УДК 519.68: 681.513.7

ТУПИКОВЫЕ ДООПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА $(n, 1, k)$

Г.А. Махина

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *gmakhina@yandex.ru*

It is proved that any terminal inferring of a partial monotone Boolean function from the $(n, 1, k)$ class has a zero domain of uncertainty. The conditions of univocal Boolean function inferring are defined in the paper.

Введение

Частичные монотонные булевозначные функции возникают в ряде проблем, среди которых в современной литературе упоминаются такие задачи как определение химической канцерогенности, проверка отчетности для определения размеров налогового обложения, определение ценности недвижимого имущества [1], обнаружение рака молочной железы, оценка технической надежности [2], обработка сигналов [3], построение монотонной корректирующей операции для случая булевозначных базовых классификаторов [4, 5].

Задачи распознавания образов, возникающие в указанных приложениях, можно рассматривать как задачу доопределения частичной монотонной булевозначной функции, для решения которой используются логические алгоритмы [6]. Однако в результате работы таких алгоритмов, основанных на использовании свойства монотонности признаков, может возникать область неопределенности. Вполне естественно использовать размер возникающей области неопределенности в качестве характеристики эффективности алгоритма распознавания. Асимптотика максимальной мощности области неопределенности исследуется в работе [7], где приводится пример функции, имеющей тупиковые доопределения как с нулевой областью неопределенности, так и с областью, содержащей почти все точки булева куба.

Отдельный интерес представляет вопрос оценки размера области неопределенности в зависимости от исходных данных, поскольку такая информация может существенно облегчить поиск наиболее эффективных стратегий доопределения монотонных функций.

Случай, когда функция f задана l нулями и k единицами, обозначим через (n, l, k), где n — размерность булевого куба. В данной работе исследуется случай $(n, 1, k)$ (или, что то же самое, случай $(n, k, 1)$), для которого доказывается, что при любом тупиковом доопределении размер области неопределенности равен нулю. Также для случая $(n, 1, k)$ рассматриваются условия, при которых доопределение является однозначным.

1. Определения и обозначения

Неопределяемые здесь понятия из булевой алгебры можно найти, например, в [8, 9].

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — частичная монотонная булева функция и $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — двоичный набор. Обозначим через $\widetilde{x}'_i$ набор, полученный из $\widetilde{x}$ путем замены i-й координаты на противоположную.

Пусть $\widetilde{x} \in N_{\bar{f}}$ ($\widetilde{x} \in N_f$). Координата x_i набора $\widetilde{x}$ называется *существенной*, если существует набор $\widetilde{y} \in N_f$ ($\widetilde{y} \in N_{\bar{f}}$) такой, что $\widetilde{x}'_i \geq \widetilde{y}$ (соответственно, $\widetilde{x}'_i \leq \widetilde{y}$). В противном случае координата называется *несущественной*.

Если столбец в таблице функции f, соответствующий переменной x_i, не содержит ни одной существенной координаты, то такой столбец и соответствующая ему переменная x_i называются *несущественными*. В противном случае столбец и соответствующая ему переменная называются *существенными*.

Пусть x_i — несущественная нулевая координата набора $\widetilde{x} \in N_{\bar{f}}$. *Операцией поднятия нуля по i-ой координате* назовем преобразование функции f в функцию g, такую что $N_g = N_f$, $N_{\bar{g}} = (N_{\bar{g}} \setminus \{\widetilde{x}\}) \cup \{\widetilde{x}'_i\}$. Обозначим такую операцию символом $U_i(f, \tilde{x})$.

Пусть x_i — несущественная единичная координата набора $\widetilde{x} \in N_f$. *Операцией опускания единицы по i-ой координате* назовем преобразование функции f в функцию g, такую что $N_{\bar{g}} = N_{\bar{f}}$, $N_g = (N_f \setminus \{\widetilde{x}\}) \cup \{\widetilde{x}'_i\}$. Обозначим такую операцию символом $L_i(f, \tilde{x})$.

Операцию удаления из функции f несущественной переменной x_i обозначим символом $H_i(f)$.

Заметим, что при применении операций U, L и H монотонность функции f не нарушается, а область неопределенности не увеличивается.

Назовем функцию f *тупиковой*, если к ней не применима ни одна из операций U, L, H.

Доопределением функции f по монотонности назовем преобразование функции f в функцию g, при котором $N_g = \{\tilde{x} : \tilde{x} \geq \tilde{y}, \tilde{y} \in N_f\}$, $N_{\bar{g}} = \{\tilde{x} : \tilde{x} \leq \tilde{y}, \tilde{y} \in N_{\bar{f}}\}$

Будем говорить, что функция g *порождена* функцией f, если она может быть получена из f путем применения операций U, L, H и последующим доопределением по монотонности.

Обозначим через $J(f)$ множество всех тупиковых функций, порождаемых f, через $N_{\widetilde{g}}$ — область неопределенности функции $g \in J(f)$ и через $\nu(g)$ — мощность области неопределенности $N_{\widetilde{g}}$, т.е. $\nu(g) = |N_{\widetilde{g}}|$.

Будем говорить, что набор $\tilde{x}$ *покрыт* нулем (единицей), если существует набор $\tilde{y} : f(\tilde{y}) = 0$ ($f(\tilde{y}) = 1$) и $\tilde{y} \geq \tilde{x}$ (соответственно, $\tilde{y} \leq \tilde{x}$).

В результате применения логического алгоритма распознавания A к частичной монотонной функции f получается некоторая тупиковая функция $g \in J(f)$. Будем называть *эффективностью* алгоритма A величину $E(A) = 1 - \nu(g)/2^n$.

2. Некоторые свойства порожденных функций

При доопределении произвольной частичной монотонной функции отдельный интерес представляет вопрос, всегда ли можно построить порожденную функцию с нулевой областью неопределенности. Рассмотрим некоторые случаи, когда построение такой функции является достаточно простой процедурой.

Утверждение 1. *Пусть f — частичная булева функция из класса (n, m, k), не противоречащая условию монотонности, такая, что существует пара координат, в которых все заданные нули имеют значения 0 и 1, а все заданные единицы принимают противоположные значения 1 и 0. Тогда существует монотонная функция g от n переменных, порожденная функцией f, такая что $\nu(g) = 0$ для любого расположения векторов.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{x}^i$ $(i = 1, .., m)$ наборы, являющиеся нулями функции f, и через $\tilde{y}^i$ $(i = 1, .., k)$ — единицы функции f. По условию существует, по крайней мере, пара координат, в которых $\forall i$ $\tilde{x}^i$ имеют значения 0 и 1 и $\forall i$ $\tilde{y}^i$ имеют значения 1 и 0. Не ограничивая общности, положим, что этими координатами являются первые две, т.е. $\forall i$ $x_1^i = 0$, $x_2^i = 1$, $\forall j$ $y_1^j = 1$, $y_2^j = 0$. Заметим, что, применяя операцию поднятия нуля, все нули функции f можно поднять до набора $(011\ldots1)$, и, применяя операцию опускания единицы, все единицы можно опустить до набора $(100\ldots0)$. При этом каждый из нулей можно поднимать, например, вдоль цепи, образованной следующим образом: первой идет вершина, полученная из вектора $\tilde{x}^i$ путем замены первой нулевой координаты, следующей за x_1, на единицу; последующие вершины получаются заменой всех последующих нулевых координат на единицы. Аналогичным образом можно осуществить операцию опускания единицы, только при этом необходимо заменять единичные координаты, следующие за x_1, на нули. В результате после доопределения полученной функции g по монотонности получаем, что $\forall \tilde{\alpha} : \alpha_1 = 0$ имеем $g(\tilde{\alpha}) = 0$ и $\forall \tilde{\alpha} : \alpha_1 = 1$ имеем $g(\tilde{\alpha}) = 1$, т.е. функция g определена на всем кубе B^n и соответственно $\nu(g) = 0$. Утверждение доказано. □

Построение доопределения, имеющего нулевую область неопределенности, для частичной функции f из класса $(n, 1, k)$ также не представляет особой сложности. В этом случае оказывается, что все функции из класса $(n, 1, k)$ обладают таким уникальным свойством, что любое их тупиковое доопределение имеет нулевую область неопределенности. Еще одним интересным свойством таких функций является то, что все нижние единицы тупикового доопределения располагаются в первом слое и их количество напрямую связано с номером слоя, в котором расположен верхний ноль. Все эти свойства доказываются в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть f — частичная монотонная булева функция из класса $(n, 1, k)$, а g — произвольное тупиковое доопределение f. Тогда $\nu(g) = 0$.*

Доказательство. Докажем, что для любого тупикового доопределения g частичной монотонной булевой функции f из класса $(n, 1, k)$ областью определения является весь куб B^n.

Из определения тупикового доопределения и из условия $N_{\bar{f}} = 1$ следует, что $N_{\bar{g}} = 1$. Пусть верхний ноль находится в k-ом слое. Обозначим его через $\tilde{\alpha}$. Без ограничения общности будем считать, что этот набор имеет единицы в первых k координатах и нули во всех остальных. Покажем, что при этих предположениях все нижние единицы тупикового доопределения g находятся в первом слое, общее число нижних единиц равно $n-k$, причем их единичные координаты имеют номера, большие чем k. Отсюда будет следовать, что $\nu(g) = 0$, поскольку каждый набор из B^n сравним хотя бы с одним из наборов множества $N_{\bar{g}} \bigcap N_g$.

Покажем вначале, что все нижние единицы g находятся в первом слое. Пусть $\tilde{\beta}$ — некоторая нижняя единица тупикового доопределения g функции f. Заметим, что существует хотя бы одна единичная координата набора $\tilde{\beta}$ с номером, большим k. Иначе имеем, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$, а это противоречит монотонности функции g. Пусть $i : i > k$ — номер этой координаты, а $\tilde{\gamma}$ — набор из первого слоя с единицей в i-ом разряде. Рассмотрим три случая:

1) Значение $g(\tilde{\gamma})$ не определено. В этом случае g не является тупиковым доопределением, поскольку тогда допустима операция опускания единицы из набора $\tilde{\beta}$ в набор $\tilde{\gamma}$. Эту операцию можно осуществить, например, вдоль цепи, в которой каждый следующий набор получается заменой первой содержащейся в очередном наборе единичной координаты, не равной i, на ноль. Очевидно, что такая цепь допустима, поскольку все наборы в такой цепи не сравнимы с верхним нулем $\tilde{\alpha}$. Таким образом, получаем противоречие;

2) $g(\tilde{\gamma}) = 0$. Поскольку $\tilde{\gamma}$ не сравнима с набором $\tilde{\alpha}$, то приходим к противоречию с условием единственности верхнего нуля функции g;

3) $g(\tilde{\gamma}) = 1$. Здесь возможны два варианта — $\tilde{\beta} \neq \tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. При $\tilde{\beta} \neq \tilde{\gamma}$ имеем противоречие, поскольку тогда к $\tilde{\beta}$ применима операция опускания нуля и, следовательно, $\tilde{\beta}$ не является нижней единицей. Таким образом, остается случай $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. А это значит, что $\tilde{\beta}$ лежит в первом слое, что и требовалось доказать.

Покажем, что каждый набор первого слоя, имеющий единицу в координате с номером, большим k, является нижней единицей функции g.

Предположим, что существует набор $\tilde{\delta}$ из первого слоя, имеющий единицу в координате с номером $j : j > k$, который не является нижней единицей функции g. По соображениям, рассмотренным выше, $g(\tilde{\delta})$ не может быть равным 0. Рассмотрим случай, когда значение функции $g(\tilde{\delta})$ не определено. Обозначим через $\tilde{\alpha}'$ набор, получающийся из $\tilde{\alpha}$ заменой в i-м разряде нуля на единицу.

Рассмотрим грань $I = I(\tilde{\delta}, \tilde{\alpha}')$, натянутую на вектора $\tilde{\delta}$ и $\tilde{\alpha}'$. Заметим, что все наборы грани I не сравнимы ни с одной нижней единицей функции g. Также отметим, что применение операции опускания единицы (при условии, что набор $\tilde{\alpha}$ является верхним нулем) к любому набору из I (за исключением набора $\tilde{\delta}$) не выводит этот набор за пределы интервала I. Это очевидно при замене любой из первых k единиц нулями. При замене же i-й координаты любого набора из I на ноль, получается набор, предшествующий $\tilde{\alpha}$, т.е. в этом случае операция опускания единицы неприменима.

Пересечение множеств $I \bigcap N_g$ не может быть пустым, иначе к набору $\tilde{\alpha}$ можно было бы применить операцию поднятия нуля, что противоречит тупиковости доопределения g. Пусть $\tilde{\omega} \in I \bigcap N_g$. По допущению, сделанному выше, $\tilde{\omega}$ не может совпадать с $\tilde{\delta}$, поскольку $\tilde{\delta} \notin I \bigcap N_g$. Так как набор $\tilde{\omega}$ не лежит в первом слое, то он не может являться нижней единицей (выше было показано, что все нижние единицы лежат в первом слое). Значит, либо в случае, если набор $\tilde{\omega}$ получил единичное значение в результате доопределения, должна существовать нижняя единица, которая предшествует $\tilde{\omega}$. Либо должна существовать нижняя единица, которая была получена из $\tilde{\omega}$ в результате применения операции опускания единицы (или нескольких операций). Но так как ни одна нижняя единица не сравнима с $\tilde{\omega}$ и ни одна нижняя единица не может быть получена из $\tilde{\omega}$, так как путем применения операции опускания единицы мы не может получить набор, лежащий вне грани I, то получаем противоречие. Теорема доказана. □

3. Условия однозначности доопределения функции из класса $(n, 1, k)$

Рассмотрим условия, при которых доопределение функции из класса $(n, 1, k)$ является однозначной процедурой. В общем случае можно выделить три условия:

1. Если к функции не применима операция поднятия ноля. Т.к. область неопределенности любого тупикового доопределения равна нулю, то очевидна однозначность доопределения данной функции — верхний ноль есть, а нижние единицы — наборы из первого слоя с единицами в позициях нулевых координат верхнего нуля.
2. Если к функции не применима операция опускания единицы. Т.к. к функции не применима операция опускания единицы, то все заданные единицы располагаются в первом слое (что доказано для случая $(n, 1, k)$). Здесь очевидно верхний ноль однозначно поднимается до набора, имеющего нули во всех позициях, которым соответствуют единичные координаты нижних единиц.
3. Если к функции можно применить как операцию поднятия нуля, так и операцию опускания единицы, но при этом не существует координаты, по которой возможно совершить обе операции. Однозначность доопределения следует из того, что область неопределенности для случая $(n, 1, k)$ равна нулю. Нули поднимаются по всем возможным координатам, аналогично опускаются единицы, при этом множества координат, по которым возможно совершение этих операций, не пересекается.

Пример 3. Рассмотрим частичную функцию $f(x^4) : N_f = \{1010\}$, $N_{\not f} = \{0011\}$. По первой и четвертой координатам нельзя поднять ноль и нельзя опустить единицу. По второй координате возможно поднять только ноль, но нельзя опустить единицу, по третьей координате можно опустить единицу, но нельзя поднять ноль. Таким образом, этот случай соответствует третьему рассмотренному условию и мы имеем однозначное доопределение — верхний ноль поднимается до набора $\{0111\}$, а нижняя единица располагается на наборе $\{1000\}$.

Заключение

На основе информации об условиях, при которых достигается максимальное значение области неопределенности, можно вырабатывать стратегии, использование которых позволит получать более эффективные доопределения монотонной функции с помощью логических алгоритмов распознавания.

В данной работе доказывается, что любое тупиковое доопределение частичной булевой функции из класса $(n, 1, k)$ имеет нулевую область неопределенности. Выделено три условия, при которых доопределение функции из класса $(n, 1, k)$ является однозначным.

Список литературы

1. *Boros E., Hammer P.L., Hooker J.N.* Predicting cause-effect relationships from incomplete discrete observations. SIAM Journal on Discrete Mathematics 7, 144-153 (1994)
2. *Kovalerchuk B., Triantaphyllou E., Deshpande A. S., Vityaev E.* Interactive Learning of Monotone Boolean Functions. Information Sciences 94, 87-118 (1996)
3. *Shmulevich I., T.M. Sellke, and E.J. Coyle,* "Stack Filters and Free Distributive Lattices,"Proceeding of the 1995 IEEE Workshop on Nonlinear Signal Processing, Halkidiki, Greece, June 1995, pp. 927-930
4. *Рудаков К. В., Воронцов К. В.* О методах оптимизации и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // Докл. РАН. — 1999. — Т. 367, No. 3. — С. 314-317.
5. *Воронцов К. В.* Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции В алгебраическом подходе к проблеме распознавания // ЖВМ и МФ. — 2000. — Т. 40, No. 1. — С. 166-176.
6. *Kovalerchuk B., Triantaphyllou E., Deshpande A.S., Vityaev E.* Interactive Learning of Monotone Boolean Functions. Information Sciences, 94 (1-4), pp. 87-118 (1996).
7. *Сапоженко А.А., Сумкина Н.В.* О тупиковых доопределениях частичных монотонных булевых функций // Сб. Математические вопросы кибернетики, Вып. 13, 2004 г., С. 289-294.
8. *Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А.* Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2004 г. — 416 с.
9. *Сапоженко А.А.* Проблема Дедекинда и метод граничных функционалов. — М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2005. — 124 с.