УДК 519.21

ФЛУКТУАЦІЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ З ІМПУЛЬСНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

© Семенюк С.А., Чабанюк Я.М.

Національний університет «Львівська Політехніка»
Інститут прикладної математики та фундаментальних наук
79013, Львів, вул. С.Бандери 12
e-mail: *semenyuk@gmail.com*

Abstract. Behavior of the Stochastic approximation procedure (SAP) fluctuations characterize the system convergence speed. In this paper we consider properties of the SAP fluctuations in the case when the regression function is perturbed by the Markov impulsive process near the equilibrium point of the averaged system. As a result it will allow to consider the SAP asymptotic behavior

Вступ

Використання процедури стохастичної апроксимації випадкових еволюцій базується на приблизній рівності вихідної та усередненої еволюційних систем [1]. При цьому виникає проблема вивчення флуктуацій такої процедури. Зокрема в [2] досліджено поведінку флуктуацій процедури стохастичної апроксимації для дифузійної еволюційної системи з марковськими переключеннями, де функція швидкості має сингулярно збурений доданок за малим параметром. Відзначимо важливість флуктуацій при встановленні швидкості збіжності процедури в схемі усереднення та з дифузійним збуренням у схемі серій.

1. Постановка задачі та позначення

Неперервна процедура стохастичної апроксимації задається евоюційним рівнянням [1]:

$$du^{\varepsilon}(t) = a(t)[C(u^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^4))dt + \varepsilon d\eta^{\varepsilon}(t)], \tag{1}$$

з функцією регресії $C(u,\cdot) \in C^2(R^n)$.

Марковський процес $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається генератором:

$$Q\varphi(x) = q(x) \int\limits_X P(x,dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X),$$

де $\mathbf{B}(X)$ - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум – нормою $||\varphi|| = \max\limits_{x\in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$ визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$ із стаціонарним розпоідлом $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$ марковського процесу $x(t), t \geq 0$ визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \; q = \int\limits_X \pi(dx)q(x).$$

Потенціальный оператор R_0 [3] генератора Q визначається співвідношенням: $R_0 = \Pi - (\Pi + Q)^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int\limits_X \pi(dy)\varphi(y)$ – проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : Q\varphi = 0\}$ нулів оператора Q.

2. Властивості збурюючого процесу

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ задається співвідношеннями:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int\limits_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^4)); \tag{2}$$

де сімейство процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x), t \geq 0, x \in X$ задається генераторами

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-4} \int\limits_R [\varphi(w + \varepsilon^2 v) - \varphi(w)]\Gamma(dv; x), x \in X. \tag{3}$$

Генератор (3) допускає асимптотичне представлення

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \varepsilon^2\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w),$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w); \quad b_1(x) = \int\limits_R v\Gamma(dv; x) \tag{4}$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w); \quad b_2(x) = \int\limits_R v^2\Gamma(dv; x), \tag{5}$$

а залишковий член такий, що $||\varepsilon^2\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Також нехай при цьому виконується умова балансу

$$\Pi\Gamma_1(x) = \int\limits_X \pi(dx)b_1(x) = 0. \tag{6}$$

При відповідних умовах на керуючу функцію $a(t)$, функцію регресії $C(u, x)$ та збурюючий процес неперервна ПСА (1) з імовірністю одиниця зібгається до точки рівноваги усередненої системи

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \hat{C}(\hat{u}(t)), \tag{7}$$

де

$$\hat{C}(u) = \int\limits_X \pi(dx)C(u, x).$$

Умовою існування точки рівноваги u_0 є умова балансу

$$\Pi C(0,x) = \int_X \pi(dx) C(0,x) = 0. \tag{8}$$

Надалі будемо розглядати ПСА з керуючою функцією:

$$a(t) = a/t^\gamma, 0 < t_0 < t, a > 0, 1/2 < \gamma \le 1$$

Нормоване імпульсне збурення задається співвідношенням

$$\mu^\varepsilon(t) = a \int_{t_0}^{t} \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^4))/s^\gamma;$$

Розглянемо асимптотичні властивості процесу $\mu^\varepsilon(t)$.

Лема 1. Генератор двокомпонентного марковського процесу $\mu^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^4)$, $t \ge 0$ має вигляд:

$$B^\varepsilon(x)\varphi(w,x) = \varepsilon^{-4} Q\varphi(w,x) + at^{-\gamma}\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \tag{9}$$

де $\Gamma^\varepsilon(x)$ - генератор сімейства процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x), t \ge 0, x \in X$.

Доведення. Нехай $\mu^\varepsilon(t) = w_t$, $x(t/\varepsilon^4) = x_t$. Обчислимо умовне математичне сподівання:

$$\begin{aligned} E\ & [\varphi(\mu^\varepsilon(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^4)) - \varphi(\mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4)) | \mu^\varepsilon(t) = w, x(t/\varepsilon^4) = x] = \\ = \ & E[\varphi(w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = E[\varphi(w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(w, x_{t+\Delta})] + \\ & + E[\varphi(w, x_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)]. \end{aligned}$$

А з використанням означення генератора марковського процесу $\mu^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^4)$, $t \ge 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} B^\varepsilon(x)\varphi(w,x) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = \\ = \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) &- \varphi(w, x_{t+\Delta})] + \lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w, x_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)]. \end{aligned}$$

Оскільки згідно означень

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(w, x_{t+\Delta})] = at^{-\gamma}\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x),$$

і

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(w, x_{t+\Delta}) - \varphi(w,x)] = \varepsilon^{-4} Q\varphi(w,x),$$

то просумувавши ці дві границі, одержимо (9). □

Лема 2. Генератор двокомпонентного марковського процесу $\mu^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^4)$, $t \ge 0$ на тест-функціях $\varphi(w,\cdot) \in C^3(R)$ допускає асимптотичне предсталення:

$$\begin{aligned} B^\varepsilon(x)\varphi(w,x) &= \varepsilon^{-4} Q\varphi(w,x) + \varepsilon^{-2} at^{-\gamma}\Gamma_1(x)\varphi(w,x) + \\ &+ at^{-\gamma}\Gamma_2(x)\varphi(w,x) + \theta_B(x)\varphi(w,x), \end{aligned} \tag{10}$$

де залишковий член такий, що $||\theta_B(x)\varphi(w,x)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Доведення проводиться із використанням розкладу оператора $\Gamma^\varepsilon(x)$ (3) по степенях ε та результатів леми 1. $\square$

Зрізаний оператор набуде вигляду:

$$B_0^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-4}Q\varphi(w,x) + \\ +\varepsilon^{-2}at^{-\gamma}\Gamma_1(x)\varphi(w,x) + at^{-\gamma}\Gamma_2(x)\varphi(w,x). \tag{11}$$

Лема 3. За умови балансу (6) розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (11) на тест-функціях

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon^2 t^{-\gamma}\varphi_2(w,x) + \varepsilon^4 t^{-\gamma}\varphi_0(w,x)$$

реалізується співвідношенням:

$$B_0^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = t^{-\gamma}B_t\varphi(w) + \varepsilon^2\theta_\mu^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{12}$$

де залишковий член $\theta_\mu^\varepsilon\varphi(w)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор B_t визначається формулою:

$$B_t\Pi = a\Pi\Gamma_2(x)\Pi + a^2t^{-\gamma}\Pi\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\Pi. \tag{13}$$

Доведення. Для виконання рівності (12) необхідно щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа співпадали. Обчислимо:

$$B_0^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^{-4}Q\varphi(w) + \varepsilon^{-2}t^{-\gamma}[Q\varphi_2(w,x) + a\Gamma_1(x)\varphi(w)] + \\ +t^{-\gamma}[Q\varphi_0(w,x) + at^{-\gamma}\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x) + a\Gamma_2(x)\varphi(w)] + \\ +\varepsilon^2 at^{-2\gamma}[\Gamma_1(x)\varphi_0(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi_2(w,x)] + \varepsilon^4 at^{-2\gamma}\Gamma_2(x)\varphi_0(w,x).$$

Оскільки $\varphi(w)$ не залежиить від x то

$$Q\varphi(w) = 0, \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_Q.$$

Умова балансу (6) є умовою розв'язності рівняння

$$Q\varphi_2(w,x) + a\Gamma_1(x)\varphi(w) = 0.$$

Тому

$$\varphi_2(w,x) = aR_0\Gamma_1(x)\varphi(w). \tag{14}$$

Рівняння

$$Q\varphi_0(w,x) + at^{-\gamma}\Gamma_1(x)\varphi_2(w,x) + a\Gamma_2(x)\varphi(w) = B_t\varphi(w)$$

з використанням (14) можна звести до вигляду

$$Q\varphi_0(w,x) + a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\varphi(w) + a\Gamma_2(x)\varphi(w) = B_t\varphi(w)$$

Умова розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор B_t в формі (13).

Тоді

$$\varphi_0(w,x) \;=\; R_0[a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + a\Gamma_2(x) - B_t]\varphi(w), \tag{15}$$

а враховуючи що $R_0B_t = 0$, то $\varphi_0(w,x) = R_0[a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + a\Gamma_2(x)]\varphi(w)$.

Використовуючи (13) та (15), решту членів розкладу можна звести до вигляду

$$\varepsilon^2 at^{-2\gamma}[\Gamma_1(x)\varphi_0(w,x) + \Gamma_2(x)\varphi_2(w,x)] + \varepsilon^4 at^{-2\gamma}\Gamma_2(x)\varphi_0(w,x) =$$
$$= \varepsilon^2 at^{-2\gamma}[\Gamma_1(x)R_0[a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + a\Gamma_2(x)] + a\Gamma_2(x)R_0\Gamma_1(x)]\varphi(w) +$$
$$+\varepsilon^4 at^{-2\gamma}\Gamma_2(x)R_0[a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) + a\Gamma_2(x)]\varphi(w) = \varepsilon^2\theta^\varepsilon_\eta(x)\varphi(w).$$

Обмеженість $\theta^\varepsilon_\mu\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\Gamma_1(x)$,$\Gamma_2(x)$ та R_0. □

Лема 4. За умови балансу (6) має місце слабка збіжність

$$\mu^\varepsilon(t) \to \mu^0(t), \qquad \varepsilon \to 0$$

Граничний процес $\mu^0(t)$ визначається генератором

$$B_t\varphi(w) = \frac{1}{2}B(t)\varphi''(w),$$

де

$$B(t) = at^{-\gamma}B_1 + aB_2;$$
$$B_1 = 2\Pi b_1(x)R_0b_1(x) = 2\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x); \quad b_1(x) = \int_R v\Gamma(dv;x);$$
$$B_2 = \Pi b_2(x) = \int_X \pi(dx)b_2(x); \quad b_2(x) = \int_R v^2\Gamma(dv;x).$$

Доведення. Використовуючи означення операторів при обчисленні правої частини (13) одержимо:

$$\begin{aligned} B_t\varphi(w) &= [a\Pi\Gamma_2(x) + a^2t^{-\gamma}\Pi\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)]\varphi(w) = \\ &= \frac{1}{2}a\int_X \pi(dx)b_2(x)\varphi''(w) + at^{-\gamma}\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x)\varphi''(w). \end{aligned}$$

І в результаті одержимо:

$$B_t\varphi(w) = \frac{1}{2}B(t)\varphi''(w).$$

Закінчення доведення проводиться по схемі доведення теореми 4.2 в [3]. □

Зауваження 1. Граничний процес $\mu_0(t)$ має вигляд

$$\mu_0(t) = \sigma(t)W(t)$$

де $\sigma(t)\sigma^*(t) = B(t)$, а $W(t)$ – стандартний вінерівський процес.

Таким чином граничним процес для нормованого збурюючого процесу $\mu^\varepsilon(t)$ є дифузійним із нульовим зсувом.

3. Властивості флуктуацій

Розглянемо флуктуації ПСА (1) в наступному нормуванні

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}t^\delta \left[u^\varepsilon(t) - \varepsilon\mu^\varepsilon(t)\right], \tag{16}$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови балансу (8) і (6), а також умови збіжності ПСА (1). Тоді має місце слабка збіжність

$$(v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t)) \to (\zeta(t), \sigma(t)W(t)), t > 0, \qquad \varepsilon \to 0$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$. Граничний процес $(\zeta(t), \mu_0(t))$ задається генератором

$$L\varphi(v,w) \;=\; \left[v(act^{-\gamma} + \delta t^{\delta-1}) + act^{\delta-\gamma}w\right]\varphi'_v(v,w) + \frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v,w),$$

де

$$c = \int_X \pi(dx)C'(0,x); \quad B(t) = at^{-\gamma}B_1 + t^{\delta-\gamma}B_2,$$

а B_1, B_2 визначено в лемі 4.

Зауваження 2. Граничний процес $\zeta(t)$ задовольняє стохастичному диференціальному рівнянню

$$d\zeta(t) = \left[\zeta(t)(act^{-\gamma} + \delta t^{\delta-1}) + act^{\delta-\gamma}\sigma(t)W(t)\right]dt. \tag{17}$$

Зауваження 3. Якщо, аналогічно до [2], розглянути спрощений випадкок, коли $\gamma = 1$, $\delta = 1 - \gamma = 0$, то одержимо

$$d\zeta(t) = act^{-1}\left[\zeta(t) + \sigma(t)W(t)\right]dt.$$

Лема 5. Нормована флуктуація (16) задовольняє диференціальному рівнянню

$$dv^\varepsilon(t) = \mathbf{C}^\varepsilon(v^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon)dt, \tag{18}$$

де

$$\mathbf{C}^\varepsilon(v,x) = \varepsilon^{-1}at^{\delta-\gamma}C(\varepsilon z^\varepsilon(t), x) + \delta vt^{-1},$$

$z = t^{-\delta}v + w,\ v = v^\varepsilon(t),\ w = \mu^\varepsilon(t).$

Доведення. Для одержання (18) продиференціюємо (16) з використанням (1). □

Розглянемо півгрупи операторів $\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+s}(x)\varphi(v) = \varphi(v^\varepsilon(t+s))$, $v^\varepsilon_x(s) = v$, які породжуються розв'язками системи (18) з генератором

$$\mathbf{C}^\varepsilon_t(x)\varphi(v) \;=\; \mathbf{C}^\varepsilon(v,x)\varphi'(v). \tag{19}$$

Лема 6. Генератор (19) півгрупи операторів $\mathbf{C}^{\varepsilon,t}_{t+s}(x)$, $x \in X$ має асимптотичне представлення

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^\varepsilon_t(x)\varphi(v) \;&=\; \left[\delta vt^{-1} + at^{\delta-\gamma}zC'(0,x)\right]\varphi'(v) + \\ &+\; \varepsilon^{-1}at^{1-2\gamma}C(0,x)\varphi'(v) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi'(v),\end{aligned} \tag{20}$$

де $\theta^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежена по x функція.

Доведення. Для одержатання (20 в генераторі (19) розкладемо функцію C в ряд Тейлора по першій змінній. □

Лема 7. Генератор трьохкомпонентного марковського процесу [4]

$$v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4) = x_t^\varepsilon, t \geq 0 \tag{21}$$

має аналітичне вигляд

$$L^\varepsilon \varphi(v, w, x) \;=\; \left[\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} a t^{-\gamma} \Gamma^\varepsilon(x) + \mathbf{C}_t^\varepsilon(x)\right] \varphi(v, w, x), \tag{22}$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання, ввівши позначення $x(t/\varepsilon^4) = x_t$, $v^\varepsilon(t) = v_t$, $\mu^\varepsilon(t) = w_t$:

$$\begin{aligned}
&E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), \mu^\varepsilon(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^4)) - \varphi(v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4))| \\
&v^\varepsilon(t) = v, \mu^\varepsilon(t) = w, x(t/\varepsilon^4) = x] = E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] = \\
&= E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] + E[\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)].
\end{aligned}$$

Використовуючи означення генератора марковського процесу (21), одержуємо

$$\begin{aligned}
&L^\varepsilon \varphi(v, w, x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), \mu^\varepsilon(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^4)) - v^\varepsilon(t), \mu^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4))| \\
&v^\varepsilon(t) = v, \mu^\varepsilon(t) = w, x(t/\varepsilon^4) = x] = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)] = \\
&= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E[\varphi(v_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] + \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} E\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(v, w, x)]
\end{aligned}$$

Оскільки перша з границь, згідно леми 6, рівна (20), а друга, згідно леми 1, рівна (9), то просумувавши їх, одержимо твердження леми. □

Лема 8. Генератор L^ε допускає асимптотичне представлення

$$\begin{aligned}
L^\varepsilon \varphi(v, w, x) \;&=\; \big[\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} a t^{-\gamma} \Gamma_1(x) + a t^{-\gamma} \mathbf{C}_1(x) \\
&+\; \varepsilon^{-1} a t^{\delta - \gamma} \mathbf{C}(x) + \theta_L^\varepsilon(x)\big] \varphi(v, w, x),
\end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}(x)\varphi(v, w, x) \;&=\; C(0, x)\varphi'_v(v, w, x); \\
\mathbf{C}_1(x)\varphi(v, w, x) \;&=\; (t^\delta z C'(0, x) + \Gamma_2(x) + \frac{\delta}{a} v t^{\gamma - 1})\varphi'_v(v, w, x), \\
z = t^\delta v + w,
\end{aligned} \tag{24}$$

а залишковий член такий, що $||\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v, w, x)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Вигляд генератора (23) одержимо з розкладу (22) леми 7. □

Зрізаний оператор набуде вигляду:

$$L_0^\varepsilon = \varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2} a t^{-\gamma} \Gamma_1(x) + \varepsilon^{-1} a t^{1 - 2\gamma} \mathbf{C}(x) + a t^{-\gamma} \mathbf{C}_1(x). \tag{25}$$

Розв'яжемо проблему сингулярного збурення для зрізаного оператора (25) з використанням тест-функції [4]

$$\varphi^\varepsilon(v, w, x) = \varphi(v, w) + \varepsilon^2 t^{-\gamma} \varphi_2(v, w, x) + \varepsilon^3 t^{\delta - \gamma} \varphi_1(v, w, x) + \varepsilon^4 t^{-\gamma} \varphi_0(v, w, x).$$

Лема 9. Розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (25) в умовах теореми реалізується співвідношенням

$$L_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v,w,x) \;=\; t^{-\gamma} L\varphi(v,w) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi(v,w), \tag{26}$$

де залишковий член $\theta^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор L визначається співвідношенням:

$$L\Pi = a\Pi\mathbf{C}_1(x)\Pi + a^2 t^{-\gamma}\Pi\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)\Pi. \tag{27}$$

Доведення. Для розв'язку проблеми сингулярного збурення приведем подібні члени в лівій частині (26) з врахуванням ε:

$$\begin{aligned} L_0^\varepsilon\varphi^\varepsilon &= \varepsilon^{-4}Q\varphi + \varepsilon^{-2}t^{-\gamma}[Q\varphi_2 + a\Gamma_1(x)\varphi] + \varepsilon^{-1}t^{\delta-\gamma}[Q\varphi_1 + a\mathbf{C}(x)\varphi] + \\ &+ t^{-\gamma}[Q\varphi_0 + at^{-\gamma}\Gamma_1(x)\varphi_2 + a\mathbf{C}_1(x)\varphi] + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\varphi. \end{aligned}$$

Оскільки φ не залежить від x тому

$$Q\varphi = 0, \Leftrightarrow \varphi \in N_Q.$$

Умова балансу (6) є умовою розв'язності рівняння

$$Q\varphi_2 + a\Gamma_1(x)\varphi = 0.$$

Тому

$$\varphi_2 = aR_0\Gamma_1(x)\varphi. \tag{28}$$

Умова балансу (8) є умовою розв'язності рівняння

$$Q\varphi_1 + a\mathbf{C}(x)\varphi = 0.$$

Тому

$$\varphi_1 = aR_0\mathbf{C}(x)\varphi. \tag{29}$$

Останнє рівняння

$$Q\varphi_0 + at^{-\gamma}\Gamma_1(x)\varphi_2 + a\mathbf{C}_1(x)\varphi = L\varphi,$$

з використанням (28) і (29) можна звести до вигляду:

$$Q\varphi_0 + [a\mathbf{C}_1(x) + a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)]\varphi = L\varphi.$$

Вигляд граничного оператора L в формі (27) випливає із умови розв'язності останнього рівняння.

Тоді

$$\varphi_0(v,w,x) = R_0[a\mathbf{C}_1(x) + a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x) - L]\varphi(v,w). \tag{30}$$

а, враховуючи, що $R_0L = 0$, одержимо

$$\varphi_0(v,w,x) = R_0[a\mathbf{C}_1(x) + a^2t^{-\gamma}\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)]\varphi(v,w).$$

□

4. Доведення теореми

Обчислимо праву частину (27 з використанням (24):

$$L\varphi(v,w) = [a\Pi\mathbf{C}_1(x) + a^2 t^{-\gamma}\Pi\Gamma_1(x)R_0\Gamma_1(x)]\varphi(v,w)$$
$$= at^{\delta-\gamma}\left[\int\limits_X \pi(dx)(zC'(0,x) + \frac{\delta}{a}t^{\gamma-1}v)\varphi'_v(v,w)\right] +$$
$$+\frac{a}{2}t^{\delta-\gamma}\int\limits_X \pi(dx)b_2(x)\varphi''_w(v,w) + a^2t^{-\gamma}\int\limits_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x)\varphi''_w(v,w).$$

і після перетворень одержимо:

$$L\varphi(v,w) \;=\; \left[v(act^{-\gamma} + \delta t^{\delta-1}) + act^{\delta-\gamma}w\right]\varphi'_v(v,w) + \frac{a}{2}B(t)\varphi''_w(v,w).$$

Закінчення доведення теореми проводиться по схемі доведення теореми 4.2 в [3].

Заключення

Таким чином флуктуації процедури стохастичної апроксимації з імпульсними збуреннями при наявності точки рівноваги усередненої системи на зростаючих інтервалах часу описуються диференціальним рівнянням, в якому швидкість еволюції залежить від вінерівського процесу [2].

Список литературы

1. *Chabanyuk Ya.M.* Continuous stochastic approximation procedure with singular perturbation under the balance conditions // Cybernetics and stochastic analysis (2006), no. 3, c. 1–7.
2. *Семенюк С.А.* Флуктуации процедуры стохастической аппроксимации с диффузионным возмущением // Кибернетика и системный анализ (2009), no. 5, c. 176–180.
3. *Korolyuk V.S, Limnius N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific, 2005.
4. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems, Kluwer, Dordrecht, 1999.

Статья поступила в редакцию 15.09.2009