УДК 519.21:338.48

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЫЛЬНОСТИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

© Д. В. Донской

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет управления
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
E-mail: *donskoy2simf@mail.ru*

Abstract

In this paper optimization of profitability functions of queueing systems is considered. It is shown that as a rule such functions are unimodal.

Введение

Классическая математическая теория массового обслуживания (ТМО) описывает и анализирует абстрактные системы на основе двух главных понятий: потока (последовательности) событий, называемых заявками, и множества объектов, называемых каналами обслуживания заявок. Кроме этих основных элементов используются и другие – очереди, потоки обслуживания, отказы, а также параметры, определяющие поведение систем масового обслуживания (СМО). Язык ТМО адекватно описывает многие экономические, биологические и технические системы. Особый интерес представляет параметрическая оптимизация подобных систем, определяющая наилучшее их функционирование. В частности, для экономических систем целесообразно оптимизировать прибыльность [1].

Целью данной работы является изучение свойств и вычислительных особенностей функций прибыльности, оптимизируемых в математических моделях таких объектов, как, например, рекреационные и туристические предприятия.

1. Математическая модель и постановка задачи

Рассматривается n – канальная СМО с отказами, в которую поступает простейший (пуассоновский) поток заявок с интенсивностью λ. Производительность (интенсивность обслуживания) каждого канала обозначается μ [2]. Экономические характеристики системы: C_1 – затраты на создание одного канала; C_2 – расходы на эксплуатацию одного канала в единицу времени; C_3 – расходы от простоя одного канала в единицу времени; C_4 – доход от обслуживания одной заявки.

Будем считать, что случайный процесс, протекающий в СМО, перешел в стационарный режим. Для рассматриваемой СМО среднее число занятых каналов $\bar{k}$ определяется формулой $\bar{k} = \varrho(1 - p_n)$, где $\varrho = \lambda/\mu$; $p_n = \frac{\varrho^n}{n!}p_0$; $p_0 = (\sum_{m=0}^{n} \frac{\varrho^m}{m!})^{-1}$; n – число каналов СМО; p_k – вероятность события «занято ровно k каналов обслуживания», $k = \overline{1, n}$; p_0 – вероятность того, что все каналы свободны [2].

Поскольку пропускная способность СМО равна $\mu\bar{k}$, средний доход в единицу времени D определяется формулой $D = C_4\mu\bar{k}$. Средние расходы в единицу времени $R = C_2\bar{k} + C_3(n - \bar{k})$. Средняя прибыль в единицу времени $G_1 = D - R = (C_4\mu + C_3 - C_2)\bar{k} - C_3n$.

Если считать λ и μ – заданными параметрами, то $G_1 = G_1(n)$ является функцией от числа каналов n, которую требуется оптимизировать. Иначе говоря, требуется определить оптимальное число каналов (мест обслуживания), при котором обеспечивается получение наибольшей средней прибыли. Подстановка в $G_1(n)$ функции $\bar{k} = \bar{k}(n)$ даёт окончательное выражение

$$G_1(n) = (C_4\mu + C_3 - C_2)\varrho\left(1 - \frac{\varrho^n}{n!}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{\varrho^m}{m!}\right)^{-1}\right) - C_3 n.$$

Замечание. Затраты на создание каналов здесь не учитываются. Полагается, что в стационарном режиме система уже приносит прибыль. Легко проверить, что это происходит спустя время t_0 от начала функционирования СМО, где

$$t_0 = \frac{C_1 n}{(C_4\mu + C_3 - C_2)\bar{k} - C_3 n}$$

2. Унимодальность целевой функции $G_1(n)$

Покажем, что при выполнении ряда легко проверяемых (и выполняемых для практически реализуемых СМО) условий существует единственное натуральное n^* такое, что при $n < n^*$ функция $G_1(n)$ монотонно возрастает, а при $n > n^*$ – монотонно убывает.

Действительно, рассматривая неравенство $\frac{G_1(n+1)}{G_1(n)} - 1 > 0$ (затем, аналогично $\frac{G_1(n+1)}{G_1(n)} - 1 < 0$), которое выражает для любой зафиксированной точки n условие возрастания (убывания) в этой точке, после несложных преобразований получаем эквивалентное неравенство

$$\frac{\varrho^n}{n!\sum_{m=0}^{n}\frac{\varrho^m}{m!}}\left(1 - \frac{\varrho}{(n+1)(1 + \frac{\varrho^{n+1}}{(n+1)!\sum_{m=0}^{n}\frac{\varrho^m}{m!}})}\right) - \gamma > 0,$$

где $\gamma = \frac{C_3}{(C_4\mu + C_3 - C_2)\varrho}$. Заметим, что в левую часть неравенства дважды входит выражение

$$\frac{\varrho^n}{n!\sum_{m=0}^{n}\frac{\varrho^m}{m!}} = p_n,$$

поэтому рассматриваемое неравенство можно записать в виде

$$\varrho p_n^2 + (n + 1 - \varrho(\gamma + 1))p_n - \gamma(n+1) > 0$$

и при зафиксированном n решать отностительно p_n. Поскольку вероятность $p_n \geq 0$, в уравнении

$$\Phi(p_n) = \varrho p_n^2 + (n + 1 - \varrho(\gamma + 1))p_n - \gamma(n+1) = 0$$

рассмотрим только один корень

$$(p_n)^* = \frac{-(n + 1 - \varrho(\gamma+1)) + \sqrt{(n + 1 - \varrho(\gamma+1))^2 + 4\varrho\gamma(n+1)}}{2\varrho}$$

Так как выполняется условие $\varrho = \dfrac{\lambda}{\mu} > 0$, функция $\Phi(p_n)$ монотонно возрастает на промежутке $[-(n+1-\varrho(\gamma+1))/(2\varrho);\infty)$ и принимает нулевое значение в точке $(p_n)^*$. Имеем $\Phi(0) = -\gamma(n+1) < 0$, т.к. $\gamma > 0$ по смыслу задачи. Поскольку $0 \le p_n \le 1$, потребуем, чтобы выполнялись условия $\Phi(0) > \Phi\left(-\dfrac{n+1-\varrho(\gamma+1)}{2\varrho}\right)$ и $\Phi(1) > 0$. При этих условиях на отрезке $(0;1)$ функция Φ будет монотонно возрастать и проходить через ноль. Указанные условия приводят к ограничениям $-\gamma(n+1) > \Phi(-\dfrac{n+1-\varrho(\gamma+1)}{2\varrho})$ и $(n+1)(1-\gamma) > \varrho\gamma$, которые должны выполняться в каждой точке возрастания функции $G_1(n)$. В то же время p_n, как функция от числа каналов n, монотонно убывает с ростом n от единицы (при $n = 0$) до нуля (при $n \to \infty$) при выполнении легко проверяемого условия $\varrho < n+1$. Поэтому при выполении всех указанных условий функция $G_1 = G_1(n)$ действительно унимодальна.

3. Другие модели СМО и функции прибыльности

По результатам проведенных расчетов, свойство унимодальности целевых функций прибыльности от числа каналов обслуживания сохраняется и для многих других моделей СМО.

Рассмотрим n – канальную СМО с ограничением на длину очереди. В систему поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Производительность каждого канала равна μ. Число мест в очереди ограничено величиной m. Экономические характеристики системы: C_1 – затраты на создание одного канала; C_2 – расходы на эксплуатацию одного канала в единицу времени; C_3 – расходы от простоя одного канала в единицу времени; C_4 – расходы на содержание одной заявки в очереди в единицу времени; C_5 – доход от обслуживания одной заявки. Для этой модели функция прибыльности имеет вид

$$G_2(n) = C_5A(n) + (C_3 - C_2)\bar{k}(n) - C_3n - C_4\bar{r}(n),$$

где $A(n) = \lambda(1 - p_{n+m})$; $\bar{k}(n)$ – среднее число занятых каналов; $\bar{r}(n)$ – средняя длина очереди.

Для n – канальной СМО с ограничением на время ожидания заявки в очереди (не более $t_{\text{ож}}$) с теми же экономическими характеристиками $C_1, ..., C_5$ вид функции прибыльности остаётся прежним, но в этом случае $A(n) = \lambda - \nu\bar{r}(n)$; $\bar{r}(n) = \dfrac{\varrho - \bar{k}(n)}{\beta}$; $\nu = \dfrac{1}{\bar{t}_{\text{ож}}}$, где $\bar{t}_{\text{ож}}$ – среднее время ожидания заявки в очереди; $\beta = \dfrac{\nu}{\mu}$.

В заключениев *качестве примера приведём результат численного расчёта оптимального числа каналов СМО со следующими исходными параметрами* .

Интенсивность заявок на обслуживание 70.00.

Наибольшая длина очереди 3.

Интенсивность обслуживания 50.00.

Сумма затрат на организацию одного пункта 650.00.

Средняя прибыль от одного пункта в час 13.00.

Средн.потери от простоя одного пункта в час 0.50.

Рабочий день пункта обслуживания (часов) 6.00.

Результат решения оптимизационной задачи:

Оптимальное число пунктов обслуживания 3.

Средняя прибыль в час 17.19.

Среднесуточная прибыль 103.14.

Сеть пунктов окупится за 19 суток.

Унимодальность функции прибыли от числа каналов иллюстрируется Таблицей 1.

Таблица 1:

Число каналов	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Величина прибыли	11.8	16.6	17.19	16.9	16.4	15.9	15.4	14.9	14.4	13.9

4. Заключение

1. Оптимизационный подход к моделированию СМО позволяет осуществлять выбор параметров функционирования систем обслуживания с наибольшей прибыльностью в единицу времени.

2. Функции прибыльности, определяемые для различных типов СМО в стационарном режиме, как правило, унимодальны, что позволяет реализовать несложные вычислительные процедуры для нахождения оптимального числа каналов обслуживания.

3. В дальнейшем целесообразно и перспективно провести исследование оптимизации СМО с учётом дополнительных ограничений, связанных с проблемной областью, прежде всего – экологических.

Список литературы

1. *Моисеева Н.К.* Стратегическое управление туристской фирмой. – М.: Финансы и статистика, 2007. - 208 с.
2. *Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории массового обслуживания. – М.: Машиностроение, 1969. - 324 с.

Статья поступила в редакцию 18.12.2007