УДК 519.714

ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАМЫКАНИЙ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ: ОПЕРАТОРЫ РАЗМЕТКИ

© Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
г. Москва, Россия

e-mail: *djakonov@mail.ru*

Abstract. The results received last years within the limits of the algebraic approach to the recognition problems are described. Algebraic closures of algorithms of classical estimation algorithm model are investigated.

Введение

В конце 70х годов прошлого века академиком РАН Ю.И. Журавлёвым был предложен алгебраический подход к решению задач распознавания образов [1]. Основная идея алгебраического подхода: из некорректных алгоритмов (которые делают ошибки на контрольной выборке) можно получать корректные, компенсируя недостатки одних достоинствами других. В качестве основной модели исследований была выбрана модель алгоритмов вычисления оценок (АВО), в описании которой нашли отражение основные концепции решения задач распознавания [2].

Каждый алгоритм модели АВО представляется в виде суперпозиции распознающего оператора (РО) и решающего правила (РП). Над РО, которые по исходной информации получают матрицы оценок принадлежности объектов к классам, были введены операции: сложения, умножения, умножения на константу (как операции над соответствующими матрицами). Алгебра над операторами индуцирует алгебру над алгоритмами (используется фиксированное РП). В [1] показано, что корректный алгоритм может быть выписан в явном виде, как полином над некорректными алгоритмами.

К началу XXI века в алгебраическом подходе оставались открытыми несколько интересных проблем: не известна точная оценка степени корректного полинома; не предложены упрощения понятия корректность, которые позволили бы получать более простые и эффективные алгебраические конструкции; не исследованы некоторые другие естественные операции над алгоритмами (например, деление); не описаны «хорошие» и «плохие» задачи, с точки зрения алгебраических замыканий моделей алгоритмов. Ниже представлены решения этих проблем и техника [3]–[5], позволившая их решить.

1. Основные понятия

Напомним постановку задачи распознавания образов, описание модели АВО и основные понятия алгебраического подхода, немного обобщив классические определения [2].

Множество допустимых объектов M разбито на классы: $M = K_1 \cup \ldots \cup K_l$. Для каждой пары $(S^t, S_i) \in M \times M$ объектов можно вычислить значения функций $\rho_\Omega(S^t, S_i) \in \mathrm{E}_A$, $\Omega \in \Omega_A$, Ω_A – конечное множество параметров, E_A – частично упорядоченное множество (порядок на котором будем обозначать символом $\leq$).

Функция ρ_Ω имеет смысл расстояния, однако мы не будем накладывать на неё никаких ограничений. Каждому допустимому объекту S соответствует бинарный вектор классификации $\tilde{\alpha}(S) = (\alpha_1(S), \ldots, \alpha_l(S))$, где $\alpha_j(S)$ – значение предиката «$S \in K_j$», $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

Задача распознавания образов состоит в том, чтобы построить алгоритм A, который по набору (эталонных, обучающих) объектов $\tilde{S}^m = \{S^t\}_{t=1}^m$ с известными векторами $\tilde{\alpha}(S^1), \ldots, \tilde{\alpha}(S^m)$ для набора (контрольных, тестовых) объектов $\tilde{S}_q = \{S_t\}_{t=1}^q$ строит их векторы классификации – классифицирует (распознаёт).

РО B модели АВО вычисляет матрицу оценок $\Gamma[B] = \|\Gamma_{ij}[B]\|_{q\times l}$ такую, что

$$\Gamma_{ij}[B] = \sum_{a,b=0,0}^{1,1} x_{ab}(j) \sum_{\Omega\in\Omega_A} \sum_{S^t\in\tilde{K}_j^a} w^t w(\Omega) \mathrm{B}_\Omega^{\tilde{e},b}(S^t, S_i),$$

где $w^t \in \mathbf{Q}^+$ при $t \in \{1, 2, \ldots, m\}$ (*вес t-го объекта*), $w(\Omega) \in \mathbf{Q}^+$ при $\Omega \in \Omega_A$ (*вес учёта Ω-й близости*), $\mathrm{B}_\Omega^{\tilde{e},b}(S^t, S_i)$ – *функция близости*, $\tilde{e}$ – параметры функции (из множества E_A),

$$\mathrm{B}_\Omega^{\tilde{e},0}(S^t, S_i) = 1 - \mathrm{B}_\Omega^{\tilde{e},1}(S^t, S_i), \quad \mathrm{B}_\Omega^{\tilde{e},1}(S^t, S_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \rho_\Omega(S^t, S_i) \le \tilde{e}, \\ 0, & \rho_\Omega(S^t, S_i) \not\le \tilde{e}, \end{array} \right.$$

$$\tilde{K}_j^a = \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{S}^m \cap K_j, & a = 1, \\ \tilde{S}^m \backslash K_j, & a = 0. \end{array} \right.$$

Далее в работе рассматриваем модель АВО с параметрами $x_{00}, x_{11} \in \{0, 1\}$, $x_{01}, x_{10} \in \{0, -1\}$, $x_{ab} = x_{ab}(j)$ для всех $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1\}$ (модель без нормировок). Предполагаем также, что существуют параметры $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_1(\tilde{S}^m, \tilde{S}_q)$ такие, что $\rho_\Omega(S^t, S_i) \le \tilde{e}_1$ для всех $S^t \in \tilde{S}^m$, $S_i \in \tilde{S}_q$, $\Omega \in \Omega_A$.

РП C алгоритма модели АВО по матрице оценок классифицирует объекты. При этом "разумно" относить объект к классу с "достаточно большой" оценкой принадлежности. Простейшее РП (пороговое):

$$C\left(\|\Gamma_{ij}[B]\|_{q\times l}\right) = \|\alpha_{ij}\|_{q\times l}, \quad \alpha_{ij} = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \Gamma_{ij} > c, \\ 0, & \Gamma_{ij} \le c, \end{array} \right. \quad c \in \mathbf{Q}^+.$$

Следующие операции над РО (сложение, умножение на константу, умножение) индуцируют соответствующие операции над алгоритмами при фиксированном РП [1]:

$$\|\Gamma_{ij}[B_1 + B_2]\|_{q\times l} = \|\Gamma_{ij}[B_1]\|_{q\times l} + \|\Gamma_{ij}[B_2]\|_{q\times l}, \quad \|\Gamma_{ij}[cB]\|_{q\times l} = c\,\|\Gamma_{ij}[B]\|_{q\times l},$$

$$\|\Gamma_{ij}[B_1B_2]\|_{q\times l} = \|\Gamma_{ij}[B_1]\|_{q\times l} \circ \|\Gamma_{ij}[B_2]\|_{q\times l}$$

($\circ$ – адамарово умножение матриц). Множество $U^k(B^*)$ полиномов (с нулевым свободным членом) степени не выше k от операторов из множества B^* операторов АВО называется *алгебраическим замыканием k-й степени*. Замыкание $U^1(B^*)$ называется также *линейным*.

2. Операторы разметки

Определение 1. *Оператором разметки* называется оператор, который получает оценки по формуле

$$\Gamma_{ij}[\cdot] = I[\rho_\Omega(S^t, S_i) = \tilde{e}] \cdot I[\alpha_j(S^t) = a],$$

$$I[\rho_\Omega(S^t, S_i) = \tilde{e}] = \begin{cases} 1, & \rho_\Omega(S^t, S_i) = \tilde{e}, \\ 0, & \rho_\Omega(S^t, S_i) \neq \tilde{e}, \end{cases}$$

$$I[\alpha_j(S^t) = a] = \begin{cases} 1, & \alpha_j(S^t) = a, \\ 0, & \alpha_j(S^t) \neq a, \end{cases} = \begin{cases} 1, & S^t \in \tilde{K}_j^a, \\ 0, & S^t \notin \tilde{K}_j^a. \end{cases}$$

Идея использования таких операторов была взята из работ [6, 7]. Их матрицы оценок имеют простой вид, кроме того, справедлива

Лемма 1. *Для множества D^* операторов разметки справедливо равенство $U^k(B^*) = U^k(D^*)$.*

Рассмотрение алгебраического замыкания k-й степени с помощью операторов разметки, с технической точки зрения, не отличается от рассмотрения линейного замыкания. Далее опишем проблемы, окончательные решения которых были получены в последние годы с помощью этой техники.

3. Полученные результаты

1. Исследование квазикорректности (корректности относительно семейства РП). Корректность является центральным понятием алгебраического подхода к решению задач распознавания (см. [1, 2, 6, 7]). Под корректностью модели понимают возможность реализовать произвольную матрицу оценок с помощью операторов этой модели. Интуитивно такое требование представляется завышенным. Кроме того, оно является прямым следствием использования одного фиксированного РП, а не семейства правил.

Определение 2. Модель называется *корректной относительно семейства РП*, если для любой матрицы классификации $||\alpha_{ij}|| \in \{0, 1\}^{q \times l}$ существует РО модели и РП семейства, суперпозиция которых получает эту матрицу.

Понятия корректности вводятся при фиксированной постановке задачи (относительно этой постановки). На семейство РП естественно накладывать требования монотонности. Справедливы следующие результаты [4], которые показывают, что переход к «естественным» семействам РП не изменяет критериев корректности.

Теорема 1. *Модель РО $U^k(B^*)$ корректна относительно семейства построчно и постолбцово монотонных РП тогда и только тогда, когда она корректна.*

Теорема 2. *Модель РО $U^k(B^*)$ корректна относительно семейства построчно монотонных РП тогда и только тогда, когда она корректна или $l = 1$.*

2. Неулучшаемая оценка степени корректного полинома. Улучшаемые (для модели АВО) оценки были получены В.Л. Матросовым ($k \leq q + l - 2$, 1981 г.), Т.В. Плохониной ($k \leq m$, 1985 г.), К.В. Рудаковым ($k \leq [\log_2(ql)]$, 1989 г.).

Теорема 3. *Если корректна модель* $U^{\infty}(B^*)$, *то корректна модель* $U^k(B^*)$, *где* $k = [\log_2 q] + [\log_2 l]$. *Существует регулярная задача распознавания, в которой модель* $U^k(B^*)$ *некорректна при* $k < [\log_2 q] + [\log_2 l]$.

Здесь $[x]$ – целая часть снизу числа x. Понятие регулярной задачи введено в [1], оно отражает необременительные требования на условие задачи (начальная информация непротиворечива), при которых алгебраическое замыкание $U^{\infty}(B^*)$ корректно.

3. Исследование пополненной алгебры над АВО. Как изменятся корректные алгоритмы (их вид, сложность), если алгебру над алгоритмами пополнять новыми операциями? Приведём результаты исследования алгебры, пополненной делением и её «слабыми формами»: нормировками.

Теорема 4. *Замыкание операторов вида* $\sum\limits_{j\in X} c'_j \frac{1}{\sum\limits_{i\in X_j} c_i B_i} + \sum\limits_{t\in X'} c''_t B_t$ *корректно в регулярной задаче распознавания.*

Запись $\frac{1}{B}$ обозначает оператор, матрица оценок которого получается из матрицы оператора B заменой каждого элемента на обратный (по умножению). Таким образом, деление является очень мощной операцией: ею достаточно пополнить линейное замыкание АВО.

Определение 3. *Нормировкой по сумме* называется операция N_{Σ} над вещественными матрицами:

$$N_{\Sigma}(||\gamma_{ij}||_{q\times l}) = \left\| \frac{\gamma_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{l} \gamma_{is}} \right\|,$$

которая определена, когда в каждой строке матрицы $||\gamma_{ij}||_{q\times l}$ сумма элементов отлична от нуля.

Аналогично определяется нормировка по максимуму (делим на максимальный элемент в строке). Интересно, что структура алгебраических замыканий в алгебре, пополненной операцией нормировки, зависит от некоторых множеств А, Θ векторов, которые однозначно выписываются по операторам разметки. Приведём лишь некоторые результаты для нормировок по сумме и максимуму [5].

Теорема 5. *Линейное замыкание, пополненное нормировкой по сумме, имеет размерность* $q(\mathrm{rank}(\mathrm{A}) - 1) + \mathrm{rank}(\Theta)$ *и является корректным тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank}(\Theta) = q$, $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = l$.

Теорема 6. *Линейное замыкание, пополненное нормировкой по максимуму, имеет размерность* $\mathrm{rank}(\Theta)$ *при* $l = 1$ *и* $q \cdot \mathrm{rank}(\mathrm{A})$ *при* $l > 1$, *оно является корректным тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = l > 1$ *или* $(\mathrm{rank}(\Theta) = q)\&(l = 1)$.

4. Точное описание «хороших» и «плохих» задач для алгебраических замыканий. Необходимо получить полное описание задач, которые решаются алгоритмами ограниченной сложности. Частично проблема была решена В.Л. Матросовым в [7], однако полученные им результаты не допускали простой геометрической интерпретации.

Оказывается, что каждой задаче соответствует метрика на множестве QL пар (контрольный объект, класс). Разрешимость в линейном замыкании соответствует невырожденности определителя матрицы попарных расстояний между этими парами. Переход к алгебраическому замыканию k-й степени соответствует специальному преобразованию этой матрицы. Кроме того, найдено семейство операторов, которое достаточно рассматривать при решении практически любой задачи в рамках алгебраического подхода (например, поиск корректного алгоритма минимальной степени, или определение возможности реализации заданной классификации операторами из $U^k(B^*)$).

Теорема 7. *Если матрица оценок может быть получена оператором из* $U^k(B^*)$, *то она может быть получена оператором вида* $\sum\limits_{(a,b)\in QL} c_{(a,b)} B^k_{(a,b)}$, *где* $B_{(a,b)}$ *– сумма некоторых операторов разметки.*

Список литературы

1. *Журавлёв Ю.И.* Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I-II // Кибернетика, 1977, №4, 6, С. 5–17, 21–27.
2. *Журавлёв Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики. М.: Наука, 1978, Вып.33, С. 5–68.
3. *Дьяконов А.Г.* Алгебра над алгоритмами вычисления оценок: Учебное пособие. М.: Изд. отдел ВМК МГУ, 2006.
4. *Дьяконов А.Г.* Корректность относительно семейства решающих правил // Искусственный интеллект, 2006, №2, С. 61-64.
5. *Дьяконов А.Г.* Алгебра над алгоритмами вычисления оценок: нормировка и деление // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2007, Т.47, №6, С. 1099-1109.
6. *Матросов В.Л.* Корректные алгебры ограниченной ёмкости над множеством алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1981, Т.21, №5, С. 1276-1291.
7. *Матросов В.Л.* О критериях полноты модели алгоритмов вычисления оценок и её алгебраических замыканий // Докл. АН СССР. 1981, Т.258, №4, С. 791-796.

Статья поступила в редакцию 19.04.2008