УДК 519.962.22

ДО ПРОБЛЕМИ МІНІМАКСНОГО ОЦІНЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

© Деміденко С.В., Жук С.М., Наконечний О.Г.

Київський національний університет ім. Т.Г. Шевченка,
факультет кібернетики
пр-т академіка Глушкова-2, корпус 6, м.Київ 03680, Україна
e-mail: *beetle@unicyb.kiev.ua*

In this paper we study observation problem for linear 2-point BVP $\mathcal{D}x(\cdot) = \mathcal{B}f(\cdot)$ assuming that information about system input $f(\cdot)$ and random noise η in system state observation model $y(\cdot) = \mathcal{H}x(\cdot) + \eta$ is incomplete: $f(\cdot)$ and $M\eta\eta'$ are some arbitrary elements of given sets. A criterion of guaranteed (minimax) estimation error finiteness is proposed. Representations of minimax estimations are obtained in terms of 2-point BVP solutions. It is proved that in general case we can only estimate a projection of system state onto some linear manifold $\mathcal{L}(\cdot)$. In particular, $\mathcal{L}(\cdot) = \mathbb{L}_2^n$ if $\dim\mathscr{N}(\mathcal{D}\ \ \mathcal{H}) = 0$. Also we propose a procedure which decides if given linear functional belongs to $\mathcal{L}(\cdot)$.

Вступ

Задачам мінімаксного спостереження для звичайних лінійних диференціальних рівнянь присвячено значну кількість публікацій, зокрема у вітчизняних друкованих та електронних наукових виданнях. Різні автори (докладніше див.огляд [1]) вивчали ті чи інші питання теорії гарантованого оцінювання як для окремо взятих лінійних диференціальних так і для абстрактних операторних рівнянь.

Останнім часом увага деяких вітчизняних дослідників [2]-[5] зосереджена на розробці теорії гарантованого оцінювання для систем, стан яких описується лінійним операторним рівнянням з неін'єктивним оператором: в роботах [2, 3] вивчались задачі гарантованого оцінювання для лінійних дескрипторних рівнянь в просторі квадратично сумовних вектор-функцій, у [4] мінімаксні середньоквадратичні оцінки для нетерових систем в абстрактному гільбертовому просторі для того випадку, коли нуль-многовид оператора спостереження не має спільних векторів з нуль-многовидом оператора системи. Згадана умова, зокрема, забезпечує скінченність мінімаксної похибки оцінювання для довільного лінійного обмеженого функціоналу і гарантує однозначну розв'язність відповідної системи рівнянь Ейлера для оцінок.

У даній роботі вивчається задача мінімаксного оцінювання лінійних функціоналів на множині розв'язків крайової задачі для лінійного диференціального рівняння у звичайних похідних. Дослідження проводиться за допомогою підходу, запропонованого у [3] для задач гарантованого оцінювання у лінійних дескрипторних рівняннях. Це дозволяє побудувати оцінки для кожного функціоналу з деякої підмножини, яка, зокрема, збігається з усім простором, якщо виконано умови [4].

Одержані представлення для оцінок записані в термінах лінійних невід'ємно означених крайових задач. Для того випадку, коли відомий аналітичний вигляд фундаментальної матриці відповідного рівняння, запропоновано характеристику множини оцінюваних функціоналів, розглянуто приклади.

1. Постановка задачі

Нехай $t \mapsto x(t)$ – абсолютно неперервна вектор-функція з простору квадратично сумовних n-вектор-функцій $\mathbb{L}_2^n := \mathbb{L}_2([0,\omega], \mathbb{R}^n)$, що задовольняє крайовій задачі

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) = B(t)f(t), x(0) = x(\omega), \tag{1}$$

де $t \mapsto A(t)(t \mapsto B(t))$ – $n \times n(n \times r)$-матричнозначна неперервна функція, $\omega < +\infty$, $f(\cdot) \in \mathbb{L}_2^r$.

Припустимо, що при деякому $f \in \mathscr{G}$ на сегменті $[0,\omega]$ спостерігається реалізація m-вектор-функції $t \mapsto y(t)$ вигляду

$$y(t) = H(t)x(t) + \eta(t), \tag{2}$$

де $t \mapsto x(t)$ належить до множини розв'язків крайової задачі (1) при деякому $f(\cdot) \in \mathscr{G}$, $t \mapsto \eta(t)$ – реалізація неперервного у середньому квадратичному випадкового процесу з нульовим середнім та невідомою кореляційною функцією $(t,s) \mapsto R_\eta(t,s) \in \mathscr{G}_2$

$$\mathscr{G} := \{f(\cdot) : \int_0^\omega (f(t), f(t))\mathrm{d}t \leq 1\},\ \mathscr{G}_2 := \{R_\eta : \int_0^\omega \mathrm{sp} R_\eta(t,t)\mathrm{d}t \leq 1\}$$

Розглянемо функціонал

$$\ell(x) := \int_0^\omega (\ell(t), x(t))\mathrm{d}t, \ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$$

визначений на множині розв'язків (1). Оцінку $\ell(\cdot)$ будемо шукати у класі лінійних

$$u(y) := \int_0^\omega (u(t), y(t))\mathrm{d}t,$$

якість апроксимації будемо характеризувати за допомогою функціоналу[1]

$$\sigma(u) := \sup_{x(\cdot), R_\eta} \{M[\ell(x) - u(y)]^2 | x(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}), \mathcal{D}x(\cdot) \in \mathscr{G}, R_\eta \in \mathscr{G}_2\}, \tag{3}$$

[1]Оператор $\mathcal{D}$ породжується крайовою задачею (1) згідно правила $(\mathcal{D}x(\cdot))(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t)$, $x[0] = x(\omega)$, $x(\cdot)$ – абсолютно неперервна функція.

гарантованої похибки оцінювання, яка обчислюється для оцінки $u(\cdot) \in U_l$ з деякої допустимої множини оцінок U_l.

Означення 1. Оцінку $\hat{u}(\cdot)$, що є одним із розв'язків варіаційної нерівності

$$\sigma(\hat{u}) \leq \sigma(u), \quad u(\cdot) \in U_l \tag{4}$$

називають мінімаксною середньоквадратичною оцінкою, а

$$\hat{\sigma} := \inf_{u \in U_l} \sigma(u)$$

називають мінімаксною середньоквадратичною похибкою оцінювання.

2. Вигляд мінімаксної оцінки та структура множини оцінюваних функціоналів

Теорема 1. Мінімаксна середньоквадратична похибка оцінювання лінійного функціоналу $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$ на одному з розв'язків крайової задачі

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) = B(t)f(t), x(0) = x(\omega) \tag{5}$$

дається виразом

$$\sigma(u) = \begin{cases} +\infty, & \ell(\cdot) \notin \mathscr{F}, \\ \int_0^\omega (\ell(t), \hat{p}(t))_n \mathrm{d}t \end{cases}$$

мінімаксна середньоквадратична оцінка $\hat{u}(\cdot)$ для $\ell(\cdot) \in \mathscr{F}$ має вигляд

$$\hat{u}(t) = H(t)\hat{p}(t),$$

де $\hat{p}(\cdot)$ знаходиться як довільний розв'язок (7).

Наслідок 1. Для заданого $y(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$ мінімаксна оцінка може бути подана у вигляді

$$\int\limits_0^\omega (\hat{u}(t), y(t))\mathrm{d}t = \int\limits_0^\omega (\ell(t), \hat{x}(t))\mathrm{d}t,$$

де $\hat{x}(\cdot)$ знаходиться як розв'язок крайової задачі

$$\begin{aligned} &\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) - H'(t)(y(t) - H(t)x(t)), p(0) = p(\omega), \\ &\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)B'(t)p(t), x(0) = x(\omega) \end{aligned} \tag{6}$$

Наслідок 2. Нехай система функцій $\{\mathcal{H}\psi_k(\cdot)\}$ лінійно незалежна, де $\mathcal{H}\psi_k(t) = H(t)\psi_k(t)$, $\psi_k(\cdot)$ лінійно незалежні розв'язки однорідної крайової задачі (5). Тоді для довільного $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$ мінімаксна похибка скінчена і оцінка представляється згідно рецепту теореми 1 або ж наслідку 2.

Теорема 2. Крайова задача

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= -A'(t)z(t) + H'(t)H(t)p(t) - \ell(t), z(0) = z(\omega) \\ \dot{p}(t) &= A(t)p(t) + B(t)B'(t)z(t), p(0) = p(\omega) \end{aligned} \tag{7}$$

має непорожню множину розв'язків тоді і лише тоді, коли

$$Ph(\omega) \perp \mathscr{N}(W(0,\omega)),$$

де $P := [E - (E - \Phi(\omega,0))(E - \Phi(\omega,0))^+]$, Φ – нормована фундаментальна матриця спряженого рівняння,

$$W(0,\omega) := \int_0^\omega P\Phi(\omega,s)H'(s)H(s)\Phi'(\omega,s)P\mathrm{d}s,$$

$h(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші

$$\dot{h}(t) = -A'(t)h(t) + \ell(t), h(0) = 0$$

Таким чином, множина оцінюваних функціоналів $\mathscr{F}$ складається з усіх $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$, що задовольняють умови теореми 2.

Наслідок 3. Якщо виконано умови наслідку 2, то крайова задача (7) має непорожню множину розв'язків для довільного $\ell(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$.

Доведення теореми 1. Під час доведення нам знадобляться деякі властивості лінійного оператора $\mathcal{D}$, породженого крайовою задачею (1)

$$\mathcal{D}x = \dot{x} - Ax, x \in \mathscr{D}(\mathcal{D}),$$

де через $\mathscr{D}(\mathcal{D})$ позначено сукупність усіх таких абсолютно неперервних вектор-функцій $t \mapsto x(t)$ з простору $\mathbb{L}_2^n$, що

$$\int_0^\omega |\dot{x}(t)|_n^2 < +\infty, \int_0^\omega \dot{x}(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{$*$}$$

$x \mapsto Ax$ – оператор множення на матричнозначну функцію $t \mapsto A(t)$. Справедлива

Лема 1. Оператор $\mathcal{D}$ є замкненим щільно визначеним лінійним оператором, його спряжений $\mathcal{D}^*$ визначається співвідношеннями

$$(\mathcal{D}^*z)(t) = -\dot{z}(t) - A'(t)z(t), \mathscr{D}(\mathcal{D}^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D})$$

Обчислимо $\sigma(u)$ для довільних $\ell(\cdot), u(\cdot)$. Беручи до уваги властивості шуму

$$\sigma(u) = \sup_x\{\langle \ell - \mathcal{H}'u, x\rangle_2^2 | \mathcal{D}x \in \mathscr{G}, x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})\} + \sup_{R_\eta}\{M\langle u, \eta\rangle_2^2\}$$

Враховуючи нерівність Коші-Буняковського

$$\sup_{R_\eta}\{M\langle u, \eta\rangle_2^2\} = \langle u, u\rangle_2$$

Помітимо, що
$$\ell(\cdot)-\mathcal{H}'u(\cdot)\notin\mathscr{R}(\mathcal{D}^*)\Rightarrow\sigma(u)=+\infty$$
відтак запропоноване означення оцінки виділяє в просторі $\mathbb{L}_2^n$ сукупність оцінюваних функціоналів
$$\mathscr{F}:=\{\ell(\cdot)\in\mathbb{L}_2^n|\exists u(\cdot):\int_0^\omega(\ell(t)-H'(t)u(t),\psi_k(t))_n\mathrm{d}t=0,k=1\dots m\},$$
кожному елементу якої можна поставити у відповідність множину допустимих оцінок
$$U_l:=\{u(\cdot):\langle\ell-H^*u,\psi_i\rangle_2=0,i=\overline{1,m}\}$$
Отже, для $\ell(\cdot)\in\mathscr{F}$ існують такі $u(\cdot),z(\cdot)$, що
$$\dot z(t)=-A'(t)z(t)+H'(t)u(t)-\ell(t),z(0)=z(\omega)$$
Для обчислення гарантованої похибки скористаємось[2]

Лема 2. Нехай

1) множина значень $\mathscr{R}(L)$ оператора L замкнена;
2) $\mathscr{G}$ – опукла обмежена замкнена підмножина H і
$$\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L)\cap\mathrm{int}\mathscr{G}\neq\varnothing$$

Тоді $\mathrm{dom}(\delta L)^*=\mathscr{R}(L')$ і для довільного $z:L'z=h$ виконано
$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h)=\inf_p\{s(\mathcal{B}'z-p)|\mathscr{G}),p\in\mathrm{cl}\quad\mathcal{B}'\mathscr{N}(L')\}=s(\mathcal{B}'z-\hat p|\mathscr{G})$$

Отже, $\ell(\cdot)-\mathcal{H}'u(\cdot)\in\mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і, оскільки $0\in\mathrm{int}\mathscr{G}\cap\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(\mathcal{D})$, то згідно леми 2
$$\sup_{x(\cdot)\in\mathscr{D}(\mathcal{D})}\{\langle\ell(\cdot)-\mathcal{H}'u(\cdot),x(\cdot)\rangle_2-\delta(\mathcal{D}x(\cdot)|\mathcal{B}\mathscr{G})\}=\inf_{p(\cdot)\in\mathrm{cl}\quad\mathcal{B}'\mathscr{N}(\mathcal{D}')\}}\|\mathcal{B}'z(\cdot)-p(\cdot)\|=$$
$$\inf_{\alpha_j}\|\mathcal{B}'(\tilde z(\cdot)+z^0(\cdot)-\sum_1^n\alpha_j\varphi_j(\cdot))\|=\|\mathcal{B}'(\tilde z(\cdot)-\sum_1^n\tilde\alpha_j\varphi_j(\cdot))\|<+\infty,$$
$$\mathcal{D}'\tilde z=\ell(\cdot)-\mathcal{H}'u(\cdot),\tilde z(\cdot)\in\mathscr{R}(\mathcal{D}),z^0(\cdot)\in\mathscr{N}(\mathcal{D}')$$
для довільного $z(\cdot):\mathcal{D}'z(\cdot)=\ell(\cdot)-\mathcal{H}'u(\cdot)$, звідки
$$\sigma(u)=\begin{cases}\|u\|_2^2+\|\mathcal{B}'(\tilde z(\cdot)-\sum_1^n\tilde\alpha_j\varphi_j(\cdot))\|_2^2, & \mathcal{D}'\tilde z=\ell(\cdot)-\mathcal{H}'u(\cdot),\tilde z(\cdot)\in\mathscr{R}(\mathcal{D})\\ +\infty, & u\notin U_\ell\end{cases}\tag{8}$$

Таким чином ми встановили, що $u(\cdot)\mapsto\sigma(u)$ є строго опуклим слабко напівнеперервним знизу коерцитивним функціоналом і $\mathrm{dom}\sigma=U_\ell$. Множина U_ℓ опукла і замкнена, відтак $\exists\hat u(\cdot)\in U_\ell:\sigma(\hat u)=\inf_\sigma(u)$. Покажемо, що $\hat u(\cdot)$ можна знайти, користуючись рецептом теореми. Для цього нам знадобиться

[2]Нехай L – лінійний замкнений оператор, визначений на щільній лінійній підмножині $\mathscr{D}(L)$ абстрактного гільбертового простору H, $\mathcal{B},\mathcal{H}$ – лінійні обмежені оператори, $\delta(\cdot|\mathscr{G})$ – індикаторна функція (індикатор) опуклої множини $\mathscr{G}$, $s(\cdot|\mathscr{G})$ – її опорна функція, $(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*$ – перетворення Юнга-Фенхеля функціоналу $x\mapsto\delta(Lx|\mathcal{B}\mathscr{G})$, $\mathcal{B}\mathscr{G}$ образ опуклої множин $\mathscr{G}$ відносно оператора $\mathcal{B}$.

Лема 3. Нехай оператор $\mathcal{D}^+$ кожному $b \in \mathbb{L}_2^n$ ставить у відповідність розв'язок задачі Коші

$$\dot{z}(t) = -A'(t)z(t) - b(t), z(0) = (E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega),$$

де[3] $z_1(\cdot)$ є розв'язком задачі Коші

$$\dot{z}_1(t) = -A'(t)z_1(t) - b(t), z_1(0) = 0.$$

Тоді $\mathcal{D}^+$ лінійний обмежений оператор і

$$\langle \mathcal{D}^+ b, \mathcal{D}^+ b\rangle_2 = \inf_z \{\langle z, z\rangle_2 | \mathcal{D}^* z = b\} \tag{9}$$

для всіх $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$, причому $\mathcal{D}^+ b \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, $\mathcal{D}^+\mathcal{D}^*\mathcal{D}^+ = \mathcal{D}^+$ на $\mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і $\mathcal{D}^*\mathcal{D}^+\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*$ на $\mathscr{D}(\mathcal{D})$.

Помітимо, що в силу означення оператора $\mathcal{D}^+$ функціонал

$$u(\cdot) \mapsto \mathcal{L}(u) = \|u(\cdot)\|_2^2 + \|\mathcal{B}'(z^+(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j^+ \varphi_j(\cdot))\|_2^2$$

де $\{\alpha_j^+\}$ знаходяться з умови

$$\langle \mathcal{B}'(z^+(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j^+ \varphi_j(\cdot)), \varphi_k(\cdot)\rangle = 0, k = 1\ldots, n \tag{10}$$

визначений на всьому просторі $\mathbb{L}_2^m$ і на U_l збігається з $\sigma(u)$. Справді, у позначеннях леми 3

$$\sigma(u) = \|u(\cdot)\|_2^2 + \|\mathcal{B}'(z^+(\cdot) - \sum_1^n \alpha_j^+ \varphi_j)\|_2^2, z^+ = \mathcal{D}^+(\ell - \mathcal{H}'u), u \in U_l,$$

бо за означенням

$$\mathcal{D}' z^+(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot), z^+(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D})$$

тому, зокрема, $\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot)) = \min_{U_l} \mathcal{L}(u(\cdot))$.

З іншого боку $\mathcal{L}(\cdot)$ обмежений на одиничній кулі $\mathbb{L}_2^m$ з центром в $\hat{u}(\cdot)$, позаяк оператор $\mathcal{D}^+$ неперервний, оператор ортогонального проектування на $\mathrm{Lin}\{\mathcal{B}'\varphi_k\}_1^n$ обмежений. Отже [10, с.181] $\mathcal{L}(\cdot)$ є неперервним в $\hat{u}(\cdot)$, але тоді [10, с.89] знайдуться такі числа $\{\mu_i\}_1^m$, що

$$\hat{\mu}_1 \mathcal{H}\psi_1 + \cdots + \hat{\mu}_m \mathcal{H}\psi_m \in \partial\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot)), \tag{11}$$

де символом $\partial\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot))$ позначено субдиференціал опуклого функціоналу $\mathcal{L}(\cdot)$ в $\hat{u}(\cdot)$. Знайдемо цей субдиференціал. Обчислимо похідну $\mathcal{L}(\cdot)$ в точці $\hat{u}(\cdot)$ у напрямку $u(\cdot)$. Запишемо

$$g(\tau) = \mathcal{L}(\hat{u}(\cdot) + \tau u(\cdot)) = \|\hat{u}(\cdot) + \tau u(\cdot)\|^2 + \|\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) + \tau v(\cdot) - \sum_1^n \alpha(\tau)_j \varphi_j)\|_2^2,$$

[3] $\Phi(t,s)$ – перехідна матриця [6, с.105] рівняння $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$

де $\hat{z}(\cdot) = \mathcal{D}^+(\ell(\cdot) - \mathcal{H}'\hat{u}(\cdot))$, $v(\cdot) = \mathcal{D}^+\mathcal{H}'u(\cdot)$, а $\alpha_j(\tau)$ знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'\hat{z}(\cdot), \varphi_k\rangle + \tau\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'v, \varphi_k\rangle = \sum_1^n \alpha_j \langle \mathcal{B}\mathcal{B}'\varphi_j, \varphi_k\rangle,$$

звідки дістанемо

$$\frac{d}{d\tau}g(0) = 2\langle \hat{u}(\cdot), u(\cdot)\rangle + 2\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j), v\rangle$$

Згідно (10) існує таке $\hat{p}(\cdot)$, що

$$\hat{p}_t(t) = A(t)\hat{p}(t) + B(t)B'(t)(\hat{z}(t) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j(t)), \hat{p}(0) = \hat{p}(\omega) \perp \mathscr{N}(E - \Phi(\omega, 0)) \quad (12)$$

По аналогії з доведенням леми 3(див. (22)), запишемо

$$\langle \mathcal{B}\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j), v\rangle_2 = \int_0^\omega (-H'(t)u(t), \hat{p}(t))_n \mathrm{d}t$$

Таким чином для довільного $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2^m$

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot) + \tau u(\cdot))|_{\tau=0} = 2\langle \hat{u}(\cdot) - \mathcal{H}\hat{p}(\cdot), u(\cdot)\rangle,$$

де, як це безпосередньо випливає з (12),

$$\mathcal{D}\hat{p}(\cdot) = \mathcal{B}\mathcal{B}'(\hat{z}(\cdot) - \sum_1^n \hat{\alpha}_j\varphi_j), \hat{p}(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}^*) \quad (13)$$

Але тоді функціонал $u(\cdot) \mapsto \langle \hat{u}(\cdot) - \mathcal{H}\hat{p}(\cdot), u(\cdot)\rangle$ є похідною Гато функціоналу $\mathcal{L}(\cdot)$ в точці $\hat{u}(\cdot)$, відтак

$$\partial\mathcal{L}(\hat{u}(\cdot)) = \{\hat{u}(\cdot) - \mathcal{H}\hat{p}(\cdot)\},$$

звідки і з (11) знаходимо

$$\hat{u}(\cdot) = \mathcal{H}\hat{p}(\cdot) + \sum_1^m \hat{\mu}_i\mathcal{H}\psi_i(\cdot) \quad (14)$$

Оскільки $\hat{u}(\cdot) \in U_\ell$, то для $\hat{z}(\cdot) = \mathcal{D}^+(\ell(\cdot) - \mathcal{H}'\hat{u}(\cdot))$ ми будемо мати, згідно означення $\mathcal{D}^+$, що $\hat{z}(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}')$ і

$$\mathcal{D}'\hat{z}(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'\hat{u}(\cdot) = \ell(\cdot) - \mathcal{H}'\mathcal{H}\hat{p}(\cdot) - \sum_1^m \hat{\mu}_i\mathcal{H}'\mathcal{H}\psi_i(\cdot) \quad (15)$$

Якщо покласти

$$p(\cdot) = \hat{p}(\cdot) + \sum_{1}^{m} \hat{\mu}_i \psi_i(\cdot), z(\cdot) = \hat{z}(\cdot) - \sum_{1}^{n} \hat{\alpha}_j \varphi_j(\cdot),$$

то $p(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}), z(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}')$ і $\mathcal{D}p(\cdot) = \mathcal{D}\hat{p}(\cdot), \mathcal{D}'z(\cdot) = \mathcal{D}'\hat{z}(\cdot)$, відтак

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\cdot) \\ z(\cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ell(\cdot) \end{pmatrix} \tag{16}$$

згідно (13)-(15) звідки, зокрема, випливає, що

$$\ell \in \mathscr{F} \Rightarrow \ell \in \mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}' \end{smallmatrix} \right) \tag{17}$$

і $p(\cdot), z(\cdot)$ належать до множини розв'язків крайової задачі

$$\begin{aligned} &p_t(t) = A(t)p(t) + B(t)B'(t)z(t), p(0) = p(\omega), \\ &z_t(t) = -A'(t)z(t) - \ell(t) + H'(t)H(t)p(t), z(0) = z(\omega), \end{aligned} \tag{18}$$

З іншого боку

$$\hat{u}(\cdot) = \mathcal{H}p(\cdot)$$

згідно (14) і означення $p(\cdot)$.

Припустимо, що $(p_0, z_0) \in \mathscr{N}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}' \end{smallmatrix} \right)$. Легко переконатись, що

$$\begin{pmatrix} -\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H} \\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D} \end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix} -\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}' \end{pmatrix}'$$

і тому $\mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H} \\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D} \end{smallmatrix} \right) \subset \mathscr{N}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}' \end{smallmatrix} \right)^{\perp}$. З іншого боку $\mathscr{R}([-\mathcal{D} \quad \mathcal{B}\mathcal{B}']) \subset \mathscr{R}([-\mathcal{D} \quad \mathcal{B}])$ тому по аналогії з (17)

$$\{0\} \times \mathscr{R}([-\mathcal{D} \quad \mathcal{B}]) \subset \mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H} \\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D} \end{smallmatrix} \right) \Rightarrow (0, -\mathcal{D}p(\cdot) + \mathcal{B}\mathcal{B}'z(\cdot)) \in \mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D}' & \mathcal{H}'\mathcal{H} \\ \mathcal{B}\mathcal{B}' & \mathcal{D} \end{smallmatrix} \right)$$

для довільних $p(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}), z(\cdot) \in \mathbb{L}_2^n$ звідки

$$0 = \langle z_0, -\mathcal{D}p(\cdot) + \mathcal{B}\mathcal{B}'z(\cdot)\rangle = \langle \mathcal{D}p_0, z(\cdot)\rangle + \langle \mathcal{H}'\mathcal{H}p_0, p(\cdot)\rangle,$$

відтак

$$\langle \mathcal{H}'\mathcal{H}p_0, p(\cdot)\rangle = 0, \quad \forall p(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$$

тому $p_0 \in \mathscr{N}(\mathcal{H})$, себто оцінка не залежить від p_0. □

Зауваження 1. Під час доведення теореми було показано, що

$$\ell \in \mathscr{F} \Rightarrow \ell \in \mathscr{R}\left(\begin{smallmatrix} -\mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & \mathcal{D}' \end{smallmatrix} \right)$$

Зворотнє включення перевіряється безпосередньо. Таким чином, для абстрактних лінійних операторів нетерового L та обмежених $\mathcal{B}, \mathcal{H}$ вектор $(0, \ell(\cdot))$ лежить у множині значень оператора $\begin{smallmatrix} L & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & L' \end{smallmatrix}$ тоді і лише тоді, коли $\ell(\cdot) \in \mathscr{F}$. Без істотних змін доведення теореми може бути перенесено на випадок абстрактних лінійних нетерових операторів у просторах Гільберта.

3. Приклади

Приклад 1. Проілюструємо застосування наслідку 1 для задачі оцінювання стану моделі лінійного осцилятора

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

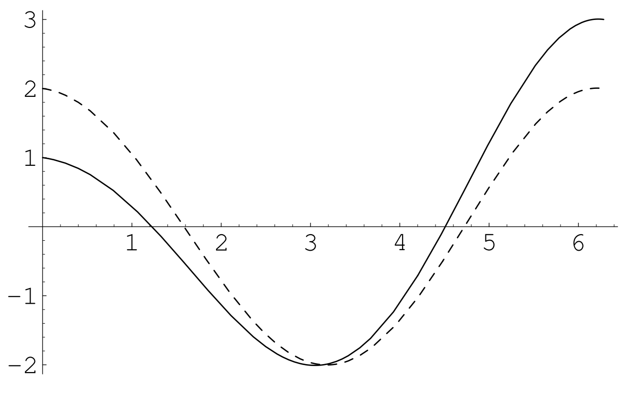
Помітимо, що

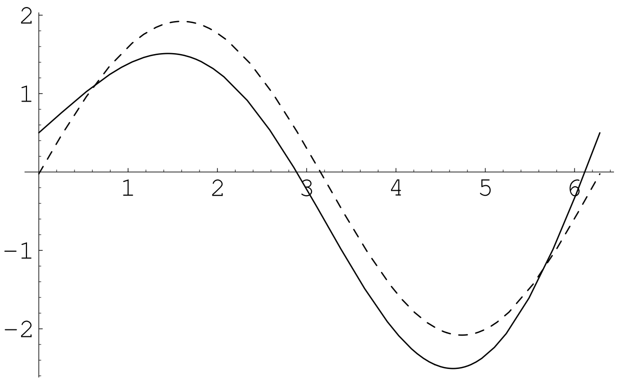
$$\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{\{\cos(t), -\sin(t)\}, \{\sin(t), \cos(t)\}\}, \mathcal{H}\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{\{0, 0\}, \{\frac{1}{20}, \frac{1}{2}\}\}$$

Нехай $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(t)}{\pi} \\ \frac{\sin(t)}{\pi} \end{pmatrix}$ і спостерігається

$$x(t) = \{\cos(t) + t\; cos(t)/\pi - \sin(t)/2, \cos(t)/2 + \sin(t) + t\sin(t)/\pi)\}$$

на тлі шуму $g(t) = \begin{pmatrix} 0.1\sin(t) \\ 0.1\sin(t) \end{pmatrix}$. При цьому вихід системи має вигляд $((0.05 + 0.0159155t + 0.1\sin(t), 0.5 + 0.159155t + 0.1\sin(t))$, тобто на виході відсутня інформація про компоненту з ядра, що входить до складу $x(\cdot)$. Знайдемо $\hat{x}(\cdot)$, розв'язуючи (6) і обчислимо $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_2 \simeq 1.85877$. На малюнках показано як співвідносяться компоненти зімітованої траєкторії $x(\cdot)$(суцільна крива) та $\hat{x}(\cdot)$ (пунктирна крива)





Приклад 2. Проілюструємо на прикладі застосування теореми 2. Для цього покладемо

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, l_1(t) = \begin{bmatrix} \sin(t) \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нормована фундаментальна матриця прямої системи дається виразом

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ -1 + e^t & 1 \end{pmatrix}$$

відтак $\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{(0,1)\}$ і, очевидно, $\mathcal{H}\mathscr{N}(\mathcal{D}) = \{0\}$.

Обчислимо нормовану фундаментальну матрицю спряженої системи

$$G(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t}(-1 + e^t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Покладемо $\ell(\cdot) = l_1(\cdot)$ і обчислимо вектор-функцію $h(\cdot)$

$$h(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{-t}(1-2e^(t)+2\exp(t)t+\exp(t)\cos(t)-\exp(t)\sin(t)) \\ t \end{bmatrix}$$

Обчислимо матриці $W(2\pi, 0)$, P

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, W(2\pi, 0) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $W(2\pi, 0)$ - нульова матриця, то згідно теореми 2 $\ell(\cdot) \in \mathscr{F}$ лише тоді, коли $Ph(2\pi) = 0$. З іншого боку

$$h(2\pi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\pi}}{2} - 2\pi \\ 2\pi \end{bmatrix} \Rightarrow Ph(2\pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\pi \end{bmatrix}$$

згідно вибору $l_1(\cdot)$.

Покладемо $\ell(t) := l_2(t) = (\sin(t), \cos(t))$ і обчислимо $h(2\pi)$. Знаходимо

$$h(t) = (0, \sin(t)) \Rightarrow Ph(2\pi) = (0, 0)$$

Покажемо, що для $(0, l_1(\cdot))$ система (7) не має розв'язків. Для цього обчислимо нуль-многовид N оператора, породженого спряженою системою Ейлера. Безпосереднім обчисленням встановлюється $N = \{(0,0,0,1)\}$. Очевидно, що $(0, l_1(\cdot))$ не ортогональне N, в той час як $(0, l_2(\cdot))$ вже ортогональне N.

4. Допоміжні результати і доведення

Доведення леми 2.

Зауваження 2. Для того випадку, коли $\mathcal{B}$ – тотожній оператор, твердження леми повторює подібний результат [2] для замкнених лінійних операторів у гільбертових просторах: в умовах леми спряжений до прообразу індикатору відносно оператора є функціонал, що зіставляє h норму розв'язку (мінімального по нормі) спряженого рівняння.

Зрозуміло, що

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \sup_x\{\langle h, x\rangle - \delta(Lx|\mathcal{B}\mathscr{G})\} = +\infty$$

для $h \notin \mathrm{N}^{\perp}(L^*) = \mathrm{R}(L^*)$, відтак $\mathrm{dom}(\delta L)^* \subset \mathrm{R}(L^*)$.

Нехай z – довільний розв'язок $L^*z = h$. Тоді

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \sup_x\{\langle z, Lx\rangle - \delta(Lx|\mathcal{B}\mathscr{G})\} = \sup_f\{\langle z, \mathcal{B}f\rangle - \delta(\mathcal{B}f|\mathscr{R}(L)) - \delta(f|\mathscr{G})\}$$

і згідно 2) знайдеться $f \in \mathrm{int}\mathscr{G}$, для деякого $\mathcal{B}f \in \mathscr{R}(L)$, відтак [10, с.189,т.1] будемо мати

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}\mathscr{G}))^*(h) = \inf_p\{s(\mathcal{B}'z - p|\mathscr{G}) + \delta^*(\cdot|\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L))(p)\} =$$

$$s(\mathcal{B}'z - \hat{p}|\mathscr{G}) + \delta^*(\cdot|\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L))(\hat{p}) < +\infty$$

Таким чином $\mathrm{dom}(\delta L)^* = \mathscr{R}(L^*)$.

Оскільки $\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L)$ – замкнений лінійний многовид, то

$$\delta^*(\cdot|\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L)) = \delta(\cdot|(\mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L))^{\perp})$$

Покажемо, що

$$(\mathcal{B}'\mathscr{N}(L^*))^{\perp} = \mathcal{B}^{-1}\mathscr{R}(L).$$

Покладемо $M := \mathscr{N}(L^*), M^{\perp} := \mathscr{R}(L)$ і нехай $i_M : M \to H$ вкладення M у H за правилом $i_M x = x$. Тоді оператор $\mathcal{B}'i_M$ лінійно неперервно відображає гільбертовий простір M у H, $\mathscr{R}(\mathcal{B}'i_M) = \mathcal{B}'M$ і $(\mathcal{B}'i_M)' = i'_M\mathcal{B}$, відтак

$$\mathscr{R}(\mathcal{B}'i_M)^{\perp} = \mathscr{N}(i'_M\mathcal{B}) \Rightarrow \mathrm{cl}\quad \mathscr{R}(\mathcal{B}'i_M) = \mathscr{N}(i'_M\mathcal{B})^{\perp}$$

Зрозуміло, що $\mathscr{N}(i'_M\mathcal{B}) = \mathcal{B}^{-1}\mathscr{N}(i'_M)$. З умови ортогональності графіка лінійного оператора $i_M : M \to H$ та оберненого графіка $i'_M : H \to M$

$$\langle x, -i'_M z\rangle + \langle z, i_M x\rangle = 0, \forall x \in M, z \in H$$

знаходимо $\mathscr{N}(i'_M) = M^{\perp}$.

Покажемо, що

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}(\mathscr{G})))^*(h) = s(\mathcal{B}'z - \hat{p}|\mathscr{G}), \hat{p} \in \mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'\mathscr{N}(L^*)$$

не залежно від вибору $z \in \mathcal{Z} = \{z : L^*z = h\}$. Справді, для довільного $z \in \mathcal{Z} : z = z^+ + z - z^+$, де $z^+ \in \mathcal{Z} \cap \mathscr{R}(L)$, $z - z^+ \in \mathscr{N}(L^*)$, відтак $\mathcal{B}'(z - z^+) \in \mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'\mathscr{N}(L^*)$. Але тоді

$$(\delta L(\cdot|\mathcal{B}(\mathscr{G})))^*(h) = \inf_p \{s(\mathcal{B}'z - p|\mathscr{G}) + \delta(p|\mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'(\mathscr{N}(L^*)))\} =$$

$$\inf_p \{s(\mathcal{B}'z^+ + \mathcal{B}'(z - z^+) - p|\mathscr{G}) + \delta(p|\mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'(\mathscr{N}(L^*)))\} =$$

$$\inf_p \{s(\mathcal{B}'z^+ - p|\mathscr{G}) + \delta(p|\mathrm{cl} \quad \mathcal{B}'(\mathscr{N}(L^*)))\} = s(\mathcal{B}'z^+ - p^+|\mathscr{G})$$

□

Доведення теореми 2. Розв'язність крайової задачі (7) еквівалентна

$$(0, \ell) \in \mathscr{R}\begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & -\mathcal{D}' \end{pmatrix} \tag{19}$$

Імплікація

$$(0, \ell) \in \mathscr{R}(\begin{pmatrix} \mathcal{D} & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & -\mathcal{D}' \end{pmatrix}) \Rightarrow \exists u(\cdot) : \ell(\cdot) - \mathcal{H}'u(\cdot) \in \mathscr{R}(D')$$

очевидна. Зворотна імплікація доведена у (17).

Для кожного розв'язку z_0 лінійного алгебраїчного рівняння

$$(E - \Phi(\omega, 0))z_0 = \int_0^\omega \Phi(\omega, s)(H'(s)u(s) - \ell(s))\mathrm{ds} \tag{$*$}$$

розв'язок задачі Коші

$$\dot{z}(t) = -A'(t)z(t) + H'(t)u(t) - \ell(t), z(0) = z_0$$

буде періодичним розв'язком. $(*)$ має розв'язки лише для таких ℓ, u, для яких

$$\int_0^\omega [E - (E - \Phi(\omega, 0))(E - \Phi(\omega, 0))^+]\Phi(\omega, s)(H'(s)u(s) - \ell(s))\mathrm{ds} = 0 \tag{$**$}$$

Введемо лінійний оператор

$$u \mapsto Lu = \int_0^\omega P\Phi(\omega, s)H'(s)u(s)\mathrm{ds}, P := [E - (E - \Phi(\omega, 0))(E - \Phi(\omega, 0))^+]$$

і покладемо

$$b := \int_0^\omega P\Phi(\omega, s)\ell(s))\mathrm{ds}$$

Тоді умову $(**)$ виконано лише тоді, коли лінійне операторне рівняння

$$Lu = b$$

має розв'язки. З іншого боку відомо [6, с.211], що $b \in R(L)$ лише тоді, коли b лежить у підпросторі, натягнутому на стовпчики матриці

$$W(0,\omega) := \int_0^\omega P\Phi(\omega,s)H'(s)H(s)\Phi'(\omega,s)P\mathrm{d}s$$

або, що те саме

$$b \perp \{x : W(0,\omega)x = 0\}$$

$\square$

Доведення леми 1. Множина $\mathscr{D}(\mathcal{D})$ скрізь щільна у просторі $\mathbb{L}_2^n$. Нам достатньо довести скрізь щільність множини

$$\mathscr{D}(\mathcal{D}_1) := \{\varphi \in \mathscr{D}(\mathcal{D}) : \varphi(0) = \varphi(\omega) = 0\},$$

бо для довільного $x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ справедливий векторний аналог формули Н'ютона-Лейбніца

$$x(s) - x(0) = \int_0^s \dot{x}(t)\mathrm{d}t,$$

і з умови $(*)$ виводимо $x(0) = x(\omega)$. Нехай $f \in \mathbb{L}_2^n$ і $\int_0^\omega (f,\varphi)_n \mathrm{d}t = 0$ для всіх $\varphi(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_1)$, звідки, інтегруючи по частинах, дістанемо

$$\int_0^\omega (\int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \dot{\varphi}(t))_n \mathrm{d}t = 0, \forall\varphi(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_1) \Rightarrow \int_0^t f(s)\mathrm{d}s = const.$$

Дійсно, вектор-функція $g(\cdot)$ ортогональна до підпростору постійних вектор-функцій $\mathscr{C}$ з $\mathbb{L}_2^n$ тоді і лише тоді, коли $\int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s = 0$. Усі такі $g(\cdot)$ утворюють нуль-многовид $\mathscr{G}$ лінійного обмеженого функціоналу $g(\cdot) \mapsto \int_0^\omega g(s)\mathrm{d}s$. Отже, $\mathscr{C}^\perp = \mathscr{G}$ звідки $\mathscr{C} = \mathscr{G}^\perp$ в силу скінченновимірності $\mathscr{C}$. З іншого боку $\varphi(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_1)$ і $\dot{\varphi}(t) = g(t)$ для $g(\cdot) \in \mathscr{G}$.

Замкненість оператора $\mathcal{D}$ є наслідком [8, с.119] того факту, що $\mathcal{D}$ є сумою обмеженого та замкненого. Справді, оператор $x \mapsto Ax$ обмежений в силу неперервності $t \mapsto A(t)$. Покажемо, що оператор $x \mapsto \mathcal{D}_0 x := \dot{x}$, визначений на $\mathscr{D}(\mathcal{D})$, замкнений. Відомо [7, с.93], що для довільної послідовності абсолютно неперервних функції $\{f_n\}$ в $\mathbb{L}_2^n$ такої, що $\{f_n\} \to f, \{\dot{f}_n\} \to g$ сильно в $\mathbb{L}_2^n$, f – абсолютно неперервна і $\dot{f} = g$. Якщо ж водночас $f_n \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, то $\int_0^\omega \dot{f}(t)\mathrm{d}t = 0$. Справді, в силу $(*)$

$$0 = \lim \int_0^\omega \dot{f}_n(t)\mathrm{d}t$$

З іншого боку

$$\lim \int_0^\omega \dot{f}_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^\omega \dot{f}(t)\mathrm{d}t$$

в силу неперервності лінійного функціоналу $g \mapsto \int_0^\omega g(t)\mathrm{d}t$ та сильної збіжності $\dot{f}_n \to \dot{f}$.
Отже, $\mathcal{D}$ – щільно визначений замкнений лінійний оператор з $\mathbb{L}_2^n$ в $\mathbb{L}_2^n$, відтак [9, с.40] існує єдиний спряжений оператор $\mathcal{D}^*$, що буде замкненим і щільно визначеним лінійним оператором з $\mathbb{L}_2^n$ в $\mathbb{L}_2^n$. Обчислимо $\mathcal{D}^*$. Для цього достатньо обчислити оператори $\mathcal{D}_0^*, A^*$, бо $(\mathcal{D}_0 - A)^* = \mathcal{D}_0^* - A^*$ і $\mathscr{D}((\mathcal{D}_0 - A)^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$ для замкненого $\mathcal{D}_0$ та обмеженого A лінійних операторів, що діють в абстрактному гільбертовому просторі.
Спочатку визначимо $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$. Символом $\mathcal{D}_1$ позначимо звуження $\mathcal{D}_0$ на множину $\mathscr{D}(\mathcal{D}_1)$. Можна показати [8, с.196], що $\mathcal{D}_0^* \subset \mathcal{D}_1^*$ тобто $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*) \subseteq \mathscr{D}(\mathcal{D}_1^*)$ і $\mathcal{D}_0^* = \mathcal{D}_1^*$ на $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$. З іншого боку [7, с.94] $\mathscr{D}(\mathcal{D}_1^*)$ складається з усіх абсолютно неперервних функцій з $\mathbb{L}_2^n$, що мають похідну класу $\mathbb{L}_2^n$ і $N(\mathcal{D}_1^*)$ утворено функціями-константами з $\mathbb{L}_2^n$.
Символом $\mathcal{D}_2$ позначимо лінійний оператор, визначений на $\mathscr{D}(\mathcal{D})$ згідно правила

$$\mathcal{D}_2 z = -\dot{z}.$$

Неважко пересвідчитись, що $\mathcal{D}_2$ – замкнений оператор. Помітимо, що згідно формули інтегрування по частинах для абсолютно неперервних функцій

$$\langle \mathcal{D}_0 x, g\rangle_2 := \int_0^\omega ((\mathcal{D}_0 x)(t), g(t))_n \mathrm{d}t = \langle x, \mathcal{D}_2 g\rangle_2,$$

для довільних $x, g \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$, відтак $\mathcal{D}_0^* x = \mathcal{D}_2 x, x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ і $\mathscr{D}(\mathcal{D}) \subset \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$. Покажемо, що $\mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*) \subset \mathscr{D}(\mathcal{D})$. Справді, нехай $g \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$ і $\mathcal{D}_0^* g = h$. Тоді

$$\langle \mathcal{D}_0 x, g\rangle_2 = \langle x, h\rangle_2 = \int_0^\omega (x(t), h(t))_n \mathrm{d}t,$$

звідки, поклавши $x(t) \equiv e_i, e_i$ – i-орт в $\mathbb{R}^n$, дістанемо

$$\int_0^\omega h(t)\mathrm{d}t = 0.$$

З іншого боку, інтегруючи по частинах

$$\int_0^\omega (x(t), \left[\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\right]')_n \mathrm{d}t = -\int_0^\omega (\dot{x}(t), \int_0^t h(s)\mathrm{d}s)_n \mathrm{d}t + (\int_0^\omega h(t)\mathrm{d}t, x(\omega))_n$$

знаходимо, що для всіх $x \in \mathscr{D}(\mathcal{D})$ виконано

$$\int_0^\omega (\dot{x}(t), g(t) + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s)_n \mathrm{d}t = 0,$$

відтак майже скрізь

$$g(t) + \int_0^t h(s)\mathrm{d}s = p(t) \Rightarrow g(0) = p(0), g(\omega) = p(\omega)$$

для деякої вектор-функції $t \mapsto p(t) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*)$ такої, що $\mathcal{D}_0^* p = 0$. Але тоді $\mathcal{D}_1^* p = 0$ відтак $p \in N(\mathcal{D}_1^*)$ і тому $p(0) = p(\omega)$.
Таким чином $\mathcal{D}_0^* z = -\dot{z}, \mathscr{D}(\mathcal{D}_0^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D})$. Безпосередньо встановлюється, що $(A^* z)(t) = A'(t)z(t)$, тому $(\mathcal{D}^* z)(t) = -\dot{z}(t) - A'(t)z(t)$ і $\mathscr{D}(\mathcal{D}^*) = \mathscr{D}(\mathcal{D})$. □

Доведення леми 3. Лінійність $\mathcal{D}^+$ не викликає сумніву. Нехай $b \in \mathbb{L}_2^n$ і $z^+ := \mathcal{D}^+ b$. Помітимо, що $\Phi'(t_0, t)$ буде перехідною матрицею рівняння $\dot{z}(t) = -A(t)' z(t)$, відтак

$$z^+(t) = \Phi'(0,t)(E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega) + z_1(t).$$

Матрична функція $t \mapsto \Phi'(0,t)$ абсолютно неперервна по t і не залежить від b, тому оператор множення на неперервну матрицю обмежений в $\mathbb{L}_2^n$. Лінійний оператор $b \mapsto z_1(\omega)$ є обмеженим, відтак оператор $b \mapsto \Phi'(0,t)(E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega)$ обмежений, як композиція обмежених. Оскільки $b(\cdot) \mapsto z_1(\cdot)$ обмежений, то $\mathcal{D}^+$ обмежений як сума таких.

Далі

$$z^+(\omega) - z^+(0) = \Phi'(0,\omega)(E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega) + z_1(\omega) - (E - \Phi'(0,\omega))^+ z_1(\omega) =$$
$$(E - (E - \Phi'(0,\omega))(E - \Phi'(0,\omega))^+) z_1(\omega) \in \mathscr{N}((E - \Phi(0,\omega))),$$

Відомо [6, с.121], що $\Phi(0,\omega) = \Phi^{-1}(\omega,0)$ і якщо помножити рівняння $(E - \Phi(\omega,0))q = 0$ зліва на $\Phi(0,\omega)$, то дістанемо $(\Phi(0,\omega) - E)q = 0$, звідки $\mathscr{N}(E - \Phi(\omega,0)) = \mathscr{N}(\Phi(0,\omega) - E)$, отже

$$z^+(\omega) - z^+(0) \in \mathscr{N}(E - \Phi(\omega,0)) \tag{20}$$

Нехай $u(\cdot) = \mathcal{D}p(\cdot)$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle u(\cdot), z^+(\cdot)\rangle_2 = \int_0^\omega (p_t, z^+) + (z_t^+, p) - (p,b)\mathrm{d}t = \\ (p(0), z^+(\omega) - z^+(0)) - \langle p(\cdot), b(\cdot)\rangle_2 \end{aligned} \tag{21}$$

звідки легко одержати, що $z^+(\omega) = z^+(0)$ для довільного $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$, і тому $z^+(\cdot) \in \mathscr{D}(\mathcal{D}')$, $\mathcal{D}' z^+(\cdot) = b(\cdot)$. Справді, зафіксуємо $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і нехай $p(\cdot) \in \mathscr{N}(\mathcal{D})$. Тоді $p(0) \in \mathscr{N}(E - \Phi(\omega,0))$. З іншого боку згідно (21)

$$0 = \langle \mathcal{D}p(\cdot), z^+(\cdot)\rangle_2 = (p(0), z^+(\omega) - z^+(0)),$$

і, позаяк остання рівність виконана для довільного $p(\cdot) \in \mathscr{N}(\mathcal{D})$, із (20) дістанемо потрібне.

У загальному випадку $b \in \mathbb{L}_2^n$ із (21) випливає, що

$$\langle \mathcal{D}p(\cdot), z^+(\cdot)\rangle_2 = -\langle p(\cdot), b(\cdot)\rangle_2 \tag{22}$$

якщо $p(0) \perp \mathscr{N}(E - \Phi(\omega, 0))$. По аналогії з тим, як це буде зроблено нижче, можна показати, що остання умова еквівалентна включенню $p(\cdot) \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$.

Зафіксуємо $b \in \mathscr{R}(\mathcal{D}')$ і нехай $\mathcal{D}'z = b$, $\mathcal{D}^+ b := z^+$. Легко збагнути, що $z(0) = z^+(0) + z_0$, де z_0 такий, що $(E - \Phi(\omega, 0))z_0 = 0$. Але тоді

$$z(t) = z^+(t) + \Phi(t, 0)z_0 \Rightarrow \|z\|_2 - \|z^+\|_2 = \|z^+ + \Phi(t, 0)z_0\|_2 - \|z^+\|_2 \geq 0$$

що еквівалентно включенню $z^+ \in \mathscr{R}(\mathcal{D})$. Решта тверджень леми є простими наслідками сказаного і перевіряються безпосередньо. $\square$

Висновки

У цій роботі для задачі мінімаксного спостереження лінійних обмежених функціоналів на множині розв'язків лінійної одновимірної крайової задачі запропоновано критерій скінченності мінімаксної похибки оцінювання без обмеження структури системи та моделі спостереження. Виділено множину функціоналів $\mathscr{F}$, для елементів якої і лише для них мінімаксна оцінка існує і єдина. У випадку квадратичних обмежень запропоновано представлення оцінки за допомогою розв'язків крайової задачі для лінійної невід'ємно означеної гамільтонової системи. Запропоновано критерій приналежності заданого лінійного функціоналу до множини $\mathscr{F}$ в термінах алгебраїчних рівнянь, структура яких визначається фундаментальною матрицею вихідного рівняння. Показано, що $\mathscr{F} = \mathbb{L}_2^n$ для випадку ін'єктивності звуження оператора $\mathcal{H}$ на ядро оператора $\mathcal{D}$. Як наслідки з теореми про вигляд оцінки та похибки одержано характеристику ядра та множини значень оператора $\begin{smallmatrix} L & \mathcal{B}\mathcal{B}' \\ \mathcal{H}'\mathcal{H} & L' \end{smallmatrix}$ для абстрактних лінійних операторів нетерового L та обмежених $\mathcal{B}, \mathcal{H}$ (див. зауваження 1).

У тому випадку коли ядро оператора $\mathcal{H}$ має нетривіальний перетин з $\mathscr{N}(\mathcal{D})$ множина оцінюваних функціоналів звужується до деякого підпростору. Останнє означає, що вихідна система втрачає властивість повної спостережуваності, відтак за допомогою розв'язку $\hat{x}(\cdot)$ задачі (6) вдається оцінити лише проекцію $x(\cdot)$ на підпростір оцінюваних функціоналів. У такому випадку виникає потреба в розробці конструктивного методу побудови базису підпростору оцінюваних функціоналів у $\mathbb{L}_2^n$. Це в свою чергу дозволило би ефективно будувати оцінки зазначених проекцій і тому становить перспективний напрямок для подальших досліджень.

Список литературы

1. *Наконечний О.Г.* Оцінювання параметрів в умовах невизначеності // Наукові записки КНУ ім. Т.Г. Шевченка. — 2004. – Том 7: факультет кібернетики.— С.102-112.
2. *Жук С.М.* Мінімаксні задачі спостереження для лінійних дескрипторних диференціальних рівнянь // Ж. обч. прикл. мат. — 2005. — N2. — С.39-46.
3. *Жук С.М.* Задачі мінімаксного спостереження для лінійних дескрипторних систем: Автореферат дис. канд-та фіз.-мат. наук / Київ, 2006. – 19 с.

4. *Подлипенко Ю.К.* Минимаксное оценивание правых частей нётеровых уравнений в гильбертовом пространстве в условиях неопределенности // Доповіді НАНУ. — 2005. — 12. — С.36-44.
5. *Подлипенко Ю.К., Рябікова А.В.* Минимаксное оценивание по неполным данным решений двухточечных краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференципалных уравнений // Жур. прикл. и выч. мат-ки. – 2005. – 2(93). – С.97-106.
6. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.:Наука, 1976. — 416 с.
7. *Балакришнан А.В.* Прикладной функциональный анализ: Пер.з англ. — М.:Наука, 1980.– 384 с.
8. *Хатсон В., Пим Дж.С.* Приложения функционального анализа и теории операторов: Пер. з англ. — М.:Мир, 1983. — 432 с.
9. *Лянце В.Э., Сторож О.Г.* Методы теории неограниченных операторов. — Киев: Наук.думка, 1983. — 212 с.
10. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. — М.:Наука, 1974. — 477 с.

Статья поступила в редакцию 23.03.2007