УДК: 517.11

ОБ УСОВЕРШЕНСТВОВАНИИ МЕТОДА ВЫДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© **М. С. Пошерстник**

инженер-математик
просп. Победы, 214, к.4, Симферополь, 295034, Российская Федерация
E-mail: marat.posher@gmail.com

ABOUT THE IMPROVEMENT OF THE METHOD OF VARIABLES SELECTION WHEN SOLVING LOGICAL EQUATIONS.

Posherstnik M. S.

Abstract. In the paper [1], for the solution of Boolean equations of the form $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}) = 1$ the method for allocation of variables was offered. This work aims at improving the efficiency of this method due to a decrease of the maximum volume of the intermediate forms which are obtained in the process of the variables selection. This result is achieved by : 1) combining some elements of a disjunctive forms of the original superposition of functions F before their logical multiplication and 2) rejection of the substitution or simplification of the form substitute the disjunctive forms of functions that do not affect the formation of zero-conjunction $x_u \bar{x}_u$ when DNF is received of a function F. It is shown that the amount of memory required to allocate the final DNF can be reduced by forming one or some of its members from a bracket the shape of the function F obtained after selection of all variables that form when the transformation of the original set of functions in DNF at least one zero-conjunction $x_u \bar{x}_u$ $\{u \in \{1,2,\ldots,k_0\})$. Introduced more efficient than presented in [1] criterion for variable selection determining the next stage of decomposition of the original problem.

Keywords: Logical Equations, Separation of variables, Decomposition of the Problem

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе [1] для решения логических уравнений $F(x_1, x_2, \ldots, x_{k_0}) = 1$ был предложен метод выделения переменных. Эта задача не утратила своей актуальности и в настоящее время [2, 3]. В настоящей работе с целью повышения эффективности представленного в [1] метода предлагается ряд приемов и алгоритмов, уменьшающих объем промежуточных и конечных форм, получаемых при его реализации. Задача нахождения корней логических уравнений рассматривается в постановке, приведенной в [1]. Часть применяемых далее понятий, терминов, определений и обозначений также заимствована из [1] с небольшими дополнениями, изменениями и новой нумерацией. Некоторые формулировки упрощены по сравнению с приведенными в работе [1]. Так, например, вместо принятого в [1] выражения «формула, реализующая функцию» применяется выражение «формула функции».

Напомним постановку задачи и некоторые определения.

Задана совокупность множеств M^r ранга $r \in \{0,1,\dots,n\}$,

$$M^0 = \{x_1, x_2, \dots, x_{k_0}\}, \dots, M^1 = \{f_1^1, f_2^1, \dots, f_{k_1}^1\}, \dots, \quad (1)$$
$$M^r = \{f_1^r, f_2^r, \dots, f_{k_r}^r\}, \dots, M^n = \{f_1^n\} = \{F\},$$

включающие независимые переменные $x_1, \dots, x_{k_0}$ и дизъюнктивные формы (ДФ) локальных функций $f_J = \bigvee_{l=1}^{m_J} A_{jl}^r$ $(m_j \in \{1, 2, \dots\}, 1 \le j \le k_r, r \in \{1, 2, \dots, n\})$.

Конъюнкции A_{jl}^r каждой из них содержат символы локальных функций низших рангов и независимых аргументов (со знаком инверсии или без него).

Требуется найти все наборы ρ_τ $(\tau = 1, 2, \dots)$ значений независимых переменных, удовлетворяющих уравнению $F(x_1, \dots, x_{k_0}) = 1$. В дальнейшем такие наборы будем называть корнями логического уравнения. Условимся также наряду с символом f_j^r применять символ $f_{(j)}$, где (j) - порядковый номер локальной функции в исходной совокупности $S_w = \{M^1, \dots, M^n\}$ множеств ($(w = 1, 2, \dots)$, $(j) = j + \sum_{l=1}^{r-1} k_l$).

Определение 1. Приведенной относительно x_u формой функции $f_{(j)}$ будем называть реализующую ее дизъюнктивную форму

$$\tilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \beta' \bar{x}_u \vee \gamma, \quad (2)$$

где β, β', γ -выражения, не зависящие от переменной x_u.

Согласно [1] указанные выражения называются коэффициентами и остатком выделения соответственно. В дополнение к [1] условимся также называть графически равными приведенные формы логических функций, если равны их коэффициенты и остаток выделения.

Условимся также процесс преобразования любой произвольно заданной функции $f_{(j)}$ к виду (2) называть выделением переменной x_u в функции $f_{(j)}$.

Определение 2. Будем говорить, что переменная x_u графически определяет функцию $f_{(j)}$ или функция $f_{(j)}$ графически зависит от x_u, если $f_{(j)}$ существенно зависит от переменной x_u и представлена (с точностью до вынесения за скобки) в приведенной относительно x_u форме.

Определение 3. Числа $r(x_v), r(f_{(j)} \ge 0$ называются рангами независимой переменной x_v $(v \in \{1, \dots, k_0\})$ либо локальной функции $f_{(j)}$ и определяются следующим образом: $r(x_v) = 0, r(f_{(j)}) = \max[r(\varphi)] + 1,$ где $r(\varphi)$ - ранг локальной функции либо простой переменной, входящей в ДФ функции.

Определение 4. Переменную x_u $(u \in \{1, \dots, k_0\})$ будем называть отсекающей (неотсекающей), если при ее выделении получена хотя бы одна (ни одна) ,нуль-конъюнкция $x_u \bar{x}_u$.

1. Уменьшение объема промежуточных форм

Уменьшение объема промежуточных форм достигается за счет уменьшения числа членов в дизъюнктивных формах (ДФ), получаемых в результате выполнения операций раскрытия скобок при каждой подстановке и логическом перемножении приведенных форм функций.

Рассмотрим конъюнкцию $A_{jl} = f_{(s)} f_{(t)}$, входящую в ДФ одной из локальных функций $f_{(j)}(x_1, \dots, x_u, \dots, x_{k_0})$. Здесь $f_{(j)}, f_{(s)}, f_{(t)}$ это локальные функции исходной совокупности S_w, представляющей суперпозицию F, а l – порядковый номер конъюнкции A_{jl} в ДФ функции $f_{(j)}$. В ходе выделения переменной x_u подставим вместо указанных функций их приведенные 3-х членные формы $\tilde{d}_u(f_{(s)}) = \beta_1 x_u \vee \beta_1' \bar{x}_u \vee \gamma_1$ и $\tilde{d}_u(f_{(t)}) = \beta_2 x_u \vee \beta_2' \bar{x}_u \vee \gamma_2$.

После выполнения операции логического умножения путем перемножения каждого члена одного сомножителя на каждый член другого сомножителя получим 7-членную дизъюнкцию конъюнкций

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \tilde{d}_u(f_{(t)}) = \\
&= \beta_1\beta_2 x_u \vee \beta_1\gamma_2 x_u \vee \beta_2\gamma_1 x_u \vee \beta_1'\beta_2' \bar{x}_u \vee \beta_1'\gamma_2 \bar{x}_u \vee \beta_2'\gamma_1 \bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 = \\
&= (\beta_1\beta_2 \vee \beta_1\gamma_2 \vee \beta_2\gamma_1) x_u \vee (\beta_1'\beta_2' \vee \beta_1'\gamma_2 \vee \beta_2'\gamma_1) \bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 .
\end{aligned}$$

Если при логическом умножении рассматривать в качестве объектов операции не только отдельные дизъюнктивные элементы сомножителей, но и логические суммы $(\beta_1 x_u \vee \gamma_1), (\beta_2' \bar{x}_u \vee \gamma_2)$ либо $(\beta_1' \bar{x}_u \vee \gamma_1), (\beta_2 x_u \vee \gamma_2)$ некоторых из них , то можно, не раскрывая скобки полностью, получить выражение из 5-и конъюнкций. Один из 2-х таких вариантов приведен ниже.

$$\begin{aligned}
&\tilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \tilde{d}_u(f_{(t)}) = (\beta_1 x_u \vee \gamma_1)\beta_2 x_u \vee \gamma_2\beta_1 x_u \vee (\beta_2' \bar{x}_u \vee \gamma_2)\beta_1' \bar{x}_u \vee \gamma_1\beta_2' \bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 = \\
&= ((\beta_1 x_u \vee \gamma_1)\beta_2 \vee \gamma_2\beta_1) x_u \vee ((\beta_2' \bar{x}_u \vee \gamma_2)\beta_1' \vee \gamma_1\beta_2') \bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 = \\
&= ((\beta_1 \vee \gamma_1)\beta_2 \vee \gamma_2\beta_1) x_u \vee ((\beta_2' \vee \gamma_2)\beta_1' \vee \gamma_1\beta_2') \bar{x}_u \vee \gamma_1\gamma_2 .
\end{aligned}$$

Такая реализация операции логического перемножения , порождает 5 конъюнкций. Она позволяет отказаться от получения дизъюнктивно –инверсной формы (ДИФ) $Q_u(f_{(j)})$ сложной по x_u конъюнкции, рассмотренной в [1], которая при логическом умножении порождает не менее 6 конъюнкций.

$$\begin{gathered}
Q_u(\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \widetilde{d}_u(f_{(t)})) = \neg(\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \wedge \widetilde{d}_u(f_{(t)})) = \neg\widetilde{d}_u(f_{(s)}) \vee \neg\widetilde{d}_u(f_{(t)}) = \\
= ((\neg\beta_1 \vee \neg x_u)(\neg\beta_1' \vee x_u)\neg\gamma_1) \vee ((\neg\beta_2 \vee \neg x_u)(\neg\beta_2' \vee x_u)\neg\gamma_2) = \\
= ((\neg\beta_1 x_u \vee \neg\beta_1'\neg x_u \vee \neg\beta_1\neg\beta_1')\neg\gamma_1) \vee ((\neg\beta_2 x_u \vee \neg\beta_2'\neg x_u \vee \neg\beta_2\neg\beta_2')\neg\gamma_2) = \\
= (\neg\beta_1\neg\gamma_1 x_u \vee \neg\beta_2\neg\gamma_2 x_u \vee \neg\beta_1'\neg\gamma_1\neg x_u \vee \neg\beta_2'\neg\gamma_2\neg x_u \vee \neg\beta_1\neg\beta_1'\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2\neg\beta_2'\neg\gamma_2) = \\
= (\neg\beta_1\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2\neg\gamma_2)x_u \vee (\neg\beta_1'\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2'\neg\gamma_2)\neg x_u \vee (\neg\beta_1\neg\beta'\neg\gamma_1 \vee \neg\beta_2\neg\beta_2'\neg\gamma_2).
\end{gathered}$$

Очевидно, что уменьшение числа логических произведений в формулах, представляющих результаты выделения очередной переменной x_u, позволит избежать при выделении следующих переменных x_t $t \in \{x_1, \dots, x_{u-1}, x_{u+1}, \dots, x_{k_0}\}$ выполнение операций перемножения приведенных по x_t форм входящих в них сомножителей и таким образом замедлить рост объемов памяти ЭВМ, занимаемой промежуточными формами. Так для решения с помощью предложенного алгоритма логического уравнения из примера 4 работы [1] потребуется разместить в памяти ЭВМ не более 430 символов вместо 700 символов, необходимых при применении варианта алгоритма из [1].

Если формула логического произведения содержит n трехчленных приведенных форм сомножителей, то эффективность применения предложенного приема по сравнению с применением ДИФ [1] составит для 2-х сомножителей 6/5=1,2 , для n сомножителей - $(6/5)^{(n-2)}$ раз и уже при n=20 превысит 26 раз.

В дальнейшем такую реализацию операции логического перемножения условимся называть перемножением с неполным раскрытием скобок.

2. Отказ от нахождения всех членов дизъюнктивных нормальных форм суперпозиции локальных функций

В [1] задача вычисления корней логического уравнения $F(x_1, \dots, x_{k_0}) = 1$ интерпретируется как задача приведения структуры F к ДНФ. Однако при этом могут быть утеряны те свойства практических задач, которые позволили их компактно сформулировать (доступным числом символов). Иначе говоря, не только промежуточные формы, но и ДНФ функции F может оказаться намного сложнее формы ее задания. В этом случае ресурсы памяти, необходимые для размещения конечного результата решения задачи, можно значительно уменьшить, если интерпретировать ее как задачу получения из структуры F, заданной совокупностью S_w, скобочной совокупности S_w'' вида (1), не образующей нуль конъюнкций $x_u\bar{x}_u$ для всех $u \in \{1, 2, \dots, k_0\}$ при приведении ее к

ДНФ. Будем называть ее, как и форму функции F, представленную указанной совокупностью, полностью усеченной или усеченной по всем отсекающим переменным в отличие от совокупности S''_{wu}, усеченной по переменной x_u. Если после выделения всех отсекающих переменных, из усеченной совокупности S''_w исключены локальные функции, зависящие от переменных выделения x_u (кроме $\bar{d}_u(F)$), будем называть ее усеченной безызбыточной совокупностью приведенных функций или $УБС(F)$.

В некоторых случаях при ограниченных ресурсах памяти достаточно получить хотя бы один или часть членов конечной ДНФ, отличных от нуля. После построения S''_w часть корней логического уравнения легко найти, оставив в формулах ДФ всех функций первого ранга по одной элементарной конъюнкции, а затем выполняя поэтапную подстановку и преобразование к ДФ локальных функций $f_1^2, \ldots, f_{k_2}^2, f_1^3, \ldots, f_{k_3}^3, \ldots, f_1^n, \ldots, f_{k_n}^n$ от 2-го до самого высшего ранга, исключая с целью экономии памяти на каждом этапе некоторое количество полученных элементарных конъюнкций. Для получения только одного корня можно выполнять поэтапную подстановку и преобразование к ДФ локальных функций $f_1^2 \ldots, f_{k_n}^2, f_1^3 \ldots, f_{k_{m-1}}^3, \ldots, f_1^n, \ldots, f_{k_2}^n$ от 2-го до самого высшего ранга, оставляя в формуле ДФ после каждого преобразования локальной функции лишь один член.

Пример 1. Задана усеченная по всем переменным совокупность функций S''_w, представляющая функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_{60})$.

$$f_{(4)} = x_{55} \vee x_{56} \vee x_{57},\ f_{(5)} = x_{58} \vee x_{59} \vee x_{60},\ f_{(6)} = x_{45} \vee x_{46} \vee x_{47} \vee x_{48} \vee x_{49},$$
$$f_{(7)} = x_{50} \vee x_{51} \vee x_{52} \vee x_{53} \vee x_{54},\ f_{(8)} = x_1 \vee x_2 \vee x_3,\ f_{(9)} = x_4 \vee x_5 \vee x_6,$$
$$f_{(10)} = x_7 \vee x_8 \vee x_9,\ f_{(11)} = x_{10} \vee x_{11} \vee x_{12},\ f_{(12)} = x_{12} \vee x_{13} \vee x_{14},\ f_{(13)} = x_{15} \vee x_{16} \vee x_{17},$$
$$f_{(14)} = x_{18} \vee x_{19} \vee x_{20},\ f_{(15)} = x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23},\ f_{(16)} = x_{24} \vee x_{25} \vee x_{26},\ f_{(17)} = x_{27} \vee x_{28} \vee x_{29},$$
$$f_{(18)} = x_{30} \vee x_{31} \vee x_{32},\ f_{(19)} = x_{33} \vee x_{34} \vee x_{35},\ f_{(20)} = x_{36} \vee x_{37} \vee x_{38},\ f_{(21)} = x_{39} \vee x_{40} \vee x_{41},$$
$$f_{(22)} = x_{42} \vee x_{43} \vee x_{44},\ f_{(1)} = f_{(8)}f_{(9)} \vee f_{(10)}f_{(11)}f_{(12)},\ f_{(2)} = f_{(13)}f_{(14)} \vee f_{(15)}f_{(16)}f_{(17)},$$
$$f_{(3)} = f_{(18)}f_{(19)} \vee f_{(20)}f_{(21)}f_{(22)},\ F = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}f_{(4)}f_{(5)} \vee f_{(6)}f_{(7)}.$$

Найдем часть корней уравнения F. Для этого сократим число членов ДФ функций первого ранга до 1:

$$f_{(8)} = x_1,\ f_{(9)} = x_4,\ f_{(10)} = x_7,\ f_{(11)} = x_{10},\ f_{(12)} = x_{12},\ f_{(13)} = x_{15},\ f_{(14)} = x_{18},\ f_{(15)} = x_{21},$$
$$f_{(16)} = x_{24},\ f_{(17)} = x_{27},\ f_{(18)} = x_{30},\ f_{(19)} = x_{33},\ f_{(20)} = x_{36},\ f_{(21)} = x_{39},\ f_{(22)} = x_{42},$$
$$f_{(4)} = x_{55},\ f_{(5)} = x_{58},\ f_{(6)} = x_{45},\ f_{(7)} = x_{50}.$$

Подставив сокращенные выражения в ДФ функций 2-го ранга, получим:

$$f_{(1)} = f_{(8)}f_{(9)} \vee f_{(10)}f_{(11)}f_{(12)} = x_1x_4 \vee x_7x_{10}x_{12},\ f_{(2)} = f_{(13)}f_{(14)} \vee f_{(15)}f_{(16)}f_{(17)} =$$
$$= x_{15}x_{18} \vee x_{21}x_{24}x_{27},\ f_{(3)} = f_{(18)}f_{(19)} \vee f_{(20)}f_{(21)}f_{(22)} = x_{30}x_{33} \vee x_{34}x_{39}x_{42}.$$

Подставляя преобразованные функции 2-го ранга в функцию 3-го ранга F и выполнив заданные в F алгебраические операции, преобразуем ее в скобочную форму - логическую сумму 2-х логических произведений элементарных конъюнкций, представляющую часть конечной ДНФ исходной суперпозиции S''_w.

$$F = f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)} f_{(4)} f_{(5)} \vee f_{(6)} f_{(7)} =$$
$$(x_1 x_4 \vee x_7 x_{10} x_{12})(x_{15} x_{18} \vee x_{21} x_{24} x_{27})\,(x_{30} x_{33} \vee x_{34} x_{39} x_{42}) x_{55} x_{58} \vee x_{45} x_{50}.$$

Для перебора всех комбинаций ДНФ из скобок-сомножителей, образующих первое слагаемое результата, можно сформировать вектор $\vec{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, число p компонент которого равно числу перемножаемых скобок. Установим, что значения компонент $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_p$ равны порядковым номерам $a_i > 0$ соответствующих элементарных конъюнкций внутри скобки, и каждая $i-ая$ компонента $a_i \le \max(a_i)$ является $i-ым$ разрядом некоторого числа $a_1 a_2 \dots a_i \dots a_p$, записанного в позиционной системе счисления с основанием $\max(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_p) + 1$. Тогда можно, изменяя значения этого числа на 1 от величины $11 \dots 1$ до $\{\max(a_1)\max(a_2)\dots\max(a_i)\dots\max(a_p)\}$, получить все комбинации членов ДНФ-сомножителей без пропусков и повторений. Для первого слагаемого логической суммы F из рассматриваемого примера получим 8 значений вектора $\vec{a}$: {1, 1, 1}, {1, 1, 2}, {1, 2, 1}, {1, 2, 2}, {2, 1, 1}, {2, 1, 2}, {2, 2, 1}, {2, 2, 2}, что соответствует корням

$$x_1 x_4 x_{15} x_{18} x_{30} x_{33} x_{55} x_{58},\ x_1 x_4 x_{15} x_{18} x_{34} x_{39} x_{42} x_{55} x_{58},\ x_1 x_4 x_{21} x_{24} x_{27} x_{30} x_{33} x_{55} x_{58},$$
$$x_1 x_4 x_{21} x_{24} x_{27} x_{34} x_{39} x_{42} x_{55} x_{58},\ x_7 x_{10} x_{12} x_{15} x_{18} x_{30} x_{33} x_{55} x_{58},\ x_7 x_{10} x_{12} x_{15} x_{18} x_{34} x_{39} x_{42} x_{55} x_{58},$$
$$x_7 x_{10} x_{12} x_{21} x_{24} x_{27} x_{30} x_{33} x_{55} x_{58}.$$

Второе слагаемое $x_{45} x_{50}$ полученной логической суммы является 9-м корнем логического уравнения F.Если для первого слагаемого суммы достаточно получить только один корень, можно ограничиться первым значением вектора $\vec{a}$ или на каждом этапе преобразований оставлять в каждой полученной ДФ только один член.

3. Усиление метода выделения переменных путем изменения критерия эффективности их выбора

В [4,1] сложность суперпозиции F логических функций оценивалась суммарным количеством символов (букв) в совокупности локальных функций, полученных в результате реализации всех операций их поэтапной подстановки и логического перемножения.

Однако для более точной оценки объема промежуточной информации при реализации этапов, следующих за рассматриваемым, сложность совокупности локальных функций (выражаемая числом букв) и эффективность произведенного выделения переменной x_u можно измерять другими показателями, связанными, например, с количеством конъюнкций в скобочной либо иных формах суперпозиции до и после выделения x_u .

Определение 5. Суммарное число конъюнкций в исходной совокупности S_w (усеченной совокупности S''_{wu}) до (после) выделения переменной x_u будем обозначать символом $K_{КФ}(S_w)$ $(K_{КФ}(S''_{wu}))$. Суммарное число конъюнкций $K_{ДНФ}(S_w)\,(K_{ДНФ}(S''_{wu}))$ в ДНФ суперпозиции F, задаваемой исходной совокупностью S_w (усеченной по x_u совокупностью S''_{wu}), до (после) выделения переменной x_u будем определять, считая, что нуль-конъюнкции $x_u\bar{x}_u$ ($x_z\bar{x}_z$) всех не выделенных перед подсчетом переменных (x_u в S_w, x_z $(z \neq u)$ в S''_{wu}) соответствующей совокупности не обнулены . Величины $K_{КФ}(S_w)$,$K_{КФ}(S''_{wu})$ $(K_{ДНФ}(S_w)$,$K_{ДНФ}(S''_{wu}))$ будем называть соответственно числами конъюнкций в КФ (в ДНФ) совокупностей S_w, S''_{wu}.Наряду с ними в зависимости от контекста будем использовать обозначения $K_{КФ}, K_{КФ}(f_{(j)}), K_{КФ}(F), K_{ДНФ}, K_{ДНФ}(f_{(j)}), K_{ДНФ}(F)$.

Для любых локальных функций $f_{(p)}$ 1-го ранга числа конъюнкций в КФ и ДНФ одинаковы и равны числу дизъюнктивных членов в формуле $f_{(p)}$:
$K_{ДНФ}(f_{(p)}) = K_{КФ}(f_{(p)})$, а для любых выражений $f_{(y)} = f_{(i)} \vee f_{(j)} (f_{(y)} = f_{(i)} \wedge f_{(j)})$ ранга $r(f_{(p)}) > 1$ величину $K_{ДНФ}(f_{(p)})$ можно определить по формуле
$K_{ДНФ}(f_{(y)}) = K_{ДНФ}(f_{(i)}) + K_{ДНФ}(f_{(j)})$ $(K_{ДНФ}(f_{(y)}) = K_{ДНФ}(f_{(i)}) \times K_{ДНФ}(f_{(j)}))$.
Критерием эффективности выделения переменной x_u в [1] было выбрано число локальных функций, которые она графически определяет до выделения. Очевидно, что более точно указанная эффективность $Э(x_u)$ может быть определена величиной, прямо пропорциональной величине $\Delta K_{ВНФ}(F) = K_{ДНФ}(S_w) - K_{ДНФ}(S''_{wu})$
уменьшения числа конъюнкций в ДНФ суперпозиции F и обратно (прямо) пропорциональной увеличению (уменьшению) числа $\Delta K_{КФ}(F) = K_{КФ}(S''_{wu}) - K_{КФ}(S_w)(-\Delta K_{КФ}(F))$ конъюнкций в КФ суперпозиции F в результате выделения переменной x_u. То есть

$$Э(x_u) = \begin{cases} \Delta K_{ДНФ}(F)/(\Delta K_{КФ}(F) + 1/\Delta K_{ДНФ}(F)), & \text{если } \Delta K_{КФ}(F) > 0, \\ \Delta K_{ДНФ}(F), & \text{если } \Delta K_{КФ}(F) = 0, \\ \Delta K_{ДНФ}(F) \times ABS(\Delta K_{КФ}(\mathrm{F}) + 1/\Delta \mathrm{K}_{ДНФ}(\mathrm{F})), & \text{если } \Delta K_{КФ}(F) < 0, \end{cases}$$

Поправка $1/\Delta K_{ДНФ}(F)$ введена для однозначности значений $Э(x_u)$ при $\Delta K_{КФ}(F) > 0$, $\Delta K_{КФ}(F) < 0$ и $\Delta K_{КФ}(F) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим применение предложенного критерия эффективности при решении логического уравнения F , заданного совокупностью отношений:
$S_w\{$ $f_{(1)} = f_{(5)}x_1 \vee f_{(6)}\bar{x}_2$, $f_{(2)} = f_{(7)}\bar{x}_1 \vee f_{(8)}x_2$, $f_{(3)} = x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$, $F = f_{(4)} = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$,
где каждая из формул локальных функций $f_{(v)} = f_{(v1)}f_{(v2)} \vee f_{(v3)}f_{(v4)}$ $(v \in \{5, 6, 7, 8\})$ 2-го ранга включает 4 функции

$f_{(v1)} = \beta_{v1} x_u \vee \beta'_{v1} \bar{x}_u \vee \gamma_{v1}$, $f_{(v2)} = \beta_{v2} x_u \vee \beta'_{v2} \bar{x}_u \vee \gamma_{v2}$, $f_{(v3)} = \beta_{v3} x_u \vee \gamma_{v3}$, $f_{(v4)} = \beta_{v4} x_u \vee \gamma_{v4}$ 1-го ранга, графически зависящих от своих отсекающих переменных x_u $(u = v-2,\ v \in \{5, 6, 7, 8\})$.

При прежнем критерии эффективности первой была бы выделена одна из переменных x_u $(u \in \{3, 4, 5, 6\})$, графически определяющая соответствующие четверки функций $f_{(v1)}, f_{(v2)}, f_{(v3)}, f_{(v4)}$. Для рассмотрения нового критерия эффективности определим количества $K_{КФ}, K_{ДНФ}$ конъюнкций в КФ и ДНФ исходной совокупности S_w функции F соответственно.

$$K_{КФ}(f_{(v)}) = K_{КФ}(f_{(v1)} f_{(v2)} \vee f_{(v3)} f_{(v4)}) + K_{КФ}(f_{(v1)}) + K_{КФ}(f_{(v2)}) +$$
$$+ K_{КФ}(f_{(v3)}) + K_{КФ}(f_{(v4)}) = 2+3+3+2+2 = 12 \ \ (v \in \{5, 6, 7, 8\}),$$
$$K_{ДНФ}(f_{(v)}) = K_{ДНФ}(f_{(v1)}) \times K_{ДНФ}(f_{(v2)}) + K_{ДНФ}(f_{(v3)}) \times K_{ДНФ}(f_{(v4)}) =$$
$$= 3 \times 3 + 2^2 = 9 + 2^2 = 13 \ (v \in \{5, 6, 7, 8\}),$$
$$K_{КФ}(S_w) = K_{КФ}(f_{(1)}) + K_{КФ}(f_{(2)}) + K_{КФ}(f_{(3)}) + K_{КФ}(f_{(4)}) + K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) =$$
$$= 2+2+2+1 + K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) = 7 + (4 \times 12) = 55,$$
$$K_{ДНФ}(S_w) = K_{ДНФ}(f_{(4)}) = K_{ДНФ}(f_{(1)}) \times K_{ДНФ}(f_{(2)}) \times K_{ДНФ}(f_{(3)}) =$$
$$= (K_{ДНФ}(f_{(5)}) + K_{ДНФ}(f_{(6)})) \times (K_{ДНФ}(f_{(7)}) + K_{ДНФ}(f_{(8)})) \times 2 =$$
$$= 2 \times K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(7)}) + 2 \times K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(8)}) + 2 \times K_{ДНФ}(f_{(6)}) \times K_{ДНФ}(f_{(7)}) +$$
$$+ 2 \times K_{ДНФ}(f_{(6)}) \times K_{ДНФ}(f_{(8)}) = (2 \times (9 + 2^2)) \times (2 \times (9 + 2^2)) \times 2 = 8 \times (9 + 2^2)^2 = 1352$$

Для выбора выделяемой переменной по новому критерию произведем пробные выделения переменных x_1, x_2, x_u $(u \in \{3, 4, 5, 6\})$.

$$\tilde{d}_1(f_{(1)}) = f_{(5)} x_1 \vee f_{(9)},\ f_{(9)} = f_{(6)} \bar{x}_2,\ \tilde{d}_1(f_{(2)}) = f_{(7)} \bar{x}_1 \vee f_{(10)},$$
$$f_{(10)} = f_{(8)} x_2,\ \tilde{d}_1(f_{(3)}) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2,\ \tilde{d}_1(f_{(4)}) = \tilde{d}_1(f_{(1)}) \tilde{d}_1(f_{(2)} \tilde{d}_1(f_{(3)}) =$$
$$= (f_{(5)} f_{(10)} x_1 \vee f_{(9)} f_{(7)} \bar{x}_1 \vee f_{(9)} f_{(10)}) \tilde{d}_1(f_{(3)}) = f_{(5)} f_{(10)} x_1 \bar{x}_2 \vee f_{(9)} f_{(7)} \bar{x}_1 x_2 \vee f_{(9)} f_{(10)} x_1 \bar{x}_2 \vee$$
$$f_{(9)} f_{(10)} \bar{x}_1 x_2,$$

В результате выделения переменной x_1 получим усеченную по x_1 совокупность приведенных функций $S''_{w1} = \{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}, f_{(9)}, f_{(10)}, \tilde{d}_1(f_{(4)})\}$. Теперь количества $K_{КФ}, K_{ДНФ}$ конъюнкций в КФ и в ДНФ совокупности S''_{w1} функции F составят:

$$K_{КФ}(S''_{w1}) = K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + K_{КФ}(f_{(9)}) + K_{КФ}(f_{(10)}) + K_{КФ}(\tilde{d}_1(f_{(4)})) =$$
$$= K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + 1 + 1 + 4 = K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + 6.$$
$$\Delta K_{КФ}(F) = K_{КФ}(S''_{w1}) - K_{КФ}(S_w) = K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\}) + 6 -$$
$$- (7 + K_{КФ}(\{f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(7)}, f_{(8)}\})) = -1,$$
$$K_{ДНФ}(S''_{w1}) = K_{ДНФ}(\tilde{d}_1(f_{(4)})) = K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(10)}) +$$
$$+ K_{ДНФ}(f_{(9)}) \times K_{ДНФ}(f_{(7)}) + K_{ДНФ}(f_{(9)}) \times K_{ДНФ}(f_{(10)}) + K_{ДНФ}(f_{(9)}) \times K_{ДНФ}(f_{(10)}).$$

Так как

$$K_{\text{ДНФ}}(f_{(9)}) = K_{\text{ДНФ}}(f_{(6)}),\ K_{\text{ДНФ}}(f_{(10)}) = K_{\text{ДНФ}}(f_{(8)}),\ K_{\text{ДНФ}}(S''_{w1}) = K_{\text{ДНФ}}(\widetilde{d}_1(f_{(4)})) =$$
$$= K_{\text{ДНФ}}(f_{(5)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(8)}) + K_{\text{ДНФ}}(f_{(6)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(7)}) + 2 \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(6)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(8)}),$$

то

$$\Delta K_{\text{ДНФ}}(F) = K_{\text{ДНФ}}(S_w) - K_{\text{ДНФ}}(S''_{w1}) = 2 \times K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(7)}) + 2 \times K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(8)}) +$$
$$+ 2 \times K_{ДНФ}(f_{(6)}) \times K_{ДНФ}(f_{(7)}) + 2 \times K_{ДНФ}(f_{(6)}) \times K_{ДНФ}(f_{(8)}) - (K_{\text{ДНФ}}(f_{(5)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(8)}) +$$
$$+ K_{\text{ДНФ}}(f_{(6)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(7)}) + 2 \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(6)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(8)})) =$$
$$= 2 \times K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(7)}) + K_{ДНФ}(f_{(5)}) \times K_{ДНФ}(f_{(8)}) + K_{\text{ДНФ}}(f_{(6)}) \times K_{\text{ДНФ}}(f_{(7)}).$$

Так как

$$K_{\text{ДНФ}}(f_{(v)}) = (9 + 2^2) = 13\ (v \in \{5, 6, 7, 8\}),$$

то

$$\Delta K_{\text{ДНФ}}(F) = 2 \times (9 + 2^2)^2 + (9 + 2^2)^2 + (9 + 2^2)^2 = 4 \times (9 + 2^2)^2 = 676$$

Пренебрегая с целью упрощения вычислений поправкой $1/\Delta K_{\text{ДНФ}}(F)$, получим $Э(x_1) = \Delta K_{\text{ДНФ}}(F) \times ABS(\Delta K_{\text{КФ}}(F)) = 676 \times 1 = 676$. Аналогично для x_2 - $Э(x_2) = 676$. Оценим эффективность выделения переменной x_3.

$$\widetilde{d}_3(f_{(51)}) = \beta_{51}x_3 \vee \beta'_{51}\bar{x}_3 \vee \gamma_{51},\ \widetilde{d}_3(f_{(52)}) = \beta_{52}x_3 \vee \beta'_{52}\bar{x}_3 \vee \gamma_{52},$$
$$\widetilde{d}_3(f_{(53)}) = \beta_{53}x_3 \vee \gamma_{53},\ \widetilde{d}_3(f_{(54)}) = \beta_{54}x_3 \vee \gamma_{54},$$
$$\widetilde{d}_3(f_{(5)}) = \widetilde{d}_3(f_{(51)})\widetilde{d}_3(f_{(52)}) \vee \widetilde{d}_3(f_{(53)})\widetilde{d}_3(f_{(54)}) = .\beta_5 x_3 \vee \beta'_5\bar{x}_3 \vee \gamma_5,$$

где

$$\beta_5 = \beta_{51}\beta_{52} \vee \beta_{51}\gamma_{52} \vee \gamma_{51}\beta_{52} \vee \beta_{53}\beta_{54} \vee \beta_{53}\gamma_{54} \vee \beta_{54}\gamma_{53},$$
$$\beta'_5 = \beta'_{51}\beta'_{52} \vee \beta'_{51}\gamma_{52} \vee \gamma_{51}\beta'_{52},\ \gamma_5 = \gamma_{51}\gamma_{52} \vee \gamma_{53}\gamma_{54},$$
$$K_{КФ}(\widetilde{d}_3(f_{(5)})) = K_{КФ}(\beta_5) + K_{КФ}(\beta'_5) + K_{КФ}(\gamma_5) = 6 + 3 + 2 = 11,$$
$$\widetilde{d}_3(f_1) = \widetilde{d}_3(f_{(5)})x_1 \vee f_{11} = (\beta_5 x_3 \vee \beta'_5\bar{x}_3 \vee \gamma_5)x_1 \vee f_{(11)} = \beta_1 x_3 \vee \beta'_1\bar{x}_3 \vee \gamma_1,$$

где

$$\beta_1 = \beta_5 x_1,\ \beta'_1 = \beta'_5 x_1, \gamma_1 = \gamma_5 x_1 \vee f_{(11)},\ f_{(11)} = f_{(6)}\bar{x}_2,$$

функции

$$f_{(v)}(x_u) \in S_w\ (v \in \{6, 7, 8\}, u = v - 2)$$

не изменяются.

$$K_{КФ}(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) = K_{КФ}(\widetilde{d}_3 f_{(5)})) + K_{КФ}(f_{(11)}) = K_{КФ}(\widetilde{d}_3 f_{(5)})) + 1 + K_{КФ}(f_{(6)}\bar{x}_2) =$$
$$= 11 + 1 + K_{КФ}(f_{(6)}) = 12 + 12 = 24,$$
$$d_3(f_{(4)}) = (\widetilde{d}_3(f_1))f_{(2)}f_{(3)} = (\beta_1 x_3 \vee \beta'_1\bar{x}_3 \vee \gamma_1)f_{(2)}f_{(3)} = \beta_4 x_3 \vee \beta'_4\bar{x}_3 \vee \gamma_4,$$

где

$$\beta_4 = \beta_1 f_{(2)} f_{(3)}, \beta'_4 = \beta'_1 f_{(2)} f_{(3)}, \gamma_4 = \gamma_1 f_{(2)} f_{(3)}, f_{(2)} \in S_w, f_{(3)} \in S_w.$$

$$K_{КФ}(d_3(f_{(4)})) = K_{КФ}(\beta_4 x_3 \vee \beta'_4 \bar{x}_3 \vee \gamma_4) + K_{КФ}(\beta_4) + K_{КФ}(\beta'_4) + K_{КФ}(\gamma_4) + K_{КФ}(f_{(2)}) + K_{КФ}(f_{(3)}) =$$

$$= K_{КФ}(\beta_4 x_3 \vee \beta'_4 \bar{x}_3 \vee \gamma_4) + K_{КФ}(\beta_4) + K_{КФ}(\beta'_4) + K_{КФ}(\gamma_4) +$$

$$+ K_{КФ}(f_{(7)} \bar{x}_1) + K_{КФ}(f_{(8)} x_2) + K_{КФ}(f_{(3)}) = 3 + 1 + 1 + 1 + 12 + 12 + 2 = 32.$$

Так как

$$K_{КФ}(S_w) = 55, \ K_{КФ}(\widetilde{d}_3(f_{(4)}) = 24,$$

и

$$K_{КФ}(S''_{w3}) = K_{КФ}(\widetilde{d}_3(f_{(1)}) + K_{КФ}(\widetilde{d}_3(f_{(4)}) = 24 + 32 = 56,$$

то

$$\Delta K_{КФ}(F) = K_{КФ}(S''_{w3}) - K_{КФ}(S_w) = 56 - 55 = 1.$$

Так как

$$K_{ДНФ}(\widetilde{d}_3(f_{(5)})) = K_{КФ}(\widetilde{d}_3(f_{(5)})) = \ = (7 + 2^2) = 11$$

и

$$K_{ДНФ}(f_{(11)}) = K_{ДНФ}(f_{(6)} \bar{x}_2) = K_{ДНФ}(f_{(6)}),$$

то

$$K_{ДНФ}(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) = K_{ДНФ}(\widetilde{d}_3(f_{(5)}) +$$

$$+ K_{ДНФ}(f_{(6)})) = (7 + 2^2) + (9 + 2^2) = 24, \ K_{ДНФ}(S''_{w3}) = K_{ДНФ}(\widetilde{d}_3(f_{(4)})) = K_{ДНФ}(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) \times$$

$$\times K_{ДНФ}(f_{(2)}) \times K_{ДНФ}(f_{(3)}) = K_{ДНФ}(\widetilde{d}_3(f_{(1)})) \times (K_{ДНФ}(f_{(7)}) + K_{ДНФ}(f_{(8)})) \times K_{ДНФ}(f_{(3)}) =$$

$$= ((7 + 2^2) + (9 + 2^2)) \times ((9 + 2^2) + (9 + 2^2)) \times 2 = (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) \times 4 + 4 \times ((7 + 2^2) + 2) \times (9 + 2^2) =$$

$$. = 8 \times (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) + 8 \times (9 + 2^2) = 1248.$$

Так как

$$K_{ДНФ}(S_w) = 8 \times (9 + 2^2)^2 = 8 \times ((7 + 2^2) + 2) \times$$

$$\times (9 + 2^2) = 8 \times (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) + 16 \times (9 + 2^2) = 1352,$$

то

$$\Delta K_{ДНФ}(F) = K_{ДНФ}(S_w) - K_{ДНФ}(S''_{w3}) =$$

$$= 8 \times (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) + 16 \times (9 + 2^2) - (8 \times (7 + 2^2) \times (9 + 2^2) + 8 \times (9 + 2^2)) = 8 \times (9 + 2^2) =$$

$$= 1352 - 1248 = 104.$$

Пренебрегая с целью упрощения вычислений поправкой $1/\ \Delta K_{ДНФ}(F)$, получим $Э(x_3) = \Delta K_{ДНФ}(F)/(\Delta K_{КФ}(F)) = 104/1 = 104$. Аналогично для x_u $(u \in \{4, 5, 6\})$ - $Э(x_u) = 104$.

То есть по новому критерию эффективность $Э(x_u) = 104$ выделения переменных x_u $(u \in \{3, 4, 5, 6\})$ меньше эффективности $Э(x_1) = Э(x_2) = 676$ выделения переменных x_1, x_2.

Легко проверить, что при увеличении числа n сомножителей во вторых слагаемых формул функций f_v $(v \in \{5, 6, 7, 8)$ на величину $\Delta > 0$ знаменатели показателей $Э(x_1), Э(x_2)$, не изменяются, а их числители станут равными $8 \times (9 + 2^{2+\Delta})^2$.
Числитель показателя $Э(x_u)\,(u \in \{3, \ldots, 6\})$ станет равным $4 \times (9 + 2^{2+\Delta})$, а значение его знаменателя возрастет. То есть показатели $Э(x_1), Э(x_2)$ более чем в $8 \times (9 + 2^{2+\Delta})^2\,/$ $4 \times (9 + 2^{2+\Delta}) = 2 \times (9 + 2^{2+\Delta})$ раз превысят показатель $Э(x_u)$. Следовательно приоритет переменных x_1, x_2 при выборе переменной выделения сохранится.

В указанном случае, увеличивая n, можно сделать разницу объемов промежуточных форм при выделениях переменных x_1, x_2 и переменных x_u $(u \in \{3, 4, 5, 6\})$, сколь угодно большой. Очевидно, что в той же мере будет расти и эффективность применения нового критерия, так как применение прежнего критерия при увеличении n ведет к бесконтрольному росту объема промежуточных выражений.

4. Уменьшение наибольшего объема промежуточных форм

Уменьшение наибольшего объема промежуточных форм, получаемых в процессе выделения переменных за счет отказа от подстановки или упрощением вида тех приведенных форм локальных функций, которые не влияют на образование нуль-конъюнкций $x_u \bar{x}_u$ при получении дизъюнктивной нормальной формы функции F.

Введем ряд обозначений и определений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Определение 6. Совокупность формул $S_T(x_u)$, полученную из исходной совокупности S_w в результате выделения отсекающей переменной x_u полностью во всех без исключения локальных функциях исходной совокупности S_w, для которых это возможно, условимся называть тотальной усеченной совокупностью приведенных по x_u функций или $ТУС(x_u)$.

Она включает и приведенные по x_u формы локальных функций, графически зависящие от x_u, от которых главная функция суперпозиции [5] F перестала зависеть после выделения x_u. Совокупность $S_{TT}(x_u)$, полученную из $S_T(x_u)$ удалением локальных функций, от которых главная функция F суперпозиции перестала зависеть после выделения x_u, будем называть тотальной усеченной безызбыточной совокупностью или $ТУБС(x_u)$.

Определение 7. Минимально возможную по числу $K_{КФ}(S''_{wu})$ входящих в нее конъюнкций совокупность S''_{wu} формул, полученную из исходной совокупности S_w в результате выделения переменной x_u и не отличающуюся от $ТУС(x_u)$ по количеству $K_{ДНФ}(S''_{wu})$ конъюнкций в ДНФ суперпозиции F локальных функций , условимся называть минимальной усеченной совокупностью $S_M(x_u)$ приведенных по x_u функций или $МУС(x_u)$.

Она включает формы локальных функций, графически зависящие от x_u, от которых после выделения x_u перестала зависеть главная функция суперпозиции F, Совокупность $S_{MN}(x_u)$, полученную из $S_M(x_u)$ удалением локальных функций, от которых после выделения x_u перестала зависеть главная функция суперпозиции F, будем называть минимальной усеченной безызбыточной совокупностью или $МУБС(x_u)$.
Если совокупность $S_M(x_u)$ минимальна для всех отсекающих переменных x_u $(u \in \{1, 2, \dots, k_0\})$, будем называть ее минимальной усеченной безызбыточной совокупностью приведенных функций по всем переменным или $МУБС(F)$.

В [1] задача нахождения корней суперпозиции F локальных функций решалась путем последовательного получения тотальных усеченных совокупностей $S_T(x_u)$ приведенных форм функций для всех отсекающих переменных и исключением из дальнейшего рассмотрения функций, от которых главная функция суперпозиции F перестала зависеть после выделения. Для сокращения объема промежуточной информации в настоящей работе предлагается свести решение поставленной в [1] задачи к получению не тотальных, а минимальных усеченных совокупностей $S_M(x_u)$ приведенных функций. В связи с этим возникает задача получения таких совокупностей при выделении переменной x_u Некоторые свойства приведенных по x_u форм локальных функций и минимальных совокупностей $МУС(x_u)$ таких форм могут помочь их построить.

Определение 8. Условимся неприведенную относительно x_u форму $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ (графически равную $f_{(j)}$ при подстановке) любой локальной функции $f_{(j)}$ относить к 1-му типу. Приведенную относительно x_u форму $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ будем относить ко 2-му(положительному), 3-му(отрицательному) либо 4-му (биполярному) типу $T_u(f_{(j)})$, если $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta\, x_u \vee \gamma'$, $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta'\, \bar{x}_u \vee \gamma''$ либо $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta\, x_u \vee \beta'\, \bar{x}_u \vee \gamma$ соответственно.

Здесь β, β' – выражения, не равные нулю и не зависящие от переменной x_u,
γ – выражение, не зависящее от переменной x_u,
γ'', γ' – выражения, которые могут зависеть от прямой формы переменной x_u либо ее инверсии соответственно.

Определение 9. Если приведенная относительно x_u форма $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$) существует (то есть $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ графически не равна $f_{(j)}$) и принято решение о подстановке $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ вместо какого-либо вхождения $f_{(j)}$ в формулы других локальных функций в виде форм 2-го, 3-го или 4-го типа, то будем называть указанное вхождение активным и обозначать его тип как $A2, A3$ или $A4$ соответственно.

Все вхождения переменной выделения x_u в прямой или инверсной форме (подобно вхождению функций $f_{(j)} = x_u$ либо $f_{(j)} = \bar{x}_u$) будем относить к типам $A2$ или $A3$ соответственно. Если решения о подстановке не принято, то вхождение $\tilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ будем называть пассивным и обозначать его тип как $P2, P3$ или $P4$ соответственно. Если приведенной относительно x_u формы $\tilde{d}_u(f_{(j)})$ функции $f_{(j)}$ не существует или ее вхождение не ведет при выделении x_u к образованию новых нуль-конъюнкций, будем обозначать тип ее вхождения как $P1$. К типу $P1$ будем относить также все вхождения независимых переменных кроме переменной выделения x_u (тип $P2$) или ее инверсии (тип $P3$).

Условимся опускать буквы A или P в обозначении типа, если они не влияют на смысл содержащего его предложения.

При получении в [1] усеченной совокупности $S_T(x_u)$ приведенных форм локальных функций базовые приведенные формы $\tilde{d}_u(f_{(j)}) \in S_T(x_u)$ этих функций и их вхождения в формулы разных функций более высоких рангов полностью совпадали графически. Для сокращения объемов минимальной совокупности $S_M(x_u)$ приведенных форм функций будем допускать, чтобы одна и та же функция $f_{(j)}$ входила в формулы других функций в виде форм, отличающихся графически от базовых приведенных форм $\tilde{d}_u(f_{(j)}) \in S_M(x_u)$ либо даже в неприведенной форме $f_{(j)}$. Например, приведенные формы биполярного 4-го типа , при их логическом перемножении могут образовывать нуль- конъюнкции в комбинации с приведенными формами всех типов, выступая в каждом конкретном случае как приведенные формы 2-го , 3-го или 4-го типа в зависимости от того, какая часть (положительная, отрицательная или обе) формы задействована в образовании нуль-конъюнкций.

Задействованные части формы будем отображать их активными типами, записанными в виде верхних индексов обозначений основного типа - $A4^2, A4^3, A4^4$. Незадействованные части формы 4-го типа будем относить к пассивному типу $P4^2, P4^3, P4^4$, который может указываться в обозначении типа в фигурных скобках вслед за активным, например, $A4^2\{P4^3\}$ или $A4^3\{P4^2\}$. Типы $4^2, 4^3$ будем называть подтипами типа 4, т.к. любая приведенная форма локальной функции 4-го типа $\tilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \beta' \bar{x}_u \vee \gamma$ легко представляется в виде приведенной формы $\tilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta x_u \vee \gamma'$ подтипа 4^2, где $\gamma' = \beta' \bar{x}_u \vee \gamma$ либо $\tilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta' \bar{x}_u \vee \gamma''$ подтипа 4^3, где $\gamma'' = \beta x_u \vee \gamma$.' Поэтому в дальнейшем будем отличать типы базовых приведенных функций от типов их вхождений. Будем считать также, что обозначения 4^4 и 4 равнозначны.

Определение 10. Будем говорить, что приведенная по x_u форма $\tilde{d}_u(f_{(i)}) = \beta_1 x_u \vee \beta_1' \bar{x}_u \vee \gamma_1$ функции $f_{(i)}$ превосходит [равна] по коэффициентам выделения приведенную по x_u форму $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta_2 x_u \vee \beta_2' \bar{x}_u \vee \gamma_2$ функции $f_{(j)}$, если $\beta_1 > \beta_2$, $\beta_1' \geq \beta_2'$ либо $\beta_1 \geq \beta_2$, $\beta_1' > \beta_2'(\beta_1 = \beta_2, \beta_1' = \beta_2')$.

Здесь отношения $\beta_1 > \beta_2$ $[\beta_1' > \beta_2']$, $\beta_1 = \beta_2$ $[\beta_1' = \beta_2']$ означают, что ($\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0$) ,$[(\beta_1' \neq 0$, $\beta_2' = 0)]$ ($\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ либо $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$) $[(\beta_1' \neq 0, \beta_2' \neq 0$ либо $\beta_1' = 0, \beta_2' = 0)]$ соответственно. Если для пары приведенных форм функций можно установить такие отношения превосходства или равенства, то будем называть указанные формы и их типы сравнимыми или сопоставимыми по коэффициентам выделения, типам вхождений или просто сопоставимыми. Любые варианты приведенных форм функций типа 4 будем считать сопоставимыми с приведенными формами любого другого типа, т. к. они содержат по крайней мере в неявном (пассивном) виде все коэффициенты выделения.

Явно сопоставимы типы в парах 4, 2; 4, 3; 2, 1; 3, 1; 4, 1; 4^2, 4; 4^3, 4; 4^2, 2; 4^3, 3; неявно сопоставимы типы в парах 2, 4^3; 3, 4^2; 4^2, 4^3; а типы 2 и 3 несопоставимы.

Определение 11. Типы приведенных форм $\widetilde{d}_u(f_{(i)})$, $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ локальных функций , сами формы, графически зависящие от прямой (инверсной) или инверсной (прямой) формы x_u соответственно, их вхождения в формулы логических произведений $\widetilde{d}_u(f_{(i)})\ \widetilde{d}_u(f_{(j)})$, при реализации которых в ходе выделения x_u образуются нуль-конъюнкции $x_u \bar{x}_u$, будем называть нуль образующими по x_u относительно друг друга. Функциями, связанными с нуль образующими функциями, будем называть все функции $f_{(i)}$ меньших рангов, графически входящие в состав формул нуль образующих или связанных с ними функций $f_{(j)}$, типы вхождений $T_u(f_{(i)}) \neq P1$ которых совпадают или сопоставимы по коэффициентам выделения с типами $T_u(f_{(j)})$ функций $f_{(j)}$, формулы которых их графически включают. Возможны 9 пар нуль образующих типов - 2, 3; 2, 4^3; 2, 4; 3, 4^2; 3, 4; 4^2, 4^3; 4^2, 4; 4^3, 4; 4, 4.

Определение 12. Локальную функцию $f_{(i)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0})$ или ее вхождение в формулу другой локальной функции $f_{(j)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0}, f_{(i)})$ будем называть отсекающими относительно прямой формы [6] переменной x_u (инверсии переменной x_u) , если число конъюнкций $K_{ДНФ}(S''_{wu})$, полученных в ходе подстановки ее приведенной по x_u формы 2-го или 4^2 типа $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \beta\, x_u \vee \gamma'$ (формы 3-го или 4^3 типа $\widetilde{d}_u(f_{(j)}) = \widetilde{\beta}'\, \bar{x}_u \vee \gamma''$) при выделении переменной x_u в главной функции суперпозиции F, меньше указанного числа при отказе от подстановки. Если число конъюнкций $K_{ДНФ}(S''_{wu})$ не зависит от формы подставляемой функции $f_{(i)}(x_1, \ldots, x_u, \ldots, x_{k_0})$ при выделении x_u в функции F, то функция $f_{(i)}$ или ее вхождение являются неотсекающими относительно переменной x_u. Функция $f_{(i)}$ или ее вхождение 4-го типа могут быть отсекающими (неотсекающими) по обоим своим подтипам 4^2, 4^3 либо только по одному из них. Поэтому во втором случае следует определять их отсекающие подтипы как

$A4^2$ либо $A4^3$. Если же функция $f_{(i)}$ 4-го типа или ее вхождение являются отсекающими и по прямой форме переменной x_u и по ее инверсии, будем говорить, что они отсекающие по обоим своим подтипам или отсекающие по типу $A4$ или полностью отсекающие по переменной x_u. Если функции или их вхождения являются отсекающими по прямой форме (инверсии) переменной x_u, то им соответствует тип $A2(A3)$ либо $A4^2(A4^3)$.

Очевидно, что локальная функция является отсекающей (неотсекающей) по переменной x_u, если имеется хотя бы одно (ни одного) отсекающее вхождение по переменной x_u в формулу любой другой локальной функции. Если функция является неотсекающей по переменной x_u, то ей соответствует тип Р1. Если имеется не менее одного отсекающего вхождения функции по прямой форме (инверсии) переменной x_u и ни одного отсекающего вхождения по инверсии (прямой форме) переменной x_u, то будем говорить, что функция является отсекающей по прямой форме (инверсии) переменной x_u и относить ее к типу $A2(A3)$ либо $A4^2(A4^3)$. Если имеются отсекающие вхождения функции типа 4 и по прямой форме и по инверсии переменной x_u, то будем относить ее к типу $A4$ и говорить, что она полностью отсекающая.

Пример 3. Задана совокупность функций S_w :

$$\begin{cases} f_{(1)} = \beta_1 x_u \vee \gamma_1,\ f_{(2)} = \beta_2 x_u \vee \gamma_2,\ f_{(3)} = \beta_3 x_u \vee \gamma_3,\ f_{(4)} = \beta_4 x_u \vee \beta_4' \bar{x}_u \vee \gamma_4, \\ f_{(5)} = \beta_5' \bar{x}_u \vee \gamma_5,\ f_{(6)} = \beta_6 x_u \vee \gamma_6,\ f_{(7)} = \beta_7 x_u \vee \gamma_7,\ f_{(8)} = \beta_8 x_u \vee \gamma_8, \\ f_{(9)} = f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)} \vee f_{(4)} f_{(5)} \vee f_{(1)} f_{(4)},\ f_{(10)} = \beta_{10} x_u \vee \gamma_{10},\ F = f_{(9)} f_{(6)} \vee f_{(7)} f_{(8)} \vee x_u f_{(10)}. \end{cases} \qquad (3)$$

Если условиться, что количества $K_{ДНФ}$ конъюнкций в дизъюнктивных формах коэффициентов $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \beta_3, \gamma_3, \beta_4, \beta_4', \gamma_4, \beta_5', \gamma_5, \beta_6, \gamma_6, \beta_7, \gamma_7, \beta_8, \gamma_8, \beta_{10}, \gamma_{10}$ всех локальных функций примера 3 равны единице, то легко подсчитать, что

$$K_{ДНФ}(f_{(j)}) = 2 \text{ при } j \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\},\ K_{ДНФ}(f_{(4)}) = 3,$$
$$K_{ДНФ}(f_{(9)}) = K_{ДНФ}(f_{(1)}) \times K_{ДНФ}(f_{(2)}) \times K_{ДНФ}(f_{(3)}) + K_{ДНФ}(f_{(4)}) \times K_{ДНФ}(f_{(5)}) +$$
$$+ K_{ДНФ}(f_{(1)}) \times K_{ДНФ}(f_{(4)}) = 20.$$

Тогда число конъюнкций в ДНФ исходной совокупности функций S_w

$$K^0{}_{ДНФ}(S_w) = K_{ДНФ}(F) = K_{ДНФ}(f_{(9)}) \times K_{ДНФ}(f_{(6)}) + K_{ДНФ}(f_{(7)}) \times K_{ДНФ}(f_{(8)}) +$$
$$+ K_{ДНФ}(x_u) \times K_{ДНФ}(f_{(10)}) = 46.$$

Определим, являются ли отсекающими по x_u 1-е и 2-е вхождения локальных функций $f_{(1)}$ и $f_{(4)}$ в формулу функции $f_{(9)}$, подтипы $4^2, 4^3$ вхождений локальных функций $f_{(4)}, f_{(9)}$ и локальные функции $f_{(2)}, f_{(3)}, f_{(7)}, f_{(8)}, f_{(10)}$.

Произведя выделение переменной x_u способом, из [1] и раздела 1 найдем $ТУС(x_u)$.

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(1)}) = \beta_1 x_u \vee \gamma_1;\ \tilde{d}_u(f_{(2)}) = \beta_2 x_u \vee \gamma_2;\ \tilde{d}_u(f_{(3)}) = \beta_3 x_u \vee \gamma_3; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(4)}) = \beta_4 x_u \vee \beta_4' \bar{x}_u \vee \gamma_4;\ \tilde{d}_u(f_{(5)}) = \beta_5' \bar{x}_u \vee \gamma_5; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(6)}) = \beta_6 x_u \vee \gamma_6;\ \tilde{d}_u(f_{(7)}) = \beta_7 x_u \vee \gamma_7;\ \tilde{d}_u(f_{(8)}) = \beta_8 x_u \vee \gamma_8; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(10)}) = \beta_{10} x_u \vee \gamma_{10}; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(9)}) = \tilde{d}_u(f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)}) \vee \tilde{d}_u(f_{(4)} f_{(5)}) \vee \tilde{d}_u(f_{(1)} f_{(4)}) = \beta_{14} x_u \vee \beta_{13}' \bar{x}_u \vee \gamma_{14}, \\
\qquad \beta_{14} = \beta_{11} \vee \beta_{12} \vee \beta_{13},\ \beta_{13}' = \beta_{11}' \vee \beta_{12}',\ \gamma_{14} = \gamma_{11} \vee \gamma_{12} \vee \gamma_{13}; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(1)} f_{(2)} f_{(3)}) = \beta_{11} x_u \vee \gamma_{11}, \\
\qquad \delta_1 = \beta_1 \vee \gamma_1,\ \delta_2 = \beta_3 \vee \gamma_3,\ \gamma_9 = \gamma_1 \gamma_2, \\
\qquad \gamma_{11} = \gamma_9 \gamma_3,\ \beta_9 = \delta_1 \beta_2 \vee \beta_1 \gamma_2,\ \ \beta_{11} = \delta_2 \beta_9 \vee \beta_3 \gamma_9; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(4)} f_{(5)}) = \beta_{12} x_u \vee \beta_{11}' \bar{x}_u \vee \gamma_{12}, \\
\qquad \delta_3 = \beta_5' \vee \gamma_5,\ \beta_{12} = \beta_4 \gamma_5,\ \beta_{11}' = \delta_3 \beta_4' \vee \beta_4 \gamma_5,\ \gamma_{12} = \gamma_4 \gamma_5; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(1)} f_{(4)}) = \beta_{13} x_u \vee \beta_{12}' \bar{x}_u \vee \gamma_{13}, \\
\qquad \delta_4 = \beta_4 \vee \gamma_4,\ \beta_{13} = \delta_4 \beta_1 \vee \beta_4 \gamma_1,\ \beta_{12}' = \beta_4' \gamma_1,\ \gamma_{13} = \gamma_1 \gamma_4; \\
\qquad \tilde{d}_u(F) = \tilde{d}_u(f_{(9)} f_{(6)}) \vee \tilde{d}_u(f_{(7)} f_{(8)}) \vee \tilde{d}_u(x_u f_{(10)}) = \beta_{17} x_u \vee \beta_{14}' \bar{x}_u \vee \gamma_{17}, \\
\qquad \beta_{17} = \beta_{15} \vee \beta_{16} \vee \beta_{10} \vee \gamma_{10},\quad \gamma_{17} = \gamma_{15} \vee \gamma_{16}; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(9)} f_{(6)}) = \beta_{15} x_u \vee \beta_{14}' \bar{x}_u \vee \gamma_{15}, \\
\qquad \delta_5 = \beta_6 \vee \gamma_6,\ \beta_{14}' = \beta_{13}' \gamma_6,\ \beta_{15} = \delta_5 \beta_{14} \vee \beta_6 \gamma_{14},\ \gamma_{15} = \gamma_6 \gamma_{14}; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(f_{(7)} f_{(8)}) = \beta_{16} x_u \vee \gamma_{16}, \\
\qquad \delta_6 = \beta_7 \vee \gamma_7,\ \beta_{16} = \delta_6 \beta_8 \vee \beta_7 \gamma_8,\ \gamma_{16} = \gamma_7 \gamma_8; \\
\text{искл. } \tilde{d}_u(x_u f_{(10)}) = (\beta_{10} \vee \gamma_{10}) x_u.
\end{array}
\right. \qquad (4)
$$

Исключив помеченные сокращением «искл.» зависящие от x_u приведенные формы локальных функций, от которых функция F перестала зависеть, получим приведенную по x_u тотальную безызбыточную форму $\bar{d}_u(F)$ ($ТУБС(x_u)$) главной функции суперпозиции F, в которой содержится $K_{КФ}(F) = 50$ конъюнкций. В ее ДНФ содержится $K^1_{ДНФ}(F) = 38$ конъюнкций, т.е. 8 конъюнкций из $K^0_{ДНФ}(F) = 46$ оказались нуль-конъюнкциями и были исключены из дальнейшего рассмотрения.

Если при выделении x_u не подставлять приведенную форму функции $f_{(1)}$ вместо ее первого (второго) вхождения в $f_{(9)}$, то количество конъюнкций в ДНФ функции F не изменится (увеличится на 1, $K_{ДНФ}(F) = 39$). То есть второе вхождение функции $f_{(1)}$ в отличие от первого - отсекающее.

Если подобные испытания произвести поочередно для двух вхождений функции $f_{(4)}$ и вхождения функции $f_{(9)}$, то во всех случаях количество конъюнкций в ДНФ функции F увеличится. Следовательно оба эти вхождения 4-го типа – отсекающие. Если вместо второго вхождения функции $f_{(4)}$ и вхождения функции $f_{(9)}$ поочередно подставить представления $\widetilde{d}_u(f_{(j)})$ типа $4^3(4^2)$ этих же функций, то число конъюнкций $K_{ДНФ}(F)$ = 38 не изменится (увеличится на 2 и 1 соответственно). Поэтому отсекающим типом второго вхождения функции $f_{(4)}$ и единственного вхождения функции $f_{(9)}$ будем считать подтип 4^3. Подтип 4^2 обоих вхождений является неотсекающим . Следовательно, первое вхождение функции $f_{(1)}$ – неотсекающее относительно переменной x_u, второе – отсекающее, оба вхождения функции $f_{(4)}$ – отсекающие, но второе вхождение $f_{(4)}$, как и вхождение $f_{(9)}$, имеет отсекающий тип 4^3.

Результаты испытаний вхождений функций $f_{(2)}, f_{(3)}, f_{(7)}, f_{(8)}, f_{(10)}$ аналогичны результатам испытаний первого вхождения функции $f_{(1)}$.То есть эти вхождения также неотсекающие по x_u. Наличие неотсекающих относительно переменной x_u вхождений функций либо вхождений функций 4-го типа с неотсекающими подтипами позволяет при выделении некоторой переменной x_u экономить промежуточную память, не активизируя такие вхождения или подтипы вхождений 4-го типа, т.е. не подставляя вместо них приведенные формы функций . Так в примере 3 можно уменьшить количество конъюнкций в формуле результата выделения переменной x_u, не подставляя приведенные формы функций $f_{(2)}, f_{(3)}, f_{(1)}$ вместо вхождений $f_{(2)}, f_{(3)}$ и первого вхождения $f_{(1)}$ в F и подставляя приведенную форму функции $f_{(4)}$ 4^3-го, а не 4-го типа вместо ее вхождения в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(4)}$ функции $f_{(9)}$ и приведенную форму функции $f_{(9)}$ 4^3-го, а не 4-го типа вместо ее вхождения в конъюнкцию $f_{(8)}f_{(9)}$ функции F. Тогда количество $K_{КФ}(F)$ конъюнкций в представлении функции F после выделения x_u уменьшится за счет сохранения неизменными конъюнкций $f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$, $f_{(7)}f_{(8)}$, $x_u f_{(10)}$) и формул локальных функций $f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}, f_{(7)}, f_{(8)}, f_{(10)}$ вместо порождаемых ими функций $\beta_{11}, \delta_1, \gamma_{11}, \beta_9, \delta_2, \gamma_9, \beta_{16}, \delta_6, \gamma_{16}$ и уменьшения объема информации, получаемой в результате подстановки сокращенных форм функций $f_{(4)}, f_{(5)}$ с 50 конъюнкций до 43 конъюнкций, т.е на 14%.

В итоге можно обобщить свойства введенных выше объектов и процедур теоремой, которая является непосредственным следствием предыдущего изложения.

Теорема 1.

I^0. Минимальные по x_u совокупности локальных функций могут отличаться от тотальных усеченных совокупностей применением неприведенных вхождений функций типов $P1$, $P2$,$P3$,$P4$ вместо вхождений функций любого типа , не являющихся нуль образующими, или применением вхождений функций типа $A2, A4^2, A3, A4^3$ вместо вхождений нуль образующих или связанных с ними функций типа 4.

II^0. $МУС(x_u)$ не может отличаться от $ТУС(x_u)$ применением приведенных форм функций типа 3 или 2 вместо приведенных форм функций типа 2 или 3 соответственно.

III^0. Активность нуль образующих или связанных с ними функций $f_{(j)}$ может передаваться только через функции $f_{(i)}$, сопоставимые с $f_{(j)}$ по типам функций и входящие в состав формулы $f_{(j)}$).

Эта теорема позволяет получить основные правила отбора минимального числа активных локальных функций исходной совокупности S_w функций и их вхождений перед выделением x_u и построить на их основе алгоритм получения $МУБС(x_u)$. При изложении алгоритма используется понятие характеристического выражения $HV(f_{(j)})$ локальной функции $f_{(j)}$.

Определение 13. Характеристическим выражением $HV(f_{(j)})$ локальной функции $f_{(j)}$ будем называть выражение, полученное из формулы указанной функции заменой обозначений входящих в нее функций и переменных обозначениями их типов. Все вхождения переменной выделения x_u в прямой или инверсной форме будем относить к типам 2 или 3 соответственно. Остальные независимые переменные будем считать неприведенными, т.е. имеющими тип вхождения $P1$.

Алгоритм получения $МУС(x_u)$ **для любой отсекающей переменной** x_u состоит из восьми следующих пунктов.

1.Произведя очередное выделение переменной x_u в исходной совокупности функций S_w, находим совокупность $S_T(x_u)$, полученную из S_w до момента исключения из $S_T(x_u)$ промежуточных форм функций, графически зависящих от x_u , от которых F перестала зависеть. Типам функций 2, 3, 4 совокупности $S_T(x_u)$ ставим в соответствие пассивные типы $P2$,$P3$,$P4$, а неприведенным формам - тип $P1$.

2.Каждой локальной функции $f_{(j)} \in S_w$ исходной совокупности функций, для которой существует приведенная форма $\tilde{d}_u(f_{(j)}) \in S_T(x_u)$ из совокупности $S_T(x_u)$ приведенных форм функций, ставим в соответствие найденный в п.1 пассивный вариант ее типа $T_u(\tilde{d}_u(f_{(j)}))$: $P2$,$P3$ либо $P4$. Неприведенным функциям совокупности S_w ставим в соответствие тип $P1$.

3.Формируем характеристические выражения, соответствующие функциям $f_{(j)} \in S_w$. Каждому вхождению локальной функции $f_{(i)} \in S_w$ исходного представления совокупности функций в формулы других функций $f_{(j)} \in S_w$ ставим в соответствие тип ее приведенной формы, определенный для $f_{(i)}$ в п. 2. Значения указанных типов фиксируем в формулах (представлениях) соответствующих характеристических выражений $HV(f_{(j)})$.

4.Анализируем конъюнкции, входящие в формулы локальных функций $f_{(j)} \in S_w$ исходной совокупности и соответствующие им комбинации типов характеристических выражений $HV(f_{(j)})$. Активизируем типы вхождений, логические произведения которых могут образовать нуль-конъюнкции. Типы $2, A4^2$ $(3, A4^3)$ $\langle 4 \rangle$ нуль образующих вхождений функций активизируют отрицательные 4^3 (положительные 4^2) <обе $4^2, 4^3$> части формул их логических сомножителей 4-го типа. Все логические произведения нуль образующих вхождений функций должны быть активизированы так, что комбинации типов 2, 3 преобразуются в комбинации типов $A2, A3$; комбинации $P4, 2, \bar{3}$ ($P4, 3, \bar{2}$) - в комбинации $A4^3\{P4^2\}, A2\,(A4^2\{P4^3\}, A3)$; комбинации $4^2\{P4^3\}, 2(4^3\{P4^2\}, 3)$ – в комбинации $A4, A2(A4, A3)$; комбинации $A4^2\{P4^3\}, A4^2\{P4^3\}$ или $4^3\{P4^2\}, 4^3\{P4^2\}$ – в комбинации $A4,A4$; комбинации $4^2\{P4^3\}, 4(4^3\{P4^2\}, 4)$ – в комбинации $A4,A4(A4,A4)$, где обозначения $\bar{3}$ и $\bar{2}$ означают отсутствие в логических произведениях локальных функций типов 3 и 2 соответственно, а в фигурных скобках указаны неактивные части функций типа 4.

5.Должны быть активизированы все функции исходной совокупности S_w, имеющие активные вхождения в формулы других функций так, что тип функции $P2(P3)$, имеющей вхождение типа $A2(A3)$, изменяется на $A2(A3)$, тип функции $P4$, имеющей вхождение типа $A4^2$ ($A4^3$), изменяется на $A4^2\,(A4^3)$, тип функции $A4^2\{P4^3\}$ ($A4^3\{P4^2\}$), имеющей вхождение типа $A4^3\,(A4^2)$, изменяется на $A4(A4)$, тип функции $P4$, имеющей вхождение типа $A4$, изменяется на $A4$. Переходим в п. 4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим в п.6.

6.Все вхождения функций $f_{(i)}$ ранга r_i в формулы рассматриваемых активных функций $f_{(j)}$ более высоких рангов $r_j > r_i$ должны быть активизированы, если $f_{(i)}$ сопоставимы с $f_{(j)}$ по типам вхождений . Если тип $f_{(j)}$ – $A2(A3)$, а тип вхождения $f_{(i)}$ – $P2(P3)$, то тип вхождения $f_{(i)}$ изменяется на $A2(A3)$. Если тип $f_{(j)}$ – $A4^2\,(A4^3)$, а тип вхождения $f_{(i)}$ – $P4$, то тип вхождения $f_{(i)}$ изменяется на $A4^2\,(A4^3)$. Если тип $f_{(i)}$ – $A4^2\,(A4^3)$, а тип вхождения $f_{(i)}$ – $A4^3\{P4^2\}(A4^2\{P4^3\})$ то тип вхождения $f_{(i)}$ изменяется на $A4(A4)$. Переходим в п. 4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим в п.7.

7.Рассматриваем все оставшиеся неактивными функции $f_{(i)} \in S_w$, формулы которых включают конъюнкции функций, обращающиеся в нуль-конъюнкции при подстановке приведенных по x_u форм. В их характеристических выражениях $HV(f_{(j)})$. выявляем и активизируем все комбинации вхождений типов 2, 3; 2, 4^3; 3, 4^2; $4^2, 4^3$. Типы $T_u(f_{(j)}$ функций, формулы которых включают указанные комбинации, также активизируем. Находим главную функцию F суперпозиции и, если она не активизирована, активизируем ее.

8.Производим выделение переменной x_u в суперпозиции F из дополненной значениями типов функций и характеристических выражений исходной совокупности S_w локальных функций. При выделении x_u производим подстановку приведенных форм локальных функций $f_{(i)}$ в формулы активных функций $f_{(j)}$ вместо вхождений функций $f_{(i)}$, типы которых указаны в соответствующих характеристических выражениях $HV(f_{(j)})$.

Упрощая алгоритм и делая его более наглядным, можно всем базовым функциям из исходной совокупности S_w, которым соответствуют приведенные формы $f_{(i)}$ 4-го типа совокупности $S_T(x_u)$, сопоставлять тип 4.Но при подстановке таких функций в другие локальные функции $f_{(i)}$ следует либо использовать базовый тип 4 либо преобразовывать $f_{(i)}$ в формы типов 4^2, 4^3, входящих в формулы характеристических выражений $HV(f_{(j)})$.

Пример 4. Проиллюстрируем работу алгоритма, получая $MУС(x_u)$ при выделении переменной x_u в функции F из примера 3.

1, 2. В примере 3 после выделения переменной x_u из исходной совокупности S_w функций (см. (3)) суперпозиции F была получена тотальная усеченная совокупность $S_T(x_u)$, приведенных по x_u функций (см. (4)). Каждой функции $f_{(i)} \in S_w$ поставим в соответствие тип $T_u(f_{(i)})$ этой функции $f_{(i)} \in S_T(x_u)$:

$T_u(f_{(1)}) = T_u(f_{(2)}) = T_u(f_{(3)}) = T_u(f_{(6)}) = T_u(f_{(7)}) = T_u(f_{(8)}) = T_u(f_{(10)}) = P2$, $T_u(f_{(5)}) = P3$, $T_u(f_{(4)}) = T_u(f_{(9)}) = T_u(F) = P4$.

Коэффициентам

$\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2, \beta_3, \gamma_3, \beta_4, \beta'_4, \gamma_4, \beta'_5, \gamma_5, \beta_6, \gamma_6, \beta_7, \gamma_7, \beta_8, \gamma_8, \beta_{10}, \gamma_{10}$, не зависящим от x_u и поэтому не имеющим приведенной формы, ставим в соответствие тип $P1$.

3. Формируем характеристические выражения, соответствующие функциям $f_{(j)} \in S_w$. Каждому вхождению каждой локальной функции $f_{(i)} \in S_w$ ставим в соответствие тип ее приведенной формы, определенный для $f_{(i)}$ в п. 2:

$$HV(f_{(1)}). = HV(f_{(2)}) = HV(f_{(3)}) = HV(f_{(5)}) =$$
$$= HV(f_{(6)}) = HV(f_{(7)}) = HV(f_{(8)}) = P1P2 \vee P1,\ HV(f_{(4)}) = P1P2 \vee P1P3 \vee P1,$$
$$HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee P4P3 \vee P2P4, HV(F) = P2P4 \vee P2P2 \vee P2P2.$$

4.Просматривая формулы всех функций, выявляем комбинации вхождений нуль образующих функций и активизируем их. Изменятся типы вхождений функций в формулы функции $f_{(9)}$ и F:

$$HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee A4^2\{P4^3\}A3 \vee A2A4^3\{P4^2\},\ HV(F) = A2A4^3\{P4^2\} \vee P2P2 \vee P2P2.$$

5. Просматриваем формулы всех функций и выявляем в них активные вхождения функций. Находим в исходной совокупности S_w функции, активные вхождения которых выявлены, и активизируем их. Изменятся типы функций

$$f_{(1)}, f_{(4)}, f_{(5)}, f_{(6)}, f_{(9)} : T_u(f_{(1)}) = T_u(f_{(6)}) = A2, T_u(f_{(5)}) = A3, T_u(f_{(9)}) = A4^3\{P4^2\}.$$

Вхождения функции $f_{(4)}$ в функцию $f_{(9)}$ относятся к типам $A4^2, A4^3$. Поэтому ее базовый тип $T_u(f_{(4)}) = A4$. Переходим в п. 4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим в п.6.

6. Рассматривая наряду со всеми локальными функциями функцию $f_{(9)}$, имеющую тип $A4^3\{P4^2\}$, анализируем типы всех сопоставимых по типам вхождений в ее формулу других функций. Вхождение функции $f_{(4)}$ в конъюнкцию $f_{(4)}f_{(5)}$ имеет тип $A4^2\{P4^3\}$, сопоставимый с типом функции $f_{(9)}$ по пассивной части . Поэтому пассивный тип $\{P4^3\}$ активизируется и преобразуется в тип $\{A4^3\}$, а затем комбинация двух активных типов $A4^2, A4^3$ рассматриваемого вхождения $f_{(4)}$ преобразуется в тип $A4$. $HV(f_{(9)} = P2P2P2 \vee A4A3 \vee A2A4^3$. Вхождение функции $f_{(4)}$ в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(4)}$ имеет активный тип $A4^3\{P4^2\}$, сопоставимый с типом функции $f_{(9)}$ и по активной и по пассивной части , поэтому тип указанного вхождения $f_{(4)}$ не преобразуется и остается равным $A4^3$. Переходим к п. 4 до тех пор, пока в S_w изменяются типы функций и их вхождений, иначе переходим к п.7.

7. Активизируем все неактивизированные функции, формулы которых включают нуль образующие комбинации вхождений других функций. Изменится тип функции F : $T_u(F) = A4$. Так как главная функция F суперпозиции уже активизирована, переходим в п.8.

8. В результате выполнения предыдущих пунктов алгоритма получены следующие значения типов и характеристических выражений локальных функций.

$T_u(F) = A4$, $HV(F) = A4^3A2 \vee P2P2 \vee P2P2$, $T_u(f_{(9)}) = A4^3$, $HV(f_{(9)}) = P2P2P2 \vee A4A3 \vee A2A4^3$, $T_u(f_{(4)}) = A4$ (т.к. есть вхождения $f_{(4)}$ типа $A4^3$ и $A4^2$), $T_u(f_{(1)}) = A2$ (т.к. есть вхождения $f_{(1)}$ типа $A2$ и $P2$), $T_u(f_{(6)}) = A2$,
$T_u(f_{(2)}) = T_u(f_{(3)}) = T_u(f_{(7)}) = T_u(f_{(8)}) = T_u(f_{(10)}) = P2, T_u(f_{(5)}) = A3$. Производим выделение переменной x_u в суперпозиции F из дополненной значениями типов функций и характеристических выражений исходной совокупности S_w локальных функций.
В процессе выделения при получении приведенной формы функции $f_{(9)} = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)} \vee f_{(4)}f_{(5)} \vee f_{(1)}f_{(4)}$ типа $T_u(f_{(9)}) = A4^3$ согласно ее характеристическому выражению $HV(f_{(9)}).= P2P2P2 \vee A4A3 \vee A2A4^3$ вместо вхождений функций $f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}$ в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$ не будем подставлять их приведенные формы, а в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(4)}$ вместо приведенной формы 4-го типа $\tilde{d}_u(f_{(4)}) = \beta_4 x_u \vee \beta_4' \bar{x}_u \vee \gamma_4$ подставим эквивалентное ей, но менее сложное выражение подтипа $A4^3$: $\beta_4' \bar{x}_u \vee \gamma_{4m}$, где $\gamma_{4m} = \beta_4 x_u \vee \gamma_4$.

Полученная МУС(x_u) состоит из 24-х локальных функций.

$$
\begin{cases}
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(9)}) = \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(4)}f_{(5)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(4)}) = \beta_{14m}x_u \vee \beta'_{13m}\bar{x}_u \vee \gamma_{14m}, \\
\quad \beta_{14m} = \beta_{12} \vee \beta_{13m}, \beta'_{13m} = \beta'_{11} \vee \beta'_{12m}, \gamma_{14m} = \gamma_{12} \vee \gamma_{13m} \vee f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}) = f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}, \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(4)}f_{(5)}) = \beta_{12}x_u \vee \beta'_{11}\bar{x}_u \vee \gamma_{12}, \\
\quad \delta_3 = \beta'_5 \vee \gamma_5, \beta_{12} = \beta_4\gamma_5, \beta'_{11} = \delta_3\beta'_4 \vee \beta_4\gamma_5, \gamma_{12} = \gamma_4\gamma_5; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(1)}f_{(4)}) = \beta_{13m}x_u \vee \beta'_{12m}\bar{x}_u \vee \gamma_{13m}, \\
\quad \gamma_{4m} = \beta_4 x_u \vee \gamma_4, \beta_{13m} = \beta_1\gamma_{4m}, \beta'_{12m} = \beta'_4\gamma_1, \gamma_{13m} = \gamma_1\gamma_{4m}; \\
. \quad \widetilde{d}_u(F) = \widetilde{d}_u(f_{(9)}f_{(6)}) \vee \widetilde{d}_u(f_{(7)}f_{(8)} \vee \widetilde{d}_u(x_u f_{(10)}) = \beta_{17m}x_u \vee \beta'_{14m}\bar{x}_u \vee \gamma_{17m}; \\
\quad \beta_{17m} = \beta_{15m} \vee f_{(10)}, \gamma_{17m} = \gamma_{15m} \vee f_{(7)}f_{(8)}, \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(9)}f_{(6)}) = \beta_{15m}x_u \vee \beta'_{14m}\bar{x}_u \vee \gamma_{15m}, \\
\quad \delta_5 = \beta_6 \vee \gamma_6, \beta_{15m} = \delta_5\beta_{14m} \vee \beta_6\gamma_{14m}, \beta'_{14m} = \beta'_{13m}\gamma_6, \gamma_{15m} = \gamma_{14m}\gamma_6; \\
\text{искл. } \widetilde{d}_u(f_{(7)}f_{(8)}) = f_{(7)}f_{(8)}, \ \widetilde{d}_u(x_u f_{(10)}) = x_u f_{(10)}.
\end{cases}
\tag{5}
$$

Так как функции $f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}, f_{(7)}, f_{(8)}, f_{(10)}$ неотсекающие и не участвуют в образовании нуль-конъюнкций $x_u\bar{x}_u$ при получении ДНФ функции F, их формулы не изменились.

Исключив помеченные сокращением «искл.» зависящие от x_u приведенные формы локальных функций, от которых функция F перестала зависеть, получим приведенную по x_u миниимальную безызбыточную форму $\bar{d}_u(F)$ ($МУБС(x_u)$) главной функции суперпозиции F, в которой содержится $K_{КФ}(F) = 43$ конъюнкции . Это на 7 конъюнкций или на 14% меньше указанного показателя для $ТУБС(x_u)$. А в ее ДНФ , как и в ДНФ $ТУБС(x_u)$., содержится $K^1_{ДНФ}(F) = K^0_{ДНФ}(F) = 38$ конъюнкций.

Легко проверить, что, изменив выражение (3), а именно, добавив в конъюнкцию $f_{(1)}f_{(2)}f_{(3)}$ функции $f_{(9)}$ и/или в конъюнкции $f_{(7)}f_{(8)}$, $x_u f_{(10)}$ функции F в качестве сомножителей любые функции первого ранга 2-го типа, можно сделать эффективность применения рассмотренного алгоритма выделения x_u в функции F сколь угодно высокой.

Заключение

Экспериментальная проверка показала, что для решения с помощью предложенного выше алгоритма логического уравнения из примера 4 работы [1] потребовалось размещать в памяти ЭВМ до 350 символов вместо 700 символов, необходимых при применении варианта алгоритма из работы [1]. При этом для реализации предложенного алгоритма потребовалось дополнительное машинное время. Эти дополнительные потери времени оказались небольшими. Время выполнения программы до и после модернизации составили 7 и7,5 минуты соответственно(процессор Intel Pentium Dual Core, 2,7 GHz).

Список литературы

1. Пошерстник, М. С. Решение логических уравнений методом выделения переменных / М. С. Пошерстник // Автоматика и телемеханика – 1979. – Т. 2 – С. 132-140.
   POSHERSTNIK, M. S. (1979) Solution of logical equations by the method of variable detection. Automation and Remote control. Vol. 2 p. 132- 140.

2. RUDEANU, S. (2001) Lattice Functions and equations. London: Springer-Verlag. 435 p.

3. Брусенцов, Н. П. Компьютеризация булевой алгебры / Н. П. Брусенцов Ю. С. Владимирова // ДАН. – 2004. – Т. 395. – С. №1 – 4.
   BRUSENTSOV, N. P., VLADIMIROVA, Uu. S. (2004) Computerization of Boolean algebra. Doklady Mathematics. Vol. 395 p. 1 – 4.

4. Закревский, А. Д. Логические уравнения / А. Д. Закревский. – Москва: «Едиториал УРСС», 2003. – 95с.
   ZAKREVSKII, A. D. (2003) Logical equations. Moscow: “Editorial URSS”. 95 p.

5. Кузнецов, О. П. Дискретная математика для инженера / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон – Вельский. – Москва. 1980. – 344 с.
   KUZNETSOV, O. P., ADELSON – VELSKII, G. M. (1980) Discrete mathematics for engineer. Moscow: “Energy”, 344 p

6. Савельев, А. Я. Арифметические и логические основы цифровых автоматов – «Высшая школа», Москва, 1980. - 255 с.
   SAVELEV, A. Ya. (1980) Arithmetic and Logical foundation of digital machines, Moscow: “Higher School”, 255 p.