}$$

Введемо в розгляд означення векторної системи.

Означення векторної системи. Система $(SUM_L(N), SUM_R(N))$, яка складається з послідовності n-вимірних векторів чисел $SUM_L(0)$, $SUM_L(1)$, $\ldots$ та послідовності k-вимірних векторів чисел $SUM_R(0)$, $SUM_R(1)$, $\ldots$ називається векторною системою для матриці A, якщо виконуються такі умови:

1. $SUM_L(0) = \bar{0}_L$, $SUM_R(0) = \bar{0}_R$, де $\bar{0}_L$, $\bar{0}_R$ - відповідної довжини нульові вектори.
2. Вектор $SUM_L(N+1)$ є сумою вектора $SUM_L(N)$ на кроці N та вектора скалярних добутків $sum_L(N+1) = ((B_1, x^{i*}(N)), (B_2, x^{i*}(N)), ..., (B_j, x^{i*}(N)), ..., (B_n, x^{i*}(N)))$ на кроці $N+1$: $SUM_L(N+1) = SUM_L(N) + sum_L(N+1)$, де $(B_j, x^i(N))$-скалярний добуток векторів B_j та x^{i*}, а
$$x^{i*} = \arg\min_{x^i \in E_{m\nu}(P^x)} (x; SUM_R(N)). \qquad (5)$$
3. Вектор $SUM_R(N+1)$ є сумою векторів B_j та $SUM_R(N)$ на кроці N: $SUM_R(N+1) = SUM_R(N) + B_j$, де номер j стовпця B_j знаходиться з умови: $(SUM_L(N))_j = \max\limits_{1 \le t \le n} \{(SUM_L(N))_1, ..., (SUM_L(N))_t, ..., (SUM_L(N))_n\}$, а $(SUM_L(N))_t$ - це t-та координата вектора $SUM_L(N)$, $t \in J_n$.

Вектори $SUM_L(N)$ та $SUM_R(N)$ назвемо векторами накопичених сум.

Зауваження 1. Мінімум в (5) знаходиться відповідно теореми 3.1 з [11].

Зауваження 2. Максимальний елемент вектора $SUM_L(0)$ дорівнює мінімальному елементу вектора $SUM_R(0)$, тому що вони нульові вектори, тобто: $\max\limits_{1 \le j \le n} SUM_L(0) = \min\limits_{1 \le i \le k} SUM_R(0) = 0$.

Очевидно, що у випадку коли гра має розв'язок у мішаних стратегіях і $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} q_j = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{k} a_{ij} p_i = \upsilon$ то і t
$\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\min\limits_{x^i \in E_{M\nu}(P^x)} \left(SUM_R(N), x^i\right)}{N} = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N} = \upsilon$.

Про збіжність та оцінку швидкості ітераційного методу

Доведемо, що $\frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N}$ при будь-якій стратегії не може бути менша $\frac{\min\limits_{x^i \in E_{M\nu}(P^x)} \left(SUM_R(N), x^i\right)}{N}$ при оптимальній стратегії, тобто менша υ, а також відсутня така стратегія для якої б виконувалося: $\upsilon > \frac{\max\limits_j (SUM_L(N))_j}{N}$.

Доведення даного факту проводиться відповідно тереми 2.8 з [12, с.52]. Нехай величина $F(p,q)$ – математичне сподівання виграшу в прямокутній матриці розмірності $m \times n$ та ціною гри υ. Тоді, для того щоб елемент p^* множини S_k був оптимальною стратегією для p необхідно та достатньо, щоб для кожного елементу q множини S_n мала місце нерівність: $\upsilon \leq F\left(p^*, q\right)$.

Аналогічно, для того, щоб елемент q^* множини S_n був оптимальною стратегією для q необхідно та достатньо, щоб для кожного елементу p множини S_k мала місце нерівність: $F\left(p, q^*\right) \leq \upsilon$.

Доведення цього факту розглянуто в [12, с.53].

Вибір x^i в (4) означає вибір i -го рядка в матриці вимірності $k \times n$ $A = (a_{ij})$, де a_{ij} обчислюється за (2), що зводить векторну систему $\left(SUM_L\left(N\right), SUM_R\left(N\right)\right)$ до векторної системи (U, V) з [12]. Утворена векторна система $\left(SUM_L\left(N\right), SUM_R\left(N\right)\right)$ в методі для розв'язування ЗКОІТП аналогічно утворюється векторна система (U, V) для метода Брауна-Робінсон. Доведення збіжності ітераційного методу розв'язування ігрових задач з обмеженнями, що визначаються переставленнями на стратегії одного гравця є аналогічним доведення збіжності методу Брауна-Робінсон для матричної гри з матрицею A викладене в [12].

В роботі [13] дана оцінка швидкості збіжності методу Брауна-Робінсон для матричної гри, яка базується на доведенні того, наскільки швидко $\frac{\max U(N) - \min V(N)}{N}$ наближається до нуля при збільшенні кількості ітерацій.

Для оцінки швидкості збіжності ітераційного методу з [13] для розв'язування ігрових комбінаторних оптимізаційних задач розглядається слідкуючий факт.

Теорема. *Якщо* $\max\limits_{1 \leq j \leq n} SUM_L\left(0\right) = \min\limits_{1 \leq i \leq k} SUM_R\left(0\right) = 0$, *то*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\min\limits_{x^i \in E_{M\nu}(P^x)} \left(SUM_R(N), x^i\right) - \max\limits_j \left(SUM_L(N)\right)_j}{N} \leq a_{ij} 2^{k+n} N^{-\frac{1}{k+n-2}}.$$

Доведення даного факту здійснюється індуктивно та є аналогічним доведенню з [13]. Тобто оцінка швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач з обмеженнями–переставленнями на стратегії одного гравця рівна $O\left(N^{-\frac{1}{k+n-2}}\right)$. Оскільки, $k = \left|E_{Mv}\left(P^x\right)\right| = \frac{m!}{\eta_1!, \ldots, \eta_v!}$, то запишемо $O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!, \ldots, \eta_v!} + n - 2}}\right)$.

За допомогою розробленої програмної реалізації було порівняно отриману теоретичну оцінку швидкості збіжності методу з результатами, отриманими експериментально (рис. 1).

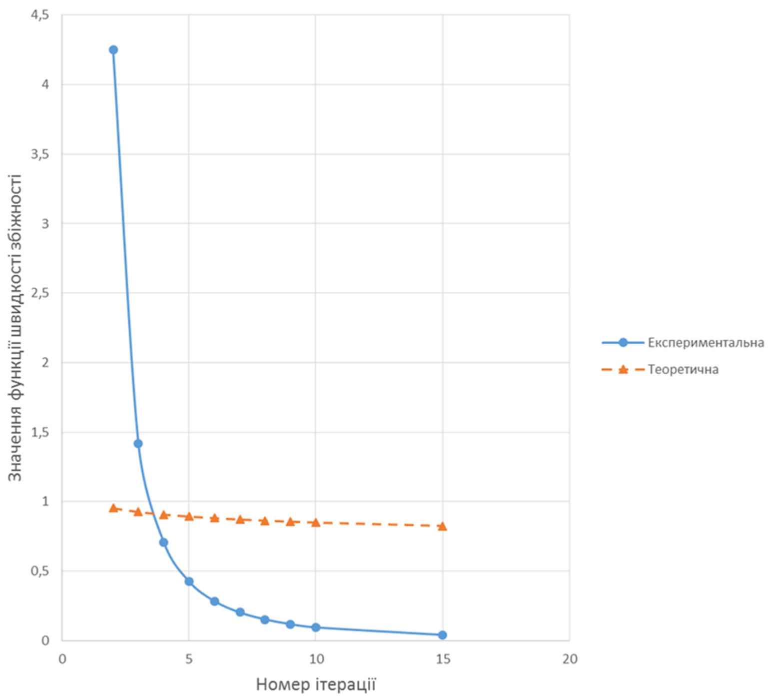

Рис. 1. Залежність швидкості збіжності від номеру ітерації

Відповідно до отриманих результатів, отримана теоретична оцінка швидкості збіжності підтвердилась експериментально. Так, зокрема, на задачах порядком квадратної матриці A, рівній 10, було виявлено, що швидкість збіжності не перевищує її теоретичну оцінку вже на 5-й ітерації (рис. 1).

Комбінаторні обмеження на стратегії гравця можуть бути представлені різними комбінаторними множинами. У [4, 8] розглянуті математичні моделі задач, у якій комбінаторні обмеження накладаються на стратегії другого гравця [4] та на обох гравців [8] і визначаються переставленнями. Введемо необхідні позначання. P_j^y — елемент мультимножини $P^y = \{P_1^y, P_2^y, ..., P_l^y\}$, що складається з l дійсних чисел, серед яких μ різних. Позначимо її основу $S\,(P^y)$, а первинну специфікацію – $[P^y] = (\lambda_1, ..., \lambda_\mu)$. Тоді $Y = (y_1, y_2, ..., y_l)$ — вектор-переставлення, елемент y_j — ймовірність застосування стратегії j — належить P^y,$y^j \in P^y$, а сам вектор належить множині $E_{l\mu}\,(P^y)$ l-переставлень з елементів мультимножини P^y, тобто $Y = (y_1, y_2, ..., y_l) \in E_{l\mu}\,(P^y)$. При реалізації матричної гри мішана стратегія другого гравця це вектор $q = (q_1, \ ..., \ q_h)$, де $q_j \geq 0\,,\ \sum\limits_{j=1}^{h} q_j = 1$. Тут h — кількість елементів в $E_{n\mu}\,(P^y)$, $h = |E_{n\mu}\,(P^y)| = \frac{l!}{\lambda_1!, ..., \lambda_\mu!}$.

Розглянуті також задачі комбінаторної оптимізації у яких на стратегії гравців накладаються обмеження, що визначені розміщеннями [7]. За такої математичної постановки задачі позначимо $X = (x_1, x_2, ..., x_m)$ — вектор-розміщень, елемент x_i — ймовірність застосування стратегії i першого гравця — належить P^x,$x^i \in P^x$, а сам вектор належить множині $E^m_{Mv}(P^x)$ множина m- розміщень з M елементів вектора P^x, тобто $X = (x_1, x_2, ..., x_m) \in E^m_{M\nu}(P^x)$. Тоді при реалізації матричної гри мішана стратегія першого гравця це вектор $p = (p_1, \ ..., \ p_k)$, де $p_i \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{k} p_i = 1$. Тут d - кількість елементів у $E^m_{M\nu}(P^x)$, яка дорівнює відповідно [14] $d = |E^m_{M\nu}(P^x)| = \sum\limits_{\substack{V_1+V_2+...+V_v=m \\ 0\leq V_i \leq \eta_i}} \frac{m!}{V_1!,...,V_v!}$, де $(V_1, ..., V_v)$ — кількість використаних елементів з множини розміщення.

Якщо комбінаторні обмеження накладаються на стратегії другого гравця то позначимо $Y = (y_1, y_2, ..., y_l)$ – вектор-переставлення, елемент y_j - ймовірність застосування стратегії j - належить P^y,$y^j \in P^y$, а сам вектор належить множині $E^l_{L\mu}(P^y)$ — множина l-розміщень з L елементів множини P^y, тобто $Y = (y_1, y_2, ..., y_l) \in E^l_{L\mu}(P^y)$. При реалізації матричної гри мішана стратегія другого гравця це вектор $q = (q_1, \ ..., \ q_r)$, де $q_j \geq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{r} q_j = 1$. Тут r — кількість елементів в $E^l_{L\mu}(P^y)$, яка за [14] дорівнює $r = \left|E^l_{L\mu}(P^y)\right| = \sum\limits_{\substack{V_1+V_2+...+V_\mu=l \\ 0\leq V_j \leq \mu_j}} \frac{l!}{V_1!,...,V_\mu!}$, де $(V_1, ..., V_\mu)$ — кількість використаних елементів з множини розміщення.

Доведення швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування цих класів задач є аналогічним розглянутим для переставлень. У таблиці 1 представлена оцінки швидкості збіжності для задач із різними типами комбінаторних обмежень.

Таблиця 1. Зведена таблиця оцінки швидкості збіжності ітераційних методів розв'язування ЗКОІТ з різними типами комбінаторних обмежень

Обмеження на стратегії першого гравця	Комбінаторне обмеження на стратегії другого гравця		
	Переставлення	Розміщення	Відсутнє
Переставлення	за формулою (6)	за формулою (7)	за формулою (8)
Розміщення	за формулою (9)	за формулою (10)	за формулою (11)
Відсутнє	за формулою (12)	за формулою (13)	за формулою (14) [13]

Формули, відповідно до яких визначається оцінка швидкості збіжності ітераційних методів:

$$O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!,\dots,\eta_v!}+\frac{n!}{\lambda_1!,\dots,\lambda_\mu!}-2}}\right) \tag{6}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!,\dots,\eta_v!}+\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\dots+V_\mu=l\\0\le V_j\le\mu_j}}\frac{l!}{V_1!,\dots,V_\mu!}-2}}\right) \tag{7}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\frac{m!}{\eta!,\dots,\eta_v!}+n-2}}\right) \tag{8}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\dots+V_v=m\\0\le V_i\le\eta_i}}\frac{m!}{V_1!,\dots,V_v!}+\frac{l!}{\lambda_1!,\dots,\lambda_\mu!}-2}}\right) \tag{9}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\dots+V_v=m\\0\le V_i\le\eta_i}}\frac{m!}{V_1!,\dots,V_v!}+\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\dots+V_\mu=l\\0\le V_j\le\mu_j}}\frac{l!}{V_1!,\dots,V_\mu!}-2}}\right) \tag{10}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\dots+V_v=m\\0\le V_i\le\eta_i}}\frac{m!}{V_1!,\dots,V_v!}+n-2}}\right) \tag{11}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{m+\frac{l!}{\lambda_1!,\dots,\lambda_\mu!}-2}}\right) \tag{12}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{k+\sum\limits_{\substack{V_1+V_2+\dots+V_\mu=l\\0\le V_j\le\mu_j}}\frac{l!}{V_1!,\dots,V_\mu!}-2}}\right) \tag{13}$$

$$O\left(N^{-\frac{1}{k+n-2}}\right) \tag{14}$$

Висновки

У роботі розглянуто доведення збіжності, оцінки швидкості збіжності ітераційного методу розв'язування комбінаторних оптимізаційних задач з обмеженнями-переставленнями, що накладаються на стратегії одного гравця. Узагальнена оцінка швидкості збіжності ітераційних методів розв'язування задач комбінаторної оптимізації ігрового типу з різними типами комбінаторних обмежень.

Список літератури

1. *Емец О. А.* Исследование математических моделей и методов решения задач на перестановках игрового типа. / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Кибернетика и сист. анализ. — 2007. — №6. — С. 103–114.

   Yemets O. O. Study of mathematical models and methods of solving problems on permutations of the gaming type. Yemets O. O., Ustian N. Y. Kibernetika i sist. analiz (Ukraine), 2007, 6, pp. 103–114.

2. *Ємець О. О.* Розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян. — Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2007. — №3. — С. 47–52.

   Yemets O. O. Solving game problems on permutations. Yemets O. O., Ustian N. Y. Naukovi Visti NTUU "KPI"(Ukraine), 2007, 3, pp. 47–52.

3. *Емец О. А.* Решение некоторых задач комбинаторной оптимизации на размещениях и перестановках игрового типа / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 3. — С. 37–47.

   Yemets O. O. Solving some combinatorial optimization problems on arrangements and permutations of the gaming type. Yemets O. O., Ustian N. Y. Problemy upravleniia i informatiki (Ukraine), 2006, 3, pp. 37–47.

4. *Емец О. А.* Исследование задач комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Проблемы управления и информатики. — 2007. — № 1. — С. 26–36.

   Yemets O. O. Study of combinatorial optimization problems of the gaming type on arrangements. Yemets O. O., Ustian N. Y. Problemy upravleniia i informatiki (Ukraine), 2007, 1, pp. 26–36.

5. *Ємець О. О.* Один ітераційний метод розв'язування ігрових задач на переставленнях / О. О. Ємець, Н. Ю. Устьян. — Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2008. — №3. — С.5–10.

   Yemets O. O. One iterative method of solving game problems on permutations. Yemets O. O., Ustian N. Y. Naukovi Visti NTUU "KPI"(Ukraine), 2008, 3, pp. 5–10.

6. *Емец О. А.* Игры с комбинаторными ограничениями / О. А. Емец, Н. Ю. Устьян. — Кибернетика и сист. анализ. — 2008. — №4. — С.134–141.

   Yemets O. O. Games with combinatorial restrictions. Yemets O. O., Ustian N. Y. Kibernetika i sist. analiz (Ukraine), 2008, 4, pp. 134–141.

7. *Емец О. А.* Итерационный метод решения комбинаторных оптимизационных задач игрового типа на размещениях / О. А.Емец, Е. В. Ольховская. — Проблемы управления и информатики. — 2011. — № 3. — С. 69–78.

   Yemets O. A. The iterative method of solving combinatorial optimization problems of the gaming type on arrangements. Yemets O. O., Olkhovska O. V. Problemy upravleniya i informatiki (Ukraine), 2011, 3, pp. 69–78.

8. *Ємець О. О.* Розв'язування комбінаторних задач ігрового типу з обмеженнями-переставленнями у обох гравців: ітераційний метод / О.О. Ємець, О.В. Ольховська. — Системні дослідження та інфораційні технології . — №4. — С. 80–93.

Yemets O. O. Solving combinatorial problems of the gaming type with permutations-restrictions of both players: the iterative method. Yemets O. O., Olkhovska O. V. Systemni doslidzhennia ta informatsiini tekhnolohii (Ukraine), 4, pp. 80–93.

9. *Емец О. А.* Доказательство сходимости итерационного метода решения задачи комбинаторной оптимизации игрового типа на размещениях / О. А. Емец, Е. В. Ольховская. — Кибернетика и сист. анализ. — 2013. — № 1. — С. 102–114.

   Yemets O. O. 2013. Proof of convergence of the iterative method for solving combinatorial optimization problems of the gaming type on arrangements. Yemets O. O., Olkhovska O. V. Kibernetika i sist. analiz (Ukraine), 1, pp. 102–114.

10. *Вентцель Е. С.* Элементы теории игр. Изд. 2-е, стереотип. / Е.С. Вентцель — М.: Физматгиз, 1961. — 68 с.

    Venttsel Y. S. 1961. Elements of the theory of games. 2nd stereotype edition. Venttsel Y.S. Moscow, Fizmatgiz (Russia), p. 68.

11. *Стоян Ю. Г.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К.: Інститут системних досліджень освіти, 1993. — 188 с.

    Stoyan Y. G. 1993. Theory and methods of euclidean combinatorial optimization / Y. G. Stoyan, O. O. Yemets. Kyiv: Institute for System Studies of Education, 188 p.

12. *Robinson J.* An iterative method of solving a game / J. Robinson // The Annals of Mathematics, Second Series. — Vol. 54, No. 2. — 1951. — P. 296–301.

13. *Shapiro H. M.* Note on a computation method in the theory of games / H. M. Shapiro // — Comm. Pure and Appl. Math. 11, № 4. — 1958. — P. 588–593.

14. *Ємець О. О.* Про кількість елементів в загальних множинах розміщень та полірозміщень / О. О. Ємець, Т. В. Чілікіна // Інформатика та системні науки (ІСН-2013): Матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції (21–23 березня 2013 р.) — Полтава: РВВ ПУСКУ, 2013. — С. 117–125.

    Yemets O. O. About the number of elements in the overall sets of arrangements and polyarrangements. Yemets O. O. Chilikina T.V. Informatika ta systemni nauky (ISN-2013): Materials of the Ukrainian theoretical and practical conference (21–23 March 2013), Poltava (Ukraine), 2013, pp. 117–125.

Статья поступила в редакцию 27.01.2014