

УСТОЙЧИВОСТЬ СКЕЛЕТНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ¹

© Домахина Л.Г.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА,
ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ
БОРОВЬЕВЫ ГОРЫ, 1, Г. МОСКВА, 119192, РОССИЯ

E-MAIL: Ludmila.domakhina@gmail.com

Abstract. There is enough of works in which methods of figures segmentation are described, however frequently they do not contain a serious substantiation in favour of a choice of this or that method of segmentation. In the present work the formalized definition of quality of segmentation through concept stability and a substantiation of stability of skeletal segmentation method is resulted.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема сегментации (декомпозиции) фигуры в общем виде — это проблема разбиения фигуры на конечное множество компонент. Возможность осуществления различного рода разбиений открывает большие перспективы для решения *важных научных и практических задач*. К ним относятся задачи распознавания, машинного зрения, морфинга (преобразования формы), обработка видео, сжатие изображений и видео и другие. Понятно, что для каждого приложения может быть свой критерий качества сегментации. Посмотрим, как оценивается качество декомпозиций в работах различных авторов.

Работы, посвященные разбиению внутренней области фигуры (сегментации), можно разделить на два класса.

1. так или иначе связанные с различными видами скелета [1, 2, 3, 5, 6]
2. не использующие скелет и его свойства при построении декомпозиции фигуры [7, 8, 9, 10, 11]

В работе [1] описан метод сегментации многоугольной фигуры на «значимые части» на основе прямолинейного скелета. При этом «значимость частей» отмечена чисто визуально, а значит, для двух похожих фигур необязательно выделятся одни и те же «значимые части». Кроме того в работе [1] не показано приложений, в которых может использоваться данное разбиение.

В [2] описано представление формы, основанное на «деревьях симметричных осей». Следующие свойства считаются критерием качества разбиения:

1. *полнота* — сегментация содержит всю информацию об объекте;
2. *компактность* — сегментация содержит, немного частей, но информативных;
3. *робастность* — устойчивость к шумам и незначительным изменениям границы, а также а «артикуляции» — движению частей объекта (человек имеет одинаковую сегментацию в разных положениях движения);
4. *высокая алгоритмическая скорость вычислимости* (полиномиальная).

¹Работа осуществлена при поддержке РФФИ, проект 08-01-00670

Если полнота метода [2] и высокая вычислительная скорость обоснована, то компактность и робастность показаны на примерах.

Работа [3] представляет иерархическое разбиение, основанное на осевом графе фигуры (дискретном скелете). Обоснованием выбора метода является тот факт, что осевой граф отражает геометрические свойства фигуры, а иерархическое представление фигуры может быть использовано для задач определения коллизий [4].

Интересный метод декомпозиции фигуры предложен в [5]. Разбиение строится так же как и в [3] иерархически, но во время параллельного итерационного процесса построения «приблизительного скелета», отражающего топологию фигуры. На каждой итерации с использованием некоторого критерия оценивается точность построенного скелета и качество декомпозиции. Устойчивость к шумам и деформациям показана на экспериментах.

Авторами настоящей статьи был предложен метод скелетной сегментации растровых объектов [6]. В основе его лежит построение непрерывного скелета фигуры, аппроксимирующей растровое изображение и выделение непересекающихся областей, относящихся к ребрам скелета. Их объединение – скелетная сегментация.

В качестве методов сегментации, не связанных с построением скелета, можно выделить морфологические подходы [7, 8], в которых происходит разбиение фигуры с использованием заданного структурного элемента путем морфологических операций (эрозия, открытие, закрытие). В работе [8] – пример «эффективной и точной» сегментации формы. Основной целью предложенного авторами [8] разбиения фигур было предотвращение «перекрытий» при морфологическом разбиении фигуры. Также авторы [8] указывают на то, что их метод дает значительно меньше компонент фигуры в разбиении по сравнению с некоторыми другими методами. В работе [9] основной задачей является разбиение фигуры на так называемую «основную форму» и «дополнительные отклонения» от нее. Для решения этой задачи используются дескрипторы Фурье, которые дают базовые характеристики формы такие как вытянутость, эллиптические и циркулярные характеристики. Внутренние свойства фигуры не рассматриваются. В [10] приведен пример разбиения на основе анализа выпуклости фигуры. Единственным его достоинством является простота. О стабильности таких подходов нет речи. Аналогичный подход предложен в [11]. В этой работе авторы говорят о «визуальном качестве» их подхода, так как выпуклые части фигуры визуально выделяются и должны быть отнесены к различным областям сегментации. Шумы на границе предлагается устранить с помощью выбора подходящей аппроксимирующей фигуры.

Можно сделать вывод о том, что большинство из приведенных работ не содержит серьезного обоснования в пользу выбора того или иного метода сегментации. Авторы ограничиваются общими словами о визуальном качестве предложенных сегментаций или проводят эксперименты на конкретных приложениях. Много работ опираются на эффективность и маленькую вычислительную сложность алгоритма построения декомпозиции. О стабильности или устойчивости предложенных сегментаций говорят немногие и, даже если говорят, то обычно подразумевают под этим устойчивость к шумам на границе фигуры. Таким образом, одной из *нерешенных*

задач общей проблемы сегментации остается вопрос формализации ее качества на основе устойчивости, стабильности. И этот вопрос является общим для всех приложений, в которых используется декомпозиция фигуры. Поэтому основной целью настоящей статьи является формальное определение устойчивости или стабильности сегментации фигуры. Также в работе приводится обоснование устойчивости метода скелетной сегментации, предложенного в работе [6].

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Определение 1. *Нормальная область* [12] – ограниченная замкнутая область, граница которой представляет собой объединение конечного числа замкнутых контуров, каждый из которых в свою очередь состоит из конечного числа участков аналитических кривых.

Определение 2. *Фигурой* назовем непрерывную аппроксимацию растрового изображения некоторой нормальной областью.

Определение 3. *Скелетом нормальной области* [12] называется множество центров максимальных вписанных в него окружностей.

Скелет нормальной области можно рассматривать как планарный граф [12], так называемый *скелетный граф*. Его вершинами являются центры окружностей, касающихся границы в трёх и более точках, а также терминальные точки скелета, а ребрами – серединные оси фигуры, линии, состоящие из центров окружностей, касающихся границы в двух и более точках.

Определение 4. Под *сегментацией (декомпозицией)* фигуры будем понимать ее разбиение на конечное множество областей.

Обозначим U – множество всех фигур. Обозначим Z – множество всевозможных сегментаций всех фигур из U . Оператором сегментации назовем функцию $R : U \rightarrow Z$, которая ставит фигуре $u \in U$ в соответствие ее сегментацию $z \in Z$.

Определение 5. *Скелетной сегментацией* [6] фигуры будем называть её специальное разбиение (рис 1в,1г,1ж,1з) на собственные области ребер скелета. *Собственная область* [13] ребра скелета — это минимальное подмножество точек фигуры, ограниченное ребром скелетного графа и соответствующими *радиальными отрезками* (перпендикулярами, опущенными из вершин скелетного графа степени 3 и более).

Скелетной сегментацией будем также считать разбиение основанное на любом подграфе скелетного графа. Тогда параметром скелетной сегментации можно считать тот подграф, на основе которого сегментация строится.

Зададим оператор скелетной сегментации, который ставит фигуре из U ее скелетную сегментацию из Z :

$$R_{sk} : U \rightarrow Z \quad (1)$$

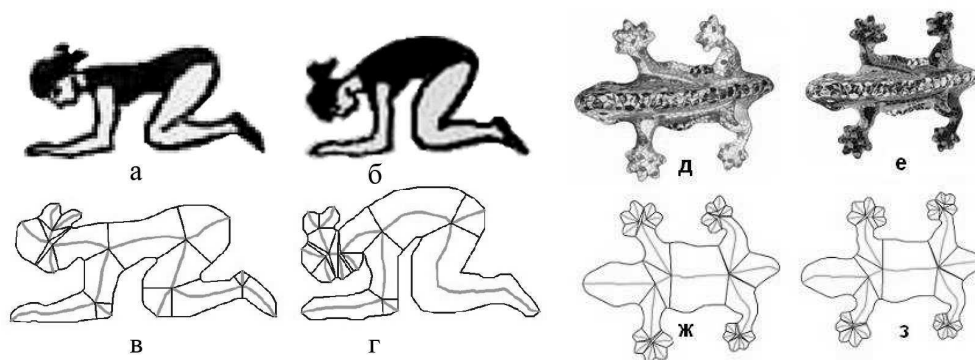


Рис. 1. Скелетная сегментация сходных изображений

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЕГМЕНТАЦИЙ

Интуитивно понятно, что для задач распознавания и преобразования формы необходимо, чтобы похожие по форме фигуры имели похожую сегментацию (рис. 1).

Определение 6. Устойчивость применительно к геометрическим или иным объектам, зависящим от параметров, — это непрерывная зависимость этих объектов от параметров [14].

Определение 7. Метод сегментации фигуры с оператором $R : U \rightarrow Z$ будем называть устойчивым на паре метрических пространств (Z, U) с расстояниями $\rho_z(.,.)$ и $\rho_u(.,.)$, если для всякого $\xi > 0$ существует такое $\delta(\xi) > 0$, что для любых $u_1, u_2 \in U$ из неравенства $\rho_u(u_1, u_2) < \delta(\xi)$ следует неравенство $\rho_z(z_1, z_2) < \xi$, где $z_1 = R(u_1)$, $z_2 = R(u_2)$.

Для завершения формального определения устойчивости сегментации необходимо задать метрики $\rho_u(.,.)$ и $\rho_z(.,.)$ на пространствах U и Z соответственно.

3. МЕТРИКИ НА ПРОСТРАНСТВАХ ФИГУР И СЕГМЕНТАЦИЙ

3.1. Метрика $\rho_u(.,.)$. Пусть есть две фигуры u_1 и u_2 . Обозначим ma_1 и ma_2 — скелеты и соответственно. Метрику на пространстве фигур $\rho_u(.,.)$ зададим таким образом, чтобы она отвечала за сходство и различие форм. Будем считать, что форму фигур определяют их базовые скелеты [15].

Определение 8. Базовым скелетом sk_{base} фигуры u с точностью ε называется такой минимальный подграф скелета ma , что расстояние Хаусдорфа $\rho_{Hausdorff}(u, sil(sk_{base})) \leq \varepsilon$, где $sil(sk_{base})$ — силуэт базового скелета — объединение всех вписанных в u кругов, центры которых лежат на sk_{base} .

Обозначим sk_1^1 и sk_2^1 — базовые скелеты u_1 и u_2 с точностями ε_1^1 и ε_2^1 , а sk_1^2 и sk_2^2 — базовые скелеты u_1 и u_2 с точностями ε_1^2 и ε_2^2 соответственно. Будем считать, что для каждой фигуры u_i однозначно задаются точности ε_i^1 и ε_i^2 .

Лемма 1. Свойство базовых скелетов:

$$\varepsilon_1^2 \geq \varepsilon_1^1 \Rightarrow sk_1^2 \subseteq sk_1^1 \subseteq ma_1 \text{ и } \varepsilon_2^2 \geq \varepsilon_2^1 \Rightarrow sk_2^2 \subseteq sk_2^1 \subseteq ma_2.$$

Определение 9. Скелеты называются *изоморфными* ($sk_1 \cong sk_2$), если изоморфны их скелетные графы и при изоморфизме сохраняется направление обхода терминальных вершин.

Обозначим $SK^* = \{sk^* : sk_1^1 \supseteq sk_1^* \supseteq sk_1^2 | sk_2^1 \supseteq sk_2^* \supseteq sk_2^2 | sk_1^* \cong sk^* \cong sk_2^*\}$. То есть SK^* — множество скелетов, изоморфных одновременно базовым скелетам sk_1^* и sk_2^* . Элементы множества SK^* — ограничены снизу sk_1^2 и sk_2^2 , а сверху — sk_1^1 и sk_2^1 . Обозначим $\#sk$ — число ребер скелетного графа sk .

Определение 10 (Метрика на пространстве фигур ρ_u).

$$\rho_u(u_1, u_2) = \begin{cases} \min_{sk^* \in SK^*} \{(\#sk_1^1 - \#sk^*) + (\#sk_2^1 - \#sk^*)\} & \text{если } SK^* \neq \emptyset \\ \infty & \text{иначе} \end{cases} \quad (2)$$

Теорема 1. $\forall u \exists \varepsilon^1, \varepsilon^2 : \rho_u(., .)$ является полуметрикой на пространстве U .

Доказательство. Докажем, что аксиомы метрики верны, причем аксиомы 1-3 верны для $\forall \varepsilon^1, \varepsilon^2$, для аксиомы 4 $\exists \varepsilon^1, \varepsilon^2$ что она также верна.

$$\begin{aligned} 1. \rho_u(sk_1, sk_2) &\geq 0 \\ sk^* \subseteq sk_1^1 &\Rightarrow \#sk^* \leq \#sk_1^1 \\ sk^* \subseteq sk_2^1 &\Rightarrow \#sk^* \leq \#sk_2^1 \\ + \begin{cases} \#sk_1^1 - \#sk^* \geq 0 \\ \#sk_2^1 - \#sk^* \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \#sk_1^1 - \#sk^* + \#sk_2^1 - \#sk^* \geq 0 \Rightarrow \rho_u(sk_1, sk_2) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \rho_u(sk_1, sk_1) &= 0 \\ \rho_u(sk_1, sk_1) &= \#sk_1^1 + \#sk_1^1 - 2\#sk^* = 2(\#sk_1^1 - \#sk^*) \\ sk^* - \text{максимальный подграф } sk_1^1 &\Rightarrow sk^* \equiv sk_1^1 \Rightarrow \rho_u(sk_1, sk_1) = 2(\#sk^* - \#sk^*) = 0 \end{aligned}$$

$$3. \rho_u(sk_1, sk_2) = \rho_u(sk_2, sk_1)$$

Очевидно, следует из определения $\rho_u(., .)$.

$$4. \rho_u(sk_1, sk_2) + \rho_u(sk_2, sk_3) \geq \rho_u(sk_1, sk_3) \text{ — неравенство треугольника}$$

$$\text{Рассмотрим разность } \rho_u(sk_1, sk_2) + \rho_u(sk_2, sk_3) - \rho_u(sk_1, sk_3) = A$$

Докажем, что $A \geq 0$.

$$\begin{aligned} A &= \#sk_1^1 + \#sk_2^1 - 2\#sk_{12}^* + \#sk_2^1 + \#sk_3^1 - 2\#sk_{23}^* - \#sk_1^1 - \#sk_3^1 + 2\#sk_{13}^* = \\ &= 2\#sk_2^1 - 2\#sk_{12}^* - 2\#sk_{23}^* + 2\#sk_{13}^* = 2(\#sk_2^1 - \#sk_{12}^*) + 2(\#sk_{13}^* - \#sk_{23}^*) \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что $A \geq 0$, например, при $\varepsilon^1 = \varepsilon^2$.

□

Таким образом, расстоянием между фигурами u_1 и u_2 будет сумма отличий от максимального «общего» скелетного подграфа фигур в некоторых рамках, определяемых точностями аппроксимации $\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_2^1$ и ε_2^2 . Верхние рамки ε_1^1 и ε_1^2 необходимы для того, чтобы «бахрома» на краях не влияла на сходство и различие форм. Их можно положить равными размеру одного пикселя или выбрать исходя из зашумленности

границы. Нижние рамки ε_2^1 и ε_2^2 определяют предел точности аппроксимации фигуры, начиная с которой фигуры считаются далекими. Так как sk_1^2 и sk_2^2 зависят от ε_1^2 и ε_2^2 соответственно, можно, например, выбирать ε_1^2 и ε_2^2 так, чтобы было выполнено: $\#sk_1^2 \geq M$ и $\#sk_2^2 \geq M$, где M - либо фиксированное, либо выбранное в зависимости от $\#ma_1$ и $\#ma_2$ натуральное число. Отметим также, что в формуле (2), можно вместо ∞ положить некоторое большое число $A \gg \#ma_1 + \#ma_2$.

3.2. Метрика $\rho_z(\cdot, \cdot)$. На пространстве сегментаций зададим метрику $\rho_z(\cdot, \cdot)$ с помощью графов смежности сегментаций.

Определение 11. *Граф смежности сегментации* — плоский граф, вершины которого соответствуют сегментам, две вершины соединены ребром, когда соответствующие им сегменты являются смежными в разбиении (то есть имеют общую границу).

Пусть $z_1 = R(u_1)$ и $z_2 = R(u_2)$. — сегментации фигур u_1 и u_2 соответственно, а g_1^* и g_2^* — графы смежности сегментаций z_1 и z_2 соответственно.

Определение 12 (Метрика на пространстве сегментаций ρ_z).

$$\rho_z(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 & \text{если } g_1^* \cong g_2^* \\ 1 & \text{иначе} \end{cases} \quad (3)$$

Теорема 2. $\rho_z(\cdot, \cdot)$ — полуметрика на пространстве Z .

Доказательство. $\rho_z(z_1, z_2) \geq 0$ по определению.

2. $\rho_z(z_1, z_1) = 0$, так как $g_1^* \cong g_1^*$.
3. $\rho_z(z_1, z_2) = \rho_z(z_2, z_1)$, так как отношение изоморфизма графа смежности симметрично: $g_1^* \cong g_2^* \Rightarrow g_1^* \cong g_2^*$ и $g_1^* \not\cong g_2^* \Rightarrow g_1^* \not\cong g_2^*$.
4. $\rho_z(z_1, z_2) + \rho_z(z_2, z_3) \geq \rho_z(z_1, z_3)$ — неравенство треугольника

Если $\rho_z(z_1, z_3) = 0 \Rightarrow$ неравенство треугольника выполнено $\forall z_2$.

Рассмотрим случай $\rho_z(z_1, z_3) = 1$. В этом случае неравенство треугольника может быть не выполнено только в одном случае: $\rho_z(z_1, z_2) = 0$ и $\rho_z(z_2, z_3) = 0$. Покажем, что это невозможно. Допустим, что $\rho_z(z_1, z_2) = 0$ и $\rho_z(z_2, z_3) = 0$. Тогда $g_1^* \cong g_2^*$ и $g_2^* \cong g_3^*$. Но тогда $g_1^* \cong g_3^* \Rightarrow \rho_z(z_1, z_3) = 0$, что противоречит тому что $\rho_z(z_1, z_3) = 1$. □

Отметим, что ρ_z — полуметрика достаточно «бедная» (сегментации могут быть только близкими или далекими). Однако, такой метрики достаточно для задачи расчета гомеоморфизма [13]. Для использования скелетной сегментации в задачах распознавания, возможно, необходима более «богатая» метрика.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ СКЕЛЕТНОЙ СЕГМЕНТАЦИИ

Рассмотрим оператор скелетной сегментации $R_{sk\varepsilon^1}$ с параметром базовым скелетом с точностью ε^1 . Напомним, что для каждого u точность ε^1 задается однозначно. Можно, например, фиксировать ε^1 , положить $\varepsilon^1 = 1$ или оставить ε^1 задающимся однозначно от u , например, как оценку зашумленности границы u .

Теорема 3 (Критерий близости скелетных сегментаций). *Для того чтобы две скелетные сегментации фигур u_1 и u_2 , построенные с помощью оператора $R_{sk\varepsilon^1}$ были близки в смысле метрики ρ_z необходимо и достаточно, чтобы базовые скелеты u_1 и u_2 были изоморфны.*

Доказательство. Будем обозначать базовый скелет фигуры u с точностью аппроксимации ξ так: $sk(u, \varepsilon)$. $V(g)$ и $E(g)$ — множества вершин и ребер графа g .

Достаточность. Пусть $sk(u_1, \varepsilon_1^1) \cong sk(u_1, \varepsilon_2^1)$.

Рассмотрим вспомогательный граф $g=g(u, \varepsilon^1)$, определяемый по фигуре u и ее базовому скелету $sk=sk(u, \varepsilon^1)$ единственным образом:

1. $g \supseteq sk$.
2. $V(g)=V(sk) \cup B$, где B — множество всех точек касания перпендикуляров (радиальных отрезков), опущенных из $V(sk)$ на границу u .
3. $E(g)=E(sk) \cup C \cup D$, где C — множество всех радиальных отрезков; D — множество ребер вида: (v_1, v_2) , где $v_1, v_2 \in B$, причем никакая вершина $v_3 \in B$ не находится при обходе границы u между v_1 и v_2 ;

То есть граф g — это «расширенный» с помощью радиальных отрезков и разбитой на части границы фигуры u граф sk . Полученный граф g задает скелетную сегментацию фигуры u , построенную при помощи $R_{sk\varepsilon^1}$. Циклы графа g , внутри которых не лежит ни одного ребра g , являются границами областей сегментации $A(g)$.

Определение 13. Назовем построенный граф g — графом скелетной сегментации.

Граф g обладает следующими свойствами:

1. любая область $\forall a \in A(g)$ имеет границу вида: ребро скелета $e \in sk$, два радиальных отрезка $c_1, c_2 \in C$, часть границы u (может и не быть)
2. любая пара смежных областей a_1 и a_2 имеет только одно общее ребро: либо ребро скелета $e \in sk$, либо радиальный отрезок $e \in C$.

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 2. *Если скелетные графы двух фигур изоморфны $sk_1 \cong sk_2$, то изоморфны и соответственные их графы скелетной сегментации $g_1 \cong g_2$.*

Доказательство. Обозначим $Q=(v, r) : sk_1 \rightarrow sk_2$ — изоморфизм на скелетах. Так как $g \supseteq sk \Rightarrow$, для построения $\bar{Q}=(\bar{v}, \bar{r}) : g_1 \rightarrow g_2$, надо доопределить изоморфное отображение вершин $\{V(g)\} \setminus V\{sk\}=B$ и ребер $\{E(g)\} \setminus E\{sk\}=C \cup D$.

Так как $\#V(u_1)=\#V(u_2) \Rightarrow \#B_1=\#B_2$. Поставим эти множества вершин в соответствие друг другу последовательно при правильном обходе границ u_1 и u_2 . $\#C_1=\#C_2$ и каждый радиальный отрезок имеет ровно одну инцидентную вершину $b \in B \Rightarrow$ зададим соответствие между радиальными отрезками так: $c_1 \in C_1 \leftrightarrow c_2 \in C_2 \Leftrightarrow b_1 \in B_1 \leftrightarrow b_2 \in B_2$, где c_i инцидентно b_i ; $i=1, 2$.

Наконец, $\#D_1=\#D_2$ — это ребра графов скелетных сегментаций g_1 и g_2 , каждое из которых имеет ровно две инцидентные вершины из множеств B_1 и B_2 соответственно. Зададим соответствие $D_1 \leftrightarrow D_2$ так: $d_1 \in D_1 \leftrightarrow d_2 \in D_2 \Leftrightarrow b_1^1 \in B_1 \leftrightarrow b_2^1 \in B_2$ и $b_1^2 \in B_1 \leftrightarrow b_2^2 \in B_2$, где $d_1=(b_1^1, b_1^2)$ и $d_2=(b_2^1, b_2^2)$.

Нетрудно убедиться, что построенное соответствие \overline{Q} — изоморфизм графов g_1 и g_2 . \square

По лемме имеем $g_1 \cong g_2$, а значит, и графы смежности g_1 и g_2 тоже изоморфны. \square

Необходимость. Пусть $\rho_z(z_1=R_{sk_{\varepsilon^1}}(u_1), z_2=R_{sk_{\varepsilon^1}}(u_2))=0 \Rightarrow \{\text{по определению } \rho_z\} \Rightarrow$ графы смежности сегментаций z_1 и z_2 изоморфны \Rightarrow изоморфны и графы скелетных сегментаций, определенные в доказательстве достаточности $g_1 \cong g_2$, но $g_1 \supseteq sk_1$ и $g_2 \supseteq sk_2$. Рассмотрим процесс получения sk_1 и sk_2 последовательным удалением соответствующих в изоморфизме ребер g_1 и g_2 , не являющихся ребрами sk_1 и sk_2 . Такой процесс приведет нас к искомому изоморфизму $sk_1 \cong sk_2$. \square

Теорема 3 доказана. \square

Теорема 4 (Устойчивость скелетной сегментации). *Метод скелетной сегментации с оператором $R_{sk_{\varepsilon^1}} : U \rightarrow Z$ и метриками ρ_u (2) и ρ_z (3) является устойчивым на пространствах фигур U и сегментаций Z .*

Доказательство. Доказательство основано на определении устойчивости метода сегментации (7). Разобьем его на две части.

1. $0 < \xi < 1$

Пусть $\delta(\xi)=0.5 > 0$. Тогда $\rho_u(u_1, u_2)=(\#sk_1^1 - \#sk^*) + (\#sk_2^1 - \#sk^*) \leq 0.5$
 Так как число ребер - целая величина $\Rightarrow (\#sk_1^1 - \#sk^*) + (\#sk_2^1 - \#sk^*) \equiv 0$. При этом из свойств базового скелета $\#sk_1^1 \geq \#sk^*$ и $\#sk_2^1 \geq \#sk^*$. Поэтому $\#sk_1^1 \equiv \#sk^*$ и $\#sk_2^1 \equiv \#sk^*$. Отсюда $sk_1^1 \cong sk^*$ и $sk_2^1 \cong sk^* \Rightarrow sk_1^1 \cong sk_2^1$. То есть базовые скелеты u_1 и u_2 с точностями ε_1^1 и ε_2^1 изоморфны. А значит, по критерию близости скелетных сегментаций (теорема 3) $\rho_z(z_1, z_2)=0 \Rightarrow \rho_z(z_1, z_2) \leq \xi$.

2. $\xi \geq 1$

В этом случае для любого $\delta(\xi) > 0$ верно следующее:
 $\forall u_1, u_2 \in U : \rho_u(u_1, u_2) < \delta(\xi) \Rightarrow \rho_z(z_1, z_2) \leq \xi$. Это верно всегда, так как $\rho_z(z_1, z_2) \leq 1$, а $\xi \geq 1$. Таким образом, для любого ξ мы можем подобрать $\delta(\xi) > 0$
 $\forall u_1, u_2 \in U : \rho_u(u_1, u_2) < \delta(\xi) \Rightarrow \rho_z(z_1, z_2) \leq \xi$. Теорема доказана. \square

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена исследованию качества сегментации фигур. Анализ последних работ в данном направлении показывает, что данный вопрос изучен недостаточно. Вопросы стабильности, устойчивости к шумам и деформациям поднимались во многих работах, но формального определения данных понятий не обнаружено. В настоящей работе *получены следующие результаты:*

- Введено понятие устойчивости метода сегментации на метрических пространствах фигур и сегментаций.

- Предложены полуметрики на пространствах фигур и сегментаций. ρ_u — полуметрика на пространстве фигур, в ее основе лежит сравнение формы на основе базового скелета. ρ_z — полуметрика на пространстве сегментаций, в ее основе — граф смежности сегментации.
- Доказана устойчивость метода скелетной сегментации с определенными параметрами на с полуметриками ρ_u и ρ_z .

Работа имеет *перспективы* приложения к задачам морфинга и распознавания, так как устойчивые сегментации успешно могут быть в данных задачах использованы. В качестве развития данной работы можно попытаться определить более «богатые» метрики ρ_u и ρ_z и доказать устойчивость метода скелетной сегментации с другими операторами, помимо $R_{sk\varepsilon^1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mirela Tanase* Shape Decomposition and Retrieval //PhD Thesis, Utrecht University 2005 г.
2. *Davi Geiger, Tyng-Luh Liu, and Robert V.Kohn* Representation and Self-Similarity of Shape // IEEE Transactions on Pattern Recognition Analysis and Machine Intelligence, vol.25, no. 1, 2003, p.86-99.
3. *Maryann Simmons and Carlo H.Sequin* 2D Shape Decomposition and the Automatic Generation of Hierarchical Representations //International Journal of Shape Modelling, 1998.
4. *P.M.Hubbard* Collision Detection for Interactive Graphics Applications //IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, p.218-230, 1995.
5. *Jyh-Ming Lien and Nancy M. Amatoy* Simultaneous Shape Decomposition and Skeletonization //Technical Report TR05-015 Parasol Lab. Department of Computer Science Texas AM University, 2005
6. *Домахина Л.Г.* Об одном методе сегментации растровых объектов для задач преобразования формы // Труды 13 Всероссийской конф. Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-13),Москва 2007, с. 311-314.
7. *C. Vasanthanayaki, S. Annadurai* Flexible Search-Based Approach for Morphological Shape Decomposition //1995.
8. *C. Vasanthanayaki, S. Annadurai* Optimal Morphological Shape Decomposition Scheme //ICGST-GVIP Journal, Volume (5), Issue (7), July 2005.
9. *M.A.Abidi and R.C.Gonzalez* Shape Decomposition Using Elliptic Fourier Descriptors //Proc. 18th IEEE Southeast Sympo. Sys. Theory, pp. 53-61, Knoxville, TN, April 1986.
10. *Paul L. Rosin* Shape Partitioning by Convexity //Proc. of British Machine Vision Conference, 2000.
11. *Longin Jan Latecki and Rolf Lakaemper* Convexity Rule for Shape Decomposition Based on Discrete Contour Evolution //Computer Vision and Image Understanding Vol. 73, No. 3, March, pp. 441-454, 1999
12. *Choi H.I., Choi S.W., Moon H.P.*Mathematical theory of medial axis transform // Pacific.J. of Math. 1997. Vol. 181, No. 1. P. 57-88.
13. *Петрова Л.Г., Местецкий Л.М.* Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами // Сборник «Искусственный интеллект», Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Украина, 2006, с. 192-197.
14. *Виноградов И.М.* Устойчивости теория. // Математическая энциклопедия. Том 5, 1977, с. 551-553.

15. *Местецкий Л.М., Рейер И.А.* Непрерывное скелетное представление изображения с контролируемой точностью. // Труды 15 международной конференции ГРАФИКОН-2003, 2003 г., с. 246–249
16. *Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo* Combinatorial Algorithms, Theory and Practice // Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1977, с. 396-402
17. *Thomas B. Sebastian, Benjamin B. Kimia* Curves vs skeletons in object recognition // Proceedings of 2001 International Conference of Image Processing (ICIP-2001), Thessaloniki, Grece, vol.3, с. 22-25

Статья поступила в редакцию 27.04.2008