УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНА ЗА ПОРЯДКОМ ТОЧНОСТІ КУБАТУРНА ФОРМУЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ТА СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЯ

© Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.

Українська інженерно-педагогічна академія
кафедра прикладної математики
вул. Університетська, 16, м. Харків, 61003, Україна

e-mail: *olesya@email.com*

Abstract. The article is devoted to optimal by order of exactness formulas of the evaluating of two dimensions of Fourier's coefficients with using spline-interlineation.

Вступ

Задача створення і дослідження оптимальних алгоритмів обчислювальної математики є однією із найскладніших задач. Це стосується також і побудови оптимальних кубатурних формул для обчислення кратних інтегралів. Про деякі загальні твердження наближеного обчислення кратних інтегралів дивись у роботі [1]. У [2, 3] побудовані кубатурні формули обчислення кратних інтегралів на основі мішаної ермітової інтерполяції та сплайн-інтерлінації. У [4] розглянуті квадратурні та інтерполяційні формули на тензорних добутках деяких класів функцій багатьох змінних. В роботі [5] наведені оптимальні по точності, оптимальні по порядку точності та асимптотично оптимальні кубатурні формули обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій на класах Ліпшиця, диференційовних функцій. Актуальною є також задача про побудову оптимальних за порядком точності кубатурних формул для інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням інтерлінації функцій.

1. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула

В данній роботі мова буде іти про побудову оптимальної за порядком точності кубатурної формули для обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій двох змінних

$$I(f,\omega)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)\sin\omega x\,\sin\omega y\,dxdy$$

на основі сплайн-інтерлінації на лініях ректангуляції (на системі ліній $x=x_i, i=\overline{1,N_1}$ та $y=y_j, j=\overline{1,N_2}$), де $f\left(x,y\right)$ – належить деякому класу функцій і інформацію про функцію задана не більше ніж на N лініях з $\left[0,1\right]^2$.

В якості множини кубатурних формул L_N для наближеного обчислення $I(f,\omega)$ будемо розглядати множину кубатурних формул ℓ_N, що використовують інформацію про $f(x,y)$ не більше ніж на N лініях. Через $R(f,\omega,\ell_N)$ позначимо похибку наближеного обчислення $I(f,\omega)$ кубатурною формулою ℓ_N :

$$R(f,\omega,\ell_N) = I(f,\omega) - \ell_N.$$

Похибкою кубатурної формули ℓ_N на класі F називаємо величину

$$R(F,\omega,\ell_N) = \sup_{f(x)\in F} |R(f,\omega,\ell_N)|.$$

Оптимальною похибкою чисельного інтегрування на класі називаємо

$$R_N(F,\omega) = \inf_{\ell_N\in L_N} R(F,\omega,\ell_N).$$

Щоб отримати оцінку знизу величини $R_N(F,\omega)$ спочатку для фіксованої кубатурної формули ℓ_N отримаємо оцінку знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$. Якщо ця оцінка знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$ не залежить від кубатурної формули ℓ_N, то ця ж оцінка справедлива і для величини $R_N(F,\omega)$. Для отримання оцінок знизу величини $R(F,\omega,\ell_N)$ використовуємо метод капелюхів, основу якого складає наступна лема.

Теорема 1. *Хай* $f(x,y) \in L_q^{(2,2)}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$,

$$\begin{gathered} L_q^p(\Omega) =: \{ f(x,y) \mid f^{(s_1,s_2)}(x,y) \in C(\Omega), \\ 0 \le s_k \le p_k, k=1,2, s \ne p, p=(p_1,p_2) : \left\| f^{(p)} \right\|_{L_q(\Omega)} \le 1 \} \end{gathered}$$

і $I(f,\omega)$ *обчислюється за допомогою кубатурної формули*

$$\ell_N = \sum_{k=1}^{N_1} \alpha_k \int_0^1 f(x_k,y)\sin\omega y\,dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_2} \beta_j \int_0^1 f(x,y_j)\sin\omega x\,dx - \sum_{k=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} c_{kj} f(x_k,y_j),$$

що зводить $I(f,\omega)$ *до обчислення* N *інтегралів*

$$\int_0^1 f(x_k,y)\sin\omega y\,dy, \int_0^1 f(x,y_j)\sin\omega x\,dx,$$

$$k=\overline{1,N_1}, \quad j=\overline{1,N_2}, \quad N=N_1+N_2.$$

Тоді для похибки $R(f,\omega,\ell_N) = I(f,\omega) - \ell_N$ *справедлива формула:*

$$\exists\varphi(x,y) : R(f,\omega,\ell_N) = \int_0^1\int_0^1 \varphi(x,y)\sin\omega x \sin\omega y\,dxdy,$$

де $\varphi(x,y)\Big|_{x=x_k} = 0, \quad \varphi(x,y)\Big|_{y=y_j} = 0, \quad \varphi(x_k,y_j) = 0, \quad 1 \le k \le N_1,\ 1 \le j \le N_2.$

Зауваження. Аналогічна лема для випадку однієї змінної наводиться в [6].

2. Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій

Хай $\Omega = [0,1]^2, \Omega = \bigcup_i \Pi_i$, $\Pi_i = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \times [y_{i_2}, y_{i_2+1}]$, $i = (i_1, i_2)$, $i_1 = \overline{1, N_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, N_2 - 1}$. Розглянемо оператор

$$E_{i,0}f(x,y) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} h_{j_1} f(x_{j_1}, y) + \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} H_{j_2}(y) f(x, y_{j_2}) -$$
$$- \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} h_{j_1}(x) H_{j_2}(y) f(x_{j_1}, y_{j_2}),$$
$$(x,y) \in \Pi_i \subset \Omega, i = (i_1, i_2),$$

де $h_{j_1}(x), H_{j_2}(y)$- базисні сплайни порядку 0, 1, 2, 3,...з властивостями

$$h_{j_1}(x)\Big|_{x=x_k} = \delta_{k,j_1}, H_{j_2}(y)\Big|_{y=y_j} = \delta_{j,j_2}.$$

Цей оператор має властивості

$$f(x,y) \in C^m(\Omega) \to E_{i,0}f(x,y)$$
$$E_{i,0}f(x,y)\Big|_{x=x_k} = f(x,y)\Big|_{x=x_k}, E_{i,0}f(x,y)\Big|_{y=y_j} = f(x,y)\Big|_{y=y_j}.$$

Тоді оператор $E_\Omega f(x,y)$, що визначається рівностями

$$E_\Omega f(x,y) = E_{i,0}f(x,y), (x,y) \in \Pi_i \subset \Omega$$

буде задовольняти умови $E_\Omega f(x,y) \in C(\Omega)$,

$$E_\Omega f(x,y)\Big|_{x=x_k} = f(x,y)\Big|_{x=x_k}, E_\Omega f(x,y)\Big|_{y=y_j} = f(x,y)\Big|_{y=y_j}.$$

і називається кусково-поліноміальним інтерлінаційним оператором, або кусково-поліноміальним інтерлінантом. Він інтерлінує функцію $f(x,y)$ та її немішані похідні на чотирьох взаємно-перпендикулярних прямих - границі Π_i; при цьому на межах двох сусідніх прямокутників, що мають спільні сторони або точки; породжені цим оператором функції зберігають неперервні похідні до порядку n включно. Функція $E_\Omega f(x,y)$ має значення в точках $(x,y) \in \Pi_i \subset \Omega$, залежні від слідів функції $f(x,y)$ та її нормальних похідних до порядку n лише на межі $\partial\Pi_i$. Похибка поліноміальної інтерлінації [3] в кожному з прямокутників Π_i задовольняє нерівність $|f(x,y) - E_\Omega f(x,y)| \le |Q_i(x,y)|$, $(x,y) \in \Pi_i \subset \Omega$, $i = (i_1, i_2)$, де $Q_i(x,y)$ «стандартна» функція:

$$Q_i(x,y) = \frac{1}{4} \prod_{j_1=i_1}^{i_1+1} (x - x_{j_1}) \cdot \prod_{j_2=i_2}^{i_2+1} (y - y_{j_2}), (x,y) \in \Pi_i,$$

яка використовується для побудови написаної вище функції $\varphi(x,y)$. Якщо $f(x,y) \in L_q^{(2,2)}(\Omega)$, то $|f(x,y) - E_\Omega f(x,y)| \le |Q(x,y)|$, $(x,y) \in \Omega$, де $Q(x,y) = Q_i(x,y), (x,y) \in \Pi_i$. Оцінка є найкращою у кожній точці $x \in \Omega$.

Тому похибка наближення функції $f(x,y) \in L_q^{(2,2)}(\Omega)$, оператором $E_\Omega f(x,y)$ у кожній точці оцінюється з огляду на значення функції $Q(x,y) = Q_i(x,y), (x,y) \in \Pi_i$.

Хай $f(x,y) \in L_q^{(2,2)}(\Omega), 1 \le q \le \infty$, та сліди $f(x_{j_1},y),\ f(x,y_{j_2}), j_1, j_2 = \overline{1,M}$, задані не більше, ніж на $N = 2M$ прямих. Для обчислення інтегралу

$$I(f,\omega) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \sin \omega x \sin \omega y dx dy$$

має місце формула:

$$R_N(f,\omega) = \int_0^1 \int_0^1 E_\Omega f(x,y) \sin \omega\, x \sin \omega\, y dx dy.$$

Підставляючи вираз для оператора-інтерлінанта, отримаємо

$$R_N(f,\omega) = \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \int_0^1 h_{j_1}(x) \sin \omega\, x dx \int_0^1 f(x_{j_1},y) \sin \omega\, y dy +$$

$$+ \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} \int_0^1 H_{j_2}(y) \sin \omega\, y dy \int_0^1 f(x,y_{j_2}) \sin \omega\, x dx -$$

$$- \sum_{j_1=i_1}^{i_1+1} \sum_{j_2=i_2}^{i_2+1} f(x_{j_1},y_{j_2}) \int_0^1 h_{j_1}(x) \sin \omega\, x dx \int_0^1 H_{j_2}(y) \sin \omega\, y dy.$$

Будемо вважати, що

$$\int_0^1 f(x_{j_1},y) \sin \omega\, y dy, \qquad \int_0^1 f(x,y_{j_2}) \sin \omega\, x dx$$

задані точно.

Теорема 2. *Кубатурна формула $R_N(f,\omega)$ для обчислення інтегралу $I(f,\omega)$ є оптимальною за порядком точності при $N \ge |\omega|$.*

Доведення базується на порівнянні оцінки знизу та зверху величини $R(F,\omega,\ell_N) = R\left(L_q^{2,2)}(\Omega), \omega, R_N(f,\omega)\right)$.

Оптимальна за порядком точності кубатурна формула обчислення подвійних інтегралів від швидкоосцилюючих функцій з використанням інтерполяції побудованої на основі сплайн-інтерлінації оримуються шляхом заміни одновимірних інтегралів

$$\int\limits_0^1 f(x_{j_1}, y) \sin \omega\, y\, dy, \quad \int\limits_0^1 f(x, y_{j_2}) \sin \omega\, x\, dx$$

відповідними квадратурними формулами, а також оптимальними.

Висновки

1. Запропонована кубатурна формула належить до класу кубатурних формул, які зводять обчислення швидкоосцилюючих інтегралів функцій двох змінних до обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій однієї змінної. Це означає, що використовуючи ту або іншу квадратурну формулу для обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функції однієї змінної ми можемо отримати різні кубатурні формули.
2. Кубатурна формула є точною на класі $f(x, y) \in L_q^{(2,2)}(\Omega)$, $1 \le q \le \infty$, точне значення похибки досягається на функціях

$$f^*(x, y) = \frac{1}{4}\left(x - x_k^{\mu}\right)\left(x - x_k^{\mu+1}\right) \times$$
$$\times \left(y - y_r^{\nu}\right)\left(y - y_r^{\nu+1}\right) \operatorname{sign}(\sin \omega x) \operatorname{sign}(\sin \omega y), \quad (x, y) \in \Pi_i \subset \Omega.$$

Список литературы

1. *Бахвалов Н.С.* О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестник Московского университета. – 1959. – № 4. – С. 3-18.
2. *Мырзанов Ж.Е.* Смешанная эрмитова интерполяция и связанные с ней кубатурные формулы // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. – Киев, 1987. – С. 68-76.
3. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків.: Основа, 2002. – 544 с.
4. *Смоляк С.А.* Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций // Докл. АН СССР. – 1963. – 148, – С. 1042-1045.
5. *Задирака В.К., Мельникова С.С.* Цифровая обработка сигналов. – Киев.: Наукова Думка, 1993. – 294 с.
6. *Жилейкин Я.М., Кукаркин А.Б.* Приближенное вычислении интегралов от быстроосциллирующих функций: Учебно-практическое пособие. – М.: МГУ. – 1987. – 99 с.

Статья поступила в редакцию 20.04.2008