УДК 519.68: 681.513.7

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДНФ СЛУЧАЙНЫХ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

© Махина Г.А.

Таврический национальный университет им.В.И.Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007

e-mail: *gmakhina@yandex.ru*

Abstract. Partial boolean functions taking their values 0, 1 and $-$ with a probability equal to $1/3$ are considered. The lower and upper bounds on the length of minimum DNF representation of such functions are obtained in the paper.

Введение

Некоторые задачи распознавания образов сводятся к построению тупиковых, сокращенных или миниальных ДНФ частичных булевых функций (см. [2]). Информация о метрических свойствах таких функций может значительно ускорить поиск оптимальных решений. Обзоры по оценкам метрических параметров для почти всех функций алгебры логики можно найти в работах [1, 3, 4]. В статье [4] получена нижняя оценка среднего значения сложности тупиковой ДНФ частичной булевой функции. В данной работе рассматриваются частичные булевы функции f, принимающие каждое из значений 0, 1, $-$ с вероятностью $1/3$.

1. Вспомогательные результаты и определения

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_s\}$ – конечное множество, ϕ – функция, ставящая в соответствие каждому $a \in A$ неотрицательное число $\phi(a)$. Будем обозначать через

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(A) = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} \phi(a)$$

среднее значение функции ϕ на множестве A.

Лемма 1. *Пусть $\theta > 0$ и δ_θ – доля тех $a \in A$, для которых $\phi(a) \geq \theta\bar{\phi}$. Тогда $\delta_\theta \leq \frac{1}{\theta}$.*

Доказательство.

$$\bar{\phi} = \frac{1}{s} \sum_{a \in A} \phi(a) \geq \frac{1}{s} \sum_{a\colon\, \phi(a) \geq \theta\bar{\phi}} \phi(a) \geq \frac{1}{s} s\delta_\theta\theta\bar{\phi} = \delta_\theta\theta\bar{\phi},$$

откуда и получаем утверждение леммы. □

Обозначим через $\sigma_{\mathscr{F}}(v)$ число ребер из $\mathscr{F}$, содержащих вершину v.

Лемма 2. *Пусть* $H = (V, \mathscr{E})$ *– гиперграф с* n *вершинами. Пусть* $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{E}$, $\mathscr{F} \leq m$, *а* $Y \subseteq V$ *– множество всех вершин* v, *для которых* $\sigma_{\mathscr{F}}(v) \geq s$. *Пусть* $\epsilon \geq 0$ *таково, что* $|Y| \geq (1-\epsilon)n$. *Тогда длина всякого градиентного покрытия гиперграфа* H *не превосходит*

$$1 + \epsilon n + \frac{m}{s} \ln \frac{nse}{m}.$$

Доказательство данной леммы можно найти в [4].

2. Оценки среднего значения и дисперсии интервалов размерности k

Пусть функция $f : B^n \to \{0, 1, -\}$ на каждом наборе с вероятностью $1/3$ принимает каждое свое значение независимо. Обозначим класс таких функций через $\widetilde{P}_n$.

Интервалом функции будем считать грань куба, в которую не попал ни один ноль и которая содержит, по крайней мере, одну единицу.

Утверждение 1. *Пусть* $i_k(f)$ *– число интервалов размерности* k *функции* f *из класса* $\widetilde{P}_n$ *и пусть* $\bar{i}_k = \frac{1}{|\widetilde{P}_n|} \sum_{f \in \widetilde{P}_n} i_k(f)$. *Тогда*

$$\bar{i}_k = \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} \left(2^{2^k} - 1\right)}{3^{2^k}}.$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{G}_k^n = \left\{ I_j, j = \overline{1, \binom{n}{k} 2^{n-k}} \right\}$ – множество всех граней размерности k куба B^n.

Введем функцию:

$$e(I, f) = \begin{cases} 1, & \text{если } I \subseteq N_f \cup N_{\tilde{f}} \text{ и } I \nsubseteq N_{\tilde{f}}; \\ 0, & \text{если } I \subseteq N_{\tilde{f}} \text{ и } I \nsubseteq N_f \cup N_{\tilde{f}}. \end{cases}$$

определенную на парах (I, f), где $I \in \mathscr{G}_k^n$ и $f \in \widetilde{P}_n$.

Пусть $\Phi(I)$ – число функций $f \in \widetilde{P}_n$, таких, что $e(I, f) = 1$. Тогда

$$\bar{i}_k = \frac{1}{3^{2^n}} \sum_{f \in \widetilde{P}_n} i_k(f) = \frac{1}{3^{2^n}} \sum_{f \in \widetilde{P}_n} \sum_{I \in \mathscr{G}_k^n} e(I, f) = \frac{1}{3^{2^n}} \sum_{I \in \mathscr{G}_k^n} \Phi(I).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\Phi(I) = \left(2^{2^k} - 1\right) 3^{2^n - 2^k}.$$

Поэтому

$$\bar{i}_k = \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{2^n - 2^k} \left(2^{2^k} - 1\right)}{3^{2^n}} = \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} \left(2^{2^k} - 1\right)}{3^{2^k}},$$

что и требовалось доказать. □

Утверждение 2. *Пусть* $Di_k(n) = \frac{1}{|\widetilde{P}_n|}\sum_{f\in\widetilde{P}_n}(i_k(f) - \bar{i}_k(n))^2$ – *дисперсия параметра* $i_k(f)$. *Тогда*

$$Di_k = \frac{\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k} 2^{n-j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}\left(2^{2^{k+1}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right) - 2^{2^k+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right) + 3^{2^j}-1\right)}{3^{2^{k+1}}}$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{G}_k^n$ – множество k-мерных граней куба B^n.

Рассмотрим функцию $e(I, I', f)$, определенную на тройках вида (I, I', f), где $I, I' \in \mathscr{G}_k^n$ и $f \in \widetilde{P}_n$ такую, что

$$e(I, I', f) = \begin{cases} 1, & \text{если } I\cup I' \subseteq N_f \cup N_{\tilde f},\ I \nsubseteq N_{\tilde f} \text{ и } I' \nsubseteq N_{\tilde f}; \\ 0, & \text{если } I \subseteq N_{\tilde f},\ I' \subseteq N_{\tilde f} \text{ и } I\cup I' \nsubseteq N_f\cup N_{\tilde f}. \end{cases}$$

Пусть $\Phi(I, I')$ – число функций $f \in \widetilde{P}_n$ таких, что $I \cup I' \subseteq N_f \cup N_{\tilde f}$, $I \nsubseteq N_{\tilde f}$ и $I' \nsubseteq N_{\tilde f}$.

Если $|I \cap I'| = 2^j$, то

$$\Phi(I, I') = 3^{2^n - 2^{k+1} + 2^j}\left(2^{2^{k+1}-2^j} - 2^{2^k - 2^j + 1} + 1\right) = \Phi_j.$$

Если же $|I \cap I'| = 0$, то

$$\Phi(I, I') = 3^{2^n - 2^{k+1}}\left(2^{2^k} - 1\right)^2 = \Phi_\varnothing$$

Преобразуем выражение для $Di_k(n)$:

$$Di_k(n) = \frac{1}{|\widetilde{P}_n|}\sum_{f\in\widetilde{P}_n}\left(i_k^2(f) - 2i_k(f)\bar{i}_k(n) + \bar{i}_k^2(n)\right) = \left(\frac{1}{|\widetilde{P}_n|}\sum_{f\in\widetilde{P}_n} i_k^2(f)\right) - \bar{i}_k^2(n)$$

Подсчитаем $S = \sum_{f\in\widetilde{P}_n} i_k^2(f)$. Имеем:

$$S = \sum_{I, I' \in \mathscr{G}_k^n}\sum_{f\in\widetilde{P}_n} e(I, I', f) = \sum_{I, I'\in\mathscr{G}_k^n}\Phi(I, I') = \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}2^{n-j}\binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{k-j}\Phi_j +$$

$$+\left(\left(\binom{n}{k}2^{n-k}\right)^2 - \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}2^{n-j}\binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{k-j}\right)\Phi_\varnothing =$$

$$= \sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}2^{n-j}\binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{k-j}(\Phi_j - \Phi_\varnothing) + \left(\binom{n}{k}2^{n-k}\right)^2\Phi_\varnothing =$$

$$= \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}2^{n-j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}(\Phi_j - \Phi_\varnothing) + \left(\binom{n}{k}2^{n-k}\right)^2\Phi_\varnothing$$

Здесь было использовано равенство $\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j} = \binom{n}{k}\binom{k}{j}$.

Заметим, что

$$\left(\binom{n}{k}2^{n-k}\right)^2\Phi_{\varnothing}=3^{2^n-2^{k+1}}\left(2^{2^k}-1\right)^2\left(\binom{n}{k}2^{n-k}\right)^2=$$
$$=3^{2^n}\left(\frac{\binom{n}{k}2^{n-k}\left(2^{2^k}-1\right)}{3^{2^k}}\right)^2=|\widetilde{P}_n|\left(\bar{i}_k(n)\right)^2.$$

Тогда

$$\Phi_j-\Phi_{\varnothing}=3^{2^n-2^{k+1}}\left(2^{2^{k+1}}\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-2^{2^k+1}\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}+3^{2^j}-2^{2^{k+1}-2^j}+2^{2^k-2^j+1}-1\right)=$$
$$=3^{2^n-2^{k+1}}\left(2^{2^{k+1}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)-2^{2^k+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)+3^{2^j}-1\right).$$

Отсюда

$$Di_k=\frac{\binom{n}{k}\sum_{j=0}^{k}2^{n-j}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}\left(2^{2^{k+1}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)-2^{2^k+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)+3^{2^j}-1\right)}{3^{2^{k+1}}},$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 1. *Пусть $\Psi(n)\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ из класса $\widetilde{P}_n$ число k-мерных интервалов удовлетворяет неравенствам:*

$$\binom{n}{k}\left(\frac{2^{n-k}\left(2^{2^k}-1\right)}{3^{2^k}}-\Psi(n)\sqrt{\frac{2^{n-k}\left(2^{2^k}-1\right)}{3^{2^k}}}\right)<i_k(f)<$$
$$<\binom{n}{k}\left(\frac{2^{n-k}\left(2^{2^k}-1\right)}{3^{2^k}}+\Psi(n)\sqrt{\frac{2^{n-k}\left(2^{2^k}-1\right)}{3^{2^k}}}\right)\qquad(2.1)$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Чебышева, положив $\theta=\Psi(n)\binom{n}{k}\sqrt{\frac{2^{n-k+2^k}}{3^{2^k}}}$. Необходимо показать, что $\frac{Di_k(n)}{\theta^2}\to 0$ при $n\to\infty$.

Заметим, что $Di_k(n)=\frac{\binom{n}{k}2^n\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}a_j}{3^{2^{k+1}}}$, где

$$a_j=2^{-j}\left(2^{2^{k+1}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)-2^{2^k+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)+3^{2^j}-1\right).$$

Величина a_j возрастает по j, так как

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}+1+\frac{3^{2^j}\left(3^{2^j}-1\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^j}\right)}{2^{2^{k+1}}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)-2^{2^k+1}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}-1\right)+3^{2^j}-1}\right)>1.$$

Следовательно,

$$Di_k \le \frac{\binom{n}{k}2^n a_k \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}}{3^{2^{k+1}}} \le \binom{n}{k}^2 2^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^k}.$$

Отсюда $\frac{Di_k(n)}{\theta^2} \le \frac{1}{\Psi^2(n)} \to 0$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *У почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ из $\widetilde{P}_n$ нет интервалов размерности большей, чем $\lceil \log_2(n\log_{3/2} 2)\rceil$.*

Положим $k_0 = \lceil \log_2(n\log_{3/2} 2)\rceil$ и пусть $\Psi(n) = n$ Тогда

$$i_{k_0+1} < \binom{n}{k_0+1}\left(\frac{2^{n-k_0-1}\left(2^{2^{k_0+1}}-1\right)}{3^{2^{k_0+1}}} + n\sqrt{\frac{2^{n-k_0-1}\left(2^{2^{k_0+1}}-1\right)}{3^{2^{k_0+1}}}}\right)$$

Выражение в правой части стремится к нулю с ростом n. Следовательно, у почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ нет интервалов размерности $\lceil \log_2(n\log_{3/2} 2)\rceil$, а значит и интервалов большей размерности.

Следствие 2. *Для почти всех функций*

$$\frac{2^n}{3} - n\sqrt{\frac{2^n}{3}} \le |N_f| \le \frac{2^n}{3} + n\sqrt{\frac{2^n}{3}}$$

Заметим, что $|N_f| = i_0(f)$. Тогда утверждение вытекает из Теоремы 1, если положить в ней $\Psi(n) = n$.

Следствие 3. *Пусть $k_1 = \lceil \log_2\log_{3/2} n + \log_2\log_2\log_{3/2} n\rceil$, а $Q_{k_1}(f)$ – число вершин $\tilde{\alpha} \in N_f$, содержащихся хотя бы в одном интервале функции f размерности, большей чем k_1. Тогда у почти всех функций*

$$Q_{k_1}(f) \le n^{-(1-\delta_n)\log_2\log_{3/2} n}\cdot 2^n,$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

В самом деле, пусть $Q'_{k_1}(f)$ – число вершин $\tilde{\alpha} \in N_f$, содержащихся хотя бы в одном интервале функции f размерности, равной $k_1 + 1$. Ясно, что $Q_{k_1}(f) = Q'_{k_1}(f) \le 2^{k_1+1} i_{k_1+1}(f)$, но у почти всех функций

$$i_{k_1+1}(f(\tilde{x}^n)) < \bar{i}_{k_1+1}(n)\left(1 + \Psi(n)\left(\frac{2^{n-k_1-1}\left(2^{2^{k_1+1}}-1\right)}{3^{2^{k_1+1}}}\right)^{-1/2}\right).$$

Полагая $\Psi(n) = n$, получим для произвольного ε и достаточно больших n

$$Q_{k_1}(f) \le 2^{k_1+1}\frac{\binom{n}{k_1+1}2^{n-k_1-1}\left(2^{2^{k_1+1}}-1\right)}{3^{2^{k_1+1}}}(1+\varepsilon) \le \binom{n}{k_1+1}2^n\left(\frac{3}{2}\right)^{2^{k_1+1}}(1+\varepsilon) \le$$

$$\le (1+\varepsilon)n^{k_1+1}2^n\left(\frac{3}{2}\right)^{-2\log_{3/2} n\log_2\log_{3/2} n} \le n^{-(1-\delta_n)\log_2\log_{3/2} n}\cdot 2^n,$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие 4. *Пусть* $k_2 = \lfloor \log_2 \log_{3/2} n \rfloor$, $i(f)$ *– число всех интервалов функции* f. *Тогда для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$

$$i(f) = \left(\binom{n}{k_2} 2^{n-k_2} \frac{\left(2^{2^{k_2}} - 1\right)}{3^{2^{k_2}}} + \binom{n}{k_2+1} 2^{n-k_2-1} \frac{\left(2^{2^{k_2+1}} - 1\right)}{3^{2^{k_2+1}}} \right) (1 + \delta_n),$$

где $\delta_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Рассмотрим отношение

$$\lambda_k = \frac{\bar{i}_{k+1}(n)}{\bar{i}_k(n)} = \frac{(n-k)}{2(k+1)} \frac{\left(2^{2^k} + 1\right)}{3^{2^k}}.$$

Ясно, что $\lambda_k \to \infty$ при $k < k_2$ и $\lambda_k \to 0$ при $k > k_2$. Для достаточно больших n имеем $\lambda_k > 1$ при $k < k_2$ и $\lambda_k < 1$ при $k \geq k_2$. Поэтому $\max_k \bar{i}_k(n)$ достигается либо при $k = k_2$ либо при $k = k_2 + 1$.

Полагая в (2.1) $\Psi(n) = n$, получим, что для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ и $k < \lceil \log_2(n \log_{3/2} 2) \rceil$

$$\bar{i}_k(n)(1 - \delta_n) < i_k(n) < \bar{i}_k(n)(1 + \delta_n),$$

где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Суммируя эти неравенства по k, $0 \leq k \leq \lceil \log_2(n \log_{3/2} 2) \rceil$ и учитывая, что $\lambda_k > n^c$, $c > 0$ при $k < k_2$ и $\lambda_k < (\log_2 \log_{3/2} n)^{-1}$ при $k \geq k_2$, получим, что для почти всех функций

$$\left(\bar{i}_{k_2}(n) + \bar{i}_{k_2+1}(n)\right)(1 - \delta'_n) < i(f) < \left(\bar{i}_{k_2}(n) + \bar{i}_{k_2+1}(n)\right)(1 + \delta'_n),$$

где $\delta'_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие 5. *Для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$

$$i(f) = n^{(1-\delta_n)\log_2 \log_{3/2} n} \, 2^n,$$

где $\delta_n = O(\frac{1}{\log_2 n})$.

Вытекает из предыдущего следствия.

Следствие 6. *Для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$ *число максимальных интервалов не превосходит* $n^{(1-o(1))\log_2 \log_{3/2} n} \, 2^n$.

На рисунке 1 показана зависимость $\bar{i}_n(k)$ от k. Из теоремы 1 вытекает, что для почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ параметр $i_n(k)$ зависит от k подобным же образом.

Следствие 7. *Пусть* $l^M(f)$, $l(f)$ *– длины, а* $L(f)$, $L^K(f)$ *– сложности минимальной и кратчайшей д.н.ф. функции* f. *Тогда для почти всех функций* $f(\tilde{x}^n)$

$$l^M(f) = l(f)(1 + \delta_n), \; L^k(f) = L(f)(1 + \delta'_n), \; L(f) = n\, l(f)(1 + \delta''_n),$$

где $\delta_n, \delta'_n, \delta''_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

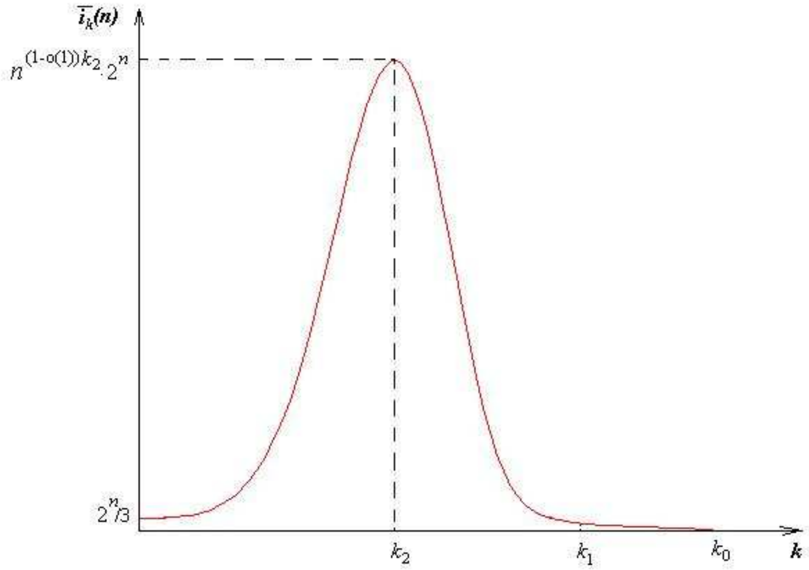

Рис. 1. Зависимость $\bar{i}_n(k)$ от k.

В силу следствия 1 имеем:

$$(n - \lceil \log_2(n \log_{3/2} 2) \rceil) l(f) \leq (n - \lceil \log_2(n \log_{3/2} 2) \rceil) l^M(f)) \leq L(f) \leq L^k(f) \leq n\, l(f).$$

Отсюда и вытекает утверждение.

3. Нижняя оценка кратчайшей д.н.ф.

Из предшествующих результатов следует, что для получения асимптотических оценок параметров $l^M(f)$, $l(f)$, $L(f)$, $L^K(f)$ достаточно найти асимптотическую оценку одного из этих параметров, например, $l(f)$.

Теорема 2. *Для почти всех функций* $f(\tilde{x}_n)$

$$L(f) \geq \frac{c\, n 2^n}{3 \log_{3/2} n \, \log_2 \log_{3/2} n}, \qquad l(f) \geq \frac{c\, 2^n}{3 \log_{3/2} n \, \log_2 \log_{3/2} n},$$

где $1/2 < c < 1$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\widetilde{P}'_n$ функций $f \in \widetilde{P}_n$, обладающих следующими свойствами:

1. $|N_f| \geq \frac{2^n}{3} - n\sqrt{\frac{2^{n+1}}{3}}$;
2. $Q_{k_1}(f) \leq n^{-(1+o(1)) \log_2 \log_{3/2} n}\, 2^n$.

Из следствий 1–3 вытекает, что $\lim_{n\to\infty} |P'_n| 2^{-2^n} = 1$.

Покажем, что для всякой функции $f \in P'_n$ любое покрытие множества N_f интервалами имеет мощность, большую $\frac{c\, 2^n}{3 \log_{3/2} n \, \log_2 \log_{3/2} n}$. В самом деле, из свойств (1) и (2) вытекает, что по меньшей мере $\frac{2^n}{3}(1 - o(1))$ вершин множества N_f покрываются лишь интервалами размерности не большей, чем $k_1 = \lceil \log_2 \log_{3/2} n + \log_2 \log_2 \log_{3/2} n \rceil$. Отсюда

$$l(f) \geq \frac{|N_f| - Q_{k_1}(f)}{2^{k_1}} \geq \frac{c\, 2^n}{3 \log_{3/2} n \, \log_2 \log_{3/2} n}$$

$\square$

4. Верхняя оценка кратчайшей д.н.ф.

Оценим сверху длину кратчайшей д.н.ф. для почти всех функций $f \in \widetilde{P}_n$.

Пусть $\widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})$ – множество всех функций $f \in \widetilde{P}_n$, таких, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Очевидно, $\left|\widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})\right| = 3^{2^n-1}$. Пусть $\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$ – множество k-мерных граней куба B^n, содержащих вершину $\widetilde{\alpha}$. Обозначим через $v_k(\widetilde{\alpha}, f)$ число k-мерных интервалов функции f, содержащих вершину $\widetilde{\alpha}$. Пусть

$$\bar{v}_k(n) = 3^{-2^n+1} \sum_{f \in \widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})} v_k(\widetilde{\alpha}, f),$$

$$Dv_k(n) = 3^{-2^n+1} \sum_{f \in \widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})} \left(v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)\right).$$

Утверждение 3.

$$\bar{v}_k(n) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2^k-1},$$

$$Dv_k(n) \leq \bar{v}_k^2(n) \left(\frac{3k^3}{2n} + \frac{k\left(\frac{3}{2}\right)^{2^k-1}}{\binom{n}{k}}\right)$$

Доказательство. Аналогично тому, как это делалось при доказательстве утверждения 1, получаем, что

$$\bar{v}_k(n) = 3^{-2^n+1} \sum_{I \in \mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})} \Phi(I),$$

где $\Phi(I)$ – число функций $f \in \widetilde{P}_n$, таких, что $I \subseteq N_f$.

Если $I \in \mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$, то $\Phi(I) = 3^{2^n-2^k} 2^{2^k-1} = 3^{2^n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{2^k-1}$. Отсюда

$$\bar{v}_k(n) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2^k-1}.$$

Покажем теперь, что $Dv_k(n) \leq 3^{-2^n+1} \sum \Phi(I, I')$, где $\Phi(I, I')$ – число функций $f \in \widetilde{P}_n$, для которых грани I, I' из $\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$ являются интервалами функции f, а суммирование ведется по всем парам граней I, I' таким, что $I \cap I' \neq \{\widetilde{\alpha}\}$, $I, I' \in \mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$.

В самом деле,

$$Dv_k(n) = \left(3^{-2^n+1} \sum_{f \in \widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})} v_k^2(\widetilde{\alpha}, f)\right) - \bar{v}_k^2(n).$$

Оценим сверху $\sum_{f\in\widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})} v_k^2(\widetilde{\alpha},f)$.

Нетрудно видеть, что

$$v_k^2(\widetilde{\alpha},f)=\sum_{I\in\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})}\ \sum_{I'\in\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})} e(I,I',f),$$

где $e(I,I',f)=1$, если $I\cup I'\subseteq N_f$, и $e(I,I',f)=0$, если $I\cup I'\nsubseteq N_f$. Поэтому

$$S=\sum_{I\in\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})}\ \sum_{I'\in\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})}\ \sum_{f\in\widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})} e(I,I',f)=\sum_{I,I'}\Phi(I,I'),$$

где суммирование ведется по всевозможным упорядоченным парам граней I, I' из $\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$.

Разобьем последнюю сумму на две S_1 и S_2, где

$$S_1=\sum_{I\cap I'=\{\widetilde{\alpha}\}}\Phi(I,I'),\qquad S_2=\sum_{I\cap I'\neq\{\widetilde{\alpha}\}}\Phi(I,I').$$

Если $I\cap I'=\{\widetilde{\alpha}\}$, то имеем $\Phi(I,I')=3^{2^n-2^{k+1}+1}\,2^{2^{k+1}-2}=3^{2^n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}-2}$. Отсюда получаем

$$S_1=\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}3^{2^n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}-2}\le 3^{2^n-1}\left(\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^k-1}\right)^2=3^{2^n-1}\bar{v}_k^2(n).$$

Теперь видно, что

$$Dv_k(n)=3^{-2^n+1}(S_1+S_2)-\bar{v}_k^2(n)\le 3^{2^n-1}S_2.$$

Оценим S_2.

Пусть грани $I,I'\in\mathscr{G}_k^n(\widetilde{\alpha})$ пересекаются по грани размерности j. Тогда $\Phi(I,I')=3^{2^n-2^{k+1}+2^j}2^{2^{k+1}-2^j-1}=\frac{1}{2}3^{2^n}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}-2^j}$. Имеем:

$$S_2=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}\binom{n-k}{k-j}3^{2^n}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}-2^j}=\frac{1}{2}3^{2^n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}}\sum_{j=1}^{k}\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}$$

Положим $a_j=\binom{k}{j}\binom{n-k}{k-j}\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}$. Отношение

$$\frac{a_{j+1}}{a_j}=\frac{(k-j)^2\left(\frac{3}{2}\right)^{2^j}}{(j+1)(n-2k+j+1)}$$

меньше 1, если $j<\lfloor\log_2\log_{3/2}n\rfloor$, и больше 1, если $k>j\ge\lfloor\log_2\log_{3/2}n\rfloor$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{k}a_j\le k(a_1+a_k)\le k\left(k\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^{2^k}\right).$$

Таким образом, получаем

$$S_2\le\frac{1}{2}3^{2^n}\binom{n}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}}k\left(k\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^{2^k}\right)=$$

$$= \binom{n}{k}^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k+1}-2} 3^{2^n-1} \left(\frac{3k^3}{2n} + \frac{k\left(\frac{3}{2}\right)^{2^k-1}}{\binom{n}{k}}\right) = \bar{v}_k^2(n)\, 3^{2^n-1} \left(\frac{3k^3}{2n} + \frac{k\left(\frac{3}{2}\right)^{2^k-1}}{\binom{n}{k}}\right)$$

и

$$Dv_k(n) \le \bar{v}_k^2(n) \left(\frac{3k^3}{2n} + \frac{k\left(\frac{3}{2}\right)^{2^k-1}}{\binom{n}{k}}\right)$$

□

Следствие. *Если* $k \le k_1 - 1 = \lceil \log_2 \log_{3/2} n + \log_2 \log_2 \log_{3/2} n \rceil - 1$, *то* $Dv_k(n) \le \frac{c \log_2 n}{n} \bar{v}_k^2(n)$, *где* c *– константа.*

Утверждение 4. *Пусть* $1 \le k \le k_1 - 1$. *Тогда доля* δ_n *тех функций* $f \in \widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})$, *для которых* $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \frac{1}{\log_2 n} \bar{v}_k(n)$, *не превосходит* $\frac{c \log_2^3 n}{n}$.

Доказательство. На основании неравенства Чебышева доля δ_n функций $f \in \widetilde{P}_n(\widetilde{\alpha})$, для которых $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \theta$ должна удовлетворять неравенству $\delta_n \le \frac{Dv_k(n)}{\theta^2}$. Положив $\theta = \frac{\bar{v}_k(n)}{\log_2 n}$, получаем требуемое утверждение. □

Утверждение 5. *Пусть* $f \in \widetilde{P}_n$ *и* $b_k(f)$ *– число тех вершин* $\tilde{\alpha} \in N_f$, *для которых* $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \frac{1}{\log_2 n} \bar{v}_k(n)$. *Пусть* δ'_n *– доля тех функций, у которых* $b_k(f) \le \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$. *Тогда* $\delta'_n \ge 1 - \frac{c}{\log_2 n}$.

Доказательство. Оценим среднее $\bar{b}_k(n) = 3^{-2^n} \sum_{f \in \widetilde{P}_n} b_k(f)$.

Обозначим через $\Phi(\widetilde{\alpha})$ – число функций таких, что $\widetilde{\alpha} \in N_f$ и $|v_k(\widetilde{\alpha}, f) - \bar{v}_k(n)| \ge \frac{\bar{v}_k(n)}{\log_2 n}$. Тогда $\bar{b}_k(n) = 3^{-2^n} \sum_{\widetilde{\alpha} \in B^n} \Phi(\widetilde{\alpha})$. Заметим, что $\Phi(\widetilde{\alpha}) = \delta_n 3^{2^n-1} \le \frac{c \log_2^3 n}{n} 3^{2^n-1}$. Отсюда получаем $b_k(f) \le \frac{c \log_2^3 n}{n} 2^n$.

В силу леммы 1 доля тех функций $f \in \widetilde{P}_n$, для которых $b_k(f) \ge \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$ не превосходит $\frac{c}{\log_2 n}$. Значит, доля тех функций f, для которых $b_k(f) \le \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$, больше, чем $1 - \frac{c}{\log_2 n}$, что и требовалось доказать. □

Теорема 3. *Для почти всех функций* $f \in \widetilde{P}_n$ *существует д.н.ф.* D *длины* $l(D) \le \frac{c 2^n}{\log_{3/2} n}$ *и сложности* $L(D) \le \frac{c n 2^n}{\log_{3/2} n}$

Доказательство. Рассмотрим подмножество $\widetilde{P}''_n \subset \widetilde{P}_n$ всех функций $f(\tilde{x}^n)$, обладающих следующими свойствами:

1. $|N_f| \le \frac{2^n}{3} + n\sqrt{\frac{2^n}{3}}$;
2. $b_k(f) \le \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n$ для всех $k \le k_1 - 2$;
3. $i_{k_1-2}(f) = \binom{n}{k_1-2} 2^{n-k_1+2} \frac{\left(2^{2^{k_1-2}}-1\right)}{3^{2^{k_1-2}}}(1+\delta_n)$, где $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из следствия 4 и утверждения 5 вытекает, что почти все функции обладают свойствами 1 и 2.

Свяжем теперь с каждой функцией $f \in \widetilde{P}''_n$ гиперграф $H_f = (V, \mathscr{E})$, в котором $V = N_f$, а $\mathscr{E}$ совпадает с множеством всех интервалов функции f. Пусть $\mathscr{F}$ – множество всех интервалов размерности $k = \lceil \log_2 \log_{3/2} n + \log_2 \log_2 \log_{3/2} n \rceil - 2$, а Y – множество тех $\widetilde{\alpha} \in N_f$, для которых $v_k(\widetilde{\alpha}, f) \geq \bar{v}_k(n) \left(1 - \frac{1}{\log_2 n}\right)$. Положим $\epsilon = \frac{3 \log_2^4 n}{n}$. Ясно, что условия Леммы 2 выполняются. Поэтому длина всякого градиентного покрытия гиперграфа H не превосходит

$$1 + \frac{\log_2^4 n}{n} 2^n + 2^{n-k_1+2}(1+\delta_n) \ln \left(3e2^{k_1-2}(1+\delta'_n)\right) \sim k_1 2^{n-k_1+2} \sim \frac{c2^n}{\log_{3/2} n}.$$

Отсюда и вытекает утверждение теоремы. □

Таким образом, у почти всех функций $f(\tilde{x}^n)$ из класса $\widetilde{P}_n$ длина кратчайшей д.н.ф. удовлетворяет неравенствам

$$\frac{c\, 2^n}{3 \log_{3/2} n \, \log_2 \log_{3/2} n} \leq l(f) \leq \frac{c2^n}{\log_{3/2} n}.$$

Заключение

В работе получены нижние и верхние оценки кратчайших днф почти всех частичных булевых функций, принимающих каждое из значений $0, 1, -$ с вероятностью $1/3$.

Автор выражает признательность проф. Сапоженко А. А. за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Васильев Ю.Л., Глаголев В.В.* Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм. Сб. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. М.: Наука, 1974, С. 99-206.
2. *Журавлев Ю.И.* Об отделимости подмножеств вершин n-мерного единичного куба // Труды МИАН, 1958 г., том LI, С 143-157.
3. *Сапоженко А.А.* Дизъюнктивные нормальные формы. – М.: Изд-во Московского университета, 1975.
4. *Сапоженко А.А., Чухров И.П.* Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники, Теория вероятностей, мат. статистика, теоретическая кибернетика, т. 25, М.: ВИНИТИ, 1987, С 68-116.
5. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. – М.: Физматлит, 2004 г. 416 с.
6. *Сапоженко А.А.* Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. – М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2005. 124 с.
7. *O'Connor L.* A new lower bound on the expected size of irredundant forms for Boolean functions // Information Processing Letters, Volume 53, Number 6, 24 March 1995, pp. 347-353(7).

Статья поступила в редакцию 30.04.2008