УДК 519.21:62

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ З ДИФУЗІЙНИМ ЗБУРЕННЯМ В МАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

© Чабанюк Я.М.

Національний університет «Львівська політехніка»
Інститут прикладної математики і фундаментальних наук
вул. С.Бандери, 12, Львів, 79013, Україна
e-mail: *coffice@polynet.lviv.ua*

The sufficient conditions of the asymptotic normality of the jump stochastic approximation procedure are obtained in Markov media in the diffusion approximation scheme. The solution of the singular perturbation problem is used for the generator three-components of Markov process.

Вступ

Оцінка швидкості збіжності процедури стохастичної апроксимації (ПСА) [1] до кореня рівняння регресії обумовлюється асимптотичною нормальністю ПСА [1, 2]. Основним методом дослідження асимптотичної нормальності дискретних ПСА в класичних схемах є принцип інваріантності для сум [1, 2].

В нашій роботі [3] розглянуто асимптотичну нормальність неперервної ПСА з марковським збуренням функції регресії в схемі серій з малим параметром $\varepsilon, \varepsilon > 0$ методом розв'язку проблеми сингулярного збурення (РПСЗ) для генератора ергодичного двокомпонентного марковського процесу [4].

В даній роботі розглядається асимптотична нормальність для стрибкової ПСА [5] в марковському середовищі, що описується стрибковими еволюціями [6], з асимптотично дифузійним збуренням в умовах збіжності такої процедури, методом РПСЗ.

1. Постановка задачі та позначення

Стрибкова процедура стохастичної апроксимації з сингулярним збуренням функції регресії задається рівнянням (покладемо $\sum\limits_{k=0}^{-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon) = 0$)

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), t \geq 0, \tag{1}$$

де послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значеннями функції $a(t), t > 0$, такої, що задовольняє звичайні умови збіжності ПСА [7]

$$a(t) > 0, \int\limits_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty, \int\limits_{t_0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty, t_0 > 0,$$

через співвідношення: $a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0$, де $\tau_n, n \geq 0$, моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного марковського процесу (МП) $x(t), t \geq 0$, в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ [8].

Надалі покладемо $a(t) = a/t$. Лічильний процес числа стрибків МП $x(t), t > 0$, на відрізку часу $[0;t]$ визначимо так : $\nu(t) := max\{n : \tau_n \le t\}, t \ge 0$.

Функція $C^\varepsilon(u,x) := C(u,x) + \varepsilon^{-1}C_0(x), u \in R, x \in X$, задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)dt = C^\varepsilon(u_x(t),x), x \in X.$$

МП $x(t), t \ge 0$, задається породжуючим оператором Q, що визначається співвідношенням

$$Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y) - \varphi(x)],$$

де $q(x)$ — інтенсивність, така, що $\|q(x)\| := \sup_{x \in X} q(x) < \infty$, а стохастичне ядро $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$, задається ймовірностями переходу вкладеного ланцюга Маркова $x_n := x(\tau_n), n \ge 0$, тобто $P(x,B) = P\{x_{n+1} \in B \mid x_n = x\}$, і визначає оператор

$$\boldsymbol{P}\varphi(x) = \int_X P(x,dy)\varphi(y).$$

Для оператора Q розглянемо потенціал R_0 такий, що $R_0Q = QR_0 = \Pi - I$, де Π — проектор на нуль-простір оператора Q[4].

Час θ_x перебування в станах $x \in X$ задається формулою $\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n, n \ge 0, \tau_0 = 0$, з функцією розподілу

$$G_x(t) := P\{\theta_{n+1} < t | x_n = x\} = 1 - e^{-tq(x)}, t \ge 0.$$

Таким чином марковський процес відновлення $x_n, \theta_n, n \ge 0$, [8], задається напівмарковським ядром

$$P\{x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} < t | x_n = x\} = P(x,B)(1 - e^{-tq(x)}).$$

Стаціонарний розподіл $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$,вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \ge 0$, визначається рівнянням

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x,B), B \in \boldsymbol{X}, \rho(X) = 1,$$

а стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, МП $x(t), t \ge 0$, задається співвідношенням

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Збіжність ПСА (1) розуміємо в сенсі збіжності з ймовірністю одиниця до точки рівноваги u_0 усередненої системи

$$du(t)/dt = C(u(t)),$$

де функція регресії $C(u)$ є усередненням функції $C(u,x)$ по стаціонарному розподілу вкладеного ланцюга Маркова:

$$C(u) = q \int\limits_X \rho(dx) C(u, x).$$

Для збурення $C_0(x)$ процедури (1) передбачається виконання умови балансу:

УБ1: $\int\limits_X \rho(dx) C_0(x) = 0,$

або $\widetilde{\Pi} C_0(x) = 0$, де $\widetilde{\Pi}$ — проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова $x_n, n \geq 0$, тобто $\widetilde{\Pi}\varphi(x) = \int\limits_X \rho(dx)\varphi(x)$.

Без зменшення загальності будемо вважати $u_0 = 0$, тобто виконання умови

$$C(0) = 0. \tag{2}$$

Додаткові умови на функцію регресії $C(u, x)$ такі, як і в роботі [3], а саме $C(u, \cdot) \in C^3(R)$, тобто має місце розклад за форомулою Тейлора

$$C(u, x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u, x), \tag{3}$$

де

$$C^0(x) = C(0, x), \tag{4}$$

$$C^1(x) = C'_u(0, x), C_2(u, x) = \frac{1}{2} C''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1.$$

Виходячи з (2), (3) та (4) маємо додаткову умову балансу

УБ2: $\widetilde{\Pi} C^0(x) = 0.$

Зауваження 1. Для дифузійного збурення

$$C_0^\varepsilon(t) := \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C_0(x_k^\varepsilon), \tag{5}$$

ПСА (1) має місце слабка збіжність [9]

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \frac{a\rho q}{t} w(t), \varepsilon \to 0, \tag{6}$$

де $w(t)$ — стандартний вінеріський процес, а

$$\rho^2 = 2 \int\limits_X \pi(dx) \widetilde{C}_0(x) R_0 \widetilde{C}_0(x) - q \int\limits_X \rho(dx) C_0^2(x),$$

$$\widetilde{C}_0(x) = q(x) C_0(x).$$

З іншої сторони, використовуючи (5), для ПСА (1) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \widetilde{v}^\varepsilon(t) + \varepsilon C_0^\varepsilon(t), \tag{7}$$

де

$$\widetilde{v}^{\varepsilon}(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^{\varepsilon} C(u_k^{\varepsilon}, x_k^{\varepsilon}).$$

Флуктуації ПСА (1) розглядаються в такому вигляді:

$$v^{\varepsilon}(t) = \varepsilon \widetilde{v}^{\varepsilon}(t)/\sqrt{t}, \tag{8}$$

або в зворотньому зв'язку

$$\widetilde{v}^{\varepsilon}(t) = \sqrt{t} v^{\varepsilon}(t)/\varepsilon. \tag{9}$$

З (7) та (9) маємо

$$u^{\varepsilon}(t) = \varepsilon[v^{\varepsilon}(t) + \sqrt{t} C_0^{\varepsilon}(t)]/\sqrt{t},$$

звідки отримуємо (8) в вигляді

$$v^{\varepsilon}(t) = [u^{\varepsilon}(t)/\varepsilon - C_0^{\varepsilon}(t)]\sqrt{t}.$$

Надалі позначимо через

$$c_1 := \int_X \rho(dx) C^1(x), \tag{10}$$

а через

$$b := ac_1 + \frac{1}{2}. \tag{11}$$

2. Асимптотична нормальність

Теорема 1. В умовах збіжності ПСА (1) та при додаткових умовах

Д1: $\rho^2 > 0$,

Д2: $c_1 \leq -1/2a$,

має місце слабка подвійна збіжність

$$v^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^{\varepsilon}(t) \Rightarrow \sigma(t) w(t), \varepsilon \to 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = a^2 \rho^2 q^2 / t^2$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T < \infty$.

Двокомпонентний граничний процес $\zeta(t), \sigma(t)w(t), t > 0$, є дифузійним процесом, що визначається генератором

$$\boldsymbol{L}_t \varphi(v, w) = q(bv + \sqrt{t} wac_1) + \frac{a^2 \rho^2}{2t} \varphi_w''(v, w). \tag{12}$$

Висновок 1. Граничний процес $\zeta(t), t > 0$, задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$d\zeta(t) = b(\zeta(t) + c_1 \sqrt{t} w(t)) dt.$$

Зауваження 2. Умова Д2 забезпечує від'ємність параметра b, що зумовлює стійкість граничного процесу $\zeta(t), t > 0$.

3. Властивості генератора марковського процесу

$$v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon := x(t/\varepsilon^4), t > 0. \tag{13}$$

Ключовим кроком в асимптотичному аналізі флуктуацій , є асимптотичне представлення генератора МП (13).

Лема 1. Генератор МП (13) на тест-функціях $\varphi(v, \cdot, \cdot) \in C^2(R)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4} q(x) \boldsymbol{P}[\varphi(v + \varepsilon^3 \frac{a}{\sqrt{t}} C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}}, x), w+$$
$$+\varepsilon^2 \frac{a}{t} C_0(x), y) - \varphi(v,w,x)] + \frac{v}{2t}\varphi_v'(v,w,x), \tag{14}$$

де

$$z = v + \sqrt{t} w. \tag{15}$$

Доведення. Спочатку розглянемо прирости флуктуацій $\Delta v^\varepsilon(t)$ в моменти стрибків при $\tau_n^\varepsilon = t, x_n = x$, з приростами часу Δ, використовуючи (8):

$$\Delta v^\varepsilon(t) := v^\varepsilon(t+\Delta) - v^\varepsilon(t) = \sqrt{t+\Delta}\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta)/\varepsilon - \sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon =$$
$$= \sqrt{t}(1 + \frac{\Delta}{2t}\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta)/\varepsilon - \sqrt{t}\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + o(\Delta) =$$
$$= \sqrt{t}\Delta v^\varepsilon(t) + o(\Delta).$$

Остаточно, з того що $\widetilde{v}^\varepsilon(t+\Delta) = \widetilde{v}^\varepsilon(t) + o(\Delta)$, маємо

$$\Delta v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + \frac{\Delta}{2t}\widetilde{v}^\varepsilon(t) + o(\Delta). \tag{16}$$

Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta), C_0^\varepsilon(t+\Delta), x_{t+\Delta}^\varepsilon) | v^\varepsilon(t) = v, C_0^\varepsilon(t) = w, x_t^\varepsilon = x] =$$
$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)].$$

Використовуючи (9) і (16) з останнього маємо

$$E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$
$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon + \Delta\frac{v}{2t} + o(\Delta), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] =$$
$$= E_{v,w,x}[\varphi(v + \sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)/\varepsilon, w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)] +$$
$$+\Delta\frac{v}{2t}\varphi_v'(v, w, x_{t+\Delta}^\varepsilon)] + o(\Delta), \tag{17}$$

оскільки $\Delta\widetilde{v}^\varepsilon(t)$ і $\Delta C_0^\varepsilon(t)$ не залежать від $x_{t+\Delta}^\varepsilon$.

Враховуючи, що ліву частину (17) можна подати в формі

$$E_{v,w,x}[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t), w + \Delta C_0^\varepsilon(t), x_{t+\Delta}^\varepsilon)][I(\theta_x > \varepsilon^{-4}\Delta) + I(\theta_x \le \varepsilon^{-4}\Delta)]$$

і те, що

$$P\{\theta_x > \varepsilon^{-4}\Delta\} = e^{-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)} = 1 - \varepsilon^{-4}\Delta q(x) + o(\Delta),$$
$$P\{\theta_x \le \varepsilon^{-4}\Delta\} = 1 - e^{-\varepsilon^{-4}\Delta q(x)} = \varepsilon^{-4}\Delta q(x) + o(\Delta),$$

отримаємо

$$E_{v,w,x}[\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^{\varepsilon}(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})+\Delta\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x)]=$$
$$=\varphi(v,w,x)(1-\varepsilon^{-4}\Delta q(x))+\Delta\varepsilon^{-4}q(x)\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x)+$$
$$+E_{v,w,x}\varphi(v+\sqrt{t}\Delta\widetilde{v}^{\varepsilon}(t)/\varepsilon, w+\Delta C_0^{\varepsilon}(t), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})\Delta\varepsilon^{-4}q(x)+o(\Delta). \tag{18}$$

З (6) та (9) для приростів $\Delta\widetilde{v}^{\varepsilon}(t)$ і $\Delta C_0^{\varepsilon}(t)$ маємо представлення

$$\Delta\widetilde{v}^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^4\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}},x), \tag{19}$$

$$\Delta C_0^{\varepsilon}(t)=\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x), \tag{20}$$

де z обчислюється в (15).

Враховуючи (19) і (20) в (18) маємо представлення умовного математичного сподівання

$$E_{v,w,x}[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta), C_0^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v,w,x)]=$$
$$+\Delta\varepsilon^{-4}q(x)\boldsymbol{P}[\varphi(v+\varepsilon^4\frac{a}{\sqrt{t}}C(\frac{\varepsilon z}{\sqrt{t}},x), w+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x),y)+\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x)]+o(\Delta).$$

Остаточно, за означенням генератора МП (13)

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}E_{v,w,x}[\varphi(v^{\varepsilon}(t+\Delta), C_0^{\varepsilon}(t+\Delta), x_{t+\Delta}^{\varepsilon})-\varphi(v,w,x)]=\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)$$

отримуємо (14).

Наслідок. *Генератор МП (13) на тест-фенкціях $\varphi(v,\cdot,\cdot)\in C^2(R)$ має представлення*

$$\mathbf{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}Q\varphi(\cdot,\cdot,x)+\varepsilon^{-4}q(x)\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\mathbf{P}\varphi(v,w,x), \tag{21}$$

де

$$\mathbf{L}_0^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=\varphi(v+\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z,x), w+\varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x),y)-$$
$$-\varphi(v,w,y)+\varepsilon^4\frac{v}{2t}\varphi'_v(v,w,x). \tag{22}$$

Доведення. Представлення (21) отримуємо використовуючи доданок $\pm\varphi(v,w,y)$ в квадратних дужках (14).

Лема 2. Генератор МП (13) на тест-функціях $\varphi(v,w,\cdot)\in C^{2,3}(R\times R)$ має асимптотичне представлення

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,w,x)=[\varepsilon^{-4}Q+\varepsilon^{-2}\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}q(x)Q_2(x)\boldsymbol{P}+$$
$$+\frac{1}{t}q(x)Q_3(x)\boldsymbol{P}+\theta_L^{\varepsilon}Q_0]\varphi(v,w,x), \tag{23}$$

де

$$Q_1(x)\varphi(w)=aC_0(x)\varphi'(w),$$
$$Q_2(x)\varphi(v)=aC^0(x)\varphi'(v),$$

$$Q_3(x)\varphi(v,w) = C(v,\sqrt{t}w,x)\varphi'_v(v,w) + \frac{a^2}{2t}C_0^2(x)\varphi''_w(v,w),$$

$$C(v,\sqrt{t}w,x) = a(v+\sqrt{t}w)C^1(x) + \frac{v}{2},$$

Q_0 обчислюється за формулою

$$Q_0\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\varphi(y), \tag{24}$$

а залишковий член $\theta_L^\varepsilon Q_0$ такий, що

$$\|\theta_L^\varepsilon Q_0\varphi(v,w,x)\| \to 0, \varepsilon \to 0, t \to \infty.$$

Доведення. Виходячи з гладкості функцій $\varphi(v,w) = \varphi(v,w,\cdot)$ (третя змінна $x \in X$ не приймає участі в подальших перетвореннях) маємо

$$\varphi(v + \varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z/\sqrt{t},x), w + \varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x)) = \varphi(v,w)+$$

$$+\varepsilon^3\frac{a}{\sqrt{t}}C(\varepsilon z/\sqrt{t},x)\varphi'_v(v,w) + \varepsilon^2\frac{a}{t}C_0(x)\varphi'_w(v,w)+$$

$$+\varepsilon^4\frac{a^2}{2t^2}C_0^2(x)\varphi''_w(v,w) + o(\varepsilon^4). \tag{25}$$

Аналогічно, згідно (3), для $C(\varepsilon z/\sqrt{t})$ маємо

$$C(\varepsilon z/\sqrt{t}) = C^0(x) + \varepsilon\frac{z}{\sqrt{t}}C^1(x) + o(\varepsilon). \tag{26}$$

Враховуючи (26) і (25) в (22), з (21) маємо (23).

4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення

Заключним етапом побудови граничного оператора є використання РПСЗ ([9], Розділ 5.1). Для цього розглянемо розклад оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ з (23) на збурених функціях виду

$$\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \varphi(v,w) + \varepsilon^2\frac{1}{t}\varphi_2(v,w,x) + \varepsilon^3\frac{1}{\sqrt{t}}\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^4\varphi_4(v,w,x).$$

Лема 3. Розв'язок проблеми сингулярного збурення з $\varphi(v,w) \in C^{3,4}(R\times R)$ для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має наступний вигляд

$$\boldsymbol{L}_t^\varepsilon\varphi^\varepsilon(v,w,x) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) + \theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w), \tag{27}$$

де $\boldsymbol{L}_t$ має вигляд (12), а залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w)$ такий, що

$$|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w)| \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Доведення. Для отримання (27) достатньо розглянути РПСЗ на зрізаному операторі $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}$ з (23), а саме

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0} = \varepsilon^{-4}Q + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P} + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}q(x)Q_2(x)\boldsymbol{P} + \frac{1}{t}q(x)Q_3(x)\boldsymbol{P}.$$

Значення оператора $\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(v,w,x)$ має представлення

$$\boldsymbol{L}^{\varepsilon}_{t0}\varphi^{\varepsilon}(v,w,x) = \varepsilon^{-4}Q\varphi(v,w) + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t}[Q\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_1(x)\varphi(v,w)]+$$

$$+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}[Q\varphi_3(v,w,x) + q(x)Q_2(x)\varphi(v,w)]+$$

$$+\frac{1}{t}[Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w)]+$$

$$+\theta^{\varepsilon}_{L_0}(x)\varphi(v,w) = \frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v,w) + \theta^{\varepsilon}_{L_0}(x)\varphi(v,w), \tag{28}$$

де залишковий член $\theta^{\varepsilon}_{L_0}(x)\varphi(v,w)$ такий, що $|\theta^{\varepsilon}_{L_0}(x)\varphi(v,w)| \to 0$, $\varepsilon \to 0$.

З умови розв'язності проблеми сингулярного збурення (28)

$$Q\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) = 0$$

і умови балансу УБ1 маємо представлення

$$\varphi_2(v,w,x) = R_0q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) = aR_0\widetilde{C}_0(x)\varphi'_w(v,w). \tag{29}$$

Аналогічно з рівності $Q\varphi_3(v,w,x) + q(x)Q_2(x)\varphi(v,w) = 0$ і УБ2 маємо

$$\varphi_3(v,w,x) = aR_0\widetilde{C}^0(x)\varphi'_v(v,w)$$

де $\widetilde{C}^0(x) := q(x)C^0(x)$.

Остаточно з умови розв'язності (28) маємо

$$Q\varphi_4(v,w,x) + \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}\varphi_2(v,w,x) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w) = \boldsymbol{L}_t\varphi(v,w),$$

де оператор $\boldsymbol{L}_t$ такий, що

$$\boldsymbol{L}_t\Pi\varphi(v,w) = \Pi\boldsymbol{L}_t(x)\Pi\varphi(v,w), \tag{30}$$

а

$$\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(v,w) = \frac{1}{t}q(x)Q_1(x)\boldsymbol{P}R_0q(x)Q_1(x)\varphi(v,w) + q(x)Q_3(x)\varphi(v,w). \tag{31}$$

Обчислимо праву частину в (30). Враховуючи (31) і (29) для (30) маємо представлення

$$\boldsymbol{L}_t\Pi\varphi(v,w) = \frac{a^2}{t}\Pi q(x)C_0(x)\boldsymbol{P}R_0q(x)C_0(x)\Pi\varphi''_w(v,w)+$$
$$+\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v,w). \tag{32}$$

Для першого доданку в (32) отримуємо

$$\Pi q(x)C_0(x)\boldsymbol{P}R_0q(x)C_0(x)\Pi \;= \int_X \pi(dx)\widetilde{C}_0(x)R_0\widetilde{C}_0(x) - q\int_X \rho(dx)C_0^2(x). \tag{33}$$

А для другого маємо

$$\Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v,w) = q[bv + \sqrt{t}wc_1]\varphi'_v(v,w) +$$

$$+\frac{a^2}{2t}q\int_X \rho(dx)C_0^2(x)\varphi''_w(v,w),$$

в позначеннях (10) та (11). Остання формула разом з (33) дає для оператора $\boldsymbol{L}_t$ зображення (12).

Зауваження 3. Малий доданок в (23) не впливає на РПСЗ для оператора $\boldsymbol{L}_{t0}$ в формі (27) (див. [9], висновок 5.1, с. 141), тобто головна частина РСПЗ для оператора $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon$ має вигляд правої частини (27).

Доведення теореми. Завершення доведення Теореми реалізується за схемою, що приведена при доведенні т. 6.6. §6, роботи [9].

Висновок 2. Асимптотичну нормальність ПСА в $R^d, d > 1$, можна отримати аналогічним чином з додатковими технічними ускладненнями.

Заключення

Встановлено достатні умови асимптотичної нормальності стрибкової процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі в схемі дифузійного наближення. Використано асимптотичні властивості генератора трьохкомпонентного марковського процесу та розв'язок проблеми сингулярного збурення для такого генератора.

Автор висловлює подяку академіку НАН України В.С. Королюку за увагу до викладеного матеріалу.

Список литературы

1. *Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З.* Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. М.:Наука, 1972. – 304 с.
2. *Ljung L., Pflug G., Walk H.* Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems. Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992. – 113P.
3. *Чабанюк Я.М.* Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі. // Доп. НАН України, 2004, сер. А, № 5 , с. 37-45.
4. *Korolyuk V.S., Korolyuk V.V.* Stochastic Models of Systems. Kluwer, Academic Publishers, 1999. – 185p.
5. *Чабанюк Я.М.* Дискретна стохастична процедура у марківському випадковому середовищі // Вісник Львів. ун-ту., Серія мех-мат. – 2000. Вип. 56. С. 179-184.
6. *Hersh R.* The birth of random evolution // Mathematical Intelligencer, – 2003-25, – P.53-60.
7. *Чабанюк Я.М.* Процедура стохастичної апроксимації в ергодичному середовищі Маркова // Математичні студії. – 2004. – Т. 21, № 1. – с.81-86.
8. *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их применение. Киев: Наук. думка, 1976. – 184с.
9. *Koroliuk V., Limnios N.* Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific Publishing, 2005. – 330P.

Статья поступила в редакцию 18.05.2007