УДК 517.98

БАНАХОВЫ МОДУЛИ $L_\infty(\nabla, M)$ L_0-ОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРЕДСОПРЯЖЕННЫЕ МОДУЛИ

© Б.С. Закиров

Институт математики АН РУз,
ул. Ф. Ходжаева, 29, г. Ташкент, Узбекистан, 100125
e-mail: *batirzakirov@list.ru*

© В.И. Чилин

Национальный университет Узбекистана,
Вузгородок, г. Ташкент, Узбекистан, 100174
e-mail: *chilin@ucd.uz*

Let ∇ be a complete Boolean algebra, m be a strictly positive measure on ∇ with values in the algebra L_0 of all measurable real functions. In the paper is introduced the Banach L_0-bimodule of L_0-bounded functions associated with ∇ and m. It is proved that this bimodule is isometrically isomorphic to the dual of $L_1(\nabla, m)$.

Введение

В связи с развитием общей теории пространств Банаха-Канторовича (см., напр., [1, 2]) естественно возникает вопрос о содержательных примерах таких пространств и об описании сопряженных пространств для них. Теория интегрирования для мер со значениями в алгебре $L_0 = L_0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых действительных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) с полной мерой μ, позволяет строить "L_0-варианты" классических пространств L_p, $p \in [1, \infty)$ [1, 3], пространств Орлича [4], которые являются полезными примерами пространств Банаха-Канторовича, имеющими одновременно структуру бимодулей над L_0. Следует отметить, что любое пространство Банаха-Канторовича над L_0 допускает L_0-бимодульную структуру, и поэтому класс этих пространств отождествляется с классом банаховых L_0-бимодулей. Множество E^* всех непрерывных эндоморфизмов, заданных на банаховом L_0-бимодуле E и принимающих значения в L_0, при введении естественных алгебраических операций и нормы само становится банаховым L_0-бимодулем. В случае банаховых L_0-бимодулей L_p, $p \in (1, \infty)$, известен "L_0-вариант" описания сопряженного бимодуля $(L_p)^* = L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (см., например, [1]). В то же время модульного аналога для известного равенства $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ не имелось, поскольку естественный взгляд на L_∞ как пространство ограниченных измеримых функций в данной ситуации оказывалось неудовлетворительным.

В настоящей работе определяется понятие L_0-ограниченной функции, ассоциированной с полной булевой алгеброй ∇ и строго положительной L_0-значной мерой $m : \nabla \to L_0$. Рассматривается банахов L_0-бимодуль $L_\infty(\nabla, m)$ всех таких L_0-ограниченных функций и показывается, что он изометричен банахову L_0-модулю $(L_1(\nabla, m))^*$.

Используются терминология и обозначения теории решеточно-нормированных пространств из [1, 2], теории булевых алгебр и векторных решеток из [5, 6] и теории векторного интегрирования [2, 3].

1. Банаховы $\mathbf{L_0}$-модули и их эндоморфизмы

В этом разделе напоминаются понятия пространства Банаха-Канторовича, банахова модуля, указывается связь между ними и описываются свойства их непрерывных эндоморфизмов.

Пусть ∇ — произвольная булева алгебра, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — наименьший и наибольший элементы в ∇. Для каждого подмножества $A \subset \nabla$ через $\sup A$ $(\vee A)$, $\inf A$ $(\wedge A)$ обозначаются его точные верхняя и нижняя грани, соответственно. Булева алгебра ∇ называется полной (σ-полной), если для всякого (счетного) подмножества $A \subset \nabla$ существует $\sup A$. Элементы $a, b \in \nabla$ называются дизъюнктными, если $a \wedge b = 0$. Семейство элементов из ∇ называют дизъюнктным, если его члены попарно дизъюнктны. Разбиением единицы в булевой алгебре называется всякое дизъюнктное семейство $(e_i)_{i\in I}$ ее ненулевых элементов, удовлетворяющее условию $\sup\limits_{i\in I} e_i = \mathbf{1}$.

Говорят, что булева алгебра ∇ имеет счетный тип, если всякое дизъюнктное семейство ненулевых элементов из ∇ не более чем счетно. Всякая σ-полная булева алгебра счетного типа является полной. Булева подалгебра ∇_0 в полной булевой алгебре ∇ называется правильной, если для любого подмножества $A \subset \nabla_0$ элемент $\sup A \in \nabla_0$. Ясно, что правильная подалгебра сама является полной булевой алгеброй.

Нам понадобится следующее важное свойство полных булевых алгебр.

Теорема 1 (Принцип исчерпывания). *(см. [5], гл. III, §2, стр.111). Пусть ∇ — полная булева алгебра, $0 \neq a \in \nabla$. Пусть A — такое подмножество в $\nabla_a := \{b \in \nabla : \ b \leq a\}$, что для всякого $0 \neq b \in \nabla_a$ существует такое ненулевое $c \in A$, что $c \leq b$. Тогда существует дизъюнктное подмножество $A_1 \subset A$, со свойствами:*

1) $\sup A_1 = a = \sup A$;

2) для любого $c \in A_1$ существует элемент $b \in A$ такой, что $c \leq b$.

Пусть (Ω, Σ, μ) — измеримое пространство с полной σ-конечной мерой, $L_0 = L_0(\Omega)$ — алгебра всех измеримых функций на (Ω, Σ, μ) со значениями в поле действительных чисел $\mathbb{R}$ (равные почти всюду функции отождествляются). Относительно естественного частичного порядка в L_0 ($x \leq y \Leftrightarrow y - x \geq 0$ почти всюду) алгебра L_0 является условно полной векторной решеткой со слабой единицей $\mathbf{1}(\omega) \equiv 1$, $\omega \in \Omega$, а множество $\nabla(\Omega)$ всех идемпотентов в L_0 образует полную булеву алгебру.

Для элемента $x \in L_0(\Omega)$ через $s(x)$ обозначается его носитель, т.е. $s(x) = \sup\limits_{n\geq 1}\{|x| > n^{-1}\}$, где $\{|x| > \lambda\}$ есть идемпотент, являющийся характеристической функцией χ_{A_λ} множества $A_\lambda = \{\omega \in \Omega : |x(\omega)| > \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ясно, что $xs(x) = x$, и если $xy = 0$, то $s(x)y = 0$, в частности, $|x| \wedge |y| = 0$ тогда и только тогда, когда $s(x)s(y) = 0$.

Для элементов $x, y \in L_0(\Omega)$ будем писать $x > y$, если $x(\omega) > y(\omega)$ для почти всех $\omega \in \Omega$, для которых $x(\omega) \neq 0$.

Для $e = \chi_A \in \nabla(\Omega)$, $A \in \Sigma$ через $L_0(e\Omega)$ обозначим алгебру всех измеримых действительных функций на (A, Σ_A, μ) (равные почти всюду функции отождествляются), где $\Sigma_A = \{B \cap A : B \in \Sigma\}$. Ясно, что $L_0(e\Omega)$ естественным образом можно отождествить с кольцом $eL_0(\Omega)$.

Далее для любого ненулевого $x \in L_0(\Omega)$ рассмотрим элемент x_s^{-1}, обратный к x на его носителе, т.е.

$$x_s^{-1}(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(\omega)}, & \text{если } x(\omega) \neq 0, \\ 0, & \text{если } x(\omega) = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $x_s^{-1} \in L_0(\Omega)$ и $x_s^{-1}x = s(x)$.

Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ элементов из $L_0(\Omega)$ сходится локально по мере μ к элементу $x \in L_0(\Omega)$ (обозначается $x_n \xrightarrow{l.\mu} x$), если для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$ последовательность $x_n\chi_A$ сходится по мере μ к элементу $x\chi_A$. Если $\mu(\Omega) < \infty$, то сходимости локально по мере и по мере совпадают. Так как μ — σ-конечна, то существует счетное семейство ненулевых дизъюнктных идемпотентов $\{e_n\} \subset \nabla(\Omega)$ такое, что $\sup e_n = \mathbf{1}$, $\mu(e_n) < \infty$. В $L_0(e_n\Omega)$ рассмотрим топологию t_n сходимости по мере. Базу окрестностей нуля в этой топологии образуют множества

$$W(\varepsilon, \delta) := \{x \in L_0(e_n\Omega) : \text{ существует } e \in \nabla(e_n\Omega) \text{ такое, что}$$

$$\mu(e_n - e) \leq \delta \text{ и } |x(\omega)| \leq \varepsilon \text{ для } \omega \in e\Omega\}.$$

Ясно, что алгебра $L_0(\Omega)$ совпадает с прямым произведением $\prod\limits_{n=1}^{\infty} L_0(e_n\Omega)$ алгебр $L_0(e_n\Omega)$, и сходимость в тихоновской топологии t совпадает со сходимостью локально по мере в $L_0(\Omega)$. Топологию t в $L_0(\Omega)$ называют топологией сходимости локально по мере. Относительно этой топологии $L_0(\Omega)$ является полной метризуемой топологической векторной решеткой, при этом топология t имеет счетный базис $\{U_n\}$ замкнутых окрестностей нуля, обладающих следующим свойством идеальности: если $|x| \leq |y|$, $y \in U_n$, $x \in L_0(\Omega)$, то $x \in U_n$. Ясно, что из сходимости $x_n \to x$ почти всюду следует сходимость $x_n \xrightarrow{t} x$. Обратно, если $x_n \xrightarrow{t} x$, то существует подпоследовательность $x_{n_k} \to x$ почти всюду.

Отметим, что сходимость почти всюду в $L_0(\Omega)$ совпадает с (o)-сходимостью в векторной решетке $L_0(\Omega)$ (напомним, что $\{x_n\} \subset L_0(\Omega)$ (o)-сходится к $x \in L_0(\Omega)$ (обозначается $x_n \xrightarrow{(o)} x$), если найдутся такие $y_n, z_n \in L_0(\Omega)$, что $y_n \leq x_n \leq z_n$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, и $y_n \uparrow x$, $z_n \downarrow x$).

Приведем теперь определение пространства Банаха-Канторовича в случае, когда множество значений нормы лежит в $L_0(\Omega)$.

Пусть E — векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Отображение $\|\cdot\| : E \to L_0(\Omega)$ называют векторной (L_0-значной) нормой, если оно удовлетворяет следующим аксиомам:

(1) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $(x \in E)$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ x \in E)$;
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $(x, y \in E)$.

Отображение $\|\cdot\|$ называют разложимой нормой или нормой Канторовича, если кроме (1), (2) и (3) выполнена аксиома разложимости:

(4) для любого элемента $x \in E$ и любого разложения $\|x\| = e_1 + e_2$ в сумму положительных элементов $e_1, e_2 \in L_0(\Omega)$ существуют $x_1, x_2 \in E$ такие, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_k\| = e_k$ $(k = 1, 2)$.

В том случае, когда условие (4) справедливо лишь для дизъюнктных положительных $e_1, e_2 \in L_0(\Omega)$, норму называют дизъюнктно разложимой или, короче, d-разложимой.

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется решеточно нормированным пространством (сокращенно РНП) над $L_0(\Omega)$, если $\|\cdot\|$ — L_0-значная норма на векторном пространстве E. Если норма $\|\cdot\|$ разложима (d-разложима), то и само пространство $(E, \|\cdot\|)$ называется разложимым (d-разложимым).

Говорят, что последовательность $(x_n) \subset E$ (bo)-сходится к элементу $x \in E$ и пишут $x = (bo)\text{-}\lim x_n$, если последовательность $(\|x_n - x\|)$ (o)-сходится к нулю в решетке $L_0(\Omega)$. Последовательность (x_n) называют (bo)-фундаментальной, если

$$\sup_{n,k \geq m} \|x_n - x_k\| \xrightarrow{(o)} 0, \quad \text{при } m \to \infty.$$

Решеточно нормированное пространство называют (bo)-полным, если всякая (bo)-фундаментальная последовательность в нем (bo)-сходится к элементу этого пространства. Пространством Банаха-Канторовича (или, сокращенно, ПБК) над L_0 называется d-разложимое (bo)-полное РНП над L_0. Известно, что всякое ПБК является разложимым РНП.

Если $(E, \|\cdot\|)$ — РНП и E — векторная решетка, то норма $\|\cdot\|$ называется монотонной, если из $|x| \leq |y|$, $x, y \in E$, следует, что $\|x\| \leq \|y\|$. ПБК, являющееся одновременно векторной решеткой с монотонной нормой, называется решеткой Банаха-Канторовича.

Пусть E — бимодуль над $L_0(\Omega)$ (или, коротко, L_0-модуль), т.е. E — абелева группа относительно операции сложения "+" и на E заданы операции умножения слева и справа на элементы из $L_0(\Omega)$, обладающие свойствами:

1) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $(x + y)\lambda = x\lambda + y\lambda$;
2) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $x(\lambda + \mu) = x\lambda + x\mu$;
3) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; $(x\lambda)\mu = x(\lambda\mu)$;
4) $\mathbf{1}x = x\mathbf{1} = x$

для всех $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in L_0(\Omega)$.

Бимодуль E над $L_0(\Omega)$ называется нормальным L_0-модулем, если

1) $\lambda x = x\lambda$ для всех $x \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$;
2) для любого ненулевого $e \in \nabla(\Omega)$ существует такое $x \in E$, что $xe \neq 0$;

3) для любого разбиения единицы $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \nabla(\Omega)$ и любых $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ существует такое $x \in E$, что $xe_n = x_n e_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$;

4) для любого $x \in E$ и любой последовательности $\{e_n\}$ дизъюнктных элементов из $\nabla(\Omega)$ из равенств $e_n x = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, следует, что $\left(\sup\limits_{n \geq 1} e_n\right) x = 0$.

Нормальный L_0-модуль E называется L_0-векторной решеткой, если в E задан частичный порядок $x \leq y$, относительно которого E является одновременно решеткой, и для любых $x, y, z \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$ из $x \leq y$, $\lambda \geq 0$ вытекает, что $x + z \leq y + z$ и $\lambda x \leq \lambda y$. Простейшим примером L_0-векторной решетки служит само $L_0(\Omega)$, рассмотренное как бимодуль над $L_0(\Omega)$.

Пусть E — нормальный L_0-модуль. L_0-значная норма $\|\cdot\| : E \to L_0(\Omega)$ называется L_0-нормой, согласованной со структурой L_0-модуля E (коротко L_0-норма), если $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для любых $x \in E$ и $\lambda \in L_0(\Omega)$. Пара $(E, \|\cdot\|)$, где E — нормальный L_0-модуль, $\|\cdot\|$ — L_0-норма на E, называется нормированным L_0-модулем.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — нормированный L_0-модуль, t — топология сходимости локально по мере в $L_0(\Omega)$, $\mathcal{U}$ — система всех окрестностей нуля в $(L_0(\Omega), t)$. Через $\Omega(U)$ обозначим совокупность всех $x \in E$, для которых $\|x\| \in U$, где $U \in \mathcal{U}$. Система $\{\Omega(U), U \in \mathcal{U}\}$ определяет в E метризуемую топологию τ такую, что (E, τ) есть топологический бимодуль над $L_0(\Omega)$, при этом $\{\Omega(U), U \in \mathcal{U}\}$ есть базис окрестностей нуля в (E, τ) (в этом случае говорят, что τ порождена нормой $\|\cdot\|$ и топологией t).

Заметим, что $L_0(\Omega)$, рассмотренное как бимодуль над $L_0(\Omega)$, имеет тривиальную L_0-норму, задаваемую формулой $\|\lambda\| = |\lambda|$, $\lambda \in L_0(\Omega)$, при этом топология τ совпадает с топологией t.

Последовательность $\{x_n\}$ из нормированного L_0-модуля E называется (bo)-фундаментальной (t-фундаментальной), если $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{(o)} 0$ (соответственно $\|x_n - x_m\| \xrightarrow{t} 0$). Нормированный L_0-модуль $(E, \|\cdot\|)$ называется банаховым (t-банаховым), если всякая (bo)-фундаментальная (соответственно t-фундаментальная) последовательность в нем (bo)-сходится (соответственно t-сходится) к элементу этого L_0-модуля. Ясно, что $(E, \|\cdot\|)$ является банаховым L_0-модулем тогда и только тогда, когда $(E, \|\cdot\|)$ — t-банахов L_0-модуль.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ — ПБК над $L_0(\Omega)$. Тогда на E можно задать структуру нормального L_0-модуля (т.е. определить операции λx, $x\lambda$, $x \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$ так, что E становится нормальным L_0-модулем). При этом норма $\|\cdot\|$ будет обладать свойством модульности, т.е. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in L_0(\Omega)$, $x \in E$ (см. [2], п.2.1.8). Поэтому всякое ПБК над $L_0(\Omega)$ является банаховым L_0-модулем. Верно и обратное, любой банахов L_0-модуль $(E, \|\cdot\|)$ является ПБК над $L_0(\Omega)$.

Если нормированный L_0-модуль $(E, \|\cdot\|)$ одновременно является L_0-векторной решеткой и L_0-норма монотонна, то его называют нормированной L_0-векторной решеткой. Всякая нормированная L_0-векторная решетка $(E, \|\cdot\|)$, являющаяся банаховым L_0-модулем, называется банаховой L_0-векторной решеткой. Класс банаховых L_0-векторных решеток в точности совпадает с классом решеток Банаха-Канторовича над $L_0(\Omega)$.

Приведем полезные примеры банаховых L_0-модулей.

Пусть ∇ — полная булева алгебра, $X(\nabla)$ — стоуновский компакт, соответствующий ∇. Положим $L_0(\nabla) := C_\infty(X(\nabla))$ — множество всех непрерывных действительных функций, заданных на $X(\nabla)$, принимающих значение $\pm\infty$ лишь на нигде неплотных множествах из $X(\nabla)$ (см., например, [3], гл.V, §2). При естественном введении алгебраических операций и частичного порядка в $L_0(\nabla)$ оно становится кольцом и расширенной условной полной векторной решеткой. Функция $\mathbf{1}$, тождественно равная единице на $X(\nabla)$, является кольцевой и слабой единицей в $L_0(\nabla)$. Порядковый идеал, порожденный элементом $\mathbf{1}$, совпадает с пространством $C(X(\nabla))$ всех непрерывных числовых функций на $X(\nabla)$.

Отображение $m : \nabla \to L_0(\Omega)$ называется L_0-значной мерой на ∇, если

1) $m(e) \geq 0$ для любого $e \in \nabla$;

2) $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$, если $e, g \in \nabla$ и $e \wedge g = 0$;

3) если $e_n \downarrow 0$, $e_n \in \nabla$, то $m(e_n) \downarrow 0$.

Мера m называется строго положительной, если из $m(e) = 0$, $e \in \nabla$, следует, что $e = 0$.

Каждая строго положительная L_0-значная мера продолжается до интеграла в следующем смысле (см. [2, 3]). В $L_0(\nabla)$ существует наибольший порядковый идеал L, содержащий ∇, и отображение $I_m : L \to L_0(\Omega)$ такие, что

1) $I_m e = m(e)$ для любого $e \in \nabla$;

2) $I_m(ax + by) = aI_m x + bI_m y$, $x, y \in L$, $a, b \in \mathbb{R}$:

3) если $x_n, x \in L$ и $x_n \uparrow x$ или $x_n \downarrow x$, то $I_m x_n \xrightarrow{(o)} I_m x$, при этом отображение I_m, обладающее свойствами 1)–3), определяется по мере m однозначно, и, кроме того, $I_m x \geq 0$, если $x \geq 0$.

Векторная решетка L обозначается через $L_1(\nabla, m)$ или $L_1(m)$, а отображение I_m называется L_0-значным интегралом в $L_0(\nabla)$, соответствующим мере m и обозначается $I_m x := \int x dm$. Определим в $L_1(m)$ норму со значениями в $L_0(\Omega)$: $\|x\|_1 := \int |x| dm$, $x \in L_1(m)$. Тогда $(L_1(m), \|\cdot\|_1)$ является (bo)-полным РНП над $L_0(\Omega)$ (см. [3]).

В дальнейшем будем предполагать, что $\nabla(\Omega)$ есть правильная булева подалгебра в ∇ (этого всегда можно достичь, рассматривая вместо булевой алгебры ∇ полное тензорное произведение $\nabla \overline{\otimes} \nabla(\Omega)$ булевых алгебр ∇ и $\nabla(\Omega)$ (см. [3], гл.VII, §7.2)). Тогда $L_0(\Omega)$ можно отождествить с подалгеброй в $L_0(\nabla)$, которая является одновременно и правильной векторной подрешеткой в $L_0(\nabla)$, т.е. точные верхние и нижние границы для подмножеств из $L_0(\Omega)$ совпадают в $L_0(\nabla)$ и в $L_0(\Omega)$. Ясно, что при таком отождествлении множество $L_0(\nabla)$ становится L_0-векторной решеткой (умножение элементов из $L_0(\nabla)$ на элементы $L_0(\Omega)$ совпадает с естественным умножением в $L_0(\nabla)$).

Далее, для строго положительной меры $m : \nabla \to L_0(\Omega)$ будем требовать следующее дополнительное свойство модульности: $m(ge) = gm(e)$ для всех $e \in \nabla$, $g \in \nabla(\Omega)$. В этом случае $L_1(m)$ становится ПБК над $L_0(\Omega)$ (см. [1], п.6.1.10), а интеграл, построенный по мере m, обладает следующим модульным свойством:

для любых $x \in L_1(m)$, $\alpha \in L_0(\Omega)$ элемент αx также лежит в $L_1(m)$ и $\int \alpha x dm = \alpha \int x dm$, в частности, $L_0(\Omega) \subset L_1(m)$ и $\int \alpha dm = \alpha m(\mathbf{1})$ для всех $\alpha \in L_0(\Omega)$.

Таким образом, пара $(L_1(m), \|\cdot\|)$ становится банаховой L_0-векторной решеткой и потому является решеткой Банаха-Канторовича над $L_0(\Omega)$.

Для каждого $p > 1$ положим

$$L_p(\nabla, m) := \{x \in L_0(\nabla) : |x|^p \in L_1(\nabla, m)\}.$$

Тогда $L_p(\nabla, m)$ есть нормальный L_0-модуль и относительно L_0-нормы $\|x\|_p := \left(\int |x|^p dm\right)^{1/p}$ является банаховой L_0-решеткой (см. [3], гл.VIII, §8.2, [1], п.4.2.2).

Нам понадобится следующий вариант теоремы Радона-Никодима для L_0-значных счетно аддитивных отображений $\nu : \nabla \to L_0(\Omega)$ (ν — счетно аддитивно, если $\nu\left(\sup\limits_{n\geq 1} e_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(e_n)$ для всякого счетного дизъюнктного семейства $\{e_n\} \subset \nabla$ (ряд сходится в топологии t)).

Теорема 2. *(см. [2], п.6.1.11(2)). Пусть m — строго положительная L_0-значная мера на ∇, обладающая свойством модульности, и $\nu : \nabla \to L_0(\Omega)$ — счетно-аддитивное отображение, для которого $|\nu(e)| \in L_0(s(m(e))\Omega)$ для всех $e \in \nabla$. Тогда существует такой элемент $y \in L_1(m)$, что*

$$\nu(e) = \int eydm \quad \text{для каждого } e \in \nabla.$$

Рассмотрим теперь непрерывные эндоморфизмы нормированных L_0-модулей.

Пусть $(E, \|\cdot\|)$ и $(F, \|\cdot\|)$— нормированные L_0-модули. Отображение $T : E \to F$ называется эндоморфизмом, если $T(x+y) = Tx+Ty$, $T(\lambda x) = \lambda Tx$ для всех $x, y \in E$, $\lambda \in L_0(\Omega)$. Символом $L_b(E, F)$ будем обозначать множество всех непрерывных эндоморфизмов из (E, τ_E) в (F, τ_F), где τ_E и τ_F — топологии в E и F, соответственно, порожденные L_0-нормой и топологией t. Для произвольных $T, S \in L_b(E, F)$, $\alpha \in L_0(\Omega)$ положим $(T + S)(x) = Tx + Sx$, $(\alpha T)(x) = \alpha Tx$, $(T\alpha)(x) = (Tx)\alpha$, $x \in E$. Ясно, что относительно введенных алгебраических операций $L_b(E, F)$ является бимодулем над $L_0(\Omega)$. Если $F = L_0(\Omega)$, то $E^* := L_b(E, L_0(\Omega))$ — пространство всех L_0-значных непрерывных эндоморфизмов на E — также является L_0-модулем.

Эндоморфизм $T : (E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|)$называется L_0-ограниченным, если существует элемент $0 \leq c \in L_0(\Omega)$ такой, что $\|Tx\| \leq c\|x\|$ для всех $x \in E$.

Следующая теорема является "L_0-вариантом" известной связи между понятием ограниченности и непрерывности для линейных отображений нормированных пространств.

Теорема 3. *Для эндоморфизма $T : E \to F$ следующие условия эквивалентны:*

1) T — L_0-ограничен;

2) T — непрерывен;

3) T — непрерывен в нуле.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) очевидны.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть T непрерывен в нуле. Положим $A(T) := \{e \in \nabla(\Omega) : T : eE \to eF$ — $L_0(e\Omega)$-ограничен$\}$, $p = \sup A(T)$. Ясно, что из $q \leq e \in A(T)$, $q \in \nabla(\Omega)$ следует, что $q \in A(T)$. Если $e_1, e_2 \in A(T)$, то $\|Ty\| \leq c_1\|y\|$, $\|Tz\| \leq c_2\|z\|$ для любых $y \in e_1E$,

$z \in e_2F$ и некоторых $c_1 \in L_0(e_1\Omega)$, $c_2 \in L_0(e_2\Omega)$. Пусть $e_3 = e_2 - e_1 \wedge e_2$. Тогда $e_1 \vee e_2 = e_1 + e_3$, $\|Tz\| \leq c_2\|z\|$ для любых $z \in e_3E$, и потому $\|Tx\| \leq (c_1 + c_2)\|x\|$ при $x \in (e_1 \vee e_2)E$, т.е. $e_1 \vee e_2 \in A(T)$. Составляя конечные супремумы $e_{i_1} \vee \cdots \vee e_{i_n} \in A(T)$, где $e_{i_k} \in A(T)$, $k = 1, \ldots, n$, получим существование возрастающей сети $e_\alpha \uparrow p$, $e_\alpha \in A(T)$. Так как $\nabla(\Omega)$ имеет счетный тип, то найдется последовательность $e_{\alpha_k} \uparrow p$. Положим $g_k = e_{\alpha_{k+1}} - e_{\alpha_k}$. Тогда $g_k \in A(T)$, $g_k g_n = 0$, $k \neq n$, $k, n = 1, 2, \ldots$ и $\sup\limits_{k \geq 1} g_k = p$. Поскольку $\|Ty\| \leq c_k\|y\|$ для всех $y \in g_kE$ и некоторого $c_k \in L_0(e_k\Omega)$, то $\|Tx\| \leq \left(\sup\limits_{k \geq 1} c_k\right)\|x\|$ для всех $x \in pE$. Это означает, что $p \in A(T)$, т.е. $A(T) = \{e \in \nabla(\Omega) : e \leq p\}$. Если $p = \mathbf{1}$, то T — L_0-ограничен. Предположим, что $p \neq \mathbf{1}$.

Зафиксируем натуральное число n. Для каждого $0 \neq e \leq (\mathbf{1} - p)$, $e \in \nabla(\Omega)$, оператор T не является $L_0(e\Omega)$-ограниченным в eE. В частности, найдется такое $0 \neq x(e, n) \in eE$, что $\|Tx(e, n)\| \not\leq n\|x(e, n)\|$, т.е. существует такой идемпотент $0 \neq q(e, n) \leq s(\|x(e, n)\|)$, что

$$\|T(x(e, n)q(e, n))\| = \|Tx(e, n)\|q(e, n) > n\|x(e, n)\|q(e, n) =$$

$$= n\|x(e, n)q(e, n)\|.$$

Ясно, что можно считать $s(\|(x(e, n)\|) = q(e, n)$. Согласно принципу исчерпывания (теорема 1) найдется счетный набор ненулевых попарно дизъюнктных идемпотентов $\{q_k\}_{k=1}^\infty \subset \{e \in \nabla(\Omega) : e \leq \mathbf{1} - p\}$ и набор $x_k \in q_kE$, $k = 1, 2, \ldots$, такие, что $\sup\limits_{k \geq 1} q_k = \mathbf{1} - p$, $s(\|x_k\|) = q_k$ и $\|Tx_kq_k\| > n\|x_kq_k\|$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.

В силу нормальности L_0-модуля E существуют такие $y_n \in E(\mathbf{1} - p)$, что $y_nq_k = x_kq_k$, в частности, $s(\|y_n\|) = \sup\limits_{k \geq 1} q_k = \mathbf{1} - p$. Поскольку $q_kq_m = 0$ при $n \neq m$, то

$$\|Ty_n(\mathbf{1} - p)\| > n\|y_n(\mathbf{1} - p)\|.$$

Положим $z_n = \dfrac{1}{n} y_n \left(\|y_n\|_s^{-1}\right) \in (\mathbf{1} - p)E$. Имеем

$$\|z_n\| = \frac{1}{n}(\mathbf{1} - p) \xrightarrow{1.\mu} 0,$$

при этом

$$\|Tz_n\| = \frac{1}{n}\|Ty_n\| \cdot \|y_n\|_s^{-1} > \mathbf{1} - p,$$

что противоречит непрерывности T. Следовательно, $p = \mathbf{1}$, и оператор T — L_0-ограничен. $\square$

В случае $F = L_0$ полезно следующее описание L_0-значного эндоморфизма на E. Положим $V = \{x \in E : \|x\| \leq \mathbf{1}\}$.

Теорема 4. *Для каждого эндоморфизма $f : E \to L_0$ либо $f(V) = L_0$, либо существует такое ненулевое $e \in \nabla(\Omega)$, что эндоморфизм $f : eE \to L_0(e\Omega)$ ограничен и $f((\mathbf{1} - e)V) = L_0((\mathbf{1} - e)\Omega)$.*

Доказательство. Предположим, что $f(V) \neq L_0$ и положим $A = \{g \in \nabla(\Omega) : f(gV) = L_0(g\Omega)\}$, $p = \sup A$. Используя теорему 1, получим, что $p \in A$, и потому $p \neq \mathbf{1}$. Покажем, что для $e = \mathbf{1} - p$ изоморфизм $f : eE \to L_0(e\Omega)$ ограничен. Если это не так,то для любого $0 \neq q \in \nabla(e\Omega)$ существует такое $0 \neq q_1 \leq q$, $q_1 \in \nabla(q\Omega)$, что $f : q_1E \to L_0(q_1\Omega)$ - неограничен, в частности найдется такое $z_n = z(q_1, n) \in q_1E, \|z_n\| \leq q_1$, для которого $|f(z_n)| \nleq nq_1$, и потому существует такой ненулевой идемпотент $q_2 \in \nabla(q_1\Omega)$, что $|f(z_nq_2)| > nq_2$. Таким образом, в силу теоремы 1, $|f(u_n)| > ne$ для некоторого $u_n \in eE$, $\|u_n\| \leq e$.

Пусть $b \in L_0(e\Omega)$. Выберем дизъюнктные идемпотенты $\{r_n\} \subset \nabla(e\Omega)$ так, чтобы $|b|r_n \leq nr_n$, $\sup r_n = e$. Согласно выше доказанному найдутся такие $u_n \in eV$, что $|f(u_nr_n)| > nr_n$. Поскольку E — нормальный L_0-модуль, то существует такое $u \in eE$, для которого $ur_n = u_nr_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Ясно, что $\|u\| \leq e$ и $|f(u)| > |b|$. Поэтому для $v = \frac{b}{f(u)}eu$ имеем $\|v\| \leq e$ и $f(v) = be = b$. Таким образом, $f(eV) = L_0(e\Omega)$, что не так. Следовательно, эндоморфизм $f :$ y$E \to L_0(e\Omega)$ ограничен. □

Из теоремы 4 вытекает еще один полезный критерий непрерывности L_0-значного эндоморфизма на E.

Следствие 1. *Эндоморфизм $f : E \to L_0$ непрерывен тогда и только тогда, когда $H = f^{-1}(0)$ замкнуто в E.*

Доказательство. Ясно, что из непрерывности f следует замкнутость H в E. Обратно, пусть $H = \{x \in E : f(x) = 0\}$ замкнуто в E. Согласно теореме 4 найдется такой элемент e из $\nabla(\Omega)$, что $f((\mathbf{1} - e)V) = L_0((\mathbf{1} - e)\Omega)$ и $f : eE \to L_0(e\Omega)$ ограничено. Предположим, что $e \neq \mathbf{1}$, и выберем такое $x_0 \in (\mathbf{1} - e)V$, что $f(x_0) = \mathbf{1} - e$. Тогда $x_0 \notin H_1 = (\mathbf{1} - e)H$. Поскольку H_1 замкнуто в $(\mathbf{1} - e)E$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что $(x_0 + V_\varepsilon) \cap H_1 = \varnothing$, где $V_\varepsilon = \{x \in (\mathbf{1} - e)E : \|x\| \leq \varepsilon(\mathbf{1} - e)\}$.

Так как $f((\mathbf{1} - e)V) = L_0((\mathbf{1} - e)\Omega)$, то найдется такое $y_0 \in (\mathbf{1} - e)V$, что $f(y_0) = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{1} - e)$. Тогда $(-\varepsilon y_0) \in V_\varepsilon$, $x_0 - \varepsilon y_0 \in x_0 + V_\varepsilon$ и $f(x_0 - \varepsilon y_0) = (\mathbf{1} - e) - (\mathbf{1} - e) = 0$, т.е. $x_0 - \varepsilon y_0 \in H_1$, что невозможно. Это означает, что $e = \mathbf{1}$, т.е. f — L_0-ограниченнный L_0-значный эндоморфизм на E, и потому f непрерывен. □

Для каждого $f \in E^*$ положим

$$\|f\| := \inf\{c \in L_0(\Omega) : \ |f(x)| \leq c\|x\| \ \text{ для всех } \ x \in E\}.$$

Известно (см. [2], п.2.2.4), что отображение $f \to \|f\|$ является L_0-нормой в E^*, согласованной со структурой L_0-модуля E^*, и при этом выполняется следующее неравенство $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ для всех $x \in E$. L_0-норму в E^* можно вычислять также по следующей формуле (см. [1], п.3.4.9)

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \ x \in E, \|x\| \leq \mathbf{1}\}.$$

E^* является ПБК над $L_0(\Omega)$ (см. [1], п.2.2.4(3)), и поэтому E^* — банахов L_0-модуль. Банахов L_0-модуль E^* называется L_0-*сопряженным* к нормированному L_0-модулю E. Как показано в [1], $(L_p(\nabla, m))^* = L_q(\nabla, m)$, где $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

2. Банаховы $\mathbf{L_0}$-модули $\mathbf{L_\infty(\nabla, m)}$ и их предсопряженные модули

Элемент $x \in L_0(\nabla)$ называется L_0-ограниченным, если существует $0 \le c \in L_0(\Omega)$, такой, что $|x| \le c$, т.е. $|x(t)| \le c(t)$ для всех $t \in X(\nabla)$. Обозначим через $L_\infty(\nabla, m)$ множество всех L_0-ограниченных элементов из $L_0(\nabla)$. Ясно, что $L_0(\Omega) \subset L_\infty(\nabla, m)$, $C(X(\nabla)) \subset L_\infty(\nabla, m) \subset L_1(\nabla, m)$, и $L_\infty(\nabla, m)$ является нормальным бимодулем и векторной решеткой над $L_0(\Omega)$ относительно естественных алгебраических операций и частичного порядка в $L_0(\nabla)$. Для каждого $x \in L_\infty(\nabla, m)$ положим

$$\|x\|_\infty =: \inf\{\lambda \in L_0(\Omega) : |x| \le \lambda, \lambda \ge 0\}.$$

Нетрудно видеть, что $\|\cdot\|_\infty$ является монотонной L_0-нормой на $L_\infty(\nabla, m)$, т.е. $L_\infty(\nabla, m)$ является нормированной L_0-решеткой.

Следующая теорема показывает, что $L_\infty(\nabla, m)$ является L_0-сопряженным модулем для банахова L_0-модуля $L_1(\nabla, m)$.

Теорема 5. *Для каждого $h \in L_\infty(\nabla, m)$ эндоморфизм f_h, определенный равенством $f_h(x) := \int xhdm$, $x \in L_1(\nabla, m)$, является L_0-ограниченным на $L_1(\nabla, m)$, при этом $\|f_h\| = \|h\|_\infty$. Обратно, для каждого $f \in (L_1(\nabla, m))^*$ существует единственное $h \in L_\infty(\nabla, m)$ такое, что $f = f_h$.*

Доказательство. Пусть $h \in L_\infty(\nabla, m)$ и $x \in L_1(\nabla, m)$. Тогда

$$\|f\|_h = \sup\left\{\left|\int xhdm\right| : \|x\|_1 \le \mathbf{1}\right\} = \sup\left\{\int |x| \cdot |h| dm : \|x\|_1 \le \mathbf{1}\right\} \le \|h\|_\infty.$$

Это означает, что f_h является L_0-ограниченным L_0-значным эндоморфизмом на $L_1(\nabla, m)$.

Пусть $0 \ne e \le s\left(\|h\|_\infty\right), e \in \nabla(\Omega)$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Имеем $(|h| + \varepsilon)e \not\le \|h\|_\infty e$, т.е. существует $0 \ne e_1 = e_1(\varepsilon) \le e$, $e_1 \in \nabla(\Omega)$, такое, что $(|h| + \varepsilon)e_1 > \|h\|_\infty e_1$. Пусть $\widetilde{h}(t) := signh(t)$, $t \in X(\nabla)$. Ясно, что $\widetilde{h} \in L_1(\nabla, m)$ и $\left\|\widetilde{h}\right\|_1 = \int \left|\widetilde{h}\right| dm = m(s(\|h\|_\infty))$. Так как $m(s(\|h\|_\infty)) = s(\|h\|_\infty) m(\mathbf{1})$ и элемент $m(\mathbf{1})$ обратим в $L_0(\Omega)$, то

$$\|f_h\| e_1 \ge \left|f_h\left(\widetilde{h} e_1 m(\mathbf{1})^{-1}\right)\right| = \left|\int \widetilde{h} h e_1 m(\mathbf{1})^{-1} dm\right| = \int |h| e_1 m(\mathbf{1})^{-1} dm \ge$$

$$\ge \left(\|h\|_\infty - \varepsilon\right) e_1.$$

Согласно принципу исчерпывания, существует счетное семейство ненулевых дизъюнктных идемпотентов $\{p_n\}$ такое, что $\sup\limits_{n \ge 1} p_n = s\left(\|h\|_\infty\right)$ и $\|f_h\| p_n \ge \left(\|h\|_\infty - \varepsilon\right) p_n$. Следовательно,

$$\|f_h\| = \|f_h\| s\left(\|h\|_\infty\right) \ge \left(\|h\|_\infty - \varepsilon\right) s\left(\|h\|_\infty\right).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим, что $\|f_n\| \ge \|h\|_\infty$. Таким образом, $\|f_h\| = \|h\|_\infty$.

Обратно, пусть $f \in (L_1(\nabla, m))^*$. Для любой последовательности дизъюнктных идемпотентов $\{e_n\} \subset \nabla \subset L_1(\nabla, m)$ имеем, что

$$\left\| e - \sum_{n=1}^{k} e_n \right\|_1 = \int \left(\sup_{n \geq k} e_n dm \right) \xrightarrow{(0)} 0.$$

Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{k} f(e_n) = f\left(\sum\limits_{n=1}^{k} e_n\right) \xrightarrow{1.\mu} f(e)$. Это означает, что отображение $f : \nabla \to L_0(\Omega)$ счетно-аддитивно. Так как $f \in L_1(\nabla, m)^*$, то

$$|f(e)| \leq \|f\| \cdot \|e\|_1 = \|f\| s(m(e)) \cdot m(e),$$

и потому $|f(e)| \in L_0(s(m(e))\Omega)$ для всех $e \in \nabla$. По теореме Радона-Никодима (теорема **??**) существует такой элемент $h \in L_1(\nabla, m)$, что

$$f(e) = \int ehdm \quad \text{для всех} \quad e \in \nabla.$$

Для любого простого элемента $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $e_i \in \nabla$, $i = \overline{1, n}$ имеем, что

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int e_i hdm = \int xhdm.$$

Если x — произвольный положительный элемент из $L_1(\nabla, m)$, то существует последовательность простых элементов $x_n \uparrow x$. Поэтому из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. [2], п.6.1.5) имеем

$$f(x_n) = \int x_n hdm \xrightarrow{1.\mu} \int xhdm.$$

Поскольку f непрерывно, то $f(x_n) \xrightarrow{1.\mu} f(x)$. Следовательно, $f(x) = \int xhdm$.

Используя представление $x \in L_1(\nabla, m)$ в виде $x = x_+ - x_-$, где $x_+, x_- \in L_1(\nabla, m)$, $x_+ \geq 0$, $x_- \geq 0$, получим, что

$$f(x) = f_h(x) = \int xhdm \quad \text{для всех} \quad x \in L_1(\nabla, m).$$

Осталось показать, что $h \in L_\infty(\nabla, m)$.

Пусть $e_0 := \sup\{p \in \nabla : hp \in L_\infty(p\nabla, m)\}$. По приниципу исчерпывания существует семейство дизъюнктных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{p \in \nabla : p \leq e_0\}$, такое, что $\sup e_n = e_0$ и $he_n \in L_\infty(e_n\nabla, m)$, т.е. $|he_n| \leq c_n e_n$ для некоторого $c_n \in L_0(e_n\Omega)$. Положим $c = \sup\limits_{n \geq 1} c_n$. Тогда $c \in L_0(e_0\Omega)$ и $|he_0| \leq ce_0$, т.е. $he_0 \in L_\infty(\nabla, m)$.

Если $e_0 = \mathbf{1}$, то $h \in L_\infty(\nabla, m)$, и теорема доказана. Если $e_0 \neq \mathbf{1}$, то для любого $0 \neq e \leq \mathbf{1} - e_0$, $e \in \nabla(\Omega)$, имеем, что $he \notin L_\infty(e\nabla, m)$. Зафиксируем n. Так как $he \notin L_\infty(e\nabla, m)$, то $|he| \not\leq ne$, т.е. существует такое $e_1 \in \nabla(\Omega)$, что $0 \neq e_1 \leq e$ и $|he_1| > ne_1$. Согласно принципу исчерпывания существует такое счетное дизъюнктное множество $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \{e \in \nabla : e \leq \mathbf{1} - e_0\}$, что $\sup\limits_{k \geq 1} p_k = \mathbf{1} - e_0$ и $|hp_k| > np_k$.

Следовательно, $|h(\mathbf{1} - e_0)| > n(\mathbf{1} - e_0)$ для любого фиксированного n, что возможно только в случае $\mathbf{1} - e_0 = 0$, т.е. $e_0 = \mathbf{1}$.

Единственность элемента $h \in L_\infty(\nabla, m)$, для которого $f = f_h$, очевидна. $\square$

Из теоремы 5 следует, что эндоморфизм, задаваемый равенством $U(h) = f_h$, является изометрией из нормированного L_0-модуля $L_\infty(\nabla, m)$ на банахов L_0-модуль $(L_1(\nabla, m))^*$. В частности, отсюда вытекает

Следствие 2. $L_\infty(\nabla, m)$ *— банахов* L_0*-модуль.*

Заключение

Данная работа представляет собой шаг в построении теории обобщенных (модульных) алгебр фон Неймана и AW^*-алгебр, подобной классической теории. В ней определяется понятие L_0-ограниченной функции, ассоциированной с полной булевой алгеброй ∇ и строго положительной L_0-значной мерой $m : \nabla \to L_0$, рассматривается банахов L_0-бимодуль $L_\infty(\nabla, m)$ всех таких L_0-ограниченных функций и показывается, что он изометричен банахову L_0-модулю $(L_1(\nabla, m))^*$. При этом используется аналог теоремы Радона-Никодима для векторнозначных мер.

Список литературы

1. *Кусраев А.Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985. 256 с.
2. *Кусраев А.Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003. 619 с.
3. *Сарымсаков Т.А.* Топологические полуполя и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. 192 с.
4. *Закиров Б.С.* Решетки Орлича-Канторовича, ассоциированные с L_0-значной мерой // Узб. матем. журнал. — 2007. — №2.
5. *Владимиров Д.А.* Булевы алгебры. М.: Наука, 1969. 319 с.
6. *Вулих Б.З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 407 с.

Статья поступила в редакцию 15.05.2007