УДК 511.41: 511.528: 511.55

s-ДИСКРИМИНАНТЫ И s-УРАВНЕНИЯ ПЕЛЛЯ

© А.С. Исмаилова, Д.В. Третьяков

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *tretyakov@crimea.edu*

Abstract

The set of all quadratic irrationalities (s-discriminants) with decomposition $[q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}]$ ($s \geq 2$ – parameter) are described. Theory of Pell s-equation is constructed. The inverse problem (reconstruction of s-discriminant with the help from continued fraction period's symmetric part) is solved. Key words: s-discriminants, Pell s-equation, partial periodic continues fraction, quadratic irrationalities.

Введение

Пусть $ax^2+2bxy+cy^2$ –целочисленная квадратичная форма и $D = b^2-ac$ – ее дискриминант. Классы целочисленно эквивалентных форм с фиксированным D образуют конечную абелеву группу порядка $h(D)$, где

$$h(D) = c_D \frac{\sqrt{|D|}\ L(1,D)}{R(D)}, L(s,D) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D}{m}\right) m^{-s},$$

c_D – явная константа, практически не зависящая от D, $L(s,D)$ – соответствующий ряд Дирихле [1]. $R(D) = 1$ при $D < 0$, $R(D)$ – регулятор поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ при $D > 0, D \neq k^2$. Регулятор связан с $\varepsilon(D)$ – основной единицей поля соотношением $R(D) = \log \varepsilon(D)$, а сама основная единица $\varepsilon(D) = P + \sqrt{D}Q$ определяется наименьшими положительными решениями $\langle P, Q\rangle$ уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = 1$ [1], [2]. Решения уравнения Пелля определяются разложением в цепную дробь (ЦД):

$$\sqrt{D} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \ldots, q_2, q_1, 2q_0}], \tag{1}$$

поскольку $\dfrac{P}{Q}$ совпадает с одной из подходящих дробей (ПД) этого разложения. Отсюда, длина периода ζ является важнейшей характеристикой для оценки $h(D)$ (см.,напр.,[3], [4], [8], [10]). Отметим, что симметричная часть периода правой части равенства (1) не единственным образом определяет дискриминант. Задача описания всех дискриминантов по симметричной части периода (1) была решена Голубевой Е.П. в работе [9].

В связи с этим приходим к *постановке следующей проблемы.* Исследовать более общие квадратичные иррациональности (КИ), которые допускают следующие разложения в ЦД $[q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}]$, где $s \geq 2$ – натуральный параметр (в работе такие КИ называются *s-дискриминантами*).

Анализ последних достижений и публикаций, посвященных этой проблеме (см., напр., [5], [6], [7], [11], [12]-[15]), позволяет сделать вывод, что в настоящее время s-дискриминанты и вопросы, связанные с этим понятием, не исследовались. *Нерешенным является вопрос об описании s-дискриминантов, о построении теории s-уравнения Пелля, о решении задачи восстановления s-дискриминантов по симметричной части периода разложения в ЦД.*

Целью настоящей работы является изучение s-дискриминантов, s-уравнения Пелля, а также решение обратной задачи восстановления s-дискриминанта по симметричной части его разложения в бесконечную цепную дробь.

Все определения и понятия, используемые ниже без пояснений, хорошо известны специалистам. При необходимости их можно найти в литературе [1], [2], [5].

Первые два раздела работы написаны вторым автором, третий раздел – первым.

1. s-ДИСКРИМИНАНТЫ

Пусть D – натуральное число, не являющееся точным квадратом. Хорошо известно [1], [2] разложение в ЦД

$$\frac{\sqrt{D}}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, 2q_0}],$$

где $D \geq a^2$ и период ЦД содержит симметричную часть. Следующая теорема является обобщением приведённого предложения.

Теорема 1. *Равенство*

$$\alpha = \frac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}], \tag{2}$$

где $s \geq 2$ *– натуральный параметр, возможно тогда и только тогда, когда*

$$2b = (s-2)q_0 a, \; q_0 = [\alpha] > 1. \tag{3}$$

Если это условие выполнено, то

$$b = (s-2)q_0 P_{n-1}, \; a = 2P_{n-1}, \; D = (sq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n, \tag{4}$$

где

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = [q_1, q_2, ..., q_2, q_1]. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \dfrac{\sqrt{D} - b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, ..., q_2, q_1, sq_0}]$, $\alpha' = -\dfrac{\sqrt{D} + b}{a}$ – сопряжённая КИ. Тогда в силу 2-й теоремы Галуа

$$\alpha + (s-1)q_0 = [\overline{sq_0, q_1, ..., q_1}] = -\alpha' + q_0,$$

откуда и следует условие (3). Обратно, если выполнено условие (3), то $\omega = \alpha + (s-1)q_0 > 1$ и

$$-\omega' = \frac{(\sqrt{D} - b) + 2b - (s-1)q_0 a}{a} = \alpha - q_0 \in (0, 1).$$

Следовательно, по 1-й теореме Галуа число ω раскладывается в чистую периодическую дробь вида $[\overline{sq_0, \; q_1, ..., \; q_n}]$. Так как по 2-й теореме Галуа

$$(\omega')^{-1} = [\overline{q_n, q_{n-1}, ..., q_1, sq_0}] = (\alpha - q_0)^{-1} = [\overline{q_1, q_2, ..., q_{n-1}, q_n, sq_0}],$$

то из единственности разложения в ЦД следуют равенства : $q_n = q_1, \; q_{n-1} = q_2, \; ...$.

Поскольку

$$(\omega - sq_0)^{-1} = [\overline{q_1, ..., q_1,\ sq_0}] = [q_1, ..., q_1,\ \omega] = \frac{\omega P_{n-1} + P_{n-2}}{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}},$$

то

$$\omega - sq_0 = \frac{\omega Q_{n-1} + Q_{n-2}}{\omega P_{n-1} + P_{n-2}},\ \omega^2 P_{n-1} - \omega s q_0 P_{n-1} - (sq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = 0.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = s^2 q_0^2 P_{n-1}^2 + 4P_{n-1}(sq_0 P_{n-2} + Q_{n-2}) = (sq_0 P_{n-1} + 2Q_{n-1})^2 + 4(-1)^n.$$

Отсюда

$$\alpha = \omega - (s-1)q_0 = \frac{\sqrt{D} - (s-2)q_0 P_{n-1}}{2P_{n-1}}$$

Теорема доказана. □

Далее КИ, представимые формулой (2), будем называть s – *дискриминантами.*

Пример 1. КИ $\alpha = \dfrac{\sqrt{485} - 5}{10}$ раскладывается в ЦД $[1, \overline{1,\ 2,\ 2,\ 1,\ 3}\ ]$, $(s = 3,\ q_0 = 1)$. Таким образом, α – 3-дискриминант.

Пример 2. Рассмотрим ЦД $\beta = [7,\ \overline{3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 35}]$. Используя формулы (4), приходим к равенству

$$\beta = \frac{\sqrt{10491117} - 1911}{182}.$$

Следствие 1. *Для того чтобы ЦД* $[q_0, \overline{q_1,\ q_2 ..., q_2,\ q_1,\ sq_0}]$ *являлась разложением числа* $\sqrt{D} - b$*, необходимо и достаточно выполнение условий:*

$$(sq_0 Q_{n-1} + Q_{n-2} \ \vdots\ P_{n-1})\ \wedge\ (sq_0 P_{n-1} \ \vdots\ 2).$$

Пример 3. ЦД $\gamma = [2, \overline{1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1,\ 16}\ ]$ удовлетворяет всем условиям следствия 1. Действительно,

$$\frac{P_5}{Q_5} = [1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1\ ] = \frac{125}{68},\quad Q_4 = 37,\quad sq_0 Q_5 + Q_4 = 1125 \ \vdots\ 125.$$

Легко видеть, что $\gamma = \sqrt{73} - 6$.

Из следствия 1 вытекает

Следствие 2. *Для того чтобы ЦД* $[q_0, \overline{q_1,\ q_2, ..., q_2,\ q_1,\ 2q_0}]$ *являлась разложением числа* $\sqrt{D}$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$2q_0 Q_{n-1} + Q_{n-2} \ \vdots\ P_{n-1}$$

Пример 4. Пусть $\delta = [14, \overline{1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1,\ 28}]$. Тогда

$$\frac{P_4}{Q_4} = [1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1] = \frac{33}{23},\quad Q_3 = 16,\quad 2q_0 Q_4 + Q_3 = 660 \ \vdots\ 33.$$

Таким образом, данная ЦД на основании следствия 2 является разложением числа $\sqrt{D}$. По формулам (4) $\delta = \sqrt{216}$.

КИ α удовлетворяет следующему квадратному уравнению

$$P_{n-1}x^2 + (s-2)q_0P_{n-1}x - c = 0,$$

где $c = (s-1)q_0^2P_{n-1} + sq_0Q_{n-1} + Q_{n-2} > 0$.

Имеет место

Следствие 3. *Если выполнено условие* (3), *то* $D - b^2 = 2ac$, $D - (aq_0 + b)^2 \vdots a$.

2. s-уравнение Пелля и его решения

Пусть D – натуральное число, не являющееся точным квадратом. Рассмотрим диофантово уравнение

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = a^2, \tag{6}$$

где α – s–дискриминант, $a \neq 1$. В дальнейшем это уравнение будем называть *s-уравнением Пелля.*

Квадратичная форма $\{a^2, 2ab, b^2 - D\}$, порождающая уравнение (6) и квадратичная форма $\{1, 0, -D\}$, порождающая уравнение Пелля , неэквивалентны, так как имеют разные дискриминанты, соответственно, $4a^2D$ и $4D$. (см.,напр., [1], [2]).

Отметим также, что при $a = 1$ уравнение (6) эквивалентно уравнению Пелля.

Лемма 1. *Если D – число, не являющееся точным квадратом, то существует константа $M > a^2 > 0$, что неравенство*

$$|\ (ax + by)^2 - Dy^2\ | <\ M$$

имеет бесконечное множество взаимно простых натуральных решений.

Доказательство. Так как $(ax+by)^2 - Dy^2 = (ax - (\sqrt{D} - b)y)(ax + (\sqrt{D} + b)y)$ и существует бесконечное множество пар натуральных чисел x, y, таких что $(x, y) = 1$, и $|\ xy^{-1} - \alpha\ | < y^{-2}$ [2], то $|\ ax - (\sqrt{D} - b)y\ | <\ ay^{-1}$, и

$$|\ ax + (\sqrt{D} + b)y\ | < |\ ax - (\sqrt{D} - b)y\ | + 2\sqrt{D}\ y\ <\ \frac{a}{y} + 2\sqrt{D}\ y.$$

Отсюда

$$|\ (ax + by)^2 - Dy^2\ | <\ \frac{a}{y}\left(\frac{a}{y} + 2\sqrt{D}\ y\right) = \frac{a^2}{y^2} + 2\sqrt{D}\ a\ <\ a^2 + 2\sqrt{D}\ a.$$

Лемма доказана. □

Из леммы следует бесконечность множества положительных решений уравнения (6).

На множестве всех положительных решений указанного уравнения введём отношение частичного порядка $\prec$, считая, что $\langle x, y\rangle \prec \langle u, v\rangle \Leftrightarrow ax + (\sqrt{D} + b)y \leq au + (\sqrt{D} + b)v$. Рассмотрим наименьшее положительное решение ϕ. Такое решение существует и единственно. Назовём его *фундаментальным* или *основной единицей* .

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = \dfrac{\sqrt{D} - b}{a}$ *s-дискриминант. Тогда:*
а) если $\langle x_*, y_*\rangle$ – положительное решение уравнения (6), *то* $\frac{x_*}{y_*}$ *– одна из ПД к числу α;*
б) если $\langle x', y'\rangle$ – положительное решение уравнения (6), *то* $x' = P_{kn-1}$, $y' = Q_{kn-1}$, *где k – период разложения α в ЦД,* а $n \in \mathbb{N}$;
в) все положительные решения s-уравнения Пелля исчерпываются формулами $\langle P_{km-1}\ ,\ Q_{km-1}\rangle$, *где $m \in \mathbb{N}$ – таково, что km – чётное число.*

Доказательство.
а) если $(ax_* + by_*)^2 - Dy_*^2 = a^2$, то

$$\left(x_* - \frac{\sqrt{D}-b}{a}\,y_*\right)\left(x_* + \frac{\sqrt{D}+b}{a}\,y_*\right) = 1, \text{ и } \frac{x_*}{y_*} > \frac{\sqrt{D}-b}{a}.$$

Отсюда

$$\left|\frac{x_*}{y_*} - \frac{\sqrt{D}-b}{a}\right| = \frac{1}{y_*^2\left|\frac{x_*}{y_*} + \frac{\sqrt{D}+b}{a}\right|} < \frac{1}{2y_*^2}\ ,$$

и, следовательно, $\frac{x_*}{y_*}$ – ПД к α [2].

б) пусть k – период разложения α в ЦД и $\frac{P_j}{Q_j}$ – ПД к этому числу, числитель и знаменатель которой образуют решение $\langle P_j, Q_j\rangle$ уравнения (6). Число α является корнем квадратного уравнения $a^2x^2 + 2abx - (D - b^2) = 0$. Остаток r_{j+1} порядка $j+1$ разложения α в ЦД является корнем квадратного уравнения $A_{j+1}x^2 + B_{j+1}x + C_{j+1} = 0$ [2] , где

$$A_{j+1} = a^2P_j^2 + 2abP_jQ_j - (D-b^2)Q_j^2 = a^2\ ,$$

$$B_{j+1} = 2a^2P_jP_{j-1} + 2ab(P_jQ_{j-1} + P_{j-1}Q_j) - 2(D-b^2)Q_jQ_{j-1} = -2la$$

чётное число. Отсюда $r_{j+1} = \frac{\sqrt{D}+l}{a}$. Однако r_{j+1} раскладывается в ЦД с тем же периодом, что и α. При этом

$$r_{j+1} = \frac{\sqrt{D}+l}{a} = \alpha + \frac{(l-b)+2b}{a} = \alpha + (s-1)q_0 + \frac{l-b}{a} - q_0,$$

откуда следует, что $l = b + aq_0$, $r_{j+1} = \alpha + (s-1)q_0$. Следовательно, $j+1 = kn$, $n \in \mathbb{N}$ и $j = kn-1$.

в) пусть $\omega = [\overline{sq_0,\ q_1, ...,\ q_1}] = \alpha + (s-1)q_0$ и $m \in \mathbb{N}$. Запишем число α в виде:

$$\alpha = [\ q_0,\ q_1,\ q_2, ..., q_2,\ q_1,\ sq_0,\ q_1,\ q_2, ..., q_2,\ q_1,\ sq_0, ..., q_1,\ q_2, ..., q_2,\ q_1,\ \omega\ ].$$

$\boxed{\text{mk}}$

Тогда

$$\alpha = \frac{\omega P_{mk-1} + P_{mk-2}}{\omega Q_{mk-1} + Q_{mk-2}} = \frac{(\alpha + (s-1)q_0)P_{mk-1} + P_{mk-2}}{(\alpha + (s-1)q_0)Q_{mk-1} + Q_{mk-2}}$$

или $(\sqrt{D}-b)(Q_{mk-1}a(\sqrt{D}-b+(s-1)q_0a)+a^2Q_{mk-2}) = P_{mk-1}a(\sqrt{D}-b+(s-1)q_0a)+a^2P_{mk-2}$. Последнее уравнение эквивалентно системе уравнений:

$$\begin{cases} q_0Q_{km-1} + Q_{km-2} = & P_{km-1} \\ (D - b(aq_0+b))Q_{km-1} - abQ_{km-2} = & (aq_0+b)aP_{km-1} + a^2P_{km-2}. \end{cases}$$

Подставляя первое уравнение системы в её второе уравнение, получим:

$$(-1)^{km}a^2 = a^2(P_{km-1}Q_{km-2} - P_{km-2}Q_{km-1}) =$$

$$= a^2P_{km-1}(P_{km-1} - q_0Q_{km-1}) - ((D-b^2)Q_{km-1} - a^2(s-1)q_0P_{km-1})Q_{km-1} =$$

$$= a^2P_{km-1}^2 + a^2(s-2)q_0P_{km-1}Q_{km-1} - (D-b^2)Q_{km-1}^2 = (aP_{km-1} + bQ_{km-1})^2 - DQ_{km-1}^2.$$

Таким образом, пара чисел $\langle\ P_{km-1}\ ,\ Q_{km-1}\ \rangle$ удовлетворяет s-уравнению Пелля (6) тогда и только тогда, когда km – чётное. Лемма доказана. □

Отметим, что любое решение $\langle x,y\rangle$ s – уравнения Пелля с $x>0$ и $ax+by>0$ параметризуется уравнениями

$$\begin{cases} x = & \operatorname{ch}t - \dfrac{b\,\operatorname{sh}t}{\sqrt{D}} \\ \\ y = & \dfrac{a\,\operatorname{sh}t}{\sqrt{D}}, \end{cases} \tag{7}$$

где $t\in\mathbb{R}$ таково, что x,y определяют целочисленное решение уравнения (6) с $x>0$ и $ax+by>0$.

Используя условие (3) и следствие 2 из теоремы 1, легко убедиться в том , что обе части последнего уравнения можно разделить на a :

$$ax^2+2bxy-2cy^2=a. \tag{8}$$

Обозначим через $\mathfrak{P}_s$ – множество всех целочисленных решений s-уравнения Пелля с $x>0$ и $ax+by>0$. На этом множестве определим бинарную операцию $\circledast$ следующим образом:

$$\langle x,y\rangle \circledast \langle u,v\rangle := \left\langle xu+\frac{(D-b^2)yv}{a^2}\ ,\ xv+yu+(s-2)q_0yv\right\rangle. \tag{9}$$

Отметим, что $\dfrac{(D-b^2)yv}{a^2} = \dfrac{2cyv}{a} \in \mathbb{Z}$. В самом деле, если, в силу (8), $ax^2+2bxy-2cy^2=a$ и $au^2+2buv-2cv^2=a$, то $2cy^2 \,\vdots\, a$ и $2cv^2 \,\vdots\, a$, откуда $2cyv \,\vdots\, a$.

Правая часть равенства (9), как легко видеть, определяет также некоторое решение s-уравнения Пелля. Операция $\circledast$ коммутативна и ассоциативна. Более того, имеет место

Лемма 3. $\langle\mathfrak{P}_s\ ;\ \circledast\rangle$ *– циклическая абелева группа с порождающим элементом ϕ.*

Доказательство. Пара $\phi^0 := \varepsilon = \langle 1,0\rangle$, удовлетворяя уравнению (6), является единицей в $\mathfrak{P}_s$. Для любого $n\in\mathbb{N}$ $\phi^n\in\mathfrak{P}_s$. Кроме того операция $\circledast$ обратима, так как

$$\langle x,y\rangle^{-1} = \langle\ x+(s-2)q_0y\ ,\ -y\ \rangle \in \mathfrak{P}_s \ \ \forall\ \langle x,y\rangle \in \mathfrak{P}_s.$$

Следовательно, $\forall\ n\ \in\mathbb{N}\ \ \phi^{-n}\in\mathfrak{P}_s$.

Пусть Θ_s (Θ_s^+) – множество всех вещественных (положительных) чисел t, для которых формулы (7) определяют целочисленные (положительные) решения s-уравнения Пелля. Рассмотрим биективное отбражение $f:\mathfrak{P}_s\to\Theta_s$, где $f(\langle x,y\rangle):=t$. Здесь t определяет x и y по формулам (7) Из определения f и (9) вытекает, что Θ_s – абелева группа относительно сложения, а также, что группы $\mathfrak{P}_s$ и Θ_s изоморфны. Так как в силу равенства $(ax+by)+\sqrt{D}y=ae^t$ отображение f индуцирует порядок в Θ_s^+, то в Θ_s^+ есть наименьший элемент t_ϕ. Группа Θ_s – циклическая. В самом деле, если, существует $\widetilde{t}\in\Theta_s$, что для любого $n\in\mathbb{Z}$ $\widetilde{t}\neq nt_\phi$, то $t_\phi > t_1 = \widetilde{t} - \left[\dfrac{\widetilde{t}}{t_\phi}\right]t_\phi > 0$. Отсюда $t_1\in\Theta_s^+$, вопреки определению t_ϕ. Лемма доказана. □

Положим $\mathfrak{P}_s^* = \{ <-x,-y> \mid <x,y>\in\mathfrak{P}_s \}$ и сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 2. *Пусть α – s – дискриминант, k – длина периода разложения α в ЦД. Соответствующее α s – уравнение Пелля (6) имеет бесконечное множество $\mathfrak{P}_s\cup\mathfrak{P}_s^*$ целочисленных решений. Любое решение из $\mathfrak{P}_s$ – это целая степень основной единицы*

$\phi = \langle P_{kn_0-1}, Q_{kn_0-1}\rangle$, *где* $n_0 \in \mathbb{N}$ *– наименьшее число, для которого* kn_0 *чётное,* $\dfrac{P_{kn_0-1}}{Q_{kn_0-1}}$ *- ПД к* α*. Степень единицы понимается в смысле равенства* (9).

Пример 5. Рассмотрим уравнение вида $5x^2 + 5xy - 23y^2 = 5$. Умножим обе его части на 20 и выделим полный квадрат : $(10x + 5y)^2 - 485y^2 = 100$. Отсюда $\alpha = \dfrac{\sqrt{485}-5}{10} = [1, \overline{1,2,2,1,3}]$, $s = 3$, $k = 5$. Фундаментальное решение данного 3-уравнения Пелля $\phi = \langle P_9\ ,\ Q_9\rangle = \langle 749\ ,\ 440\rangle$. Все остальные решения уравнения из $\mathfrak{P}_3$ согласно теореме 2 имеют вид $\phi_n^+ = \langle 749, 440\rangle^n$, $\phi_n^- = \langle 1189, -440\rangle^n$, $n \in \mathbb{N}$.

В заключение этого пункта отметим, что аналогично исследуется диофантово уравнение вида $(ax + by)^2 - Dy^2 = -a^2$, где $\alpha = \dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$ – s – дискриминант.

3. s-ДИСКРИМИНАНТЫ С ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИНОЙ ПЕРИОДА РАЗЛОЖЕНИЯ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Рассмотрим s-дискриминант α с разложением в периодическую ЦД вида

$$\alpha = \frac{\sqrt{D}-b}{a} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \ldots, q_L, q_{L+1}, q_L, \ldots, q_2, q_1, sq_0}].$$

Лемма 4. *Пусть* $2L+2 = \zeta$ *и приведенные иррациональности (ПИ) для числа* α [1] *имеют вид*

$$\frac{b_0+\sqrt{D}}{a_1}\ ,\ \frac{b_1+\sqrt{D}}{a_2}\ ,\ \ldots,\frac{b_L+\sqrt{D}}{a_{L+1}}\ ,\ \frac{b_L+\sqrt{D}}{a_L}\ ,\ \ldots,\frac{b_1+\sqrt{D}}{a_1}\ ,\ \frac{b_0+\sqrt{D}}{a_0}\ .$$

Тогда :
1) справедливы следующие соотношения :

$$\begin{cases} b_i^2 + a_i a_{i+1} = D \\ \quad b_i + b_{i+1} = a_{i+1}q_{i+1}\ ,\ i = \overline{0,L} \\ \qquad 2b_L = a_{L+1}q_{L+1} \\ \qquad 2b_0 = sa_0q_0, \end{cases} \tag{10}$$

2) диофантова система (10) *относительно* b_i $(i = \overline{0,L})$ *и* a_i $(i = \overline{1,L+1})$ *равносильна следующей линейной диофантовой системе относительно неизвестных* t_i $(i = \overline{1,L})$, b_L *и* $a_i(i = \overline{1,L+1})$:

$$\begin{cases} 2b_0 = & sa_0q_0 \\ 2b_L = & a_{L+1}q_{L+1} \\ t_{i+1}q_{i+1} = & a_{i+2} - a_i\ ,\ i = \overline{0,L-1} \\ t_L = & a_Lq_L - a_{L+1}q_{L+1} \\ t_i = & a_iq_i - a_{i+1}q_{i+1} - t_{i+1}\ ,\ i = \overline{1,L-1}. \end{cases}$$

Доказательство.
1) равенства получаются в результате разложения числа α в ЦД.
2) проверяется непосредственными вычислениями ($t_{i+1} = b_i - b_{i+1}, i = \overline{0,L-1}$). □

Замечание 1. Числа $a_iq_i - t_i$ и $a_iq_i + t_i$ имеют одинаковую четность, и, поэтому, значения t_i и a_i однозначно определяют b_i, если $a_{L+1}q_{L+1}$ - четное число.

Лемма 5. *Неизвестные* a_i $(i=\overline{1,L+1})$ *удовлетворяют соотношениям*

$$a_{L-i}=(-1)^{i+1}(a_{L+1}S_{i+1}T_{i-1}-a_LR_i^2)\ ,\ (i=\overline{1,L}) \tag{11}$$

где S_i $(i=\overline{0,L+1})$, R_i $(i=\overline{0,L})$, T_i $(i=\overline{0,L-1})$ *определяются рекуррентными формулами:* $S_0=T_0=R_0=1$, $S_1=q_{L+1}$, $R_1=q_L$, $T_1=q_{L-1}$,

$$S_{i+1}=q_{L-i+1}S_i+S_{i-1}\quad (i=\overline{1,L})\ , \tag{12}$$

$$R_{i+1}=q_{L-i}R_i+R_{i-1}\quad (i=\overline{1,L-1})\ , \tag{13}$$

$$T_{i+1}=q_{L-i-1}T_i+T_{i-1}\quad (i=\overline{1,L-2})\ . \tag{14}$$

Доказательство. Положим $T_{-1}=R_{-1}=0$, $T_{-2}=1$, тогда равенства (11) имеют место и при $i=-1;0$. По лемме 4

$$t_{L-i}=a_{L-i}q_{L-i}+2\sum_{m=1}^{i}(-1)^m a_{L-i+m}q_{L-i+m}+(-1)^{i+1}a_{L+1}q_{L+1}\ . \tag{15}$$

Если (11) доказано при всех $i<i_0$, то покажем, что и при $i=i_0$ это равенство также справедливо. Будем считать, что $i_0=2k+1$ (случай $i_0=2k$ аналогичен). Из леммы 4 и формулы (15)

$$a_{L-(2k+1)}=a_{L-(2k-1)}-q_{L-2k}t_{L-2k}=a_{L+1}(S_{2k}T_{2k-2}+q_{L-2k}^2S_{2k+1}T_{2k-1}+q_{L+1}q_{L-2k}+$$

$$+2q_{L-2k}\sum_{m=1}^{2k}q_{L-2k+m}S_{2k-m+1}T_{2k-m-1})-a_L(R_{2k-1}^2+q_{L-2k}^2R_{2k}^2+2q_{L-2k}\sum_{m=1}^{2k}q_{L-2k+m}R_{2k-m}^2),$$

где скобка при a_L равна R_{2k+1}^2, так как

$$\sum_{m=1}^{2k}q_{L-2k+m}R_{2k-m}^2=\sum_{m=1}^{2k}R_{2k-m}(q_{L-2k+m}R_{2k-m})=\sum_{m=1}^{2k}R_{2k-m}(R_{2k-m+1}-R_{2k-m-1})=$$

$$=\sum_{m=1}^{2k}(R_{2k-m}R_{2k-m+1}-R_{2k-m}R_{2k-m-1})=R_{2k-1}R_{2k}.$$

Аналогично вычисляется множитель при a_{L+1}. Таким образом,

$$a_{L-(2k+1)}=a_{L+1}S_{2k+1}T_{2k}-a_LR_{2k+1}^2\ .$$

Лемма доказана. □

Лемма 6. *Величины* a_{L+1} *и* a_L *удовлетворяют уравнению*

$$a_{L+1}S_{L+1}T_{L-1}-a_LR_L^2=(-1)^{L+1}a_0\ . \tag{16}$$

Если $a_{L+1}q_{L+1}$ *- четно, то остальные неизвестные* a_i $(i=\overline{1,L-1})$, b_i $(i=\overline{0,L})$ *и* D, *входящие в систему* (10), *вычисляются, соответственно, из уравнений*

$$b_L=\frac{a_{L+1}q_{L+1}}{2}\ ,\ b_i=a_{i+1}q_{i+1}-b_{i+1}\ ,\ D=b_L^2+a_La_{L+1}\ . \tag{17}$$

Доказательство. Очевидно, что уравнение (11) при $i=L$ совпадает с (16) (поскольку $a_0=a$). Остальные соотношения проверяются непосредственными вычислениями, как в леммах 4 и 5. □

Лемма 7. *Пусть* a_{L+1} *и* a_L *– положительные решения уравнения* (16), *причем* $a_{L+1}q_{L+1}$ *– четно. Тогда*
1) Все неизвестные a_i $(i=\overline{0,L-1})$ *и* b_i $(i=\overline{0,L})$, *удовлетворяющие* (11) *и* (17), *положительны;*
2) Если $2L+2=\zeta$ *и ПИ, эквивалентные* $\dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$, *имеют вид*

$$\frac{b_0+\sqrt{D}}{a_1}\ ,\ \frac{b_1+\sqrt{D}}{a_2}\ ,\ldots,\ \frac{b_L+\sqrt{D}}{a_{L+1}}\ ,\ \frac{b_L+\sqrt{D}}{a_L}\ ,\ \ldots,\ \frac{b_1+\sqrt{D}}{a_1}\ ,\ \frac{b_0+\sqrt{D}}{a_0},$$

то они составляют полную систему ПИ, эквивалентных $\dfrac{\sqrt{D}-b}{a}$.

Доказательство. Пусть, для определенности, L – нечетно, тогда из (11), при $i=L$, получаем:

$$a_{L+1}=a_L\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}+\frac{a_0}{S_{L+1}T_{L-1}}\ .$$

1) Покажем, что a_i $(i=\overline{1,L-1})$ – положительны.

При нечетном i из (11) следует

$$a_{L-i}=a_{L+1}S_{i+1}T_{i-1}-a_LR_i^2=\left(a_L\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}+\frac{a_0}{S_{L+1}T_{L-1}}\right)S_{i+1}T_{i-1}-a_LR_i^2>$$

$$>a_L\frac{S_{i+1}T_{i-1}R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}-a_LR_i^2=a_LS_{i+1}T_{i-1}\left(\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}-\frac{R_i^2}{S_{i+1}T_{i-1}}\right).$$

Таким образом,

$$a_{L-i}>a_LS_{i+1}T_{i-1}\left(\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}-\frac{R_i^2}{S_{i+1}T_{i-1}}\ .\right) \tag{18}$$

Отношение $\dfrac{S_{i+1}}{R_i}$ в силу (12)-(14) является ПД к $\dfrac{S_{L+1}}{R_L}$ с четным номером [1], так что

$$\frac{S_{i+1}}{R_i}>\frac{S_{L+1}}{R_L}\ . \tag{19}$$

По аналогичным причинам

$$\frac{R_i}{T_{i-1}}<\frac{R_L}{T_{L-1}}\ . \tag{20}$$

Подставляя (19) и (20) в (18), получаем $a_i>0$, где i – нечетно. Доказательство, что $a_i\neq 0$ вытекает из системы (17). При четном i из (11) следует

$$a_{L-i}=a_LR_i^2-a_{L+1}S_{i+1}T_{i-1}=a_LR_i^2-\left(a_L\frac{R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}+\frac{a_0}{S_{L+1}T_{L-1}}\right)S_{i+1}T_{i-1}=$$

$$=a_LR_i^2-a_L\frac{S_{i+1}T_{i-1}R_L^2}{S_{L+1}T_{L-1}}-\frac{a_0S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}=a_L\left(R_i^2-\frac{R_L^2S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}\right)-\frac{a_0S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}\ .$$

Таким образом,

$$a_{L-i}=a_L\left(R_i^2-\frac{R_L^2S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}\right)-\frac{a_0S_{i+1}T_{i-1}}{S_{L+1}T_{L-1}}\ . \tag{21}$$

Имеют место неравенства

$$\frac{S_{i+1}}{R_i}<\frac{S_{L+1}}{R_L},\qquad \frac{R_i}{T_{i-1}}>\frac{R_L}{T_{L-1}}\ . \tag{22}$$

Подставляя (22) в (21) получаем $a_{L-i} > -1$. Так как $a_i \neq 0$, то $a_i > 0$ и для четного i. Докажем теперь, что $b_i > 0$ $(i = \overline{0, L})$. Из леммы 4 следует, что $b_0 > 0$. Из (17) вытекает , что $b_L > 0$. Предположим, что $b_i \leq 0$, $i = \overline{1, L-1}$. Тогда по лемме 4 $b_{i-1}^2 = (a_i q_i - b_i)^2 \geq a_i^2 q_i^2 + b_i^2 = a_i^2 q_i^2 + D - a_i a_{i+1}$. Аналогично $b_{i+1}^2 \geq a_{i+1}^2 q_{i+1}^2 + D - a_i a_{i+1}$. Отсюда $a_{i+1}^2 q_{i+1}^2 - a_i a_{i+1} \leq -a_{i+1} a_{i+2}$, и $a_i^2 q_i^2 - a_i a_{i+1} \leq -a_{i-1} a_i$. Следовательно, $a_{i+1} q_{i+1}^2 + a_{i+2} \leq a_i$, $a_i q_i^2 + a_{i-1} \leq a_{i+1}$. Однако последние два неравенства одновременно выполняться не могут поскольку $a_{i+1} \geq a_i q_i^2 + a_{i-1} \geq (a_{i+1} q_{i+1}^2 + a_{i+2}) q_i^2 + a_{i-1} = a_{i+1} q_{i+1}^2 q_i^2 + a_{i+2} q_i^2 + a_{i-1}$. Получено противоречие.

Случай четного L рассматривается аналогично.

2) Пусть теперь $\tau = \dfrac{b + \sqrt{D}}{a}$ – ПИ, и натуральные $q, q_1, b_1, b_2, a_1, a_2$ удовлетворяют соотношениям

$$b + b_1 = aq\ ,\ b_1 + b_2 = a_1 q_1\ ,\ b_1^2 + a a_1 = b_2^2 + a_1 a_2 = D. \tag{23}$$

Покажем, что $\tau_1 = \dfrac{b_1 + \sqrt{D}}{a_1}$ – также ПИ. Условия приведения имеют вид $b_1 < \sqrt{D}$, $a_1 + b_1 > \sqrt{D}$, $b_1 + \sqrt{D} > a_1$ [1]. Первое следует из неравенства $D = b_1^2 + a a_1 > b_1^2$, третье – из приведённости τ и соотношений $a \leq aq = b + b_1 < b_1 + \sqrt{D}$.

Очевидно, $q < \tau$. Покажем, что $q > \tau - 1$, то есть, $q = [\tau]$. Если, напротив, $aq < b + \sqrt{D} - a$, то $b_1 = aq - b < \sqrt{D} - a$ и $a_1 = \dfrac{D - b_1^2}{a} > \dfrac{D - (\sqrt{D} - a)^2}{a} = 2\sqrt{D} - a$. Отсюда $b_2 = a_1 q_1 - b_1 > (2\sqrt{D} - a) q_1 - (\sqrt{D} - a) = \sqrt{D}(2q_1 - 1) - a(q_1 - 1) > \sqrt{D}$, что противоречит (23). Следовательно, $q = [\tau]$, и, значит, в силу (23) τ_1 – ПИ [1].

Рассмотрим КИ $\dfrac{b_L + \sqrt{D}}{a_{L+1}}$. Условие $b_L < \sqrt{D}$ выполнено. Неравенство $b_L + a_{L+1} > \sqrt{D}$ равносильно $a_{L+1}(q_{L+1} + 1) > a_L$. Действительно, $((b_L + a_{L+1})^2 > D) \Leftrightarrow (a_{L+1}(a_{L+1} q_{L+1} + a_{L+1} - a_L) > 0)$. Из (22) и леммы 6 следует цепочка неравенств:

$$a_{L+1}(q_{L+1} + 1) > \frac{a_L R_L^2 (q_{L+1} + 1)}{S_{L+1} T_{L-1}} > \frac{a_L R_L (q_{L+1} + 1)}{S_{L+1}} > a_L,$$

поскольку в силу (22) $T_{L-1} < R_L$ и $R_L > q_{L+1} S_{L+1}$. Условие $b_L + \sqrt{D} > a_{L+1}$ выполнено так как $b_L \geq \frac{a_{L+1}}{2}$ и $\sqrt{D} > \frac{a_{L+1}}{2}$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть a_{L+1} и a_L - удовлетворяют уравнению* (16). *Тогда*

$$\begin{cases} a_{L+1} = & a_0 R_{L-1}^2 ((-1)^{L-1} - R_L (S_L + T_{L-2})) + \delta R_L^2 \\ a_L = & a_0 ((-1)^L S_L^2 - S_{L+1} T_{L-2} R_{L-1} (S_L + T_{L-2})) + \delta S_{L+1} T_{L-1}, \end{cases}$$

где $\delta \in \mathbb{Z}$ – произвольно.

Доказательство. Все решения уравнения (16) записываются в виде

$$\begin{cases} a_{L+1} = a_{L+1}^{(0)} + \delta R_L^2 \\ a_L = a_L^{(0)} + \delta S_{L+1} T_{L-1}, \end{cases}$$

где $\delta \in \mathbb{Z}$ - произвольно, а $\langle a_{L+1}^{(0)}\ ,\ a_L^{(0)} \rangle$ – какое-то частное решение этого уравнения.

В самом деле, подставив эти равенства в уравнение (16), в результате получим:

$$(a_{L+1}^{(0)} + \delta R_L^2) S_{L+1} T_{L-1} - (a_L^{(0)} + \delta S_{L+1} T_{L-1}) R_L^2 =$$

$$= (a_{L+1}^{(0)} S_{L+1} T_{L-1} - a_L^{(0)} R_L^2) + \delta(R_L^2 S_{L+1} T_{L-1} - S_{L+1} T_{L-1} R_L^2) = (-1)^{L+1} a_0$$

Пусть, для определенности, L – нечетно, тогда $S_{L+1}R_{L-1} - S_L R_L = 1$. Действительно, в силу (12) и (13)

$$S_{L+1}R_{L-1} - S_L R_L = R_{L-1}(q_1 S_L + S_{L-1}) - S_L(q_1 R_{L-1} + R_{L-2}) = S_{L-1}R_{L-1} - S_L R_{L-2} =$$
$$= S_{L-1}(q_2 R_{L-2} + R_{L-3}) - (q_2 S_{L-1} + S_{L-2})R_{L-2} = S_{L-1}R_{L-3} - S_{L-2}R_{L-2} =$$
$$= \ldots = (-1)^i (S_{L-i+1} R_{L-i-1} - S_{L-i} R_{L-i}) = \ldots = -S_1 R_{-1} + S_0 R_0 = 1 \ .$$

Все решения уравнения $S_{L+1}x - R_L y = 1$ относительно неизвестных x и y записываются в виде

$$\begin{cases} x = & R_{L-1} + \alpha R_L \\ y = & S_L + \alpha S_{L+1}, \end{cases} \tag{24}$$

где $\alpha \in \mathbb{Z}$ – произвольно, так как, подставив x и y из (24) в указанное уравнение, получаем:

$$S_{L+1}(R_{L-1} + \alpha R_L) - R_L(S_L + \alpha S_{L+1}) = S_{L+1}R_{L-1} - R_L S_L + \alpha(S_{L+1}R_L - R_L S_{L+1}) = 1.$$

Отсюда в силу (16)

$$a_{L+1} T_{L-1} = a_0(R_{L-1} + \alpha R_L) \tag{25}$$
$$a_L R_L = a_0(S_L + \alpha S_{L+1}) \ . \tag{26}$$

Аналогично рассуждая при помощи уравнений (13) и (14), получаем, что при нечетном L имеет место следующее соотношение: $R_L T_{L-2} - R_{L-1} T_{L-1} = -1$. Это соотношение и (25) приводят нас к равенствам:

$$\begin{array}{c} \alpha a_0 = a_0 R_{L-1} T_{L-2} + \beta T_{L-1} \\ a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2 + \beta R_L \ . \end{array} \tag{27}$$

Так как, $a_{L+1} T_{L-1} = a_0 R_{L-1} + \alpha a_0 R_L$, то умножая, во-первых, последнее равенство на T_{L-2}, получаем

$$a_{L+1} T_{L-1} T_{L-2} = a_0 R_{L-1} T_{L-2} + \alpha a_0 T_{L-2} R_L$$
$$\alpha a_0 = a_0 T_{L-2} R_{L-1} + T_{L-1}(\alpha a_0 R_{L-1} - a_{L+1} T_{L-2}) = a_0 T_{L-2} R_{L-1} + \beta T_{L-1};$$

во-вторых, умножим то же равенство на R_{L-1}:

$$a_{L+1} R_{L-1} T_{L-1} = a_0 R_{L-1}^2 + \alpha a_0 R_{L-1} R_L$$
$$a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2 + R_L(\alpha a_0 R_{L-1} - a_{L+1} T_{L-2}) = a_0 R_{L-1}^2 + \beta R_L.$$

Используя те же соображения ещё раз для равенства (26), приходим к соотношениям:

$$\begin{array}{c} \alpha a_0 = -a_0 R_{L-1} S_L + \gamma R_L \\ a_L = -a_0 S_L^2 + \gamma S_{L+1}, \end{array} \tag{28}$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$ – произвольно.

Сравним теперь (27) и (28):

$$\gamma R_L - \beta T_{L-1} = a_0 R_{L-1}(S_L + T_{L-2}).$$

Легко проверить, что одно из частных решений этого уравнения имеет вид:

$$\begin{cases} \gamma^{(0)} = & -a_0 R_{L-1} T_{L-2}(S_L + T_{L-2}) \\ \beta^{(0)} = & -a_0 R_{L-1}^2 (S_L + T_{L-2}), \end{cases} \tag{29}$$

Таким образом, подставляя (29) в (27) и (28), получаем решения уравнения (16) при нечетном L:

$$\begin{cases} a_{L+1}^{(0)} = & a_0 R_{L-1}^2 (1 - R_L(S_L + T_{L-2})) \\ a_L^{(0)} \ = & -a_0(S_L^2 + S_{L+1} T_{L-2} R_{L-1}(S_L + T_{L-2})). \end{cases}$$

Аналогично рассуждая, приходим к решениям уравнения (16) при четном L:

$$\begin{cases} a_{L+1}^{(0)} = & -a_0 R_{L-1}^2 (1 + R_L(S_L + T_{L-2})) \\ a_L^{(0)} = & a_0(S_L^2 - S_{L+1}T_{L-2}R_{L-1}(S_L + T_{L-2})). \end{cases}$$

Таким образом, утверждение леммы доказано. □

Теорема 3. *Пусть* $q_1, ..., q_{L+1}$ *– произвольный набор натуральных чисел,* S_i $(i = \overline{0, L+1})$, R_i $(i = \overline{0, L})$, T_i $(i = \overline{0, L-1})$ *определяются рекуррентными соотношениями* (12) - (14)*. Предположим, что выполнено одно из условий : или* q_{L+1} *– четно или оба* q_{L+1} *и* R_L *нечётны. Тогда все s-дискриминанты вида* $\alpha = \dfrac{\sqrt{D} - b}{a}$, *раскладывающиеся в ЦД* $[q_0, \overline{q_1, \ldots, q_L, q_{L+1}, q_L, \ldots, q_1, sq_0}]$, *задаются равенствами:*

$$a_L = a_0((-1)^L S_L^2 - S_{L+1}T_{L-2}R_{L-1}(S_L + T_{L-2})) + \delta S_{L+1}T_{L-1}, \tag{30}$$

$$a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2((-1)^{L-1} - R_L(S_L + T_{L-2})) + \delta R_L^2, \; D = \left(\frac{q_{L+1}a_{L+1}}{2}\right)^2 + a_L a_{L+1}, \tag{31}$$

$$a = 2P_{n-1}, \quad sq_0 P_{n-1} = \sqrt{D - 4(-1)^n} - 2Q_{n-1}, \quad b = (s-2)q_0 P_{n-1}. \tag{32}$$

Здесь $\delta \in \mathbb{Z}$ *- четно, если* q_{L+1} *нечетно и таково , что* $a_{L+1} > 0$ *и* $sq_0 \geq 2$.

Доказательство. В силу результатов двух предыдущих лемм достаточно показать, что в условиях теоремы произведение $a_{L+1}q_{L+1}$ является четным.

При нечетном q_{L+1} и четном δ из того, что $S_i = q_{L+1}R_{i-1} + T_{i-2}$ $(i = \overline{0, L})$, следует соотношение

$$a_{L+1} = a_0 R_{L-1}^2((-1)^{L-1} - R_L(q_{L+1}R_{L-1} + 2T_{L-2})) + \delta R_L^2 \equiv 0 (mod\; 2)$$

при любой чётности R_{L-1}. Формулы (32) вытекают из (4) и (5). Теорема доказана.

Доказанная теорема является обобщением результата Е.П. Голубевой из [9] (там фактически рассмотрены 2-дискриминанты). □

Пример 6. Пусть $L = 4$, $\zeta = 10$, $q_1 = q_2 = q_4 = 1$, $q_3 = 3$, $q_5 = 5$. Тогда по формулам (12) - (14) находим: $S_0 = 1$, $S_1 = 5$, $S_2 = 6$, $S_3 = 23$, $S_4 = 29$, $S_5 = 52$, $R_0 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 4$, $R_3 = 5$, $R_4 = 9$, $T_0 = 1$, $T_1 = 3$, $T_2 = 4$, $T_3 = 7$. Из (4) и (5) $\dfrac{P_8}{Q_8} = [1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1] = \dfrac{531}{296}$, $a = a_0 = 1062$. Подставляя полученные значения в формулы (30) - (31), находим: $a_5 = 81\delta - 7911900$, $a_4 = 364\delta - 35554698$. Так как q_5 нечётно, то δ выбираем чётным. Наименьшее δ, при котором $q_5 > 0$ и $sq_0 \geq 2$ – это $\delta_0 = 97684$.

Пусть $\delta = 97688$. Тогда в силу (30) - (32) $a_5 = 828$, $a_4 = 3734$, $D = 7376652$, $sq_0 = 4$. Таким образом, получаем следующие возможные случаи:

1. $s = 4$, $q_0 = 1$, $b = 1062$;
2. $s = 2$, $q_0 = 2$, $b = 0$.

Найденным значениям соответствуют КИ:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{7376652} - 1062}{1062} = \frac{\sqrt{204907} - 177}{177} = [1, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 4}],$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{7376652}}{1062} = \frac{\sqrt{4204907}}{177} = [2, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 4}],$$

Положим $\delta = 97704$. Тогда $a_5 = 2124$, $a_4 = 9558$, $D = 48497292$, $sq_0 = 12$. Возможны следующие случаи:

1. $s = 12,\ q_0 = 1,\ b = 5310;$
2. $s = 6,\ q_0 = 2,\ b = 4248;$
3. $s = 4,\ q_0 = 3,\ b = 3186;$
4. $s = 3,\ q_0 = 4,\ b = 2124;$
5. $s = 2,\ q_0 = 6,\ b = 0.$

Отметим, что в данном случае для всех КИ выполнены условия следствия 1: $n = 9,\ P_8 = 531,\ Q_8 = 296,\ Q_7 = 165$. Получаем следующие КИ:

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{48497292} - 5310}{1062} = \sqrt{43} - 5 = [1, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_2 = \frac{\sqrt{48497292} - 4248}{1062} = \sqrt{43} - 4 = [2, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{48497292} - 3186}{1062} = \sqrt{43} - 3 = [3, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_4 = \frac{\sqrt{48497292} - 2124}{1062} = \sqrt{43} - 2 = [4, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

$$\beta_5 = \frac{\sqrt{48497292}}{1062} = \sqrt{43} = [6, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}],$$

(ср. с примером в [3]).

Если $\delta = 97710$, то $a_5 = 2610$, $a_4 = 11742$, $D = 73222245$, $sq_0 = 15$. Откуда:

1. $s = 15,\ q_0 = 1,\ b = 6903;$
2. $s = 5,\ q_0 = 3,\ b = 4779;$
3. $s = 3,\ q_0 = 5,\ b = 2655.$

Соответсвующие КИ имеют вид:

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{73222245} - 6903}{1062} = \frac{\sqrt{8135805} - 2301}{354} = [1, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 15}].$$

$$\gamma_2 = \frac{\sqrt{73222245} - 4779}{1062} = \frac{\sqrt{8135805} - 1593}{354} = [3, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 15}].$$

$$\gamma_3 = \frac{\sqrt{73222245} - 2655}{1062} = \frac{\sqrt{8135805} - 885}{354} = [5, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 15}].$$

Заключение

Основными результатами данной статьи являются:

1. Получено описание s-дискриминантов.
2. Изучено s-уравнение Пелля, найдены формулы для нахождения всех решений этого уравнения.
3. Решена задача описания всех s-дискриминантов по симметричной части их разложения в непрерывную цепную дробь.

Представляется перспективным дальнейшее изучение s-дискриминантов, приложений полученных результатов к теории целочисленных квадратичных форм, а также изучение КИ с более общими разложениями в ЦД, соответствующим им аналогам уравнения Пелля, а также обратным задачам и приложениям.

Список литературы

1. Венков Б.А. Элементарная теория чисел. - М.:ОНТИ НКТП СССР, 1937. - 219 с.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. - М.: Гос.уч.-пед.изд.Мин.просв.РСФСР, 1960. - 376 с.
3. Пен А.С., Скубенко Б.Ф. Оценка сверху периода квадратичной иррациональности// Мат.заметки, - 1969. - т.5. - №4 - С.413-417.
4. Голубева Е.П. О длинах периода квадратичной иррациональности// Мат.сб., - 1984. - т.123. - №1. - С.120-129.
5. Robertson J. Computing in Quadratic Orders// available at http://hometown.aol.com/jpr2718/ . - 2006.
6. Mollin R.A., Goddard B. A description of continued fraction expansions of quadratic surds represented by polynomials//J.Number Theory, - 2004. - Vol.107 - P.228-240.
7. Van der Poorten A.J., Williams H.C. On certain continued fraction expansions of fixed period length// Acta Arith., - 1999. - Vol.89. - P.23-35.
8. Голубева Е.П. О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей.I // в кн. Аналитическая теория чисел и теория функций.Зап.научн.семин.ЛОМИ, - 1990. - Вып.10, - Т.185. - С.72-81.
9. Голубева Е.П. Квадратичные иррациональности с фиксированной длиной периода разложения в непрерывную дробь // в кн. Аналитическая теория чисел и теория функций. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, - 1987. - Вып.9, - Т.161. - С.10-31.
10. Голубева Е.П. О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей.II// в кн. Аналитическая теория чисел и теория функций. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, - 1988 - Вып.9. - Т.168. - С.11-22.
11. Robertson J. Solving the generalized Pell equation $x^2 - Dy^2 = N$//available at http://hometown.aol.com/jpr2718/ . - 2004.
12. Finch S. Class number theory//available at http://pauillac.inria.fr/algo/csolve/clss.pdf . - 2005.
13. Mollin R.A. Quadratic equations determined by continued fractions//JP J.Algebra Number Theory Appl., - 2001. - Vol.1. - No.1. - P.57-75.
14. Robertson J. Solving the equation $ax + bxy + cy + dx + ey + f = 0$//available at http://hometown.aol.com/jpr2718/ . - 2003.
15. Matthews K. The diophantine equation $ax^2 + bxy + cy^2 = N,\ D = b^2 - 4ac > 0$ //J. Théor. Nombres Bordeaux. - 2002. - Vol.14. - P.257-270.

Статья поступила в редакцию 16.09.2007