УДК 517.98

ДОМИНАНТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ НА ПОЛУОСИ

М.А. Муратов, Ю.С. Пашкова

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина

Abstract
We study conditions under which Dominated Ergodic Theorems hold in Orlicz spaces for a positive contraction.

Введение

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [1] — [7].). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема.

Теорема 1. *(ДЕТ) Пусть* $(\Omega,\, \mathcal{A}, \mu)$ *пространство с мерой и* T *— положительное* $L_1 - L_\infty$ *сжатие. Тогда для любой неотрицательной измеримой функции* f *имеет место неравенство*

$$\|B_T f\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \quad (1 < p < \infty).$$

где $B_T f = \sup_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f$.

Доминантная эргодическая теорема рассматривалась Г.Харди и Д.Литлвудом [8] для трансляций, Н.Винером [7] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [9] для положительных сжатий.

В работах [10], [15],[16] были доказаны аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на отрезке $[0,\, 1]$ и на полуоси $[0,\, +\infty)$.

Как известно, класс перестановочно инвариантных пространств достаточно широк. Он содержит пространства $L_p,\ p \geq 1$, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича и многие другие (см. например [11]). С другой стороны, каждое перестановочно инвариантное пространство E является промежуточным между пространствами $L_1(0,\infty)$ и $L_\infty(0,\infty)$:

$$L_1(0,\, +\infty) \cap L_\infty(0,\, +\infty) \subset E \subset L_1(0,\, +\infty) + L_\infty(0,\, +\infty).$$

В свою очередь, пространства $L_1(0,\, +\infty) \cap L_\infty(0,\, +\infty)$ и $L_1(0,\, +\infty) + L_\infty(0,\, +\infty)$ являются пространствами Орлича относительно специальным образом определенных функций Орлича ([12]). Таким образом, пространства Орлича играют особую роль в общей теории перестановочно инвариантных пространств.

В данной статье доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространстве Орлича измеримых функций на полуоси.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [10] —[14].

1. Предварительные сведения

Пусть μ – мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$ и $S(0, \infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0, \infty)$.

Определение 1. Функцией распределения функции f называют функцию n_f, определяемую для любого $\tau \in (0, +\infty)$ равенством:

$$n_f(\tau) = n_{|f|}(\tau) = \mu\{t \in (0, \infty) : \ |f(t)| > \tau\} \tag{1.1}$$

Будем называть функции f и g равноизмеримыми [11], если

$$n_{|f|}(\tau) = n_{|g|}(\tau).$$

В дальнейшем будем рассматривать пространство $S_0(0, +\infty)$ функций из $S(0, +\infty)$, для которых функция распределения $n_f(\tau)$ не равна тождественно $+\infty$.

Определение 2. Перестановкой функции f в убывающем порядке или убывающей перестановкой функции f называют функцию f^*, определяемую равенством.

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in (0, \infty) : \ n_{|f(t)|}(\tau) \leq t\}. \tag{1.2}$$

Другими словами, перестановкой функции $f \in S_0(0, +\infty)$ является убывающая непрерывная справа функция f^*, равноизмеримая с функцией $f(t)$.

Определение 3. Банахово пространство $(E, \| \cdot \|_E)$ функций из $S_0(0, +\infty)$ называется перестановочно инвариантным или симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $|f(t)| \leq |g(t)|$ почти всюду на $(0, +\infty)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E \leq \|g(t)\|_E$.

$S2^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E = \|g(t)\|_E$.

Как уже отмечалось во введении, класс симметричных пространств содержит пространства $L_p(0, +\infty)$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича.

Имеет место теорема:

Теорема 2. *Любое симметричное пространство* $(E, \|\cdot\|_E)$ *является промежуточным между* $L_1(0, +\infty)$ *и* $L_\infty(0, +\infty)$, *то есть*

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

(См.[11], теорема 4.1)

Определение 4. Пусть $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Функция

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)\, ds = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*\, d\mu, \ t \in (0, +\infty)$$

называется максимальной функцией Харди-Литлвуда.

Приведем некоторые свойства функции $f^{**}(t)$, необходимые в дальнейшем:
1^o. $f^*(t) \le f^{**}(t)$ для любого $t \in (0, \infty)$.
2^o. $f^{**}(t)$ непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция.
3^o. Для каждого $u > f^*(\infty)$ имеет место равенство:

$$f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u.$$

4^o. $f^{**}(\infty) = f^*(\infty)$.

5^o. Для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup_{G:\mu G = t} \int_G |f(s)|\, ds.$$

6^o. Для любых функций $f_1, f_2 \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

$$(f_1 + f_2)^{**}(t) \le f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t).$$

7^o. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $\sum_{k=1}^\infty f_k^{**}(t)$ сходится, то для любого множества $G: \ \mu(G) = t$ ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(t)$ сходится почти всюду на G и

$$\left(\sum_{k=1}^\infty f_k\right)^{**}(t) \le \sum_{k=1}^\infty f_k^{**}(t).$$

Пусть E симметричное пространство. Легко видеть, что если $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$, то $f \in E$. Действительно, из $0 \le f^* \le f^{**}$ следует, что $f^* \in E$. Далее, полагая $g(t) = f^*(t)$, получим, что $g \in E$ и $g^* = (f^*)^* = f^*$, откуда $f \in E$.

Обозначим

$$H(E) = \{f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) : \ f^{**} \in E\}$$

и положим $\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E$.

Ясно, что $H(E) \subset E$.

Предложение 7. Пространство $(H(E), \|\cdot\|_{H(E)})$ является симметричным.

Доказательство. 1) Пусть $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in H(E)$ и $|f| \le |g|$ почти всюду.

Следовательно, $n_f(y) \le n_g(y)$ $\forall y \in [0, +\infty)$ и значит $f^*(s) \le g^*(s)$ почти всюду и потому $f^{**}(t) \le g^{**}(t)$ $\forall t \in (0, +\infty)$. Так как $g \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$,$g^{**} \in E$ и E — симметричное пространство, то $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$. Следовательно, $f \in H(E)$. Наконец,

$$\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E \le \|g^{**}\|_E = \|g\|_{H(E)}.$$

2) Пусть $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in H(E)$ и $f^* = g^*$.

Следовательно, $f^{**} = g^{**}$. Так как $g \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $g^{**} \in E$, то $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$, то есть $f \in H(E)$. Кроме того,

$$\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E = \|g^{**}\|_E = \|g\|_{H(E)}.$$

3) Покажем, что пространство $H(E)$ — банахово.

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H(E)$ такая последовательность, что $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{H(E)} < \infty$. Так как $\|f_k\|_{H(E)} = \|f_k^{**}\|_E$, то $\{f_k^{**}\}_{k=1}^{\infty} \subset E$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^{**}\|_E < \infty$. Но E — банахово пространство. Поэтому существует $f \in E$ такое, что $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^{**} = f$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^{**} \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{**} = f.$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in L_1(0,\, +\infty) + L_\infty(0,\, +\infty)$ и $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^{**} \in E$. Откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \in H(E).$$

Далее,

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k \right\|_{H(E)} = \left\| \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} f_k \right)^{**} \right\|_E \leq \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k^{**} \right\|_E \leq$$

$$\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k^{**}\|_E \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|f_k\|_{H(E)} \to 0$$

при $N \to \infty$.

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k - \sum_{k=1}^{N} f_k \right\|_{H(E)} = 0$$

и поэтому пространство $H(E)$ банахово

Предложение доказано.

Имеет место следующая цепочка вложений:

$$L_1(0,\, +\infty) \cap L_\infty(0,\, +\infty) \subset H(E) \subset E \subset L_1(0,\, +\infty) + L_\infty(0,\, +\infty).$$

Определение 5. Положительный линейный оператор

$$T:\ L_1(0,\, +\infty) + L_\infty(0,\, +\infty) \longrightarrow L_1(0,\, +\infty) + L_\infty(0,\, +\infty)$$

называется положительным $L_1 - L_\infty$ сжатием или абсолютным сжатием, если

1^o. T действует в $L_1(0,\, +\infty)$ и $L_\infty(0,\, +\infty)$;

2^o. $\|T\|_{L_1\to L_1} \leq 1$, $\|T\|_{L_\infty\to L_\infty} \leq 1$.

Обозначим, как и в [10] множество всех положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий через $\mathcal{PC}$.

Если E перестановочно инвариантное пространство, то для любого оператора $T \in \mathcal{PC}$

$$T(H(E)) \subset H(E)$$

и $\|Tf\|_{H(E)} \leq \|f\|_{H(E)}$.

2. Пространства Орлича

Определение 6. Функция $\Phi:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ называется функцией Орлича, если

1) $\Phi(0)=0$

2) Φ непрерывна слева: $\lim_{u\uparrow u_0}\Phi(u)=\Phi(u_0)$

3) Φ - неубывающая функция:

$$0\le u_1\le u_2 \quad\Rightarrow\quad \Phi(u_1)\le\Phi(u_2)$$

4) Φ - выпуклая функция, то есть для любых $u_1,\ u_2\in[0,\infty)$

$$\Phi(\alpha u_1+(1-\alpha)u_2)\le\alpha\Phi(u_1)+(1-\alpha)\Phi(u_2)$$

5) Φ - нетривиальная функция, то есть существуют такие $u_1>0$ и $u_2>0$, что

$$\Phi(u_1)>0 \quad \text{и} \quad \Phi(u_2)<\infty$$

Так как $\Phi(u)$ - непрерывная слева выпуклая функция, то она имеет односторонние производные $\Phi'_+(u)$ и $\Phi'_-(u)$, причем $\Phi'_+(u)$ и $\Phi'_-(u)$ неубывающие, $\Phi'_+(u)\le\Phi'_-(u)$, $\Phi'_+(u)$ - непрерывна справа, а $\Phi'_-(u)$ - непрерывна слева [12]

Обозначим левую производную функции $\Phi(u)$ через

$$\varphi(u)=\Phi'_-(u)=\Phi'(u)$$

Функцию Орлича можно записать в виде

$$\Phi(u)=\int\limits_0^u\varphi(x)\,dx,\quad 0\le u<\infty.$$

Функция $\varphi(u)$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi(u)\ge0$;

2) $\varphi(u)$ - неубывающая функция;

3) $\varphi(u)$ непрерывна всюду, за исключением счетного множества точек, в которых она непрерывна слева.

4) $\varphi(u)$ нетривиальна и

$$\varphi(0)=0,\quad \varphi(\infty)=\lim_{x\to\infty}\varphi(u)=\infty.$$

Пусть $f:\ (0,+\infty)\to\mathbf{R}$ - измеримая функция.

Определение 7. Модулем Орлича называется интеграл

$$M_\Phi(f)=\int\Phi(|f|)\,d\mu$$

Заметим, что $M_\Phi(f)=M_\Phi(|f|)$.

Определение 8. Пространством Орлича называется множество

$$L_\Phi=\{f\in S(0,\infty):\ M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right)<\infty \ \text{ для некоторого } \ a>0\}.$$

Рассмотрим важнейшие свойства пространства Орлича.

Теорема 3. *Пространство* $(L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ *является банаховым относительно нормы*

$$\|f\|_\Phi = \inf\{a > 0 : \ M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1\},$$

Доказательство. Докажем сначала, что L_Φ - нормированное линейное пространство. Из определения нормы следует

$$\|\alpha f\|_\Phi = \inf\{a > 0 : \ M_\Phi\left(\frac{\alpha f}{a}\right) \leq 1\} = \inf\{a > 0 : \ M_\Phi\left(\frac{f}{a/|\alpha|}\right) \leq 1\} =$$

$$= |\alpha| \inf\left\{\frac{a}{|\alpha|} > 0 : \ M_\Phi\left(\frac{f}{a/|\alpha|}\right) \leq 1\right\} = |\alpha| \inf\left\{a_1 > 0 : \ M_\Phi\left(\frac{f}{a_1}\right) \leq 1\right\} =$$
$$= |\alpha|\|f\|_\Phi.$$

Поэтому, если $f \in L_\Phi$, то $\alpha f \in L_\Phi$.

Пусть теперь f, $g \in L_\Phi$, и пусть $a = \|f\|_\Phi$, $b = \|g\|_\Phi$. Тогда

$$\frac{f}{a}, \ \frac{g}{b} \in B_\Phi = \{f : \ M_\Phi(f) \leq 1\},$$

где B_Φ - единичный шар Орлича ([12]).

Заметим, что B_Φ выпуклое множество, поэтому если

$$\alpha = \frac{a}{a+b}, \quad \text{то} \ \ 1-\alpha = \frac{b}{a+b} \quad \text{и следовательно}$$

$$\alpha\frac{f}{a} + (1-\alpha)\frac{g}{b} = \frac{a}{a+b}\frac{f}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{g}{b} = \frac{f+g}{a+b} \in B_\Phi.$$

Тогда

$$\left\|\alpha\frac{f}{a} + (1-\alpha)\frac{g}{b}\right\|_\Phi = \left\|\frac{f+g}{a+b}\right\|_\Phi \leq 1$$

Следовательно

$$\|f+g\|_\Phi \leq a+b = \|f\|_\Phi + \|g\|_\Phi.$$

Отсюда, в частности, следует, что $f + g \in L_\Phi$.

Пусть теперь $\|f\|_\Phi = 0$. Тогда $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \leq 1$ для любого $a > 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда

$$M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) = \int \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) d\mu \geq \Phi\left(\frac{\varepsilon}{a}\right) \mu\{|f| > \varepsilon\}.$$

При $a \to 0$ получим, что $\Phi\left(\varepsilon/a\right) \to \infty$. Поэтому

$$\mu\{|f| > \varepsilon\} = 0 \ \ \text{для любого} \ \ \varepsilon > 0.$$

То есть $f = 0$ почти всюду.

Теперь докажем полноту пространства L_Φ.

Рассмотрим последовательность $f_n \in L_\Phi$ такую, что

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots, \ \ \text{и} \ \|f_n\|_\Phi \leq 1 \ \ \text{для любого} \ \ n \in \mathbf{N}.$$

Тогда $\int \Phi(|f_n|)\, d\mu \leq 1$.

Если $f = \lim f_n$, то $\Phi(|f_n|) \to \Phi(|f|)$ ввиду непрерывности функции Φ слева.

Следовательно, по теореме о монотонной сходимости, $\int \Phi(|f|)\,d\mu \le 1$.

Отсюда $\|f\|_\Phi \le 1$ и $f \in L_\Phi$.

Пусть $\{f_n\}$ - последовательность Коши в L_Φ. Тогда, найдется такая подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, для которой

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_\Phi \le 2^{-k}.$$

Обозначим

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|.$$

Так как функция Φ выпукла и непрерывна слева, имеем:

$$\Phi(g) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|\right) = \Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}2^{k}|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|\right) \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\Phi(2^{k}|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|).$$

Тогда

$$\int \Phi(g)\,d\mu \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \int \Phi(2^{k}|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}|)\,d\mu = 1.$$

Поэтому $\|g\|_\Phi \le 1$ и $g \in L_\Phi$.

Значит, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k} - f_{n_{k-1}})$$

сходится почти всюду. Поэтому ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}) + f_{n_0}$$

тоже сходится почти всюду и $|f - f_{n_0}| \le g$. То есть $f \in L_\Phi$ и

$$f = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}.$$

Так как $\{f_n\}$ - последовательность Коши, имеющая сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, то $\{f_n\}$ сходится и

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Следовательно L_Φ - банахово пространство.

Теорема доказана.

Заметим, что $f \in L_\Phi$ тогда и только тогда, когда $|f| \in L_\Phi$ и

$$\||f|\|_\Phi = \|f\|_\Phi.$$

Теорема 4. *Пространство $(L_\Phi, \|\cdot\|_\Phi)$ является симметричным пространством, то есть*

1. если $|g(t)| \le |f(t)|$, $f(t) \in L_\Phi$, то $g(t) \in L_\Phi$ и $\|g\|_\Phi \le \|f\|_\Phi$;

2. если $f(t) \in L_\Phi$, функция $g(t)$ равноизмерима с $f(t)$, то $g(t) \in L_\Phi$ и $\|g\|_\Phi = \|f\|_\Phi$.

Доказательство. 1. Пусть $|g(t)| \le |f(t)|$, $f(t) \in L_\Phi$, следовательно

$$\exists a > 0: \quad M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) = \int \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right)\, d\mu < \infty.$$

Так как $|g| \le |f|$, то

$$\frac{|g|}{a} \le \frac{|f|}{a}.$$

Тогда

$$\Phi\left(\frac{|g|}{a}\right) \le \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) \quad \text{и} \quad M_\Phi\left(\frac{g}{a}\right) \le M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) < \infty.$$

Следовательно

$$g \in L_\Phi.$$

Более того, если $M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \le 1$, то $M_\Phi\left(\frac{g}{a}\right) \le 1$.
Поэтому

$$\|g\|_\Phi = \inf\{a: \ M_\Phi\left(\frac{g}{a}\right) \le 1\} \le \inf\{a: \ M_\Phi\left(\frac{f}{a}\right) \le 1\} = \|f\|_\Phi.$$

2. Пусть $f \in L_\Phi$ и g равноизмерима с f, то есть

$$\mu\{t: \ f(t) > \tau\} = \mu\{t: \ g(t) > \tau\} \quad \forall \tau > 0.$$

Покажем, что в этом случае $M_\Phi(g) = M_\Phi(f)$.
Действительно

$$M_\Phi(f) = \int \Phi(|f|)\, d\mu = \int\limits_0^\infty n_{\Phi(|f|)}(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^\infty \mu\{t: \ \Phi(|f|) > \tau\}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mu\{t: \ \Phi(|f|) > \Phi(u)\}\varphi(u)\, du = \int\limits_0^\infty \mu\{t: \ |f| > u\}\varphi(u)\, du =$$

$$= \int\limits_0^\infty \mu\{t: \ |g| > u\}\varphi(u)\, du = M_\varphi(g).$$

Поэтому

$$\|g\|_\Phi = \inf\{a: \ M_\Phi\left(\frac{|g|}{a}\right) \le 1\} = \inf\{a: \ M_\Phi\left(\frac{|f|}{a}\right) \le 1\} = \|f\|_\Phi.$$

Теорема доказана.

3. Доминантная эргодическая теорема

Пусть $\Phi(u)$ - функция Орлича.

Рассмотрим функцию

$$\Phi_1(x) = x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du$$

Предложение 8. Функция $\Phi_1(x)$ является функцией Орлича.

Доказательство. 1) $\Phi_1(0) = 0\int\limits_0^0 \frac{\Phi'(u)}{u}\,du = 0.$

2) Функция $\Phi_1(x)$ непрерывна слева, так как

$$\lim_{x\uparrow x_0}\Phi_1(x) = \lim_{x\uparrow x_0} x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du = x_0\int\limits_0^{x_0} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du = \Phi_1(x_0).$$

3) Функция $\Phi_1(x)$ неубывает, так как

$$\Phi_1'(x) = \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + x\cdot\frac{\Phi'(x)}{x} = \int\limits_0^x \frac{\varphi(u)}{u}\,du + \varphi(u) \geq 0.$$

4) Для доказательства выпуклости функции $\Phi_1(x)$ рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Phi}(x) = x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du - \Phi(x) = \Phi_1(x) - \Phi(x).$$

Так как

$$\widetilde{\Phi}'(x) = \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \Phi'(x) - \Phi'(x) = \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du,$$

$$\widetilde{\Phi''}(x) = \frac{\Phi'(x)}{x} \geq 0, \quad \text{при} \quad x \geq 0,$$

то функция $\widetilde{\Phi}(x)$ выпукла и потому функция

$$\Phi_1(x) = \widetilde{\Phi}(x) + \Phi(x)$$

тоже выпукла.

5) Функция $\Phi_1(x)$ нетривиальна, так как нетривиальна функция $\Phi(x)$.

Предложение доказано.

Предложение 9. $\Phi(x) \leq \Phi_1(x)$ для любого $x > 0$.

Доказательство. Пусть $x \in (0, \infty)$ и $u \in (0, x]$. Тогда

$$\frac{1}{u} \geq \frac{1}{x}, \quad \text{и поэтому} \quad \frac{\Phi'(u)}{u} \geq \frac{\Phi'(u)}{x}.$$

Следовательно
$$\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du \ge \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{x}\,du.$$

Поэтому
$$x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\,du \ge x\int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{x}\,du = \int\limits_0^x \Phi'(u)\,du = \Phi(x),$$
то
$$\Phi_1(x) \ge \Phi(x).$$

Предложение доказано.

Теорема 5. $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$.

Доказательство. Пусть $f \in H(L_\Phi)$. Тогда $f^{**} \in L_\Phi$ и поэтому
$$M_\Phi(f^{**}) < \infty.$$

Пользуясь равенством ([12])
$$\int\limits_0^\infty \Phi(f^{**})(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \Phi'(x)\mu\{f^{**} > x\}\,dx$$
и неравенством ([15])
$$\frac{1}{x}\int\limits_{f^*>x} f^*\,d\mu \le \mu\{f^{**} > x\}, \quad \text{если} \quad x > f^{**}(+\infty),$$
получим:
$$M_\Phi(f^{**}) = \int\limits_0^\infty \Phi(f^{**})(x)\,dx = \int\limits_0^\infty \Phi(f^{**})\,d\mu =$$
$$= \int\limits_0^\infty \Phi'(x)\mu\{f^{**} > x\}\,dx \ge \int\limits_0^\infty \Phi'(x)\left(\frac{1}{x}\int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mu\right)dx =$$
$$= \int\limits_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left(\int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mu\right)dx = \int\limits_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left[x\cdot\mu\{f^* > x\} + \int\limits_x^\infty \mu\{f^* > t\}\,dt\right]dx =$$
$$= \int\limits_0^\infty \Phi'(x)\mu\{f^* > x\}\,dx + \int\limits_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left[\int\limits_x^\infty \mu\{f^* > t\}\,dt\right]dx =$$
$$= \int\limits_0^\infty \Phi(f^*)(x)\,dx + \int\limits_0^\infty \mu\{f^* > t\}\left[\int\limits_0^t \frac{\Phi'(x)}{x}\,dx\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)\,dx + \int_0^\infty \mu\{f^* > t\}[\Phi_1'(t) - \Phi'(t)]\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)\,dx + \int_0^\infty \Phi_1'(t)\mu\{f^* > t\}\,dt - \int_0^\infty \Phi'(t)\mu\{f^* > t\}\,dt =$$

$$\int_0^\infty \Phi_1'(t)\mu\{f^* > t\}\,dt = \int_0^\infty \Phi_1(f^*)(x)\,dx = M_{\Phi_1}(f^*).$$

Следовательно $M_{\Phi_1}(f^*) < \infty$, откуда $f^* \in L_{\Phi_1}$ и $f \in L_{\Phi_1}$.

Таким образом, мы получили вложение

$$H(L_\Phi) \subset L_{\Phi_1}.$$

Пусть теперь $f \in L_{\Phi_1}$. Тогда $f^* \in L_{\Phi_1}$, и поэтому

$$M_{\Phi_1}(f^*) < \infty.$$

Так как $\Phi \le \Phi_1$, то $L_{\Phi_1} \subset L_\Phi$. Отсюда

$$f^* \in L_\Phi \;\text{ и }\; M_\Phi(f^*) < \infty.$$

В силу неравенства ([15])

$$\mu\{f^{**} \ge cx\} \le \frac{1}{(c-1)x} \int_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mu, \quad c > 1,$$

имеем:

$$M_{\Phi_1}(f^*) = \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} \left(\int_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mu \right) dx \ge \int_0^\infty \Phi'(x)(c-1)\mu\{f^{**} \ge cx\}\,dx =$$

$$= (c-1)\int_0^\infty \Phi'(x)\mu\left\{\frac{f^{**}}{c} \ge x\right\} dx = (c-1)\int_0^\infty \Phi\left(\frac{f^{**}}{c}\right) dx = (c-1)M_\Phi\left(\frac{f^{**}}{c}\right).$$

Следовательно

$$M_\Phi\left(\frac{f^{**}}{c}\right) < \infty.$$

Поэтому

$$\frac{f^{**}}{c} \in L_\Phi$$

и значит $f^{**} \in L_\Phi$.

Таким образом $f \in H(L_\Phi)$. Тогда

$$L_{\Phi_1} \subset H(L_\Phi).$$

Объединяя полученные вложения, имеем

$$H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}.$$

Теорема доказана.

Замечание 5. Пространство $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ является банаховым, как относительно нормы $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$, так и относительно нормы $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$.

Предложение 10. Нормы $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$ и $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$ эквивалентны на пространстве $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$. Более того, для любой функции $f \in H(L_\Phi)$, имеет место неравенство

$$\|f\|_{L_\Phi} \le \|f\|_{L_{\Phi_1}} \le \|f\|_{H(L_\Phi)}.$$

Доказательство. Так как пространства L_Φ и $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ симметричны, то без ограничения общности можно считать, что $f = f^*$.

Пусть $f^* \in H(L_\Phi)$. Тогда $f^{**} \in L_\Phi$ и, как было показано выше

$$M_\Phi(f^{**}) \ge M_{\Phi_1}(f^*).$$

В свою очередь, из неравенства $\Phi(x) \le \Phi_1(x)$, имеем

$$M_\Phi(f^{**}) \ge M_{\Phi_1}(f^*) \ge M_\Phi(f^*).$$

Поэтому имеет место следующая цепочка вложений

$$\left\{a:\ M_\Phi\left(\frac{f^{**}}{a}\right) \le 1\right\} \subseteq \left\{a:\ M_{\Phi_1}\left(\frac{f^{*}}{a}\right) \le 1\right\} \subseteq \left\{a:\ M_\Phi\left(\frac{f^{*}}{a}\right) \le 1\right\}.$$

Следовательно

$$\|f^*\|_{L_\Phi} \le \|f^*\|_{L_{\Phi_1}} \le \|f^{**}\|_{L_\Phi} = \|f^*\|_{H(L_\Phi)}.$$

Таким образом, банаховы нормы $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$ и $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$ согласованы и, потому, эквивалентны на пространстве $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$ ([17]).

Предложение доказано.

Для каждого оператора $T \in \mathcal{PC}$ обозначим:

$$B_T f = \sup_{n \ge 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Следующая теорема представляет собой аналог доминантной эргодической теоремы для пространства Орлича L_Φ.

Теорема 6. *Пусть $(L_\Phi, \|\cdot\|_{L_\Phi})$ пространство Орлича и $T \in \mathcal{PC}$.*

Тогда из $f \in L_{\Phi_1}$ следует, что $B_T f \in L_\Phi$ и

$$\|B_T f\|_{L_\Phi} \le \|f\|_{H(L_\Phi)} = \|f^{**}\|_{L_\Phi}.$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathcal{PC}$. Так как $H(L_\Phi) = L_{\Phi_1}$, то из $f \in L_{\Phi_1}$ следует что $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in L_\Phi$. Как было показано в [15],

$$(B_T f)^*(x) \le f^{**}(x), \quad \text{для любого } x \in (0, +\infty).$$

Поэтому, $(B_T f)^* \in L_\Phi$ и

$$\|(B_T f)^*\|_{L_\Phi} \le \|f^{**}\|_{L_\Phi}.$$

Но функции $B_T f$ и $(B_T f)^*$ имеют одинаковые убывающие перестановки:

$$[(B_T f)^*]^* = (B_T f)^*.$$

Поэтому $B_T f \in L_\Phi$ и

$$\|B_T f\|_{L_\Phi} = \|(B_T f)^*\|_{L_\Phi} \leq \|f^{**}\|_{L_\Phi} = \|f\|_{H(L_\Phi)}.$$

Теорема доказана.

Заключение

Основными результатами данной статьи являются теоремы 5 и 6. Первая из них показывает, что класс $H(L_\Phi)$ является пространством Орлича, порожденным функцией Φ_1, причем банаховы нормы $\|\cdot\|_{H(L_\Phi)}$ и $\|\cdot\|_{L_{\Phi_1}}$ согласованы и, потому, эквивалентны. Вторая является аналогом доминантной эргодической теоремы для пространства Орлича L_Φ.

В дальнейшем представляется интересным рассмотрение классов Зигмунда $Llog^n L$ измеримых функций на полуоси.

Список литературы

1. *von Neumann J.* Proof of the qlasiergodic hypothesis, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 18, 70–82 (1932).
2. *Birkgoff G. D.* Proof of the ergodic theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, No. 17, 656–660 (1931).
3. *Yosida K.* Mean ergodic theorem in Banach Spaces Proc. Imp. Acad. Yokyo, No. 14, 292–294 (1938).
4. *Kakutani S.* Iteration of linear operations in complex Banach spaces. Proc. Imp. Acad. Yokyo, No. 14, 295–300 (1938).
5. *Hopf E.* On the ergodic theorem for positive linear operators J. Reinc. Ang. Math., No. 205, 101–106 (1960).
6. *Hopf E.* The general temporally descrete Markov process, J. Rat. Meca. Anal., No. 3, 13–45 (1954).
7. *Weiner N.* The ergodic theorem, Duke. Math. J., No. 5, 1–18 (1939).
8. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A maximal theorem with function-theoretik application, Acta Math., No. 54, 81–116 (1930).
9. *Dunford N., Schwarts J. T.* Convergence almost everywhere of operator averages, J. Rat. Mech. Anal., No. 5, 129–178 (1956).
10. *Braverman M, Rubshtein B, Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces, Studia Mathem., No. 128 (2), 145–157 (1998).
11. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978, 400с.
12. *Edgar G.A., Sucheston L.* Stopping times and directed processes // Cambridge: University press, – 1992. – 430 P.
13. *Krengel U., Ergodik Theorems*, de Gruyter Stud. Math., de Gruyter, Berlin, 1985, 357 p.
14. *Lindenstrauss J. and Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. function Spaces. Springer. — 1979.
15. *М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн* Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003, Т.17 (56), № 2, С. 36 - 48.
16. *Муратов М. А., Рубштейн Б. А.* Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах. – Ученые записки Таврического Национального Университета, 2004. — т. 18 (57), № 1, С. 43 - 51.
17. *Антоневич А. Б., Радыно Я. В.* Функциональный анализ и интегральные уравнения. БГУ, Минск. – 2003. – 430 с.