УДК 510.67-519.24

Меры опровержимости и расстояния на многозначных экспертных высказываниях в адаптивных методах построения логических решающих функций[1]

© Викентьев А.А., Викентьев Р.А.

Институт Математики им.академика С.Л. Соболева СО РАН
Новосибирский гос. университет, факультет механико-математический
пр-т академика Коптюга, 4, г. Новосибирск, Россия, 630090

e-mail: *vikent@math.nsc.ru*

Abstract. In the paper discusses logical statements of experts as logical formulas in n-valued logic. By makings use of the methods of mathematical logic and the model theory offer the techniques for introducing metric on these statements and measure of their refutability. Study the properties of entered metric and them measures of refutability.

Введение

В настоящее время появляется большой интерес к построению решающих функций на основе анализа экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний нескольких экспертов, реализации адаптивных алгоритмов и согласования высказываний [1-6]. Важную роль при этом имеют развитие адаптивных методов построения логических решающих функций и согласования высказываний. В данной работе предложено записывать высказывания экспертов в виде формул n-значной (с их значениями истинности,$n > 2$) логики.На значения истинности таких формул можно так же смотреть и как на вероятности. В произвольном n-значном случае найдено правильное (с точки зрения главных экспертов) обобщение расстояния между такими формулами и меры опровержимости таких формул, что позволяет решать более утонченно (по сравнению с 2-значным случаем) прикладные задачи. В частности, значение истинности на модели (введенное аналогично случаю $n = 2$) может служить и субъективной вероятностью этой части реализации формулы в модели языка 1-го порядка.

Ясно, что различные такие высказывания экспертов (и соответствующие им формулы) несут в себе разное количество информации, а, значит, возникает вопрос о ранжировании высказываний экспертов и сравнении их по информативности (то есть мере опровержимости при не пустом высказывании). Для решения этих задач в работе будут введены и исследованы функция расстояния (см. [1]) между двумя такими формулами и мера опровержимости формул. Рассмотрен вопрос применимости данного подхода с учетом и обобщением случаев $n = 2$, $n = 3$. При организации поиска логических закономерностей и построении решающих функций требуются расстояния между высказываниями экспертов и формулами в моделях в произвольный (текущий) момент времени с фиксированными знаниями. Планируем обработку сообщений экспертов в произвольной (фиксированной) n-значной логике в различные

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 07-01-00331а

моменты (срезы) времени в связи с возможностью того, что исходные общие гипотезы = предположения у экспертов, вообще говоря, могут изменяться. Значит, будет происходить адаптация во времени самой теории (по знаниям экспертов), и, соответственно этому, будем применять подходящие в это момент модели экспертов. Сигнал о смене класса моделей (а, значит, и теории) будет исходить либо от самих экспертов (по их изменяющимся общим знаниям), либо при получении неправильных результатов по расстояниям инженером-разработчиком Базы Знаний при использовании старых аксиом-знаний. Аппарат для обработки таких знаний в логических исчислениях подготовлен в работах Викентьева А.А., начатых со Лбовым Г.С. и Кореневой Л.Н. Результаты этих работ для n-значной логики обобщаются на n-значное исчисление предикатов при соответствующих аналогах для подмножеств предикатов фиксированной истинности в модели.

1. Основные определения и понятия

Определение 1. Множество элементарных высказываний $S^n(\phi)$, используемых при написании формулы многозначной логики ϕ, назовем *носителем формулы* ϕ.

Определение 2. Назовем *носителем совокупности знаний* $S^n(\Sigma)$ объединение носителей формул, входящих в Σ (множество формул), т. е. $S^n(\Sigma) = \bigcup\limits_{\phi\in\Sigma} S^n(\phi)$.

Определение 3. Назовем *множеством возможных значений носителя* совокупности формул (знаний) с указанием (всевозможных) их значений истинности (далее нас интересуют отличные от нуля) $Q_n(\Sigma) = \left\{\phi_{\frac{k}{n-1}} \;\middle|\; \phi \in S^n(\Sigma),\ k = 0, \ldots, n-1\right\}$.

Определение 4. Моделью M назовем любое подмножество $Q_n(\Sigma)$ такое, что M не содержит одновременно $\phi_{\frac{k}{n-1}}$ и $\phi_{\frac{l}{n-1}}$ при любых $k \neq l$ и $\phi \in Q(\Sigma)$.

Множество всех моделей будем обозначать $P^n(S(\Sigma))$.

Для упрощения записи верхний индекс n в формулах, означающий значность логики, будем опускать.

Теорема 1 (о мощности $P^n(S(\Sigma))$)**.** $|P(S(\Sigma))| = n^{|S(\Sigma)|}$.

Доказательство. Доказательство проводится по индукции. □

Введем обозначение для множества моделей формулы A с фиксированным для нее значением истинности:

$$Mod_{S(\Sigma)}(A)_{\frac{k}{n-1}} = \left\{M \;\middle|\; M \in P(S(\Sigma)),\ M \models A_{\frac{k}{n-1}}\right\}.$$

Несложно доказываются всевозможные теоретико-модельные свойства связи между моделями формул и моделями их компонент с фиксированными вероятностями. Формулы назовем эквивалентными, если они имеют одно и тоже множество моделей в каждом фиксированном значении истинности. Это отношение является отношением эквивалентности.

Определение 5. Расстоянием между формулами ϕ и ψ, такими, что $S(\phi)\bigcup S(\psi)\subseteq S(\Sigma)$, на множестве $P(S(\Sigma))$ назовем (нормированную симметрическую разность в многозначном случае, что является естественным обобщением введения расстояния в классическом двузначном случае) величину

$$\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)=\frac{\left|\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}\left(\phi_{\frac{k}{n-1}}\wedge\psi_0\right)\right|+\left|\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} Mod_{S(\Sigma)}\left(\phi_0\wedge\psi_{\frac{k}{n-1}}\right)\right|}{n^{|S(\Sigma)|}}.$$

2. Свойства расстояний и мер опровержимости на многозначных формулах

Теорема 2 (о свойствах расстояния $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)$)**.** *Для любых формул ϕ, ψ, таких, что $S(\phi)\bigcup S(\psi)\subseteq S(\Sigma)$ верны следующие утверждения:*

1. $0\leq\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)\leq 1$;
2. $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\psi,\phi)$;
3. $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)=0\Leftrightarrow\phi\equiv\psi$;
4. $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)=1\Leftrightarrow\bigcup\limits_{l=1}^{n-1}\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}\left(Mod(\phi)_{\frac{k}{n-1}}\biguplus Mod(\psi)_{\frac{l}{n-1}}\right)=P(S(\Sigma))$.
5. $\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\psi)\leq\rho_{S(\Sigma)}(\phi,\chi)+\rho_{S(\Sigma)}(\chi,\psi)$;
6. *Если* $\phi^1\equiv\phi^2$, *то* $\rho_{S(\Sigma)}(\phi^1,\psi)=\rho_{S(\Sigma)}(\phi^2,\psi)$;

Доказательство. Доказательства всех пунктов следуют из определений, построения примеров, симметричности логических связок и непосредственных длинных и рутинных вычислений. □

Замечание. Поскольку в доказательствах не используют свойств множества $P(S(\Sigma))$, то расстояние можно рассматривать на любом его подмножестве, если это необходимо или вытекает из условий конкретной задачи. Если же введенное расстояние рассматривается на всем множестве $P(S(\Sigma))$, то возникает вопрос можно ли сделать вычисление более простым и удобным. Поскольку носители рассматриваемых формул составляют небольшое подмножество, то может ли хватить моделей, построенных из этих компонент формул, для которых надо найти расстояние. На все эти вопросы – пожелания получен положительный ответ. Оказывается выполняется свойство локальности для вычисления расстояния между двумя формулами: следующая теорема говорит о возможности такого упрощения вычисления.

Теорема 3 (О локальности нахождения расстояния)**.** *Для любого $S(\Sigma_0)$ такого, что $S(\phi)\bigcup S(\psi)\subseteq S(\Sigma_0)$ и любого $S(\Sigma_1)$ такого, что $S(\Sigma_0)\subseteq S(\Sigma_1)$, имеет место равенство:*

$$\rho_{S(\Sigma_0)}(\phi,\psi)=\rho_{S(\Sigma_1)}(\phi,\psi).$$

Доказательство. Доказательство аналогично классическому случаю с учетом многозначности значений истинности. □

Заметим, что эта теорема позволяет уменьшить количество основных множеств и ограничить сверху мощности носителей моделей при подсчете расстояний.

Подход к определению меры опровержимости основывается на естественном предположении, что чем больше моделей на которых высказывание принимает значение не равное 1, тем высказывание легче опровержимо. Поскольку в нашем случае значений не равных 1 у формулы несколько, то предлагается учитывать их с весами монотонно по этим значениям и для каждого такого значения истинности нормированными. Перейдем к формальному определению.

Определение 6. Мерой опровержимости $I_{S(\Sigma)}(\phi)$ для формул из $\Phi(\Sigma)$, где $\Phi(\Sigma) = \{\phi \mid S(\phi) \subset S(\Sigma)\}$, назовем величину

$$I_{S(\Sigma)}(\phi) = \sum_{i=0}^{n-2} \alpha_i \frac{\left|Mod_{S(\Sigma)}\left(\phi_{\frac{l}{n-1}}\right)\right|}{n^{|S(\Sigma)|}},$$

где α_i удовлетворяет условиям: $0 \leq \alpha_i \leq 1,\ \ \alpha_i + \alpha_{n-1-i} = 1,\ \ \alpha_k \geq \alpha_i,$ для всех $i = 0, \ldots, \frac{n-1}{2}$ и всех $k = 0, \ldots, i$.

Теорема 4 (свойства меры опровержимости $I_{S(\Sigma)}$)**.** *Для любых* $\phi, \psi \in \Phi(\Sigma)$ *верно*

1. $0 \leq I_{S(\Sigma)}(\phi) \leq 1$;
2. $I_{S(\Sigma)}(\phi) + I_{S(\Sigma)}(\neg\phi) = 1$;
3. $I_{S(\Sigma)}(\phi \wedge \psi) \geq \max\{I_{S(\Sigma)}(\phi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
4. $I_{S(\Sigma)}(\phi \vee \psi) \leq \min\{I_{S(\Sigma)}(\phi), I_{S(\Sigma)}(\psi)\}$;
5. $I_{S(\Sigma)}(\phi \vee \psi) + I_{S(\Sigma)}(\phi \wedge \psi) = I_{S(\Sigma)}(\phi) + I_{S(\Sigma)}(\psi)$;
6. $I^3_{S(\Sigma)}(\phi \wedge \psi) = \frac{1}{2}\big(I^3_{S(\Sigma)}(\phi) + I^3_{S(\Sigma)}(\psi) + \rho^3_{S(\Sigma)}(\neg\phi, \neg\psi)\big)$;
7. $I^3_{S(\Sigma)}(\phi \vee \psi) = \frac{1}{2}\big(I^3_{S(\Sigma)}(\phi) + I^3_{S(\Sigma)}(\psi) - \rho^3_{S(\Sigma)}(\neg\phi, \neg\psi)\big)$.

Доказательство. Доказательства пунктов теоремы либо очевидны, либо состоят в подробном расписывании левых частей выражений, с использованием принципа симметрии, подробных прямых вычислений и их применений. □

Доказанные теоремы указывают нам общие свойства меры опровержимости и расстояний, а при $n = 3$ говорят о справедливости гипотезы Г.С. Лбова, доказанную первым автором при $n = 2$ (см. [1]). При $n > 3$ такой связи с расстоянием нет, но есть более сложная и она найдена. В частном случае $n = 3$ доказаны также дополнительные свойства расстояний и меры опровержимости, похожие на случай $n = 2$ (см., например, [1]). Все полученные выше результаты использованы при написании программ и апробированы на прикладных задачах при различных (конкретных) значениях n. Подбор нужного значения n в конкретной прикладной задаче является частью процесса адаптации для введения расстояния и меры опровержимости для получения более тонких знаний. В общем случае $n > 2$ проведены дальнейшие теоретические исследования и рассмотрены различные прикладные аспекты. Проведена на примерах обработка сообщений экспертов в произвольной (фиксированной) n-значной логике в различные моменты (срезы) времени с изменением исходных общих гипотез-предположений экспертов. Результаты примеров показали адекватность предлагаемого подхода и качественное отличие результатов для различных n, и то, что с ростом n они все меньше и меньше отличаются.

Например, было рассмотрено дерево событий («отказа» работы заправочной станции), используемого для анализа причин возникновения аварийных ситуаций при автоматизированной заправке емкости. Структура дерева событий включает одно головное событие (авария, инцидент), которое соединяется с набором соответствующих нижестоящих событий (ошибок, отказов, неблагоприятных внешних воздействий), образующих причинные цепи (сценарии аварий). Проанализированы по дереву различные высказывания об отказах заправочной станции и найдены расстояния между различными формулами и их меры опровержимости при различных n. Логический знак «&» (или and) означает, что вышестоящее событие в дереве возникает при одновременном наступлении нижестоящих событий. Знак «V» означает, что вышестоящее событие может произойти вследствие возникновения одного из нижестоящих событий. Обозначим базовые события, которые на имеющемся у нас дереве записаны цифрами в кружках, через $A1, \ldots, A13$. События, появление которых приводит к аварии, можно записать, например, следующим образом: $A12$ V $A13$, $A5\&A6\&A7\ldots$ С другой стороны, существует набор событий, который гарантирует не возникновение главного (головного) события при условии, что если ни одно из событий, входящих в него, не произойдет. Так, например, авария не произойдет, если не будет событий $(A1, A2, A3, A4, A5, A12, A13)$ или событий $(A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13)$.

Нами детально изучались следующие укрупненные реально возможные события, которые зададим неформально. $A(1)$ – это событие состоит в том, что произойдет обрыв цепей от датчиков объёма дозы или одновременно откажет расходомер и датчик уровня. Возникновение только этого события не ведет к головному событию, т.е. к аварии.

$A(2)$ – это событие, заключающееся в том, что оператор не знал о необходимости отключения насосов или отказал расходомер или произошло то, что одновременно отказали расходомер и датчик уровня, приведет к аварии. $A(3)$ - отказ расходомера и отсутствие реакции оператора на отказ САВД (датчиков) приведет к головному событию.

$A(4)$ – событие–отказ средств выдачи сигналов или отключение САВД не повлечет аварийной ситуации.

$A(5)$ – при отказе выключателя насоса сразу возникает авария.

$A(6)$ – при совокупности этих (А2 или А12 или одновременно А5 и А6) событий авария также наступает.

$A(7)$ – если авария возникнет вследствие неосуществления команды на отключение. Теперь, взяв формальные выражения для приведенных различных событий, можно посчитать расстояния между ними и меру их опровержимости. Вычислены таблицы в которых представлены посчитанные для каждой пары высказываний расстояния в многозначных логиках для различных n. Расстояния в таблицах получились различными, но с ростом n разность между ними уменьшается. Составлены так же таблицы в которых представлены посчитанные для каждого такого события- высказывания мера опровержимости в различных n-значных логиках и при различных параметрах в общей формуле. Замечено, что с ростом параметра n происходит все меньшее отличие получаемых ответов.

Заключение

В работе получены следующие результаты: сформулированы определения расстояния и меры опровержимости на многозначных формулах, и доказаны их основные свойства. Полученные результаты переносятся на n-значный фрагмент логики 1-го порядка. Предложенные расстояния и мера опровержимости могут быть использованы при пополнениях конкретных баз знаний, кластеризации знаний, поиску противоречивости высказываний экспертов и при разработке адаптивных алгоритмов.

Список литературы

1. *Лбов Г.С., Старцева Н.Г.* Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.
2. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей – М.: Мир, 1977.
3. *Викентьев А.А, Лбов Г.С.* О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказываний экспертов – Доклады РАН 1998.Т.361, №2 С.174-176.
4. *Викентьев А.А, Лбов Г.С.* Setting the metric and informativeness on statements of experts – Pattern Recognition and Image Analysis. 1997 V.7, N2, P. 175-183.
5. *Ершов Ю.Л., Палютин Е.А.* Математическая логика – Санкт-Петербург, 2004.
6. *Викентьев А.А., Коренева Л.Н.* К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты – Математические методы распознавания образов (ММРО-99). РАН ВЦ, Москва, 1999. С. 151-154.

Статья поступила в редакцию 30.04.2008