УДК 519.21+62

СТРИБКОВА ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ В СХЕМІ УСЕРЕДНЕННЯ

© Я.М. Чабанюк

Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут прикладної математики і фундаментальних наук
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
e-mail: *coffice@polynet.lviv.ua*

Abstract

Obtain the sufficient conditions the converges the jumping stochastic approximation procedure in semi-Markov media in the averaging scheme. By using the asymptotic representation the compensating operator for the three-components of Markov renewal process.

Вступ

Збіжність дискретної процедури стохастичної апроксимації (ПСА) до кореня u_0 рівняння регресії

$$C(u_0) = 0$$

досліджувалась використовуючи принцип інваріантності для сум [1], [2].

В випадку суттєвого впливу зовнішнього середовища на функцію регресії $C(u)$, природно розглянути її в вигляді $C(u,x)$, де x - аргумент, що описує таке середовище.

В роботі [3] отримано достатні умови збіжності дискретної ПСА, як вкладеної в стрибкову процедуру, коли зовнішнє середовище описується рівномірно ергодичним марковським процесом. В цій же роботі вперше для стрибкової процедури було використано новий підхід, оснований на розгляді ПСА в схемі серій з малим параметром $\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0$, що дало змогу використати розв'язок проблеми сингулярного збурення [4] для зведено-оборотного оператора марковського процесу.

Дана робота присвячена розгляду стрибкової ПСА в напівмарковському середовищі в схемі усереднення з використанням розв'язку проблеми сингулярного збурення для компенсуючого оператора [5].

1. Постановка задачі та позначення

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації задається співвідношенням (покладемо $\sum_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon)-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), u^\varepsilon(0) = u, \tag{1}$$

де функція регресії $C(u,x) = (C_k(u,x), k = \overline{1,d})$, $u \in R^d, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем [6]

$$du^x(t)/dt = C(u^x(t), x), x \in X.$$

Напівмарковський процес $x(t), t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається напівмарковським ядром [4]

$$Q(x, B, t) = P(x, B)G_x(t), x \in X, B \in \boldsymbol{X}, t \geq 0.$$

Стохастичне ядро $P(x, B)$ визначається перехідними ймовірностями вкладеного ланцюга Маркова $x_n := x(\tau_n), n \geq 0$,

$$P(x, B) := P\{x_{n+1} \in B \,|x_n = x\},$$

де $\tau_n, n \geq 0$, - моменти марковського відновлення напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, з лічильним процесом $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$, а $G_x(t)$, $x \in X$, $t \geq 0$, - функція розподілу часу перебування θ_x в стані $x \in X$:

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} \leq t|x_n = x\}.$$

В ПСА (1) нормуюча послідовність a_n^ε, $n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t), t \geq 0$ через співвідношення:

$$a_n^\varepsilon := a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon := \varepsilon\tau_n, n \geq 0. \tag{2}$$

Разом з напівмарковським процесом $x(t), t \geq 0$, розглянемо супроводжуючий марковський процес $x_0(t), t \geq 0$, що задається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \tag{3}$$

де

$$q(x) = 1/g(x),$$

а

$$g(x) := \int_0^\infty \overline{G}_x(t)dt, \overline{G}_x(t) = 1 - G_x(t).$$

Стаціонарний розподіл $\rho(B)$, $B \in \mathbf{X}$, вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, задається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x, B), \rho(X) = 1,$$

а супроводжуючий марковський процес $x_0(t)$, $t \geq 0$, є рівномірно-ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$.

Має місце зв'язок між розподілами [7]

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x),$$

або

$$\pi(dx) = \rho(dx)g(x)/m, m = \int_X \rho(dx)g(x) = \frac{1}{q}.$$

З іншої сторони розподіли $\pi(B)$ і $\rho(B)$ визначають проектори Π та $\tilde{\Pi}$ відповідно

$$\Pi\varphi(x) := \hat{\varphi}\mathit{1}(x), \hat{\varphi} := \int_X \pi(dx)\varphi(x), \mathit{1}(X) \equiv 1,$$

$$\tilde{\Pi}\varphi(x) := \tilde{\varphi}\mathit{1}(x), \tilde{\varphi} := \int_X \rho(dx)\varphi(x), \mathit{1}(X) \equiv 1,$$

на банаховому просторі $\mathbf{B}(X)$ дійснозначних функцій з супремум нормою.

Разом з (2) має місце вкладеність дискретної ПСА $u_n^\varepsilon, n \geq 0$, в стрибковому ПСА (1)

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), n \geq 0. \tag{4}$$

Збіжність ПСА (1) розглядається в умовах експоненційної стійкості усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C(u(t)), C(u) = q\int_X \rho(dx)C(u,x). \tag{5}$$

Надалі без зменшення загальності покладемо $u_0 = 0$, тобто має місце

$$C(0) = 0.$$

Генератор Q є зведено-оборотним [7], для якого існує потенціал R_0 , такий, що визначається співвідношеннями

$$R_0 Q = Q R_0 = \Pi - \mathrm{I}. \tag{6}$$

2. Збіжність процедури стохастичної апроксимації

Теорема 1. Нехай функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R^d), u \in R^d$, усередненої системи (5) така, що

$C1$: забезпечує експоненційну стійкість усередненої системи (5)

$$C(u)V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0;$$

$C2$: для $\overline{C}(u) := \max\limits_{x\in X} C(u,x)$ мають місце оцінки

$$\left|\overline{C}(u)V'(u)\right| \leq c_1(1+V(u)), c_1 > 0,$$

$$\left|\overline{C}(u)[\overline{C}(u)V'(u)]'\right| \leq c_2(1+V(u)), c_2 > 0,$$

$$\left|\overline{C}(u)\overline{C}(u)[\overline{C}(u)V'(u)]''\right| \leq c_3(1+V(u)), c_3 > 0.$$

Нарешті нормуюча функція $a(t)$ монотонно спадна, обмежена та задовольняє умовам:

C3: $\int_0^\infty a(t)dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t)dt < \infty$.

Тоді при кожному позитивному $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, ε_0 – достатньо мале, ПСА (1) збігається з ймовірністю 1 до єдиної точки рівноваги усередненої еволюційної системи (5):

$$\mathsf{P}\left\{\lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(t) = 0\right\} = 1.$$

3. Компенсуючий оператор

Розглянемо для стрибкової ПСА (1) розширений процес марковського відновлення

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n, n \geq 0. \tag{7}$$

Згідно [5] компенсуючий оператор для процесу (7) визначається умовним математичним сподіванням

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x,t) := \varepsilon^{-1} q(x) E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon, \tau_{n+1}^\varepsilon) -$$

$$-\varphi(u,x,t)\,|u_n^\varepsilon = u,\ x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t]. \tag{8}$$

Лема 1. Компенсуючий оператор (8) на тест-функціях $\varphi(u,x), u \in R^d, x \in X$, має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x) := \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} q(x) \boldsymbol{P} \boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \tag{9}$$

де

$$\boldsymbol{C}_t^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = \varphi(u + \varepsilon a(t) C(u,x), x) - \varphi(u,x), \tag{10}$$

а оператор $\boldsymbol{P}$ визначається співвідношенням

$$\boldsymbol{P}\varphi(\cdot,x) := \int\limits_X P(x,dy)\varphi(\cdot,y). \tag{11}$$

Доведення. Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon)|u_n^\varepsilon = u, x_n^\varepsilon = x, \tau_n^\varepsilon = t] = E_{u,x,t}\varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) =$$

$$= E_{u,x,t}\varphi(u_n^\varepsilon + \Delta u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon), \tag{12}$$

де $\Delta u_{n+1}^\varepsilon := u_{n+1}^\varepsilon - u_n^\varepsilon$. Для обчислення приросту $\Delta u_{n+1}^\varepsilon$ скористаємось представленнями, що випливають з (1) і (7), а саме

$$u_{n+1}^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_{n+1}^\varepsilon) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{n} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon),$$

$$u_n^\varepsilon := u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = u + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} a_k^\varepsilon C(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon).$$

Враховуючи останнє маємо

$$\Delta u_{n+1}^\varepsilon = \varepsilon a_n^\varepsilon C(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon). \tag{13}$$

Підставляючи в (12) зображення (13) отримуємо

$$E_{u,x,t}\varphi(u_n^\varepsilon + \Delta u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) = E_{u,x,t}\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u,x), y),$$

де $y = x_{n+1}^\varepsilon$ значення процесу $x(t), t \geq 0$, в момент наступного стрибка (див. (4)).

Отже компенсуючий оператор (8), враховуючи останнє, має вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(u,x) := \varepsilon^{-1} q(x) E_{u,x,t}[\varphi(u + \varepsilon a(t) C(u,x), y) - \varphi(u,x)] =$$

$$= \varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon a(t)C(u,x),y) - \varphi(u,x)].$$

Використовуючи доданок $\pm\varphi(u,y)$, з останньої рівності маємо

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u,y) - \varphi(u,x)] +$$

$$+\varepsilon^{-1} q(x) \int\limits_X P(x,dy)[\varphi(u+\varepsilon a(t)C(u,x),y) - \varphi(u,y)]. \qquad (14)$$

Враховуючи позначення (3) та (10),(11), з (14) отримуємо (9). □

Наслідок 1. На тест-функціях $\varphi(u,\cdot) \in C^3(R^d)$ компенсуючий оператор (9) має асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + a(t)Q_1(x)\varphi(u,x) + \varepsilon a^2(t)\theta_1^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x), \qquad (15)$$

де

$$Q_1(x)\varphi(u,x) = C(u,x)Q_0(x)\varphi_u'(u,x), \qquad (16)$$

і

$$Q_0\varphi(u,x) = q(x)\boldsymbol{P}\varphi(u,x),$$

а залишковий член $\theta_1^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = \frac{1}{2}C^2(u,x)Q_0\varphi_u''(\theta u,x), 0 \le \theta \le 1$ такий, що

$$\varepsilon a^2(t)\left\|\theta_1^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x,t)\right\| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Для оператора $\boldsymbol{C}_t^{\varepsilon}(x)$ з (10) згідно гладкості функції $\varphi(u,x)$ маємо розклад

$$\boldsymbol{C}_t^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = \varepsilon a(t)C(u,x)\varphi_u'(u,x) + \theta_C^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x), \qquad (17)$$

де

$$\theta_C^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x) = \varepsilon^2 a^2(t)\frac{1}{2}C^2(u,x)\varphi_u''(\theta u,x), 0 \le \theta \le 1.$$

Підставимо розклад (17) в (9) і проведемо ряд зрозумілих перетворень

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + \varepsilon^{-1} q(x)\varepsilon a(t)C(u,x)\boldsymbol{P}\varphi_u'(u,x) +$$

$$+\varepsilon^{-1} q(x)\varepsilon^2 a^2(t)\frac{1}{2}C^2(u,x)\boldsymbol{P}\varphi_u''(\theta u,x).$$

Таким чином маємо представлення (15) і (16) з залишковим членом $\theta_1^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)$. Згідно властивостей функцій $\varphi(u,x)$, $a(t)$ і $C(u,x)$ також отримуємо

$$\varepsilon a^2(t)\left\|\theta_1^{\varepsilon}(x)\varphi(u,x)\right\| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

□

4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення

Першим етапом доведення теореми є розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (15) на збуреній функції Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u,x)=V(u)+\varepsilon a(t)V_1(u,x), \tag{18}$$

де $V(u)$ - функція Ляпунова для системи (5).

Лема 2. Компенсуючий оператор $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$, при виконанні умови C2 Теореми, на функціях $V^{\varepsilon}(u,x)$ таких, що $V(u)\in C^3(R^d)$, має асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x,t)=a(t)C(u)V'(u)+\varepsilon a^2(t)\theta_L^{\varepsilon}(x)V(u), \tag{19}$$

де

$$\theta_L^{\varepsilon}(x)V(u)=\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)+\theta_1^{\varepsilon}(x)V(u),$$
$$\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)=C(u,x)Q_0R_0\widetilde{C}_u'(u,x)V'(u)+C(u,x)[q(x)R_0-I]\widetilde{C}(u,x)V''(u),$$
$$\theta_1^{\varepsilon}(x)V(u)=\frac{1}{2}C^2(u,x)q(x)V''(\theta u), 0\le\theta\le 1,$$
$$\widetilde{C}(u,x)=q(x)C(u,x)-C(u).$$

Доведення. Спочатку розглянемо розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного до (15) оператора, а саме

$$\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}=\varepsilon^{-1}Q+a(t)Q_1(x).$$

Розклад оператора $\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}$ на функції $V^{\varepsilon}(u,x)$ має вигляд

$$\boldsymbol{L}_{t0}^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x)=[\varepsilon^{-1}Q+a(t)Q_1(x)][V(u)+\varepsilon a(t)V_1(u,x)]=$$
$$=\varepsilon^{-1}QV(u)+a(t)[QV_1(u,x)+Q_1(x)V(u)]+\varepsilon a^2(t)Q_1(x)V_1(u,x). \tag{20}$$

З умови розв'язності розкладу (20) (див. [8], §5.2.2) маємо

$$QV_1(u,x)+Q_1(x)V(u)=\widehat{Q}_1V(u) \tag{21}$$

де

$$\widehat{Q}_1\Pi=\Pi Q_1(x)\Pi. \tag{22}$$

Обчислимо праву частину (22). З представлення (16) і дії проектора Π маємо

$$\Pi Q_1(x)\Pi=\Pi C(u,x)Q_0(x)\Pi=\Pi C(u,x)q(x)\boldsymbol{P}\Pi=$$
$$=\Pi q(x)C(u,x)\Pi=\int_X\pi(dx)q(x)C(u,x)=$$
$$=q\int_X\rho(dx)C(u,x)=C(u).$$

Таким чином, враховуючи обчислення похідної в (16), для правої частини (22) маємо

$$\widehat{Q}_1V(u)=C(u)V'(u). \tag{23}$$

Отже з (21) отримуємо

$$QV_1(u,x)=(\widehat{Q}_1-Q_1(x))V(u).$$

Враховуючи властивість (6) потенціалу R_0 з (21) отримуємо розв'язок

$$V_1(u,x) = R_0\tilde{Q}_1(x)V(u), \tag{24}$$

де

$$\tilde{Q}_1(x) = Q_1(x) - \widehat{Q}_1. \tag{25}$$

Порахуємо праву частину (25), враховуючи (16) і (23),

$$Q_1(x) - \widehat{Q}_1 = [C(u,x)q(x)\boldsymbol{P} - C(u)] = \widetilde{C}(u,x).$$

Отже для збурення $V_1(u,x)$ функції Ляпунова $V(u)$ з (21) отримуємо представлення

$$V_1(u,x) = R_0\widetilde{\mathbf{C}}(x)V(u), \tag{26}$$

де

$$\widetilde{\mathbf{C}}(x)V(u) = \tilde{C}(u,x)V'(u).$$

Використаємо (26) для обчислення останього доданку в (20). Зауважимо, що для цього доданоку можна розглядати співмножник $\theta_0^\varepsilon(x)$, тобто

$$\theta_0^\varepsilon(x)V(u) := Q_1(x)V_1(u,x).$$

Враховуючи (16) і (26) проведемо обчислення для $\theta_0^\varepsilon(x)$

$$\begin{aligned}\theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= C(u,x)Q_0[R_0\widetilde{\mathbf{C}}(x)V(u)]' = \\ &= C(u,x)Q_0R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]' = \\ &= C(u,x)q(x)\boldsymbol{P}R_0[\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)].\end{aligned} \tag{27}$$

З того, що $q(x)\boldsymbol{P}R_0 = q(x)R_0 + \Pi - I$ маємо наступний розклад (27)

$$\begin{aligned}\theta_0^\varepsilon(x)V(u) &= C(u,x)[q(x)R_0 + \Pi - I][\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + \widetilde{C}(u,x)V''(u)] = \\ &= q(x)\boldsymbol{P}R_0\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + q(x)R_0\widetilde{C}(u,x)V''(u) + \\ &\quad + \Pi\widetilde{C}(u,x)V''(u) - \widetilde{C}(u,x)V''(u) = \\ &= q(x)\boldsymbol{P}R_0\widetilde{C}'_u(u,x)V'(u) + [q(x)R_0 - I]\widetilde{C}(u,x)V''(u),\end{aligned}$$

оскільки

$$\begin{aligned}\Pi\widetilde{C}(u,x) &= \Pi[q(x)C(u,x) - C(u)] = \\ &= \int_X \pi(dx)q(x)C(u,x) - C(u)\int_X \pi(dx)\boldsymbol{1}(X) = \\ &= q\int_X \rho(dx)C(u,x) - C(u) = C(u) - C(u) = 0.\end{aligned}$$

Таким чином маємо представлення залишкового члена $\theta_0^\varepsilon(x)V(u)$.

Остаточно права частина (20) дає представлення

$$\boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u). \tag{28}$$

Повертаючись до повного зображення компенсуючого оператора (15) (див. зауваження 5.1 з [8]), представимо його в вигляді

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon = \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x).$$

Отже на функціях (18) маємо розклад

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = [\ \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)][V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)], \tag{29}$$

де $V_1(u,x)$ обчислюється за формулою (24).

Враховуючи (28), перетворимо праву частину (29)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = \boldsymbol{L}_{t0}^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) + \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)V_1(u,x)] = \\ = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_0^\varepsilon(x)V(u) + \\ +\varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u)]. \end{aligned} \tag{30}$$

Проведемо обчислення останнього доданку з (30).

$$\begin{aligned} \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)[V(u) + \varepsilon a(t)R_0\widetilde{C}(u,x)V'(u)] = \varepsilon a^2(t)\theta_1^\varepsilon(x)V(u) + \\ +\varepsilon^2 a^3(t)\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]. \end{aligned}$$

Порахуємо праву частину в отриманому розкладі. Отже

$$\theta_1^\varepsilon(x)V(u) = \frac{1}{2}C^2(u,x)q(x)V''(\theta u), 0 \le \theta \le 1.$$

$$\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)] = \frac{1}{2}C^2(u,x)Q_0R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]''_u|_{u=\theta u}.$$

З гладкості функцій $C(u,x)iV(u)$ (див. умови C2 Теореми) і обмеженості операторів Q_0 і R_0 отримуємо

$$||\theta_1^\varepsilon(x)R_0[\widetilde{C}(u,x)V'(u)]|| \le M, M > 0, x \in X.$$

Таким чином, враховуючи другий порядок малості величини ε, можемо знехтувати відповідним доданком в розкладі (30).

В результаті разом з (30) маємо (19). □

5. Доведення теореми

Доведення проведемо в декілька етапів. Спочатку встановимо ключову нерівність.

Лема 3. Компенсуючий оператор $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ на збуреній функції Ляпунова (16) в умовах теореми допускає оцінку

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) \le -\delta a(t)V(u), \delta > 0. \tag{31}$$

Доведення. Використовуючи оцінки C2 для залишкового члена $\theta_L^\varepsilon(x)V(u)$, умову C1 експоненційної стійкості системи (5), а також монотонність та обмеженість нормуючої функції $a(t)$, маємо

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_t^\varepsilon V^\varepsilon(u,x) = a(t)C(u)V'(u) + \varepsilon a^2(t)\theta_L^\varepsilon(x)V(u) \le \\ \le -a(t)(\delta^* - \varepsilon c)V(u) \le -a(t)\delta V(u), \delta > 0. \end{aligned} \tag{32}$$

Остання нерівність має місце при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$, де ε_0 таке, що $\varepsilon_0 < \delta^*/c$.

По-друге, явний вигляд збурення (24), а також умова C2 теореми , дають оцінку збуреної функції Ляпунова

$$0 < (1 - \varepsilon a(t)c)V(u) \le V^\varepsilon(u,x) \le (1 + \varepsilon a(t)c)V(u).$$

По-третє, встановимо, що процес

$$V_n^\varepsilon := V^\varepsilon(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon), n \geq 0, \tag{33}$$

є невід'ємним супермартингалом. Для цього зауважимо, що розширений процес марковського відновлення (7) породжує на тест-функціях $\varphi(u,x), u \in R^d, x \in X$, мартингал

$$\mu_{n+1} = \varphi(u_{n+1}^\varepsilon, x_{n+1}^\varepsilon) - \varphi(u_0, x_0) - \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon \varphi(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), \tag{34}$$

відносно потоку σ - алгебр $F_n^\varepsilon = \sigma\{u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon, \tau_k^\varepsilon, 0 \leq k \leq n\}, n \geq 0$. Дійсно, в позначенні $\varphi_n^\varepsilon := \varphi(u_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon)$ маємо

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n \,|F_n^\varepsilon] = E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] - E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon\theta_{n+1}\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon]. \tag{35}$$

Враховуючи означення компенсуючого оператора (8) обчислимо другий доданок в (35):

$$E_{F_n^\varepsilon}[\varepsilon\theta_{n+1} \;\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon] = \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon \varphi_n^\varepsilon = \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\varepsilon^{-1} q(x_n^\varepsilon) E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon] =$$
$$= E_{F_n^\varepsilon}[\varphi_{n+1}^\varepsilon - \varphi_n^\varepsilon].$$

Таким чином з (35) маємо мартингальну властивість для (34):

$$E[\mu_{n+1} - \mu_n \,|F_n^\varepsilon] = 0, n \geq 0. \tag{36}$$

□

Використаємо (36) для доведення наступної леми.

Лема 4. Процес (33) є невід'ємним супермартингалом.

Доведення. Розглянемо в (34) замість довільної тест-функції збурену функцію Ляпунова $V^\varepsilon(u,x)$ і використаємо мартингальну характеризацію процесу (34), а саме справедливість представлення

$$E[V_{n+1}^\varepsilon \,|F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon E[\sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} \;\boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon] + \mu_n^\varepsilon, \tag{37}$$

оскільки з (36) маємо $E[\mu_{n+1}^\varepsilon \,|F_n^\varepsilon] = \mu_n^\varepsilon$. Підставимо в (37) замість μ_n^ε його значення з (34):

$$E[V_{n+1}^\varepsilon \,|F_n^\varepsilon] = V_0^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon + \varepsilon[\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1}\boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon] +$$
$$+ V_n^\varepsilon - V_0^\varepsilon - \varepsilon[\sum_{k=0}^{n-1} \theta_{k+1}\boldsymbol{L}_{\tau_k^\varepsilon}^\varepsilon V_k^\varepsilon].$$

Звідки маємо $E[V_{n+1}^\varepsilon \,|F_n^\varepsilon] = V_n^\varepsilon + \varepsilon g(x_n^\varepsilon)\boldsymbol{L}_{\tau_n^\varepsilon}^\varepsilon V_n^\varepsilon$, і разом з ключовою нерівністю (31) отримуємо $E[V_{n+1}^\varepsilon \,|F_n^\varepsilon] \leq V_n^\varepsilon, n \geq 0$, що і доводить лему. □

Використання оцінок (31) та (32), а також леми 4 завершує доведення теореми за схемою доведення теореми 2.8.1 с. 100 [1].

Заключення

Сформульована Теорема розширює границі використання процедури стохастичної апроксимації в теоріях навчання, керування, передачі повідомлень та ін. З іншої сторони використання асимптотичних властивостей компенсуючого оператора розширеного процесу марковського відновлення (лема 2) та розв'язок проблеми сингулярного збурення (п. 4) для такого оператора забезпечує новий метод аналізу умов асимптотичної нормальності флюктуацій процедури навколо точки рівноваги.

Список литературы

1. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.:Наука, 1972. - 304 с.
2. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992. - 113P.
3. *Чабанюк Я.М.* Дискретна стохастична процедура у марківському випадковому середовищі // Вісник Львів. ун-ту., Серія мех-мат.-2000. Вип. **56**. С. 179-184.
4. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их применение. Киев: Наук. думка, 1976. – 184с.
5. *Свириденко М.Н.* Мартингальный подход в предельных теоремах для полумарковских процессов // Теория вероятностей и её применения. – 1986. – С. 540-545.
6. *Королюк В.С.* Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. Мат. Журнал. – 1998. – 50, №1, – С. 36-47.
7. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. Kluwer, Academic Publishers, 1999. – 185p.
8. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific Publishing, 2005. – 330 P.

Статья поступила в редакцию 07.08.2007