УДК 519.21

ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЕЖНОСТИ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ СИСТЕМЫ С ПРИОРИТЕТНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ ДВУМЯ НАЛАДЧИКАМИ

© А.И. Коваленко, Б.Д. Марянин, В.П. Смолич
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
E-mail: *svp54@mail.ru*

A hierarchical system with one control and two slave elements is considered. The elements may be break down. Two repairmen with different levels of proficiency make the renewal of the sistem under some rules. The equilibrium probabilities, safety factor, mean-time-between-failures are obtained in the article.

Введение

В последнее время для исследования надёжностных характеристик систем массового обслуживания чаще привлекаются асимптотические и статистические методы исследования, т.к. аналитическое моделирование приводит к достаточно сложным системам интегро–дифференциальных уравнений, к решению которых приходится применять либо приближённые, либо численные методы. Авторы предлагают задачу, математическое моделирование которой не является громоздким и позволяет получать аналитическое решение и вывод точных вероятностных характеристик функционирования соответствующей системы в стационарном режиме.

1. Постановка задачи

Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из одного управляющего элемента (**Y**) и двух одинаковых подчиненных элементов (**П**). При её функционировании элементы могут выходить из строя. Потоки отказов элементов предполагаются простейшими с параметрами β и α соответственно для элементов **Y** и **П**. Система считается работоспособной, если исправны управляющий и хотя бы один из подчиненных элементов. В неработоспособном состоянии система "отключена", т.е. исправные элементы не отказывают. Обслуживание системы (наладку отказавших элементов) осуществляют два наладчика. Одного из них назовём мастером, а другого стажёром. В общей постановке задачи времена обслуживания являются произвольными непрерывными случайными величинами с конечными математическими ожиданиями.

Обозначим через ω_1 время обслуживания (наладки) элемента **Y** мастером, ω_2 – время обслуживания элемента **П** мастером, ω_3 – время обслуживания элемента **П** стажёром. Через $\mu_i(x),\ i = 1, 2, 3$ обозначим интенсивности случайных величин ω_i, через $\Phi_i(x)$ и $f_i(x)$ соответствующие им функции набожности и плотности распределения.

В правилах обслуживания системы содержатся следующие условия:

1. При наличии неисправных элементов системы мастер обязательно занят наладкой одного из них.
2. Обслуживание элемента **Y** является приоритетным, т.е. если во время обслуживания мастером элемента **П** отказал элемент **Y**, то мастер останавливает наладку элемента **П** (с сохранением времени обслуживания) и немедленно приступает к наладке элемента **Y**.
3. Стажёр имеет право обслуживать только элемент **П** в то время, когда мастер занят наладкой либо элемента **П**, либо элемента **Y**.
4. Стажёр отстраняется от обслуживания (с сохранением времени наладки) в случае, если мастер закончил наладку неисправного элемента. При этом мастер немедленно приступает к обслуживанию элемента **П**, оставленного недообслуженным стажёром.

Заметим, что из определения работоспособности системы следует, что из трёх её элементов одновременно могут быть неисправными только два.

Авторы вывели систему интегро–дифференциальных уравнений с соответствующими граничными условиями, описывающую поведение системы, но в общем виде аналитическое решение получить не удалось. Целью данной работы является математическое моделирование рассмотренной системы с дальнейшим получением вероятностей состояний в стационарном режиме, а также коэффициента надёжности и средней наработки между отказами в частном случае: $\mu_3(z) = \mu_3 = \text{const}$ – время ремонта подчинённого элемента стажёром имеет показательное распределение.

2. Математическое моделирование

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$, фазовое пространство которого состоит из состояний системы $\{\overline{0,4}\}$:

- (0) – всё исправно, система функционирует

- $(1,\omega_2)$ – система функционирует, но один из подчинённых элементов не исправен, ω_2 – время, затраченное на его ремонт мастером. Обозначим соответствующую функцию распределения
$$Q_1(t,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 1, \omega_2 < x\}$$
и плотность распределения
$$q_1(t,x) := \frac{\partial Q_1(t,x)}{\partial x}.$$
При этом
$$p_1(t) := Q_1(t,\infty) = \int\limits_0^\infty q_1(t,x)\,dx = \mathbb{P}\{\xi(t) = 1\}-$$
вероятность нахождения системы в состоянии (1) в момент времени t.

- $(2, \omega_1)$ – система не функционирует, управляющий элемент неисправен и ω_1 – время ремонта его мастером.

$$Q_2(t,y) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 2, \omega_1 < y\}, \quad q_2(t,y) := \frac{\partial Q_2}{\partial y}$$

$$\int\limits_0^\infty q_2(t,y)\,dy = Q_2(t,\infty) =: p_2(t) \; -$$

вероятность нахождения системы в состоянии (2) в момент времени t.

- $(3, \omega_1, \omega_2', \omega_3)$ – система не функционирует, управляющий и один из подчинённых элементов неисправны, ω_2' – "отложенное" время ремонта подчинённого элемента мастером; мастер передал ремонт подчинённого элемента стажёру и взялся за ремонт вышедшего из строя управляющего элемента; ω_1 – время ремонта управляющего элемента мастером, ω_3 – время ремонта подчинённого элемента стажёром; при этом $\omega_1 = \omega_3$ (оба принялись за работу одновременно).

$$Q_3(t,y,x) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 3, \omega_1 < y, \omega_2' < x, \omega_3 = \omega_1\}, \quad q_3(t,y,x) := \frac{\partial^2 Q_3}{\partial y \partial x}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty q_3(t,y,x)\,dy\,dx = Q_3(t,\infty,\infty) =: p_3(t) \; -$$

вероятность нахождения системы в состоянии (3) в момент времени t.

- $(4, \omega_2, \omega_3)$ – система не функционирует, оба подчинённых элемента неисправны, ω_3 – время ремонта одного из них стажёром и ω_2 – время ремонта другого элемента мастером; при этом $\omega_3 < \omega_2$.

$$Q_4(t,x,z) := \mathbb{P}\{\xi(t) = 4, \omega_2 < x, \omega_3 < z\}, \quad q_4(t,x,z) := \frac{\partial^2 Q_4}{\partial x \partial z}$$

$$\int\limits_0^\infty dz \int\limits_z^\infty q_4(t,x,z)\,dz = Q_4(t,\infty,\infty) =: p_4(t) \; -$$

вероятность нахождения системы в состоянии (4) в момент времени t.

Система интегро–дифференциальных уравнений и граничных условий имеет вид:

$$p_0'(t) + (\beta + 2\alpha)p_0(t) = \int\limits_0^\infty q_2(t,y)\mu_1(y)\,dy + \int\limits_0^\infty q_1(t,x)\mu_2(x)\,dx,$$

$$\frac{\partial q_1(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial q_1(t,x)}{\partial x} + (\alpha + \beta + \mu_2(x))q_1(t,x) = \int\limits_0^\infty q_3(t,y,x)\mu_1(y)\,dy + \mu_3 \int\limits_0^x q_4(t,x,z)\,dz,$$

$$\frac{\partial q_2(t,y)}{\partial t} + \frac{\partial q_2(t,y)}{\partial y} + \mu_1(y)q_2(t,y) = \mu_3 \int\limits_0^\infty q_3(t,y,x)\,dx,$$

$$\frac{\partial q_3(t,y,x)}{\partial t}+\frac{\partial q_3(t,y,x)}{\partial y}+(\mu_1(y)+\mu_3)q_3(t,y,x)=0,$$

$$\frac{\partial q_4(t,x,z)}{\partial t}+\frac{\partial q_4(t,x,z)}{\partial x}+\frac{\partial q_4(t,x,z)}{\partial z}+(\mu_2(x)+\mu_3)q_4(t,x,z)=0,$$

$$q_1(t,0)=2\alpha p_0(t)+\int\limits_0^\infty dz\int\limits_z^\infty q_4(t,x,z)\mu_2(x)\,dx,$$

$$q_2(t,0)=\beta p_0(t),\quad q_3(t,0,x)=\beta q_1(t,x),\quad q_4(t,x,0)=\alpha q_1(t,x).$$

Конечное число состояний и неприводимость случайного процесса $\xi(t)$ обеспечивает его эргодичность. Переходя к пределу при $t\to\infty$ и вводя обозначения:

$$p_k:=\lim_{t\to\infty}p_k(t),\ k=\overline{0,4}\quad g_k(...)=\lim_{t\to\infty}q_k(t,...),\ k=\overline{1,4}$$

получим систему интегро–дифференциальных уравнений для стационарного режима.

$$(\beta+2\alpha)p_0=\int\limits_0^\infty g_2(y)\mu_1(y)\,dy+\int\limits_0^\infty g_1(x)\mu_2(x)\,dx,\tag{1}$$

$$g_1'(x)+(\alpha+\beta+\mu_2(x))g_1(x)=\int\limits_0^\infty g_3(y,x)\mu_1(y)\,dy+\mu_3\int\limits_0^x g_4(x,z)\,dz,\tag{2}$$

$$g_2'(y)+\mu_1(y)g_2(y)=\mu_3\int\limits_0^\infty g_3(y,x)\,dx,\tag{3}$$

$$\frac{\partial g_3(y,x)}{\partial y}+(\mu_1(y)+\mu_3)g_3(y,x)=0,\tag{4}$$

$$\frac{\partial g_4(x,z)}{\partial x}+\frac{\partial g_4(x,z)}{\partial z}+(\mu_2(x)+\mu_3)g_4(x,z)=0,\ (z\leqslant x)\tag{5}$$

$$g_1(0)=2\alpha p_0+\int\limits_0^\infty dx\int\limits_0^x g_4(x,z)\mu_2(x)\,dz,\tag{6}$$

$$g_2(0)=\beta p_0,\quad g_3(0,x)=\beta g_1(x),\quad g_4(x,0)=\alpha g_1(x).\tag{7}$$

Заметим, что полученная таким образом система будет избыточной, т.е. одно из уравнений можно будет использовать для контроля (проверки), но для получения стационарных вероятностей $p_i,\ i=\overline{0,4}$ к системе следует добавить нормировочное равенство $\sum\limits_0^4 p_k=1$.

3. Решение системы (1)–(7)

В области $0 \leqslant z \leqslant x$ из (5) и (7) получаем

$$g_4(x,z) = \alpha g_1(x-z)\exp(-\mu_3 z)\exp\left(-\int\limits_{x-z}^{x}\mu_2(t)\,dt\right) \tag{8}$$

Из (4) и (7) имеем:

$$g_3(y,x) = \beta g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\exp\left(-\int\limits_{0}^{y}\mu_1(t)\,dt\right) = \beta g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y) \tag{9}$$

Для уравнения (3) преобразуем интеграл:

$$\mu_3\int\limits_0^\infty g_3(y,x)\,dx = \mu_3\int\limits_0^\infty \beta g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y),dx = \beta\mu_3 p_1\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y).$$

Уравнение (3) принимает вид:

$$g_2'(y) + \mu_1(y)g_2(y) = \beta\mu_3 p_1\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y).$$

Учитывая начальное условие (7), получаем:

$$g_2(y) = \exp\left(-\int\limits_0^y \mu_1(t)\,dt\right)\left(\beta p_0 + \int\limits_0^y \beta\mu_3 p_1\exp(-\mu_3 t)\Phi_1(t)\exp\left(\int\limits_0^t \mu_1(v)\,dv\right)dt\right) =$$
$$= \Phi_1(y)(\beta p_0 + \beta\mu_3 p_1\frac{1}{\mu_3}(1-\exp(-\mu_3 y))).$$

Окончательно имеем:

$$g_2(y) = \Phi_1(y)(\beta(p_0+p_1) - \beta p_1\exp(-\mu_3 y)) \tag{10}$$

Для уравнения (2) преобразуем интегралы (с учетом (9) и (8)):

$$\int\limits_0^\infty g_3(y,x)\mu_1(y)\,dy = \beta\int\limits_0^\infty g_1(x)\exp(-\mu_3 y)\Phi_1(y)\mu_1(y)\,dy =$$
$$= \beta g_1(x)f_1^*(\mu_3) = \beta g_1(x)(1-\mu_3\Phi_1^*(\mu_3)).$$

Здесь f_1^* и Φ_1^* – преобразования Лапласа функций f_1 и Φ_1 соответственно.

$$\mu_3\int\limits_0^x g_4(x,z)\,dz = \mu_3\int\limits_0^x \alpha g_1(x-z)\exp(-\mu_3 z)\exp\left(-\int\limits_{x-z}^x \mu_2(t)\,dt\right)dz =$$
$$= \mu_3\alpha\int\limits_0^x g_1(y)\exp(-\mu_3(x-y))\exp\left(-\int\limits_y^x \mu_2(t)\,dt\right)dy =$$

$$= \mu_3 \alpha \exp\left(-\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) \int\limits_0^x g_1(y) \exp\left(\int\limits_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right)\,dy$$

Тогда уравнение (2) принимает вид:

$$g_1'(x) + (\alpha + \beta + \mu_2(x))g_1(x) = \beta(1 - \mu_3 \Phi_1^*(\mu_3))g_1(x) +$$
$$+\mu_3 \alpha \exp\left(-\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) \int\limits_0^x g_1(y) \exp\left(\int\limits_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right)\,dy$$

или

$$g_1'(x) \exp\left(\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) + (\alpha + \beta\mu_3\Phi_1^*(\mu_3)) +$$
$$+\mu_2(x))g_1(x) \exp\left(\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) - \mu_3 \alpha \int\limits_0^x g_1(y) \exp\left(\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dy = 0$$

В полученном уравнении введём замену:

$$u(x) = \int\limits_0^x g_1(y) \exp\left(\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dy.$$

После этого получим обыкновенное линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$u''(x) + (\alpha - \mu_3 + \beta\mu_3\Phi_1^*)u'(x) - \alpha\mu_3 u(x) = 0$$

с начальными условиями $u(0) = 0,\ u'(0) = g_1(0)$.

Обозначим корни соответствующего характеристического уравнения через r_1 и r_2. Тогда

$$u(x) = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(\exp(r_1 x) - \exp(r_2 x)), \quad u'(x) = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1 \exp(r_1 x) - r_2 \exp(r_2 x)),$$

и для $g_1(x)$ получаем:

$$g_1(x) = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1 \exp(r_1 x) - r_2 \exp(r_2 x)) \exp\left(-\int\limits_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) =$$
$$= \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1 \exp(-(\mu_3 - r_1)x) - r_2 \exp(-(\mu_3 - r_2)x))\Phi_2(x) \qquad (11)$$

Преобразуем интеграл, входящий в (6) с использованием (8):

$$\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^x g_4(x,z)\mu_2(x)\,dz = \alpha \int\limits_0^\infty \mu_2(x)\,dx \int\limits_0^x g_1(x-z)\exp(-\mu_3 z)\exp\left(-\int\limits_{x-z}^x \mu_2(t)\,dt\right) dz =$$

$$= \alpha \int_0^\infty \exp(-\mu_3 x) \exp\left(-\int_0^x \mu_2(t)\,dt\right) \mu_2(x)\,dx \int_0^x g_1(y) \exp\left(\int_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))dt\right) dy =$$

$$= \alpha \int_0^\infty \exp(-\mu_3 x) f_2(x) u(x)\,dx =$$

$$= \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2} \int_0^\infty (\exp(-(\mu_3 - r_1)x) - \exp(-(\mu_3 - r_2)x)) f_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha g_1(0)}{r_1 - r_2} (f_2^*(\mu_3 - r_1) - f_2^*(\mu_3 - r_2)).$$

Тогда из (6) имеем:

$$g_1(0) = \frac{2\alpha p_0 (r_1 - r_2)}{r_1 - r_2 - \alpha(f_2^*(\mu_3 - r_1) - f_2^*(\mu_3 - r_2))} \tag{12}$$

Далее из (8) находим:

$$p_4 = \int_0^\infty dx \int_0^x g_4(x,z)\,dz = \alpha \int_0^\infty dx \int_0^x g_1(x-z) \exp(-\mu_3 z) \exp\left(-\int_{x-z}^x \mu_2(t)\,dt\right) dz =$$

$$= \alpha \int_0^\infty dx \int_0^x g_1(y) \exp(-\mu_3(x-y)) \exp\left(-\int_y^x \mu_2(t)\,dt\right) dy =$$

$$\alpha \int_0^\infty \exp\left(-\int_0^x (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dx \int_0^x g_1(y) \exp\left(\int_0^y (\mu_3 + \mu_2(t))\,dt\right) dy =$$

$$= \alpha \int_0^\infty \exp(-\mu_3 x) \Phi_2(x) u(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha g_1(0)}{r_1 - r_2} \int_0^\infty (\exp(-(\mu_3 - r_1)x) - \exp(-(\mu_3 - r_2)x)) \Phi_2(x)\,dx =$$

$$= \frac{\alpha g_1(0)}{r_1 - r_2} (\Phi_2^*(\mu_3 - r_1) - \Phi_2^*(\mu_3 - r_2)). \tag{13}$$

Из (9) находим:

$$p_3 = \int_0^\infty dx \int_0^\infty g_3(y,x)\,dy = \beta \int_0^\infty g_1(x)\,dx \int_0^\infty \exp(-\mu_3 y) \Phi_1(y)\,dy = \beta p_1 \Phi_1^*(\mu_3), \tag{14}$$

Из (10) находим:

$$p_2 = \int\limits_0^\infty g_2(y)\,dy = \int\limits_0^\infty (\beta(p_0+p_1)\Phi_1(y) - \beta p_1 \exp(\mu_3 y)\Phi_1(y))dy = \beta(p_0+p_1)\frac{1}{\mu_1} - \beta p_1 \Phi_1^*(\mu_3), \tag{15}$$

где $\dfrac{1}{\mu_1} := M\omega_1 = \int\limits_0^\infty \Phi_1(y)\,dy$

Наконец, из (11) имеем:

$$p_1 = \int\limits_0^\infty g_1(x)\,dx = \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}\int\limits_0^\infty (r_1 \exp(-(\mu_3 - r_1)x)\Phi_2(x) - \exp(-(\mu_3 - r_2)x)\Phi_2(x))\,dx =$$
$$= \frac{g_1(0)}{r_1 - r_2}(r_1\Phi_2^*(\mu_3 - r_1) - r_2\Phi_2^*(\mu_3 - r_2)). \tag{16}$$

Если теперь к соотношениям (12)–(16) добавить нормировочное соотношение $\sum\limits_0^4 p_k = 1$, то получится линейная алгебраическая система уравнений, из которой можно получить явные выражения для вероятностей $p_k,\ k = \overline{0,4}$ состояний системы в стационарном режиме.

Коэффициент готовности K выражается через стационарные вероятности системы: $K = p_0 + p_1$.

Для определения средней наработки T между отказами вычислим интенсивность Λ потока отказов системы:

$$\Lambda = \sum_{j=2}^{4}\sum_{i=0}^{1} p_i \lambda_{ij},$$

где λ_{ij} – интенсивности перехода из состояния i в состояние j определяются из соотношений:

$$\mathbb{P}\{\xi(t+h) = j/\xi(t) = i\} = \lambda_{ij}h + o(h).$$

В рассматриваемом случае

$$\lambda_{02} = \beta,\ \lambda_{03} = 0,\ \lambda_{04} = 0,\ \lambda_{12} = 0,\ \lambda_{13} = \beta,\ \lambda_{14} = \alpha$$

Тогда $\Lambda = p_0\beta + p_1(\alpha + \beta)$. Величина T получается из соотношения

$$T = \frac{K}{\Lambda} = \frac{p_0 + p_1}{p_0\beta + p_1(\alpha + \beta)}.$$

Выводы

В статье найдены вероятности стационарных состояний исследуемой системы, коэффициент готовности, средняя наработка между отказами в случае, когда время ремонта подчинённого элемента стажёром имеет показательное распределение.

Представляет интерес дальнейшее исследование данной задачи для произвольного распределения времени ремонта.

Список литературы

1. *Анисимов В.В., Закусило О.К., Донченко В.С.* Элементы теории массового обслуживания и асимптотического анализа систем. – Киев: «Выща школа», 1987. – 246 с.
2. *Беляев Ю.К.* Линейчатые марковские процессы и их приложения к задачам теории надёжности // Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. – Вильнюс. 1962 – С. 309-323.
3. *Коваленко А.И., Стрыгина Н.З.* Вычисление стационарных характеристик надёжности четырёхэлементной иерархической системы с восстановлением // Автоматика и телемеханика – М: Российская АН, 1992. – №1. – С.156-164.
4. *Коваленко А.И., Смолич В.П.* Анализ надёжности двухэлементной системы, обслуживаемой двумя наладчиками // Динамические системы. – 2000. – Вып.16. – С.137-142.

Статья поступила в редакцию 14.05.2007