

МЕТОД ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ТІЛА З ВИКОРИСТАННЯМ ТОМОГРАМ ТА МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

© Литвин О.М., Першина Ю.І.

УКРАЇНЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
ВУЛ. УНІВЕРСИТЕТСЬКА, 16, М. ХАРКІВ, 61003, УКРАЇНА

E-MAIL: academ@kharkov.ua

Abstract. In work the spatial problem of a computer tomography with use of tomograms which lay on system of mutually perpendicular planes with use blending approximations is solved. The offered method allows to smooth experimental data (tomograms) and has rather high accuracy. In article computing experiment for restoration of internal structure of a brain of the person with the help of operators blending approximations by Bernstein's polynoms is shown.

Вступ

Розглядається задача відновлення внутрішньої структури (щільності, коефіцієнта поглинання або послаблення) тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, що задані на деякій системі площин, які перетинають об'єкт дослідження. Ця задача виникає на практиці в тих випадках, коли серед площин, які входять в експериментальні дані, немає площини, що складається з того чи іншого набору точок, які цікавлять дослідника. Наприклад, така задача може виникнути після того, як пацієнт пройшов дослідження на медичному томографі. І після аналізу отриманих томограм, виникає необхідність знайти за їх допомогою ще одну чи декілька томограм в площинах, які перетинають тіло та не співпадають ні з жодною із заданих площин. В існуючих томографах ця задача розв'язується тільки у випадках, коли отримані томограми лежать на системі паралельних площин. Такий же недолік мають відомі пакети 3D графіки, наприклад, 3D Max.

Загальний розв'язок задачі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інформації про неї у вигляді томограм, заданих на системі трьох груп перетинних площин, в кожній з яких площини паралельні, був дан в роботах [1, 2]. Ця задача була розв'язана з використанням операторів інтерфлетації функцій трьох змінних (дивись визначення інтерфлетації нижче) Треба відмітити, що оператори інтерфлетації функцій є природнім узагальненням операторів інтерполяції функцій трьох змінних. Тому, як і у випадку інтерполяції, похибки в експериментальних даних (в даному випадку, в томограмах) привносяться також і в оператори інтерфлетації. В математиці існує альтернатива операторам інтерполяції – оператори апроксимації. Це оператори, що побудовані шляхом згладжування експериментальних даних за допомогою поліномів, раціональних функцій, сплайнів, тригонометричних поліномів, вейвлетів.

В даній статті пропонується новий метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. В методі проводиться згладжування експериментальних даних

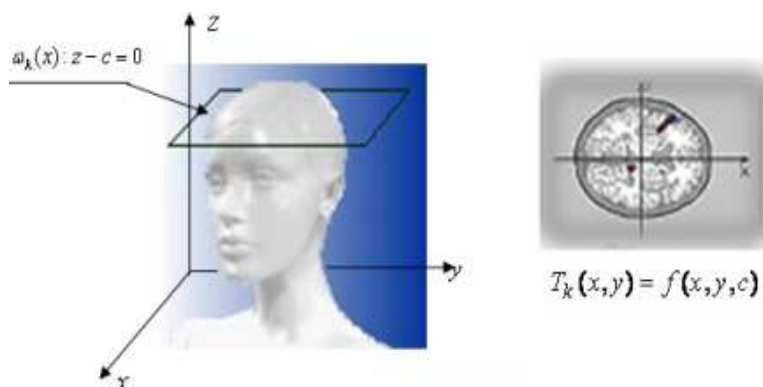


Рис. 1. Представлення томограм $T_k(x, y)$ у вигляді функцій (де $f(x, y, z)$ – щільність або коефіцієнт поглинання чи послаблення всередині вказаного тривимірного тіла). Томограма $T_k(x, y)$ представляє собою функцію двох змінних – слід функції $f(x, y, z)$ на площині $\omega_k(x) = 0$

у вигляді томограм, заданих на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою операторів мішаної апроксимації [3, 5]. Нижче наведені основні теоретичні положення методу, а також аналізуються результати його реалізації з використанням мішаної апроксимації поліномами Бернштейна.

1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Нехай функція $f(x, y, z)$ трьох змінних представляє собою щільність тривимірного тіла (чи коефіцієнт поглинання, послаблення) та задана система площин $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0, k = \overline{1, n}$.

Означення 1. Слідом функції $f(x, y, z)$ на площині $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$ будемо називати функцію двох змінних $\varphi_k(x, y)$ чи $\varphi_k(y, z)$, чи $\varphi_k(x, z)$, яка в кожній точці цієї площини приймає такі ж значення, що й функція $f(x, y, z)$, тобто

$$f|_{\Pi_k} = \varphi_k|_{\Pi_k}, k = \overline{1, n} \quad (1)$$

Означення 2. Інтерфлетацією функції $f(x, y, z)$ називається відновлення (можливо, наближене) функції $f(x, y, z)$ в точках між площинами $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$ за допомогою її слідів (1) на цих площинах.

Означення 3. Томограмою (рис. 1) на площині $\omega_k(x) = 0$ будемо називати одну з трьох функцій:

$$T_k = \begin{cases} f(x_k(y, z), y, z) \\ f(x, y_k(x, z), z) \\ f(x, y, z_k(x, y)) \end{cases}; \quad \bar{x}_k = \begin{cases} (x, y) \\ (x, z) \\ (y, z) \end{cases}$$

2. ОПЕРАТОРИ АПРОКСИМАЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ТОМОГРАМ

Нехай задані три системи томограм на взаємно перпендикулярних площинах, які отримані за допомогою комп'ютерного томографу. Не зменшуючи загальності будемо вважати, що ці три групи площин паралельні координатним площинам, тобто маємо такі томограми:

1. $T1_k(y, z) = f(x_k, y, z)$, $k = \overline{1, n}$ – томограми що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Ox ;
2. $T2_l(x, z) = f(x, y_l, z)$, $l = \overline{1, m}$ – томограми що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Oy ;
3. $T3_p(x, y) = f(x, y, z_p)$, $p = \overline{1, s}$ – томограми що лежать на площинах, перпендикулярних вісі Oz .

Формули для операторів апроксимації по кожній із змінних будемо представляти у вигляді:

$$L1_n f(x, y, z) = \sum_{k=1}^n g1_k(x) \cdot T1_k(y, z),$$

$$L2_m f(x, y, z) = \sum_{l=1}^m g2_l(y) \cdot T2_l(x, z),$$

$$L3_s f(x, y, z) = \sum_{p=1}^s g3_p(z) \cdot T3_p(x, y),$$

де $g1_k(x)$, $g2_l(y)$, $g3_p(z)$ – базисні апроксимаційні функції (узагальнені поліноми, алгебраїчні та тригонометричні сплайни).

Оператори $L1_n f$, $L2_m f$, $L3_s f$ діють на функцію $f(x, y, z)$ за змінними x , y , z відповідно.

Оператор мішаної апроксимації будемо будувати у вигляді:

$$Of(x, y, z) = (L1_n + L2_m + L3_s - L1_n L2_m - L1_n L3_s - L2_m L3_s + L1_n L2_m L3_s) f(x, y, z) \quad (2)$$

Теорема 1. Для похибки наближення $Rf(x, y, z) = (I - O)f(x, y, z)$ справедлива операторна рівність:

$$Rf(x, y, z) = r1_n r2_m r3_s f(x, y, z),$$

де $r1_n = I - L1_n$, $r2_m = I - L2_m$, $r3_s = I - L3_s$, I – тотожний оператор.

Теорема 2. Для оцінки похибки наближення функції $f(x, y, z)$ оператором $Of(x, y, z)$ виконується нерівність:

$$\|f - Of\|_{C[0,1]^3} = O(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad k = \overline{1, 3},$$

де

$$\varepsilon_1 = \|(I - L1_n f)\|_{C[0,1]^3},$$

$$\varepsilon_2 = \|(I - L2_m f)\|_{C[0,1]^3},$$

$$\varepsilon_3 = \|(I - L3_s f)\|_{C[0,1]^3}.$$

3. ОПЕРАТОРИ МІШАНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ ПОЛІНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

Розглянемо вище викладену теорію на прикладі мішаної апроксимації за допомогою поліномів Бернштейна.

Означення 4. Поліномами Бернштейна (або операторами Бернштейна степеня n для функції $g(t) \in C[0, 1]$ однієї змінної називається:

$$B_n g(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right), \quad (3)$$

де

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Означення 5. Операторами мішаної апроксимації поліномами Бернштейна називаються оператори вигляду:

$$Of(x, y, z) = (B1_n + B2_m + B3_s - B1_n B2_m - B2_m B3_s - B1_n B3_s + B1_n B2_m B3_s) f(x, y, z), \quad (4)$$

де

$$B1_n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} T1_k(y, z),$$

$$B2_m = \sum_{l=0}^m C_m^l y^l (1-y)^{m-l} T2_l(x, z),$$

$$B3_s = \sum_{p=0}^s C_s^p z^p (1-z)^{s-p} T3_p(x, y),$$

n, m, s – кількість томограм, що розташовані на площинах, які перпендикулярні вісям Ox, Oy, Oz відповідно.

Теорема 3. Нехай $R1_n f(x, y, z) = (I - B1_n) f(x, y, z)$, $R2_m f(x, y, z) = (I - B2_m) f(x, y, z)$, $R3_s f(x, y, z) = (I - B3_s) f(x, y, z)$ – похибки наближення операторами $B1_n f(x, y, z)$, $B2_m f(x, y, z)$, $B3_s f(x, y, z)$ відповідно. Тоді похибка $Rf(x, y, z) = (I - O) f(x, y, z)$ наближення функції $f(x, y, z)$ оператором $Of(x, y, z)$ визначається співвідношенням:

$$Rf(x, y, z) = R1_n R2_m R3_s f(x, y, z)$$

Причому оператор $Of(x, y, z)$, визначений рівністю (4) та побудований на заданій системі томограм наближує кожну функцію $f(x, y, z) \in C^{2,2,2}(E^3)$, $E = [0, 1]$ з похибкою

$$\|f - Of\| = O((nms)^{-1}).$$

Таким чином, теоретично при використанні оператора мішаної апроксимації поліномами Бернштейна для відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з тією ж якстю достатньо меншої кількості томограм, зроблених в системі взаємно перпендикулярних площин.

В роботі [4] для відговлення тривимірної моделі голови людини при використанні техніки візуалізації *isosurface* було використано 167 томограм, що лежать на площинах, паралельних одній координатній площині (рис. 2)

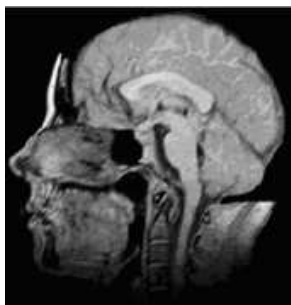


Рис. 2. Одна з 167 томограм, використаних в [4]

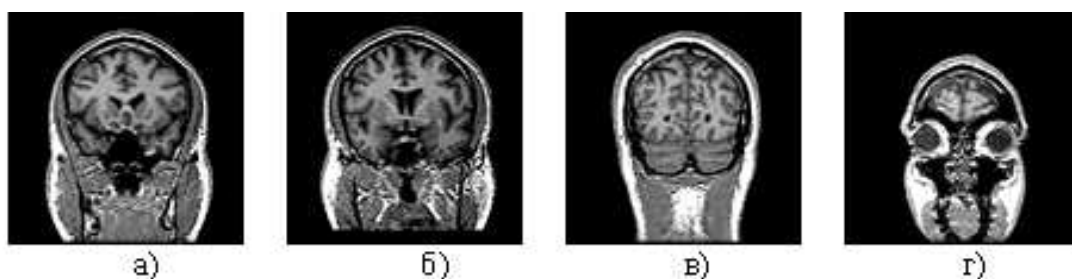


Рис. 3. Приклад зрізів головного мозку площинами: а) $x = 0.5$; б) $x = 0.6$; в) $x = 0.8$; г) $x = 0.9$.

Одним з недоліків методу, описаного в [4], є те, що він використовує тільки зрізи в площинах, паралельних одній площині. Відмітимо, що хоч в [4] маютьс я томограми в трьох система взаємно перпендикулярних площин, але для діагностики використовується лише одна з цих систем.

Якщо ж інформація про внутрішню структуру тривимірного тіла задана на трьох взаємно перпендикулярних площинах, то техніка візуалізації *isosurface* не може їх використати.

4. ТЕСТОВИЙ ПРИКЛАД ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ТІЛА

Авторами був проведений обчислювальний експеримент для відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за заданими томограмами з використанням запропонованого методу. В якості експериментальних даних були взяті 30 томограм, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин (по 10 в кожній) (рис. 3-5)

Припустимо, що тіло повністю лежить в одиничному кубі $[0, 1]^3$. Результати роботи обчислювального експерименту представлені рис. 6-7.

З рис. 7 видно, що малюнок в) більш інформативний, ніж інші, що підтверджує викладену вище теорію.

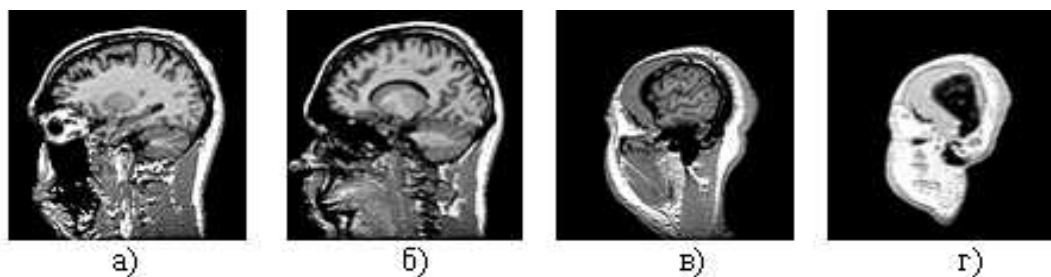


Рис. 4. Приклад зрізів головного мозку площинами: а) $y = 0.3$; б) $y = 0.6$; в) $y = 0.8$; г) $x = 0.9$.

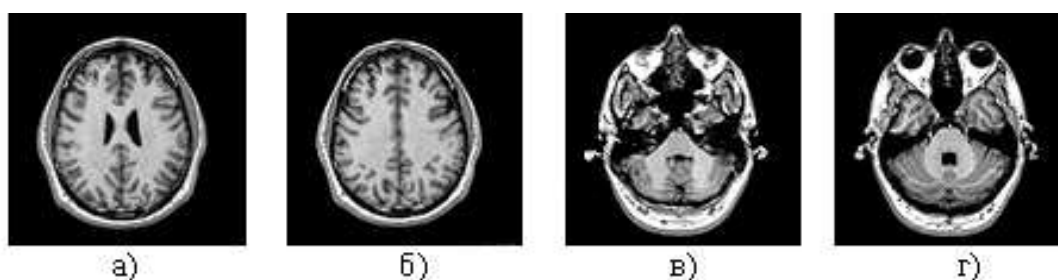


Рис. 5. Приклад зрізів головного мозку площинами: а) $z = 0.2$; б) $z = 0.3$; в) $z = 0.8$; г) $x = 0.9$.

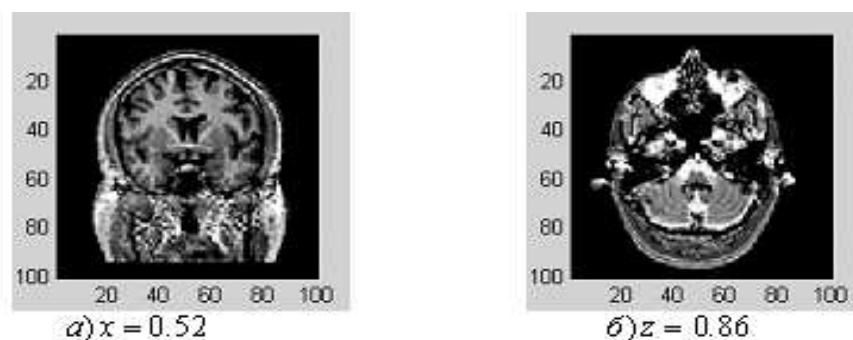


Рис. 6. Результати відновлення щільності $f(x, y, z)$ запропонованим методом в площинах: (а) $x = 0.52$ між томограмами, що розташовані в площинах $x = 0.5$, $x = 0.6$ (дивись рис. 3); (б) $z = 0.86$ між томограмами, що розташовані в площинах $z = 0.8$, $z = 0.9$ (дивись рис. 5)

Висновки

Таким чином, в роботі викладений новий метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на взаємно перпендикулярних площинах, з використанням мішаної апроксимації. Цей метод рекомендується

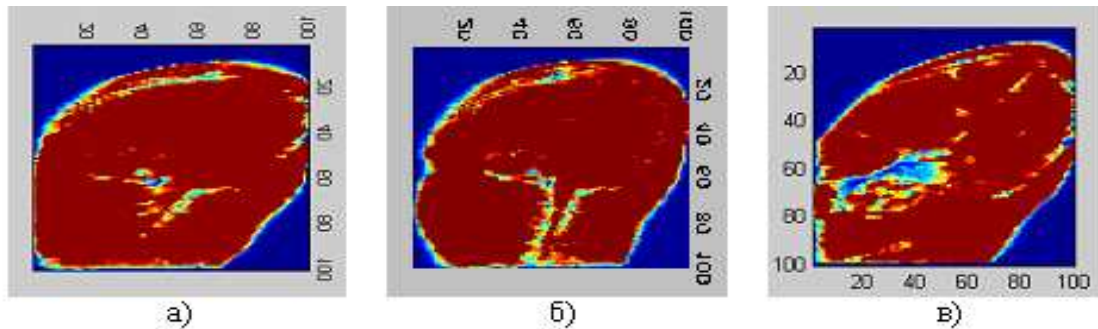


Рис. 7. Результати відновлення щільності $f(x, y, z)$ запропонованим методом в площині $x + y + 10z = 0$: (а) якщо задані томограми, що лежать на площинах, паралельних тільки вісі Oy ; (б) якщо задані томограми, що лежать на площинах, паралельних тільки вісі Oz ; (в) якщо задані томограми, що лежать на взаємно перпендикулярних площинах.

використовувати в тих випадках, коли експериментальні дані (характеристики томограм – геометричні параметри площини, на якій лежить томограма, а також зображення на томограмах) задані з похибкою, і коли класичні оператори інтерполяції та інтерфлетції не згладжують дані, а повторюють всі похибки в експериментальних даних. Запропонований метод має високу точність, як і метод, що використовує інтерфлетацію функцій.

Автори вважають, що після створення відповідного програмного забезпечення, узгодженого з програмним забезпеченням на комп'ютерних томографах, що діють, викладені вище твердження може бути використана в медичній практиці, а також при неруйнівному контролі на митницях, тощо.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – №1. – С. 20-24.
2. Литвин О.М., Першина Ю.І. Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізанних площин з використанням інтерфлетації функцій // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. – С. 67-71.
3. Литвин О.М. Интерлинеация функций та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
4. Anders Backman. Visualisation of Positron Emission Tomography (PET) scan data. A Master thesis, Department of Computing Science – Umea University, Sweden, Aug 1998. – 37 p.
5. Oleg N. Lytvyn Interlineation and interflatation functions of many variable (blending function interpolation) and economical algorithms in the approximation theory. In Book. Computational methods. Part 2. (G.R.Liu, V.B.C. Tan, X Han-editors) pp. 1105-1110.

Статья поступила в редакцию 19.04.2008