УДК 517.432

ДЕФЕКТНЫЕ ПОДМОДУЛИ КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ КВАТЕРНИОННЫХ БИМОДУЛЯХ

И.И. Карпенко

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
e-mail: *i_karpenko@inbox.ru*

Abstract

In this paper the defect submodule of skew-symmetric operator acting in a quaternionic Hilbert bimodule is constructed. The relation between defect submodules of the such operator and its symplectic image is received, so the analogue of von Neumann formulaes for the adjoint operator are given.

Введение

Циклы работ М.М.Маламуда, В.А.Деркача [1], [2] создали определенное направление в области исследования регулярных расширений симметрических операторов в комплексных гильбертовых пространствах. Эти расширения охватывают такой важнейший класс линейных операторов, как дифференциальные операторы. В то же время для физических приложений [3] представляют интерес кососимметрические операторы в гильбертовых кватернионных модулях. Поэтому возникает реальная проблема построить аналогичный аппарат для исследования регулярных расширений таких кососимметрических операторов. В теории расширений симметрических операторов центральное место занимает понятие дефектных подпространств, характеризующих отклонение оператора от самосопряженного. Поэтому решение аналогичных задач в кватернионных модулях естественно начинается с анализа возможных подходов к определению дефектных подмодулей.

Целью работы является изучение свойств дефектных подмодулей кососимметрического оператора, обусловленых природой кватернионной линейности оператора.

1. Дефектные подмодули кососимметрических операторов в $\mathbb{H}$-бимодулях

Пусть $\mathbb{H}$ — тело кватернионов, $[q] = \{uq\overline{u} \mid u \in \mathbb{H},\ |u| = 1\}$ — класс сопряженности элемента q в мультипликативной группе кватернионов $\mathbb{H}^*$. Всюду в данной работе $\mathbb{F} \supset \mathbb{R}$ — невещественное поле в $\mathbb{H}$, вещественным базисом которого являются кватернионы $1, f$, где $f^2 = -1$. Тогда, в соответствии с работой [4], существует такой кватернион $\varepsilon :\ \varepsilon^2 = -1$, что кватернионы $1,\ f,\ \varepsilon,\ f\varepsilon$ образуют вещественный базис в $\mathbb{H}$, при этом всякий кватернион q можно представить в виде $q = u + v\varepsilon$, где $u, v \in \mathbb{F}$. Элемент поля $\mathbb{F}$, определяемый равенством $\mathbb{F}(q) := u$, называется $\mathbb{F}$-частью кватерниона q.

Рассмотрим гильбертов кватернионный бимодуль H со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть $L[H]$ — алгебра линейных ограниченных операторов над H.

Определение 1. Оператор $A \in L[H]$ называется *кососимметрическим*, если его область определения $D(A)$ плотна в H, и для любых векторов $x, y \in D(A)$ выполняется равенство
$$\langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle = 0.$$

Нетрудно показать, что для кососимметрического линейного оператора A в гильбертовом кватернионном бимодуле H всякий кватернион q с ненулевой вещественной частью является точкой регулярного типа, т.е. $||(A - R_q)x|| \geq k||x||$ $(\forall x \in D(A)$. При этом множество значений $\mathfrak{Im}(A - R_q)$ оператора $A - R_q$, где $R_q x := xq$, есть замкнутое множество в H.

Предложение 1. Для кососимметрического оператора A множество $\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$ является правым $\mathbb{H}$ -подмодулем.

Доказательство. Очевидно, что данное множество является аддитивной группой. Докажем его замкнутость относительно умножения на произвольный кватернион.

Рассмотрим поле $\mathbb{F} = \mathbb{R}\langle 1, \overrightarrow{q}\rangle$, $\mathbb{H} = \mathbb{F} + \mathbb{F}\varepsilon$. Так как $q, \overline{q} \in \mathbb{F}$, то операторы $A - R_q$, $A - R_{\overline{q}}$ являются $\mathbb{F}$-линейными, и, следовательно, их образы являются правыми $\mathbb{F}$-подмодулями. Поэтому поставленная задача будет решена, если мы докажем замкнутость данного множества отсительно умножения на ε. Пусть $x \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$. Тогда существуют $y, z \in D(A)$ такие, что $x = (A - R_q)y, \;\; x = (A - R_{\overline{q}})z$. В таком случае
$$x\varepsilon = R_\varepsilon(A - R_q)y = R_\varepsilon(Ay - yq) = A(y\varepsilon) - (y\varepsilon)\overline{q} = (A - R_{\overline{q}})(y\varepsilon),$$
$$x\varepsilon = R_\varepsilon(A - R_{\overline{q}})z = R_\varepsilon(Az - z\overline{q}) = A(z\varepsilon) - (z\varepsilon)q = (A - R_q)(z\varepsilon)$$

Так как векторы $y\varepsilon, z\varepsilon \in D(A)$, то $x\varepsilon \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$. Таким образом, мы доказали, что $\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$ - правый $\mathbb{H}$-модуль.

Предложение 2. Для любой пары кватернионов q и p из одного класса сопряженности верно равенство
$$\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}}) = \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{p}}). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$. Тогда существуют $y, z \in D(A)$ такие, что $x = (A - R_q)y$, $x = (A - R_{\overline{q}})z$.

Так как $p \in [q]$, то $p = uq\overline{u}$ для некоторого такого, что $|u| = 1$.

Пусть $y_1 = y\overline{u}$, $z_1 = z\overline{u}$. Тогда
$$(A - R_p)y_1 = Ay_1 - y_1 p = Ay\overline{u} - y\overline{u}uq\overline{u} = (Ay - yq)\overline{u} = x\overline{u},$$
$$(A - R_{\overline{p}})z_1 = Az_1 - z_1\overline{p} = Az\overline{u} - z\overline{u}u\overline{q}\overline{u} = (Az - z\overline{q})\overline{u} = x\overline{u}$$

Таким образом, $x\overline{u} \in \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{p}})$. Так как $\mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{p}})$ - правый $\mathbb{H}$-модуль, то из последнего включения следует, что $x \in \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{p}})$.

Аналогично доказывается, что если $x \in \mathfrak{Im}(A - R_p) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{p}})$, то $x \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$.

Теперь в силу равенства (1) корректным будет следующее определение.

Определение 2. *Дефектным подмодулем* кососимметрического оператора A, соответствующим классу $[q]$, где q — кватернион с ненулевой вещественной частью, будем называть множество $\mathfrak{N}_q = \Big(\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})\Big)^{\perp}$.

2. Дефектные подмодули симплектического образа кососимметрического оператора и формулы фон Неймана

Рассмотрим симплектический образ A^s оператора A относительно фиксированного поля $\mathbb{F}$. Напомним, что оператор A^s действует в $\mathbb{F}$ -бимодуле $H^{\mathbb{F}}$, который также является гильбертовым относительно согласованного скалярного произведения $(x, y) := \mathbb{F}\Big(\langle x, y\rangle\Big)$. Очевидно, что оператор A^s также является кососимметрическим оператором в $H^{\mathbb{F}}$.

Возьмем точку $q \in \mathbb{F}$ с ненулевой вещественной частью и, следуя общепринятым обозначениям, обозначим через $\mathfrak{N}^{\circ}_q = \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})^{\perp_{\mathbb{F}}}$ дефектный $\mathbb{F}$-подмодуль оператора A^s. (Здесь символ $\perp_{\mathbb{F}}$ означает ортогональное дополнение в $H^{\mathbb{F}}$.) Очевидно, что $\mathfrak{N}^{\circ}_q = \ker(A^* - R_q)$.

Как известно, для кососимметрического оператора размерности дефектных подмодулей $\mathfrak{N}^{\circ}_{\mathsf{q}}$ и $\mathfrak{N}^{\circ}_{\overline{\mathsf{q}}}$ совпадают. В нашем случае, когда кососимметрический оператор является симплектическим оброзом кватернионно линейного оператора, имеет место более сильное утверждение.

Предложение 3. Справедливо следующее равенство

$$\mathfrak{N}^{\circ}_q = R_{\varepsilon}\mathfrak{N}^{\circ}_{\overline{q}}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{N}^{\circ}_{\overline{q}}$, т.е. $(A^* - R_{\overline{q}})x = 0$. Тогда $(A^* - R_q)(x\varepsilon) = = R_{\varepsilon}(A^* - R_{\overline{q}})x = 0$, откуда $x\varepsilon \in \mathfrak{N}^{\circ}_q$.

Аналогично доказывается обратное утверждение.

Замечание 2. Возникает естественный вопрос, можно ли дефектный подмодуль кососимметрического (и симметрического) оператора в $\mathbb{F}$-модуле определить так же, как в комплексных пространствах: $\mathfrak{Im}(A - R_q)^{\perp}$. По этому поводу интересно отметить, что $\mathfrak{Im}(A - R_q)^{\perp} = 0$ для любого невещественного q. Действительно, если $y \perp \mathfrak{Im}(A - R_q)$, то для любого $x \in D(A)$ имеем:

$$\begin{aligned}0 = \langle Ax - xq, y\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle x, y\rangle q = (Ax, y) - (Af\varepsilon, y)\varepsilon-\\ -(x, y)q + (x\varepsilon, y)\varepsilon q = ((A - R_q)x, y) - ((A - R_{\overline{q}})x\varepsilon, y)\varepsilon.\end{aligned}$$

Данное равенство равносильно системе равенств

$$\begin{cases} ((A - R_q)x, y) = 0 \\ ((A - R_{\overline{q}})x\varepsilon, y) = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $y \in \mathfrak{N}^{\circ}_q \cap \mathfrak{N}^{\circ}_{\overline{q}} = \{0\}$. Так как данные дефектные подмодули линейно независимы, то $y = 0$. Для доказательства была использована обратная связь между скалярными произведениями в H и $H^{\mathbb{F}}$:

$$\langle x, y\rangle = (x, y) - (x\varepsilon, y)\varepsilon. \tag{2}$$

В дальнейшем весьма существенной является связь между дефектными подмодулями оператора A и его симплектического образа A^s.

Предложение 4. Имеет место следующее равенство:

1. $\mathfrak{N}_q = \mathfrak{N}_q^\circ \dotplus_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_{\overline{q}}^\circ$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{N}_q^\circ \dotplus_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_{\overline{q}}^\circ$, тогда $x = x_q + x_{\overline{q}}$, где $x_q \in \mathfrak{N}_q^\circ$, $x_{\overline{q}} \in \mathfrak{N}_{\overline{q}}^\circ$. С учетом равенства (2) для любого вектора $y \in \mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}})$, получим

$$\langle x, y\rangle = \langle x_q, y\rangle + \langle x_{\overline{q}}, y\rangle = (x_q, y) - (x_q\varepsilon, y)\varepsilon + (x_{\overline{q}}, y) - (x_{\overline{q}}\varepsilon, y)\varepsilon = 0.$$

Следовательно, $\mathfrak{N}_q^\circ \dotplus_{\mathbb{F}} \mathfrak{N}_{\overline{q}}^\circ \subset \mathfrak{N}_q$.

Обратное включение следует из очевидного соотношения $(\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}}))^\perp \subset (\mathfrak{Im}(A - R_q) \cap \mathfrak{Im}(A - R_{\overline{q}}))^{\perp_{\mathbb{F}}}$ и свойств ортогонального дополнения в $H^{\mathbb{F}}$.

Замечание 3. В случае $q \in \mathbb{R}$ множество $\mathfrak{Im}(A - R_q)$ является правым $\mathbb{H}$-модулем, и дефектный подмодуль, соответствующий классу $[q] = \{q\}$, определяется равенством $\mathfrak{N}_q = \mathfrak{Im}(A - R_q)^\perp$. В силу предложения 5 в этом случае имеем $\mathfrak{N}_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}^\circ$.

Непосредственным следствием предложения 5 являются следующие утверждения.

Предложение 5. Имеет место следующее равенство

$$\dim\left[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}\right] = \dim\left[\mathfrak{N}_q^\circ : \mathbb{F}\right]. \tag{3}$$

Доказательство. Утверждение следует из очевидных равенств: $2\dim\left[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}\right] = \dim\left[\mathfrak{N}_q : \mathbb{F}\right] = 2\dim\left[\mathfrak{N}_q^\circ : \mathbb{F}\right]$.

Предложение 6. Если $[p] \neq [q]$, то дефектные подмодули $\mathfrak{N}_q$ и $\mathfrak{N}_p$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{N}_q \cap \mathfrak{N}_p$. Тогда имеют место представления $x = x_1 + x_2$, $x = y_1 + y_2$, $x_1 \in \mathfrak{N}_q^\circ$, $x_2 \in \mathfrak{N}_{\overline{q}}^\circ$, $y_1 \in \mathfrak{N}_p^\circ$, $y_2 \in \mathfrak{N}_{\overline{p}}^\circ$. Таким образом, мы имеем равенство

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2. \tag{4}$$

Действуя на это равенство оператором A^*, получим

$$x_1 q + x_2\overline{q} = y_1 p + y_2\overline{p}. \tag{5}$$

Рассматривая совместно уравнения (4), (5), приходим к необходимым равенствам

$$y_1 = \Big(x_1(\overline{p} - q) + x_2(\overline{p} - \overline{q})\Big)\frac{p - \overline{p}}{|p - \overline{p}|^2};\ y_2 = -\Big(x_1(p - q) + x_2(p - \overline{q})\Big)\frac{p - \overline{p}}{|p - \overline{p}|^2}.$$

Но векторы y_1, y_2 должны, кроме того, удовлетворять равенствам $A^*y_1 = y_1 p$, $A^*y_2 = y_1\overline{p}$. Если эти векторы отличны от нуля, то это возможно лишь при условии $q(\overline{p} - q) = (\overline{p} - q)p$. Из последнего равенства нетрудно получить, что $|q| = |p|$, $\operatorname{Re} p = \operatorname{Re} q$. Это есть условие принадлежности кватернионов одному и тому же классу сопряженности. Полученное противоречие доказывает, что $y_1 = y_2 = 0$, и, следовательно, $x = 0$.

Свойства дефектных подмодулей симметрических операторов в модулях над полем естественным образом переносятся на дефектные подмодули кососимметрических операторов, а именно: размерность дефектного подмодуля $\mathfrak{N}_q^\circ$ остается постоянной для всех $q \in \mathbb{H}$, $\operatorname{Re} q > 0$, а также для всех $q \in \mathbb{H}$, $\operatorname{Re} q < 0$. На основании предложения 5 аналогичный вывод можно сделать для кососимметрического оператора, действующего в кватернионном бимодуле.

Обозначим $n_+ = \dim[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}]$, $\operatorname{Re} q > 0$; $n_- = \dim[\mathfrak{N}_q : \mathbb{H}]$, $\operatorname{Re} q < 0$ и назовем числа $n_\pm$ *дефектными числами* кососимметрического оператора A.

Для кососимметрического оператора $A \in [H]$ имеют место формулы фон Неймана. А именно, справедливо разложение

$$D(A^*) = D(A) \dot{+} \mathfrak{N}_q^\circ \dot{+} \mathfrak{N}_{-\overline{q}}^\circ .$$

Тогда любой вектор x из $D(A^*)$ представим в виде

$$x = x_0 + x_q + x_{-\overline{q}}, \tag{6}$$

где $x_0 \in D(A)$, $x_q \in \mathfrak{N}_q^\circ$, $x_{-\overline{q}} \in \mathfrak{N}_{-\overline{q}}^\circ$. При этом следует заметить, что

$$A^* x = -Ax_0 + x_q q - x_{-\overline{q}}\, \overline{q} . \tag{7}$$

Доказательство формул (6), (7) проводится аналогично доказательству соответствующих формул для симметрического оператора в комплексном гильбертовом пространстве.

Замечание 4. В силу замечания 3 для вещественного q имеет место следующее разложение области определения сопряженного оператора:

$$D(A^*) = D(A) \dot{+} \mathfrak{N}_q \dot{+} \mathfrak{N}_{-q},$$

где $\mathfrak{N}_q$ $\mathfrak{N}_{-q}$ уже $\mathbb{H}$-подмодули в H.

Заключение

В работе всесторонне исследованы свойства дефектных подмодулей кососимметрических операторов, действующих в гильбертовых кватернионных бимодулях, установлена связь между дефектными подмодулями кососимметрического оператора и его симплектического образа. Полученные результаты в дальнейшем предполагается использовать для исследования регулярных расширений кососимметрических операторов методом граничных троек.

Список литературы

1. *S. Albeverio, J. Brasche, M. Malamud, H. Neidhardt.* Inverse Spectral Theory for Symmetric Operators with Several Gaps: Scalar-Type Weyl Functions // University Bonn SFB 611, Preprint no. 166(2004).
2. *V. Derkach.* On Weyl function and generalized resolvents af a Hermitian operator in a Krein space // Integral Equations and Operator Theory, Birkhauser Basel, Volume 23, Number 4, December 1995 P. 387-415.
3. *Stefano De Leo, G. Ducati.* Quaternionic differential operators // arXiv:math-ph/0005023 v3 8 Aug 2002.
4. *Карпенко И.И., Сухтаев А.И., Тышкевич Д.Л.* Об одном подходе к дифференцированию функций кватернионного переменного // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, т. 17 (56), № 1 (2004), С. 30-37.