УДК 532.5: 517.98

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Копачевский Н.Д.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007, Украина
E-mail: *kopachevsky@crimea.edu*

In the paper, eigenoscillations of a thin layer of a rotating ideal fluid (shallow water approximation) are considered. It's proved that this limitting case is an adequate model for investigating of surface waves and isn't an adequate one for study of inner inertial waves due to Corioles force.

1. Постановка задачи

Данная работа является продолжением работы [1], где изучалась проблема малых движений вращающегося слоя идеальной жидкости. Исследования задач гидродинамики идеальной и вязкой жидкости в течение последнего полувека проводятся методами функционального анализа. При этом существенно используется теория полугрупп операторов, спектральная теория линейных оператор-функций, действующих в гильбертовом либо банаховом пространстве, теория линейных операторов в пространстве с индефинитной метрикой и другие методы. Эти методы и результаты исследований отражены во многих монографиях. Применительно к задачам о колебаниях идеальной вращающейся жидкости они развиты, например, в монографии [2], а также в первом томе монографии [3].

В работе [1] доказана теорема об однозначной разрешимости в определенных классах функций начально-краевой задачи о малых движениях слоя идеальной жидкости, близких к равномерному вращению. Соответствующие уравнения и краевые условия исследовались в так называемом приближении мелкой воды (теория приливных, или длинных, волн), когда характерный поперечный размер слоя существенно меньше продольного, а движение жидкости в основном происходит в горизонтальном направлении.

В данной работе изучается проблема, естественно возникающая после исследования начально-краевой задачи. Это проблема собственных колебаний, т.е. решений начально-краевой задачи о свободных движениях гидросистемы, зависящих от времени t по экспоненциальному закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. При этом для соответствующих амплитудных функций возникает спектральная проблема, которая здесь подробно исследуется методами функционального анализа.

Целью данной работы является изучение структуры спектра частот колебаний, вопросы полноты и базисности системы собственных функций, а также вопрос о том, является ли приближение мелкой воды, использованное здесь, адэкватным при изучении поверхностных и внутренних волн в тонком слое вращающейся идеальной жидкости.

Перейдем теперь к подробной постановке задачи (см. [1]). Будем считать, что тонкий слой идеальной жидкости заполняет некоторый водоем (бассейн, море, озеро) и в невозмущенном состоянии равномерно вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega_0 = f/2$, где величину f называют параметром Кориолиса. Если f достаточно мало, то в состоянии равномерного вращения свободную поверхность жидкости Γ считают горизонтальной. Область Ω, занятая жидкостью, при этом представляет собой тонкий слой переменной глубины, характерный размер которой существенно меньше диаметра поверхности Γ.

В теории мелкой воды вертикальную координату «растягивают» таким образом, чтобы характерная величина новой вертикальной координаты была сравнима по порядку с диаметром Γ. В итоге возникает вместо трехмерной двумерная задача о нахождении горизонтальных компонент поля скорости и функции отклонения свободной движущейся поверхности от равновесной горизонтальной свободной поверхности Γ.

Пусть $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ — искомое поле скорости идеальной жидкости в приближении мелкой воды, $\eta = \eta(t,x)$ — поле вертикальных отклонений свободной поверхности, $\rho > 0$ и $g > 0$ — плотность жидкости и ускорение силы тяжести, $x = (x_1, x_2) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^2$, $h = h(x)$ — глубина жидкости, а $\vec{e}_3$ — орт вертикальной оси. Тогда формулировка начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости выглядит следующим образом (см. [4], с. 192, а также [1]):

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} - \rho f(\vec{u}\times\vec{e}_3) + \rho g\nabla\eta = 0 \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + \operatorname{div}(h\vec{u}) = 0 \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.2}$$

$$u_n := \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{ на } \partial\Gamma\,), \qquad \int\limits_\Gamma \eta\, d\Gamma = 0, \tag{1.3}$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \eta(0,x) = \eta^0(x), \quad x\in\Gamma. \tag{1.4}$$

Здесь $\nabla := \sum\limits_{k=1}^{2}\vec{e}_k\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ — двумерный градиент, $\operatorname{div}\vec{u} = \sum\limits_{k=1}^{2}\dfrac{\partial u_k}{\partial x_k}$ — соответствующая дивергенция, а $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma$. Далее в работе предполагается, что функция $h = h(x_1,x_2)$ непрерывно дифференцируема на Γ и выполнено условие

$$h(x_1,x_2) \geqslant h_0 > 0. \tag{1.5}$$

Отметим еще, что первое условие (1.3) есть условие непротекания жидкости через боковые стенки бассейна, а второе условие есть следствие сохранения объема жидкости при малых колебаниях.

Осуществим в (1.1)–(1.4) с учетом (1.5) переход к новым искомым функциям согласно формулам

$$\rho^{1/2}h^{1/2}\vec{u} =: \vec{v}, \quad g^{1/2}\rho^{1/2}\eta =: \zeta. \tag{1.6}$$

Тогда вместо (1.1) – (1.4) приходим к начально краевой задаче

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - f(\vec{v}\times\vec{e}_3) + g^{1/2}h^{1/2}\nabla\zeta = \vec{0} \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + g^{1/2}\operatorname{div}(h^{1/2}\vec{v}) = 0 \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.8}$$

$$v_n := \vec{v}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{ на } \partial\Gamma\,), \qquad \int\limits_{\Gamma} \zeta\, d\Gamma = 0, \tag{1.9}$$

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}^0(x) := \rho^{1/2}h^{1/2}(x)\vec{u}^0(x), \quad \zeta(0,x) = \zeta^0(x) := g^{1/2}\rho^{1/2}\eta^0(x), \tag{1.10}$$

которая имеет более симметричный вид, чем исходная.

Назовем *собственными колебаниями* такие решения задач (1.1)–(1.3) и соответственно (1.7)–(1.9), которые зависят от t по закону $\exp(i\omega t)$, т.е.

$$\vec{u}(t,x) = e^{i\omega t}\vec{u}(x), \quad \eta(t,x) = e^{i\omega t}\eta(x), \quad \vec{v}(t,x) = e^{i\omega t}\vec{v}(x), \quad \zeta(t,x) = e^{i\omega t}\zeta(x). \tag{1.11}$$

Здесь ω — частота колебаний гидросистемы, а $\vec{u}(x)$, $\eta(x)$, $\vec{v}(x)$ и $\zeta(x)$ — амплитудные функции, отвечающие частоте ω. Так как в данной гидросистеме полная энергия жидкости сохраняется (см. [1], п.3), то эта система консервативна и диссипация энергии отсутствует. Поэтому частоты колебаний ω вещественны.

Для амплитудных функций (1.11) из задач (1.1)–(1.3) и (1.7)–(1.9) возникает задача на собственные значения

$$-\rho f(\vec{u}\times\vec{e}_3) + \rho g\nabla\eta = -i\omega\rho\vec{u} \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.12}$$

$$\operatorname{div}(h\vec{u}) = -i\omega\eta \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.13}$$

$$u_n = 0 \quad (\text{ на } \partial\Gamma\,), \qquad \int\limits_{\Gamma} \eta\, d\Gamma = 0, \tag{1.14}$$

а также задача

$$-f(\vec{v}\times\vec{e}_3) + g^{1/2}h^{1/2}\nabla\zeta = -i\omega\vec{v} \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.15}$$

$$g^{1/2}\operatorname{div}(h^{1/2}\vec{v}) = -i\omega\zeta \quad (\text{ на } \Gamma\,), \tag{1.16}$$

$$v_n = 0 \quad (\text{ на } \partial\Gamma\,), \qquad \int\limits_{\Gamma} \zeta\, d\Gamma = 0. \tag{1.17}$$

Эти спектральные задачи и являются предметом исследования в данной работе.

2. Переход к операторному уравнению в гильбертовом пространстве

При исследовании задачи (1.15)–(1.17) методами функционального анализа можно осуществить те же преобразования и использовать те же функциональные пространства и операторы, которые в работе [1] позволили перейти от (1.7)–(1.9) к задаче Коши вида

$$\frac{dy}{dt} = i\mathcal{B}y, \quad y(0) = y^0, \tag{2.1}$$

с неограниченным самосопряженным оператором $\mathcal{B}$, действующим в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Для собственных колебаний вида (1.11), т.е. для решений $y(t) = ye^{i\omega t}$, $y \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$, задачи (2.1) теперь возникает спектральная проблема

$$\mathcal{B}y = \omega y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H}, \tag{2.2}$$

которая ниже и будет изучаться.

Повторяя выкладки из [2], опишем свойства оператора $\mathcal{B}$, его структуру, а также соответствующие функциональные пространства. Пусть $L_2(\Gamma)$ — гильбертово пространство комплекснозначных скалярных функций $\{\zeta(x)\}$ с нормой

$$(\zeta,\zeta)_0 = \|\zeta\|_0^2 := \int_\Gamma |\zeta|^2\, d\Gamma. \tag{2.3}$$

Тогда последнее условие (1.17) принимает вид

$$(\zeta, 1_\Gamma)_0 = 0 \Longleftrightarrow \zeta \in H := L_2(\Gamma)\ominus\{1_\Gamma\}, \tag{2.4}$$

где 1_Γ — функция, заданная на Γ и тождественно равная единице.

Далее, пусть $\vec{L}_2(\Gamma)$ — пространство комплекснозначных вектор-функций $\{\vec{v}(x)\}$ со скалярным произведением

$$(\vec{v},\vec{w}) := \int_\Gamma \vec{v}\cdot\overline{\vec{w}}\, d\Gamma \tag{2.5}$$

и соответствующей нормой. Как известно (см., например, [2], с. 103),

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma)\oplus\vec{G}(\Gamma), \quad \vec{G}(\Gamma) := \left\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Gamma):\ \vec{u} = \nabla\varphi,\quad \int_{\partial\Gamma}\varphi\, d\Gamma = 0\right\}, \tag{2.6}$$

$$\vec{J}_0(\Gamma) := \Big\{\vec{w}\in\vec{L}_2(\Gamma):\ \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad w_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma)\Big\}, \tag{2.7}$$

где операции $\operatorname{div}\vec{w}$ и w_n для элементов из $\vec{L}_2(\Gamma)$ понимаются в смысле обобщенных функций (распределений), см. [2], с. 101–102.

Пусть P_0 и P_G — ортопроекторы на $\vec{J}_0(\Gamma)$ и $\vec{G}(\Gamma)$ соответственно. Представляя $\vec{v}\in\vec{L}_2(\Gamma)$ из (1.15)–(1.17) в виде

$$\vec{v} = \vec{w} + \nabla\varphi, \quad \vec{w}\in\vec{J}_0(\Gamma), \quad \nabla\varphi\in\vec{G}(\Gamma), \tag{2.8}$$

и проктируя (1.15) на $\vec{J}_0(\Gamma)$ и $\vec{G}(\Gamma)$ соответственно, приходим вместо (1.15)–(1.17) к задаче вида

$$\begin{pmatrix} fA_{11} & fA_{12} & -g^{1/2}A_{13} \\ fA_{21} & fA_{22} & -g^{1/2}A_{23} \\ -g^{1/2}A_{31} & -g^{1/2}A_{32} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix} = i\omega\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \nabla\varphi\\ \zeta\end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered} A_{11}\vec{w} := P_0(\vec{w}\times\vec{e}_3), \quad A_{21}\vec{w} := P_G(\vec{w}\times\vec{e}_3), \quad \forall\,\vec{w}\in\vec{J}_0(\Gamma); \\ A_{12}\nabla\varphi := P_0(\nabla\varphi\times\vec{e}_3), \quad A_{22}\nabla\varphi := P_G(\nabla\varphi\times\vec{e}_3), \quad \forall\,\nabla\varphi\in\vec{G}(\Gamma); \\ A_{31}\vec{w} := \nabla h^{1/2}\cdot\vec{w}, \quad \forall\,\vec{w}\in\vec{J}_0(\Gamma); \quad A_{32}\nabla\varphi := \operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi); \\ A_{13}\zeta := P_0(h^{1/2}\nabla\zeta), \quad A_{23}\zeta := P_G(h^{1/2}\nabla\zeta); \quad A_{33}\zeta := 0. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Коротко задачу (2.9) можно записать в виде

$$\mathcal{A}y = i\omega y, \quad y := (\vec{w};\nabla\varphi;\zeta)^t, \tag{2.11}$$

где $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ — вектор-столбец искомых элементов, а $\mathcal{A}$ — операторная матрица из (2.9). Вводя еще операторную матрицу $\mathcal{B}$ согласно соотношению

$$\mathcal{A} = i\mathcal{B}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{2.12}$$

приходим вместо (2.11) к задаче (2.2), где теперь

$$\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \tag{2.13}$$

а элементы B_{ik} операторной матрицы $\mathcal{B}$ связаны с элементами (2.10) соотношениями

$$iB_{kj} = A_{kj}, \quad k, j = 1, 2, 3. \tag{2.14}$$

Таким образом, далее изучается задача (2.2), где все обозначения уже введены.

3. Свойства коэффициентов операторной матрицы

Перечислим сначала те свойства операторных коэффициентов A_{ik} из (2.10), которые уже доказаны в [1].

Свойство 1. Операторы A_{ij}, $i, j = 1, 2$, являются ограниченными операторами, нормы которых не превышают единицы. Построенная по ним операторная матрица $A := (A_{ij})_{i,j=1}^2$ является ограниченным оператором, действующим в $\vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) = \vec{L}_2(\Gamma)$ и обладающим свойствами

$$\|A\| \leqslant 1, \quad A^* = -A. \qquad \square \tag{3.1}$$

Свойство 2. Оператор $A_{31}: \ \vec{J}_0(\Gamma) \longrightarrow H$ ограничен. Оператор A_{13}, заданный на плотном множестве

$$\mathcal{D}(A_{13}) := \left\{\zeta \in H : \ \zeta(x) \in C^1(\overline{\Gamma})\right\} \subset H, \tag{3.2}$$

обладает свойством $A_{13} \subset -A_{31}^*$, а после замыкания по непрерывности с $\mathcal{D}(A_{13})$ на все H — свойствами

$$\overline{A_{13}} = -A_{31}^*, \quad \mathcal{D}(\overline{A_{13}}) = H. \qquad \square \tag{3.3}$$

Опираясь на это свойство, далее будем считать, что оператор A_{13} уже расширен на все H и для этого расширения сохраним то же обозначение.

Свойство 3. Оператор A_{23}, действующий по закону $A_{23}\zeta := P_G(h^{1/2}\nabla\zeta)$ и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(A_{23}) := H_\Gamma^1 := \left\{\zeta \in H : \ \|\zeta(x)\|_{1,0}^2 := \int_\Gamma |\nabla\zeta|^2 \, d\Gamma < \infty\right\}, \tag{3.4}$$

является замкнутым оператором. Оператор A_{32}, действующий по закону $A_{32}\nabla\varphi := \operatorname{div}(h^{1/2}\nabla\varphi)$ и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(A_{32}) := \left\{\nabla\varphi \in \vec{C}^1(\overline{\Gamma}) \subset \vec{G}(\Gamma) : \ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Gamma} = 0\right\}, \tag{3.5}$$

обладает свойством

$$A_{32} \subset -A_{23}^*. \tag{3.6}$$

После расширения на множество

$$\mathcal{D}(\widetilde{A}_{32}) := \vec{G}(\Gamma) \cap \left\{ \nabla\varphi \in \vec{H}^1(\Gamma) : \left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\partial\Gamma} = 0 \right\} \tag{3.7}$$

расширенный оператор $\widetilde{A}_{32}$ обладает свойствами

$$\widetilde{A}_{32} = \overline{A}_{32} = -A_{23}^*. \qquad \square \tag{3.8}$$

Далее A_{32} будем считать расширенным на множество (3.7) и обозначать этот оператор тем же символом.

Свойство 4. Оператор A_{32} допускает факторизацию

$$A_{32} = -B\nabla^{-1}, \tag{3.9}$$

где $B : \mathcal{D}(B) \subset H \longrightarrow H$ — оператор краевой задачи

$$B\varphi := -\Delta_h\varphi := -\mathrm{div}\,(h^{1/2}\nabla\varphi) = \psi \in H, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}(B) := \{\varphi \in H^2(\Gamma) : \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma\,)\}, \tag{3.11}$$

а ∇^{-1} — оператор, обратный оператору ∇, рассматриваемому как (ограниченный изометрический) оператор из H_Γ^1 в $\vec{G}(\Gamma)$.

Оператор A_{32} имеет ограниченный и притом компактный обратный оператор A_{32}^{-1}, действующий из H в $\vec{G}(\Gamma)$. $\square$

Свойство 5. Оператор A_{23} имеет ограниченный и притом компактный оператор A_{23}^{-1} действующий из $\vec{G}(\Gamma)$ в H. $\square$

Введем далее операторную матрицу

$$A_0 := \begin{pmatrix} 0 & A_{23} \\ A_{32} & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{H}_0 \longrightarrow \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{H}_0 := \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \tag{3.12}$$

$$\mathcal{D}(A_0) := \mathcal{D}(A_{32}) \oplus \mathcal{D}(A_{23}) \subset \mathcal{H}_0, \tag{3.13}$$

где $\mathcal{D}(A_{32})$ и $\mathcal{D}(A_{23})$ заданы в (3.7) и (3.4).

Свойство 6. Оператор A_0 является неограниченным кососамосопряженным оператором, т.е.

$$A_0^* = -A_0, \quad \mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A_0^*). \tag{3.14}$$

Он имеет нулевое ядро, а его спектр $\sigma(A_0)$ дискретен, $\sigma(A_0) = \sigma_d(A_0)$, и расположен на мнимой оси симметрично относительно $\mathbb{R}$. При этом две его ветви собственных значений $\lambda_k^\pm = \lambda_k^\pm(A_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k^\pm = \pm ic(A_0)k^{1/2}[1 + o(1)] \quad (k \longrightarrow \infty), \quad c(A_0) := \left(\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma h^{-1}(x)\,d\Gamma \right)^{-1/2}, \tag{3.15}$$

а отвечающие этим числам собственные элементы

$$(\nabla\varphi_k^\pm; \zeta_k^\pm)^t, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.16}$$

образуют ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}_0 = \vec{G}(\Gamma) \oplus H$.

Обратный оператор A_0^{-1} является компактным кососимметричным оператором, действующим в $\mathcal{H}_0$. $\square$

Рассмотрим теперь свойства других операторных блоков в операторной матрице (2.9).

Лемма 1. *Спектр оператора $A = (A_{kl})_{k,l=1}^2 : \vec{L}_2(\Gamma) \longrightarrow \vec{L}_2(\Gamma)$, $\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma)$ состоит из двух точек $\lambda = \pm i$, являющихся бесконечнократными собственными значениями.*

Доказательство. Как следует из определений (2.10) элементов A_{kl}, представления $\vec{v}$ в виде суммы ортогональных элементов (см. (2.8) и (2.6)), задача на собственные значения для операторной матрицы A равносильна уравнению

$$A\vec{v} := \vec{v} \times \vec{e}_3 = \lambda \vec{v}, \quad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2. \tag{3.17}$$

Отсюда в проекциях получаем систему уравнений

$$v_2 = \lambda v_1, \quad -v_1 = \lambda v_2,$$

откуда следует, что $\lambda \neq 0$ и $(1+\lambda^2)v_1 = (1+\lambda^2)v_2 = 0$. Так как v_1 и v_2 не равны нулю одновременно, то $1 + \lambda^2 = 0$, т.е. $\lambda = \pm i$. Тогда собственные элементы задачи (3.17) имеют соответственно вид

$$v_1(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad v_1(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2).$$

Так как здесь $v_1 = v_1(x_1, x_2)$ можно выбрать произвольным элементом из $\vec{L}_2(\Gamma)$, то каждое из собственных значений $\lambda = \pm i$ бесконечнократно.

Далее, можно аналогичным образом убедиться, что при $\lambda \neq \pm i$ и любом $\vec{w} \in \vec{L}_2(\Gamma)$ уравнение

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{w} \tag{3.18}$$

однозначно разрешимо,

$$\vec{v} = -\frac{1}{(\lambda^2+1)}\left((\lambda w_1 + w_2)\vec{e}_1 + (\lambda w_2 - w_1)\vec{e}_2\right), \tag{3.19}$$

т.е. существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный на всем $\vec{L}_2(\Gamma)$. $\square$

Введем в рассмотрение прямоугольные операторные матрицы

$$Q := \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \end{pmatrix} : \ H \longrightarrow \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma), \quad Q^* := (A_{13}^*; A_{23}^*) : \ \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \longrightarrow H, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(A_{23}) = H_\Gamma^1 \subset H, \quad \mathcal{D}(Q^*) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \mathcal{D}(A_{23}^*), \tag{3.21}$$

а также операторную матрицу $\mathcal{B}_g$ блочного вида,

$$\mathcal{B}_g := \begin{pmatrix} 0 & iQ \\ -iQ^* & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_g) = \mathcal{D}(Q^*) \oplus \mathcal{D}(Q). \tag{3.22}$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{B}_g$, заданный на области определения* (3.22), *является самосопряженным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H$. Его ядро* $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}_g$ *бесконечномерно и образует множество*

$$\mathcal{H}_0 := Ker\,\mathcal{B}_g = \left\{ (\vec{w}; \nabla\varphi; 0)^t : \ \nabla\varphi = -(A_{23}^*)^{-1} A_{13}^* \vec{w}, \quad \forall\, \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma) \right\}. \tag{3.23}$$

Сужение $\mathcal{B}_{g_1} := \mathcal{B}_g \Big| (\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}_g)^{\perp}$ *оператора* $\mathcal{B}_g$ *на ортогональное дополнение* $(\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}_g)^{\perp} =: \mathcal{H}_1$ *в* $\mathcal{H}$ *является неограниченным самосопряженным оператором с дискретным спектром. При этом собственные значения оператора $\mathcal{B}_{g_1}$ расположены симметрично (относительно нуля на $\mathbb{R}$) и образуют множество $\left\{\lambda_k^{\pm}(\mathcal{B}_{g_1})_{k=1}^{\infty}\right\}$ конечнократных собственных значений, обладающих свойствами*

$$-\lambda_k^- = \lambda_k^+ = \mu_k^{1/2}(B_0), \quad B_0 := Q^*Q = A_{13}^* A_{13} + A_{23}^* A_{23}, \quad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(A_{23}^* A_{23}). \tag{3.24}$$

Здесь $B_0 : \mathcal{D}(B_0) \subset H \longrightarrow H$ — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, имеющий компактный обратный. Собственные значения $\{\mu_k(B_0)\}_{k=1}^{\infty}$ оператора B_0 образуют дискретный спектр с предельной точкой $\mu = +\infty$. При этом имеют место свойства

$$\lambda_k(A_{23}^* A_{23}) \leqslant \mu_k(B_0) \leqslant \|A_{13}\|^2 + \lambda_k(A_{23}^* A_{23}), \tag{3.25}$$

а числа $\lambda_k(A_{23}^* A_{23})$ имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(A_{23}^* A_{23}) = \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma} h^{-1}(x)\, d\Gamma \right)^{-1} k[1 + o(1)] \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{3.26}$$

Собственные элементы оператора $\mathcal{B}_{g_1}$ образуют ортогональный базис в $\mathcal{H}_1 = (\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}_g)^{\perp}$.

Доказательство. Так как $-iQ$ и iQ^* — взаимно сопряженные неограниченные операторы и объединение их областей значений есть все пространство $\mathcal{H}$, то $\mathcal{B}_g$ — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$.

Условие $\mathcal{B}_g y = 0$, $y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_g) \subset \mathcal{H}$, равносильно соотношениям

$$iA_{13}\zeta = 0, \quad iA_{23}\zeta = 0, \quad -i(A_{13}^* \vec{w} + A_{23}^* \nabla\varphi) = \vec{0}. \tag{3.27}$$

Поскольку A_{23} имеет обратный (см. свойство 5), то $\zeta = 0$, и первые два уравнения удовлетворяются. Далее, так как $A_{23}^* = -A_{32}$ также имеет ограниченный обратный (свойство 4), то из последнего уравнения имеем

$$\nabla\varphi = -(A_{23}^*)^{-1} A_{13}^* \vec{w}, \quad \forall\, \vec{w} \in \vec{J}_0(\Gamma).$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}_g$ имеет вид (3.23).

Рассмотрим теперь задачу $\mathcal{B}_g y = \lambda y$ при $\lambda \neq 0$. Имеем

$$iA_{13}\zeta = \lambda \vec{w}, \quad iA_{23}\zeta = \lambda \nabla\varphi, \quad -i(A_{13}^* \vec{w} + A_{23} \nabla\varphi) = \lambda\zeta. \tag{3.28}$$

Выражая $\vec{w}$ и $\nabla\varphi$ из первых двух уравнений через ζ и подставляя в третье, приходим к задаче

$$B_0\zeta := (A_{13}^* A_{13} + A_{23}^* A_{23})\zeta = \lambda^2 \zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(A_{23}^* A_{23}). \tag{3.29}$$

Заметим, что задача

$$A_{23}^* A_{23}\zeta = \mu\zeta, \quad \zeta \in \mathcal{D}(A_{23}^* A_{23}), \tag{3.30}$$

уже исследована в [1] при доказательстве теоремы 7 этой работы. Там, в частности, доказано, что эта задача имеет дискретный положительный спектр, а собственные значения μ_k имеют асимптотическое поведение

$$\mu_k(A_{23}^* A_{23}) = \left(\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Gamma} h^{-1}(x)\, d\Gamma \right)^{-1} k[1 + o(1)] \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{3.31}$$

Так как оператор $A_{13}^* A_{13}$ ограничен и неотрицателен, то легко установить, что задача (3.29) также имеет дискретный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu_k = \mu_k(B_0)$, и из максиминимального принципа следует, что имеют место неравенства (3.25). Из этих неравенств, в частности, получаем, что числа $\mu_k(B_0)$ также имеют асимптотическое поведение (3.26).

По числам $\lambda_k^{\pm} = \pm\sqrt{\mu_k(B_0)}$ и собственным элементам $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора B_0, образующим ортогональный базис в H и энергетическом пространстве $H_{B_0} = \mathcal{D}(A_{23}) = H_{\Gamma}^1$ оператора B_0 собственные элементы задачи (3.28) при $\lambda \neq 0$ строятся по формулам

$$\vec{w}_k^{\pm} = \pm i\mu_k^{-1/2} A_{13}\zeta_k, \quad \nabla\varphi_k^{\pm} = \pm i\mu_k^{-1/2} A_{23}\zeta_k, \quad \zeta_k^{\pm} = \zeta_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.32}$$

Убедимся, что совокупность собственных элементов

$$y_k^{\pm} := (\vec{w}_k^{\pm}; \nabla\varphi_k^{\pm}; \zeta_k)^t, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.33}$$

отвечающих собственным значениям $\lambda_k^{\pm} = \pm\sqrt{\mu_k}$, образует ортогональный базис в $\mathcal{H}_1$. Свойство ортогональности этих элементов очевидно, так как $\mathcal{B}_{g1}$ — самосопряженный оператор. Докажем, что система (3.33) полна в $\mathcal{H}_1$.

Пусть $y_0 = (\vec{w}_0; \nabla\varphi_0; \zeta_0)^t$ — элемент из $\mathcal{H}$, ортогональный элементам (3.33). Тогда $(y_0, y_k^{\pm})_{\mathcal{H}} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, т.е.

$$(\vec{w}_0, \vec{w}_k^{\pm}) + (\nabla\varphi_0, \nabla\varphi_k^{\pm}) + (\zeta_0, \zeta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.34}$$

Подставляя сюда выражения для $\vec{w}_k^{\pm}$ и $\nabla\varphi_k^{\pm}$ из (3.32), будем иметь соотношения

$$\pm i\mu_k^{-1/2}(\vec{w}_0, A_{13}\zeta_k) \pm i\mu_k^{-1/2}(\nabla\varphi_0, A_{23}\zeta_k) + (\zeta_0, \zeta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е.

$$(\mp i\mu_k^{-1/2} A_{13}^* \vec{w}_0 + \zeta_0, \zeta_k) \mp i\mu_k^{-1/2}(\nabla\varphi_0, A_{23}\zeta_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.35}$$

Так как здесь $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ортогональная система в H и H_{Γ}^1, то отсюда следует, что соотношение (3.35), во-первых, справедливо при любом $\zeta \in \mathcal{D}(A_{23}) = H_{\Gamma}^1$, а во-вторых, в силу плотности $\mathcal{D}(A_{23})$ в H из этого соотношения следует, что $\nabla\varphi_0 \in \mathcal{D}(A_{23}^*)$ и

$$\mp i\mu_k^{-1/2}(A_{13}^* \vec{w}_0 + A_{23}^* \nabla\varphi_0) + \zeta_0 = 0.$$

Из этих двух уравнений, отвечающих знакам „+” и „−”, получаем, что $\zeta_0 = 0$, $\nabla\varphi_0 = -(A_{23}^*)^{-1} A_{13}^* \vec{w}_0$, т.е. $y_0 = (\vec{w}_0; \nabla\varphi_0; \zeta_0)^t \in \operatorname{Ker} \mathcal{B}_g$ (см. (3.23)). Теорема доказана. $\square$

Как следует из теоремы 1, собственные значения $\lambda_k^{\pm}(\mathcal{B}_{g_1})$ оператора $\mathcal{B}_{g_1} = \mathcal{B}_g\Big|(\operatorname{Ker}\mathcal{B}_g)^{\perp}$ выражаются через собственные значения $\mu_k(B_0)$ оператора $B_0 = Q^*Q$ по формулам (3.24), причем спектры операторов B_0 и $\mathcal{B}_{g_1}$ дискретны. Введем еще в рассмотрение оператор

$$C := QQ^* = \begin{pmatrix} A_{13}A_{13}^* & A_{13}A_{23}^* \\ A_{23}A_{13}^* & A_{23}A_{23}^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(C) := \mathcal{D}(A_{23}A_{13}^*) \oplus (A_{23}A_{23}^*). \tag{3.36}$$

Теорема 2. *В области $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ спектры операторов $\mathcal{B}_{g_1}$ и C совпадают.*

Доказательство. Задачу на собственные значения (3.28) для оператора $\mathcal{B}_g$ при $\lambda \neq 0$, т.е. для $\mathcal{B}_{g_1}$, можно записать в виде

$$iQ\zeta = \lambda\vec{v}, \quad -iQ^*\vec{v} = \lambda\zeta, \quad \vec{v} = \vec{w} + \nabla\varphi. \tag{3.37}$$

Так как $\lambda \neq 0$, то отсюда следует, что

$$C\vec{v} := QQ^*\vec{v} = \lambda^2\vec{v}, \quad \vec{v} \in \mathcal{D}(QQ^*) = \mathcal{D}(C). \tag{3.38}$$

С другой стороны, как установлено выше, собственные значения λ задачи (3.37) образуют дискретный спектр, $\lambda = \lambda_k^{\pm} = \pm\sqrt{\mu_k(B_0)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда и из связи задач (3.37) и (3.38) следует, что задача (3.38) при $\lambda \neq 0$ также имеет дискретный спектр, совпадающий со спектром оператора $\mathcal{B}_{g_1}$.

В самом деле, разыскивая резольвенту оператора $\mathcal{B}_{g_1}$, рассмотрим задачу

$$iQ\zeta - \lambda\vec{v} = \vec{v}_1, \quad -iQ^*\vec{v} - \lambda\zeta = \zeta_1, \tag{3.39}$$

где $\vec{v}_1$ и ζ_1 — заданные элементы. Вычисления показывают, что решение задачи (3.39) существует тогда и только тогда, когда числа λ^2 не совпадают с собственными значениями $\mu = \mu_k(B_0)$. При этом существуют ограниченные обратные операторы $(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1}$ и $(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1}$, а решение задачи (3.39) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \vec{v} \\ \zeta \end{pmatrix} = R_\lambda(\mathcal{B}_{g_1})\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1} & iQ(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1} \\ -iQ^*(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1} & \lambda(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \zeta_1 \end{pmatrix}, \tag{3.40}$$

где $R_\lambda(\mathcal{B}_{g_1})$ — резольвента оператора $\mathcal{B}_{g_1}$ при $\lambda \neq 0$. □

Замечание 1. При выводе формулы (3.40) были использованы соотношения

$$(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1}Q \subset Q(Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1}, \quad (Q^*Q - \lambda^2 I)^{-1}Q^* \subset Q^*(QQ^* - \lambda^2 I)^{-1}, \tag{3.41}$$

показывающие, что левые части можно расширить по непрерывности на все пространство и эти расширения совпадают с правыми частями. □

Введем еще один оператор $\mathcal{B}_f$ формулой

$$\mathcal{B}_f = \operatorname{diag}(B; 0), \quad B := -iA, \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_f) = \vec{L}_2(\Gamma) \oplus H, \tag{3.42}$$

где $A = (A_{kl})_{k,l=1}^2 : \vec{L}_2(\Gamma) \longrightarrow \vec{L}_2(\Gamma)$.

Тогда исследуемая задача (2.2) принимает вид

$$(f\mathcal{B}_f + g^{1/2}\mathcal{B}_g)y = \omega y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_g) \subset \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}(\Gamma) \oplus H, \tag{3.43}$$

где $f \in \mathbb{R}$ — параметр Кориолиса, а $g > 0$ — ускорение силы тяжести. Свойства оператора $\mathcal{B}_g$ уже изучены в лемме 1, а свойства оператора $\mathcal{B}_f$ следуют из свойств оператора A, описанных в лемме 1. В частности, оператор $B = B^*$ имеет в качестве спектра бесконечнократные собственные значения $\lambda = \pm 1$. Отметим, что если изучается задача о собственных колебаниях невращающейся жидкости, то в (3.43) следует положить $f = 0$.

4. О структуре ядра основной операторной матрицы

Рассмотрим, опираясь на доказанные свойства операторных коэффициентов, спектральную задачу (3.43) при $\omega = 0$.

Теорема 3. *Точка* $\omega = 0$ *является бесконечнократным собственным значением задачи* (3.43).

Доказательство. Если $f = 0$, то, очевидно, решения задачи (3.43) при $\omega = 0$ принадлежат подпространству $\mathrm{Ker}\, \mathcal{B}_g = \mathcal{H}_0$ (см. (3.23)), $\dim \mathcal{H}_0 = \infty$.

Заметим теперь, что при $f \neq 0$ и $\omega = 0$ спектральная задача (3.43), как следует из исходных уравнений (1.7) — (1.9) при $\vec{v}$ и ζ, не зависящих от t, приводит к краевой задаче

$$-f(\vec{v} \times \vec{e}_3) + g^{1/2}h^{1/2}\nabla\zeta = 0, \quad \mathrm{div}\,(h^{1/2}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Gamma), \tag{4.1}$$

$$v_n := \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{4.2}$$

Из второго уравнения (4.1) и первого уравнения (4.2) следует, что $\vec{u} := h^{1/2}\vec{v} \in \vec{J}_0(\Gamma)$. Тогда из первого уравнения (4.1) получаем, что векторное поле

$$h\nabla\zeta = fg^{-1/2}(\vec{u} \times \vec{e}_3), \quad \forall\, \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma), \tag{4.3}$$

является потенциальным, так как $\mathrm{rot}(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \mathrm{div}\, \vec{u} = 0$. Значит,

$$h\nabla\zeta = \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma). \tag{4.4}$$

Для нахождения потенциала φ сформулируем краевую задачу, решения которой позволяют найти $\zeta = \zeta(x)$, а потому и $\varphi = \varphi(x)$. Вычисляя дивергенцию от левой части (4.4) и используя (4.3), приходим к уравнению

$$\mathrm{div}\,(h\nabla\zeta) =: \Delta_h\zeta = fg^{-1/2}\mathrm{div}\,(\vec{u} \times \vec{e}_3) \quad (\text{в } \Gamma). \tag{4.5}$$

Далее, из (4.3) следует, что

$$-fg^{-1/2}\vec{u} = h\nabla\zeta \times \vec{e}_3, \tag{4.6}$$

откуда с использованием (4.2) получаем, что

$$-fg^{-1/2}u_n = h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3) \cdot \vec{n} = h(\vec{e}_3 \times \vec{n}) \cdot \nabla\zeta =: h\vec{\tau} \cdot \nabla\zeta = h\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \tag{4.7}$$

т.е.

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma) \Longrightarrow \zeta = \mathrm{const} \quad (\text{на } \partial\Gamma). \tag{4.8}$$

Таким образом, функция $\zeta = \zeta(x)$ является решением задачи

$$\Delta_h \zeta = f g^{-1/2} \mathrm{div}\,(\vec{u} \times \vec{e}_3) \quad (\text{в } \Gamma\,), \quad \zeta = \mathrm{const} \quad (\text{на } \partial\Gamma\,), \quad \int\limits_\Gamma \zeta d\Gamma = 0. \tag{4.9}$$

Рассмотрим вместо (4.9) задачу

$$\Delta_h \widetilde{\zeta} = f g^{-1/2} \mathrm{div}\,(\vec{u} \times \vec{e}_3) \quad (\text{в } \Gamma\,), \quad \widetilde{\zeta} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma\,). \tag{4.10}$$

Нетрудно видеть, что решения задач (4.9) и (4.10) отличаются лишь на константу:

$$\zeta = \widetilde{\zeta} - |\Gamma|^{-1} \int\limits_\Gamma \widetilde{\zeta}\, d\Gamma =: P_H \widetilde{\zeta}, \tag{4.11}$$

где P_H — ортопроектор из $L_2(\Gamma)$ на $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$.

Покажем, что задача (4.10) имеет единственное обобщенное решение $\widetilde{\zeta} \in H_0^1(\Gamma)$, а потому и ζ определяется однозначно по любому полю $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$. Введем в $H_0^1(\Gamma)$ норму по закону

$$\|\widetilde{\zeta}\|^2_{1,\Gamma} := \int\limits_\Gamma h(x) |\nabla \widetilde{\zeta}|^2 \, d\Gamma, \quad \widetilde{\zeta} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma\,). \tag{4.12}$$

Так как для $h = h(x)$ выполнено условие (1.5), то норма (4.12) эквивалентна стандартной норме пространства $H^1(\Gamma)$,

$$\|\widetilde{\zeta}\|^2_{H^1(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma (|\nabla \widetilde{\zeta}|^2 + |\widetilde{\zeta}|^2) \, d\Gamma. \tag{4.13}$$

Легко проверить, опираясь на формулу Грина для эллиптического оператора $\Delta_h = \mathrm{div}\,(h\nabla \ldots)$, а также на формулу Гаусса–Остроградского, что обобщенное решение задачи (4.10) определяется тождеством

$$(\widetilde{\zeta}, \psi)_{1,\Gamma} = f g^{-1/2} \int\limits_\Gamma (\vec{u} \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \psi \, d\Gamma, \quad \forall\, \psi \in H_0^1(\Gamma). \tag{4.14}$$

Так как правая часть (4.14) при любом $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ является линейным функционалом в пространстве $H_0^1(\Gamma)$ с нормой (4.12), то задача (4.10) имеет единственное решение

$$\widetilde{\zeta} =: f g^{-1/2} V \vec{u}, \quad V : \ \vec{J}_0(\Gamma) \longrightarrow H_0^1(\Gamma), \tag{4.15}$$

из пространства $H_0^1(\Gamma)$, а потому задача (4.9) имеет единственное решение $\zeta = P_H \widetilde{\zeta} \in H^1(\Gamma)$ при любом $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$.

Эти рассуждения показывают, что $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ имеет вид

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{B} = \mathrm{Ker}(f\mathcal{B}_f + g^{1/2}\mathcal{B}_g) = \Big\{ y = (\vec{w}; \nabla\varphi; \zeta) : \ \vec{v} = \vec{w} + \nabla\varphi = h^{-1/2}\vec{u}, \quad \zeta = P_H \widetilde{\zeta},$$

$$\widetilde{\zeta} = f g^{-1/2} V \vec{u}, \quad \forall\, \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma) \Big\}, \quad \dim \mathrm{Ker}\,\mathcal{B} = \infty. \tag{4.16}$$

Отметим еще, что при $f = 0$ из (4.14) следует, что $\zeta = 0$ и $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B} = \mathrm{Ker}\,\mathcal{B}_g = \mathcal{H}_0$. $\square$

5. Основная операторная матрица при постоянной и переменной глубине жидкости

Рассмотрим теперь свойства спектра задачи (3.43) при $\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Перепишем эту задачу в виде

$$fB\vec{v} + ig^{1/2}Q\zeta = \omega\vec{v}, \quad -ig^{1/2}Q^*\vec{v} = \omega\zeta. \tag{5.1}$$

Так как $\omega \neq 0$, то отсюда, исключая ζ, приходим к спектральной задаче

$$L(\omega)\vec{v} := (gC + \omega fB - \omega^2 I)\vec{v} = 0, \quad \vec{v} \in \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(QQ^*) \subset \vec{L}_2(\Gamma). \tag{5.2}$$

Здесь $B = -iA = B^*$, $\sigma(B) = \{-1; 1\}$, а $C = QQ^*$ — неограниченный неотрицательный оператор. Из определения оператора C следует, что

$$\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} Q^* = \{\vec{v} = (\vec{w}; \nabla\varphi)^t : \vec{w} + \nabla\varphi = h^{-1/2}\vec{u}, \quad \forall\, \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)\ \}, \tag{5.3}$$

а из доказательства теоремы 2 видно, что ненулевые собственные значения оператора C совпадают с собственными значениями оператора $B_0 = Q^*Q$, т.е.

$$\mu_k(B_0) = \mu_k(Q^*Q) = \mu_k(QQ^*) = \mu_k(C), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{5.4}$$

Поэтому они, как и $\mu_k(B_0)$, имеют асимптотическое поведение (3.26):

$$\mu_k(C) = \left(\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Gamma} h^{-1}(x)\, d\Gamma\right)^{-1} k[1 + o(1)] \quad (k \longrightarrow \infty). \tag{5.5}$$

Отсюда следует, что сужение оператора C на ортогональное дополнение к ядру $\operatorname{Ker} C$ является неограниченным положительно определенным оператором с дискретным спектром, а обратный к нему оператор является компактным положительным оператором класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > 1$ (определения классов $\mathfrak{S}_p$ см. в [5], гл. 2,3).

Введем в рассмотрение ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{H}_0 \oplus \vec{H}_1, \quad \vec{H}_0 := \operatorname{Ker} C, \quad \vec{H}_1 := (\operatorname{Ker} C)^{\perp} = \vec{L}_2(\Gamma) \ominus \vec{H}_0. \tag{5.6}$$

Очевидно, оператор C в этом ортогональном разложении имеет вид

$$C = \operatorname{diag}(0; C_1), \quad C_1 := P_1 C P_1, \tag{5.7}$$

где P_1 — ортопроектор на $\vec{H}_1$. Тогда C_1 — неограниченный положительно определенный оператор, действующий в $\vec{H}_1$ на области определения $\mathcal{D}(C_1)$, плотной в $\vec{H}_1$, и имеющий компактный положительный обратный оператор C_1^{-1}. Собственные значения $\lambda_k(C_1)$ оператора C_1 имеют асимптотическое поведение (5.5).

С использованием ортопроекторов P_0 и P_1 на подпространства $\vec{H}_0$ и $\vec{H}_1$ задачу (5.2) можно переписать в виде двух уравнений

$$f(B_{00}\vec{v}_0 + B_{01}\vec{v}_1) = \omega\vec{v}_0, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = P_0\vec{v} + P_1\vec{v}, \tag{5.8}$$

$$gC_1\vec{v}_1 + \omega f(B_{10}\vec{v}_0 + B_{11}\vec{v}_1) - \omega^2\vec{v}_1 = \vec{0}, \quad B_{jk} := P_j B P_k, \quad k = 0, 1. \tag{5.9}$$

Введем в (5.9) новый искомый элемент соотношением

$$g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_1 =: \omega\vec{v}_2, \quad \vec{v}_2 \in \mathcal{D}(C_1^{1/2}), \quad \omega \neq 0. \tag{5.10}$$

Тогда задача (5.8)–(5.10) в векторно-матричной форме приобретает вид

$$\begin{pmatrix} f\begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} \\ B_{10} & B_{11} \end{pmatrix} & g^{1/2}\begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{1/2} \end{pmatrix} \\ g^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & C_1^{1/2} \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

в точности такой же, который уже встречался при исследовании колебаний идеальной жидкости в произвольном равномерно вращающемся сосуде (см. [2], с. 217). Поэтому для исследования задачи (5.11), а также задач (5.1), (5.2) при $\omega \neq 0$, можно применить, в частности, те же методы, которые были использованы в [2].

Однако задача (5.11) имеет отличия от соответствующей спектральной задачи из [2], на которых сейчас следует остановиться более подробно. С этой целью изучим свойства операторов B_{jk} из (5.11).

Отметим сначала, что в силу леммы 1 и связи $B = -iA$ имеем, как уже упоминалось выше, свойства

$$B = B^* = (B_{jk})_{j,k=0}^1, \quad \sigma(B) = \{-1; 1\}, \tag{5.12}$$

причем числа -1 и 1 являются бесконечнократными собственными значениями. Значит, $\|B\| = 1$, $\|B_{jk}\| \leqslant 1$, $j,k = 0,1$.

Лемма 2. *Подпространство $\vec{H}_1$ имеет следующее описание*

$$\vec{H}_1 = \{h^{1/2}\nabla\varphi : \quad \forall\nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma)\}. \tag{5.13}$$

При $h = h_0 = \mathrm{const} > 0$ имеем

$$\vec{H}_0 = \vec{J}_0(\Gamma), \quad \vec{H}_1 = \vec{G}(\Gamma). \tag{5.14}$$

Доказательство. Как следует из (5.3)

$$\operatorname{Ker} C = \vec{H}_0 = \{h^{-1/2}\vec{u} : \quad \forall\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)\}. \tag{5.15}$$

Так как $h^{1/2}\nabla\varphi \perp h^{-1/2}\vec{u}$ при $\nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma)$ и $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$, то $\vec{H}_1$ имеет описание (5.13). Наконец, при $h = h_0 > 0$ из (5.3) следует, что $\vec{H}_0 = \vec{J}_0(\Gamma)$ и потому $\vec{H}_1 = \vec{G}(\Gamma)$. □

Изучим, опираясь на лемму 2, свойства операторов B_{00} и B_{11} или, что равносильно, операторов A_{00} и A_{11}, $A_{kk} = iB_{kk}$, $k = 0,1$.

Рассмотрим теперь более подробно вопрос о структуре и свойствах оператора $B = -iA$ в ортогональных разложениях пространства $\vec{L}_2(\Gamma)$, отвечающих постоянной и переменной глубине жидкости $h = h(x_1, x_2)$. Сначала используем ортогональное разложение (см., например, [2], с. 103)

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}_1(\Gamma) \oplus \vec{G}_0(\Gamma), \tag{5.16}$$

$$\vec{G}_1(\Gamma) = \{\vec{v} = \nabla\psi : \ \Delta\psi = 0 \ (\text{в } \Gamma)\}, \quad \vec{G}_0(\Gamma) := \{\vec{w} = \nabla\varphi : \ \varphi = 0 \ (\text{на } \partial\Gamma)\}. \tag{5.17}$$

Теорема 4. *Если $h(x_1, x_2) \equiv h_0 > 0$, то в ортогональном разложении* (5.16) *пространства $\vec{L}_2(\Gamma)$ оператор B представим в виде операторной матрицы*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & B_{22} & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{22} = B_{22}^*, \quad B_{13}^* = B_{31}, \tag{5.18}$$

$$\sigma(B_{22}) = \{1; -1\}, \quad \sigma\begin{pmatrix} 0 & B_{13} \\ B_{31} & 0 \end{pmatrix} = \{-1; 1\}, \tag{5.19}$$

причем точки ± 1 *являются бесконечнократными собственными значениями как первого, так и второго оператора из* (5.19)

Доказательство. 1^0. Пусть $\vec{v} = \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$. Тогда

$$B\vec{v} = B\vec{u} = -i(\vec{u} \times \vec{e}_3) = -i(\vec{e}_1 u_2 - \vec{e}_2 u_1).$$

Так как $\mathrm{rot}(\vec{u} \times \vec{e}_3) = -\vec{e}_3 \mathrm{div}\vec{u} = 0$, то $B\vec{v} = B\vec{u}$ — потенциальный вектор, т.е. $-i(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \nabla\widetilde{\varphi} \in \vec{G}(\Gamma)$. Отсюда следует, что $\vec{u} = -i\nabla\widetilde{\varphi} \times \vec{e}_3$. Тогда

$$u_n = -i(\nabla\widetilde{\varphi} \times \vec{e}_3) \cdot \vec{n} = -i(\vec{e}_3 \times \vec{n}) \cdot \nabla\widetilde{\varphi} = -i\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\tau} = 0 \Longrightarrow \widetilde{\varphi} = \mathrm{const} = 0 \quad (\text{ на } \partial\Gamma\,),$$

т.е. $\nabla\widetilde{\varphi} \in \vec{G}_0(\Gamma)$.

Это означает, что при $\vec{v} = \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ область значений оператора B содержится в $\vec{G}_0(\Gamma)$ и потому проекции $B\vec{u}$ на $\vec{J}_0(\Gamma)$ и $\vec{G}_1(\Gamma)$ равны нулю. Значит, в матричном представлении оператора B, отвечающем ортогональному разложению (5.16), т.е. в представлении

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

имеем

$$B_{11} = B_{21} = 0. \tag{5.21}$$

2^0. Пусть теперь $\vec{v} = \nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma)$. Тогда

$$B\vec{v} = -i\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3 = -i\left\{\vec{e}_1\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_2} - \vec{e}_2\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_1}\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{div}(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = 0 \;(\text{ в } \Gamma\,), \quad (\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) \cdot \vec{n} = (\vec{e}_3 \times \vec{n}) \cdot \nabla\varphi^0 = \frac{\partial\varphi^0}{\partial\tau} = 0 \;(\text{ на } \partial\Gamma\,), \tag{5.22}$$

и потому

$$B\vec{v} = -i\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3 \in \vec{J}_0(\Gamma).$$

Поэтому

$$B_{23} = B_{33} = 0. \tag{5.23}$$

3^0. Если $\vec{v} = \nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma)$, то $\Delta\varphi_1 = 0 \quad (\text{ в } \Gamma\,)$ (см. (5.17)). Тогда снова

$$B\vec{v} = -i(\nabla\varphi_1 \times \vec{e}_3) = -i\left\{\vec{e}_1\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} - \vec{e}_2\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1}\right\} \tag{5.24}$$

и потому

$$\mathrm{rot}(B\vec{v}) = -i\,\mathrm{rot}(\nabla\varphi^1 \times \vec{e}_3) = i\vec{e}_3\Delta\varphi^1 = \vec{0},$$

т.е. $B\vec{v}$ — потенциальный вектор:

$$-i\nabla\varphi^1 \times \vec{e}_3 = \nabla\psi^1. \tag{5.25}$$

Отсюда и из (5.24) непосредственно выводим, что

$$\Delta\psi^1 = -i\left(\frac{\partial^2\varphi^1}{\partial x_1\partial x_2} - \frac{\partial^2\varphi^1}{\partial x_2\partial x_1}\right) = 0 \quad (\text{в } \Gamma),$$

т.е. $B\vec{v} \in \vec{G}_1(\Gamma)$. Значит,

$$B_{12} = B_{32} = 0. \tag{5.26}$$

Таким образом, ввиду свойств (5.21), (5.23), (5.26) матрица (5.20) имеет вид (5.18). Далее, так как $B = B^*$, то $B_{22} = B_{22}^*$ и $B_{13}^* = B_{31}$. Проверим теперь свойства (5.19).

4^0. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора B_{22}. Имеем

$$B_{22}\nabla\varphi^1 = \lambda\nabla\varphi^1 \Longleftrightarrow -i(\nabla\varphi^1 \times \vec{e}_3) = \lambda\nabla\varphi^1, \quad \nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma). \tag{5.27}$$

Так как $\sigma(B) = \{-1; 1\}$ (см. лемму 1), то в силу матричной структуры (5.18) оператора B спектр оператора B_{22} принадлежит множеству $\{-1; 1\}$. Проверим, что оба этих числа входят в спектр оператора B_{22}. При $\lambda = 1$ из (5.27) получаем

$$-i\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1}, \quad i\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} \Longrightarrow \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1} + i\frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2} = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$\varphi^1(x_1, x_2) = f(x_1 + ix_2), \tag{5.28}$$

т.е. является произвольной аналитической функцией переменной $z = x_1 + ix_2$, а потому число $\lambda = 1$ является бесконечнократным собственным значением B_{22}.

Аналогичные выкладки при $\lambda = -1$ показывают, что в этом случае $\varphi^1(x_1, x_2) = f(x_1 - ix_2) = f(\overline{z})$, т.е. является произвольной антианалитической функцией.

5^0. Рассмотрим теперь для элементов вида $(\vec{u}; \nabla\varphi^0)^t \in \vec{J}_0(\Gamma) \oplus \vec{G}_0(\Gamma)$ задачу на собственные значения для операторной матрицы из (5.19), т.е. задачу

$$B_{13}\nabla\varphi^0 = \lambda\vec{u}, \quad B_{31}\vec{u} = \lambda\nabla\varphi^0. \tag{5.29}$$

Здесь снова в качестве собственных значений могут быть лишь числа ± 1. В самом деле, при $\lambda = 1$ имеем уравнения

$$-i(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = \vec{u}, \quad -i(\vec{u} \times \vec{e}_3) = \nabla\varphi^0. \tag{5.30}$$

Отсюда следует, что

$$u_1 = -i\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_2}, \quad u_2 = i\frac{\partial\varphi^0}{\partial x_1}, \quad \forall\, \varphi^0 \in H_0^1(\Gamma), \tag{5.31}$$

т.е. $\lambda = 1$ является бесконечнократным собственным значением задачи (5.29). При этом условия $\operatorname{div}\vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Gamma)$ и $u_n = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma)$ для функции $\vec{u} = \sum_{k=1}^2 u_k\vec{e}_k \in \vec{J}_0(\Gamma)$ с компонентами (5.31) выполнены автоматически.

Аналогично разбирается случай $\lambda = -1$. Теорема доказана. $\square$

Перейдем теперь к рассмотрению матричной структуры оператора $B = -iA$ при переменной глубине жидкости $h = h(x_1, x_2)$. Предварительно построим ортогональное разложение пространства $\vec{L}_2(\Gamma)$ на три подпространства, обобщающее разложение (5.16) на случай переменной $h = h(x_1, x_2)$.

Из леммы 2 и из (5.3) следует, что при $h \not\equiv h_0$ имеет место ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma; h) \oplus \vec{G}(\Gamma; h), \tag{5.32}$$

$$\vec{J}_0(\Gamma; h) := \operatorname{Ker} C = \left\{ h^{-1/2}\vec{u} : \ \forall\, \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma) \right\}, \tag{5.33}$$

$$\vec{G}(\Gamma; h) := \vec{H}_1 = \left\{ h^{1/2}\nabla\varphi : \ \nabla\varphi \in \vec{G}(\Gamma), \quad \int\limits_{\partial\Gamma} \varphi\, ds = 0 \right\}. \tag{5.34}$$

Введем подпространство

$$\vec{G}_0(\Gamma; h) := \left\{ h^{1/2}\nabla\psi : \ \psi = 0 \text{ на } \partial\Gamma \right\} \subset \vec{G}(\Gamma; h) \tag{5.35}$$

и найдем ортогональное дополнение $\vec{G}_1(\Gamma; h)$ к $\vec{G}_0(\Gamma; h)$ в $\vec{G}(\Gamma; h)$.

Лемма 3. *Имеет место ортогональное разложение*

$$\vec{L}_2(\Gamma) = \vec{J}_0(\Gamma; h) \oplus \vec{G}_1(\Gamma; h) \oplus \vec{G}_0(\Gamma; h), \tag{5.36}$$

$$\vec{G}_1(\Gamma; h) := \left\{ h^{1/2}\nabla\varphi^1 : \ \Delta_h\varphi^1 := div(h\nabla\varphi^1) = 0 \ \textit{в}\ \Gamma, \quad \int\limits_{\partial\Gamma} \varphi^1\, ds = 0 \right\}. \tag{5.37}$$

Доказательство. Пусть $h^{1/2}\nabla\psi$ и $h^{1/2}\nabla\varphi^1$ — гладкие элементы из $\vec{G}_0(\Gamma; h)$ и $\vec{G}_1(\Gamma; h)$ соответственно. Тогда

$$(h^{1/2}\nabla\psi, h^{1/2}\nabla\varphi^1) = \int\limits_\Gamma h\nabla\psi \cdot \overline{\nabla\varphi^1}\, d\Gamma = -\int\limits_\Gamma \operatorname{div}(\psi h \overline{\nabla\varphi^1})\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma \operatorname{div}(h\overline{\nabla\varphi^1})\psi\, d\Gamma =$$

$$= -\int\limits_{\partial\Gamma} \psi h \overline{\nabla\varphi^1} \cdot \vec{n}\, ds + \int\limits_\Gamma \psi \overline{\Delta_h\varphi^1}\, d\Gamma = \int\limits_\Gamma \psi \overline{\Delta_h\varphi^1}\, d\Gamma = 0.$$

Так как здесь ψ — произвольный гладкий элемент из пространства $H_0^1(\Gamma)$, плотного в $L_2(\Gamma)$, то отсюда следует, что φ^1 является h - гармонической функцией, т.е. $\Delta_h\varphi^1 = 0$.

Для произвольных (негладких) элементов из $\vec{G}_1(\Gamma; h)$ свойство ортогональности устанавливается аналогично, если операцию $\Delta_h\varphi^1$ понимать в смысле обобщенных функций (распределений).

Теперь ортогональное разложение (5.36) следует из (5.32) и доказанного разложения

$$\vec{G}(\Gamma; h) := \vec{G}_1(\Gamma; h) \oplus \vec{G}_0(\Gamma; h). \qquad \square \tag{5.38}$$

Заметим, что при $h(x_1, x_2) \equiv h_0 > 0$ ортогональное разложение (5.36) совпадает с разложением (5.16). Элементы из $\vec{G}(\Gamma; h)$ можно называть h - *потенциальными* элементами с *потенциалами* $\varphi(x_1, x_2)$, образующими пространство $H^1(\Gamma; h)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^1(\Gamma; h)} := \int\limits_\Gamma h|\nabla\varphi|^2\, d\Gamma < \infty, \qquad \int\limits_{\partial\Gamma} \varphi\, d\Gamma = 0, \tag{5.39}$$

эквивалентной в силу (1.5) стандартной норме пространства С.Л. Соболева $H^1(\Gamma)$.

Введем в рассмотрение матричное представление оператора B, $B\vec{u} := -i(\vec{u}\times\vec{e}_3)$, в ортогональное разложение (5.36) пространства $\vec{L}_2(\Gamma)$, отвечающем переменной глубине жидкости $h = h(x_1, x_2)$. Будем иметь

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{pmatrix}. \tag{5.40}$$

Введем также диагональную матрицу

$$\widehat{h} := \mathrm{diag}(h; h^{-1}; h^{-1}), \tag{5.41}$$

отвечающую разложению (5.36). Нетрудно видеть, что в силу условия(1.5) матрица $\widehat{h}$ является положительно определенным ограниченным оператором, действующим в $\vec{L}_2(\Gamma)$, причем обратный оператор $\widehat{h}^{-1}$ обладает этими же свойствами.

Теорема 5. *В ортогональном разложении* (5.36) *матрица B имеет антидиагональный вид и обладает свойствами* (5.18), (5.19), *т.е. такими же, как и в случае* $h(x_1, x_2) \equiv h_0 > 0$.

Доказательство. Установим сначала, что матрица

$$\widetilde{B} := B\widehat{h} = \begin{pmatrix} B_{11}h & B_{12}h^{-1} & B_{13}h^{-1} \\ B_{21}h & B_{22}h^{-1} & B_{23}h^{-1} \\ B_{31}h & B_{32}h^{-1} & B_{33}h^{-1} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} & \widetilde{B}_{13} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} & \widetilde{B}_{23} \\ \widetilde{B}_{31} & \widetilde{B}_{32} & \widetilde{B}_{33} \end{pmatrix} \tag{5.42}$$

является антидиагональной.

Пусть $\vec{v} = h^{-1/2}\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma; h)$. Тогда $\widehat{h}\vec{v} = h^{1/2}\vec{u}$ и потому

$$\widetilde{B}\vec{v} = (B\widehat{h})\vec{v} = -i(\widehat{h}\vec{v} \times \vec{e}_3) = -ih^{1/2}\vec{u} \times \vec{e}_3 = h^{1/2}\nabla\varphi^0 \in \vec{G}(\Gamma; h). \tag{5.43}$$

В самом деле, так как $\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$, то $-i\vec{u} \times \vec{e}_3 = \nabla\varphi^0$, $\nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma)$. Этот факт уже установлен при доказательстве теоремы 4 в п. 1^0. Приведенное свойство означает, что выполнены свойства

$$\widetilde{B}_{11}\vec{v} = 0, \quad \widetilde{B}_{21}\vec{v} = 0, \quad \widetilde{B}_{31}\vec{v} \in \vec{G}_0(\Gamma; h), \quad \forall\vec{v} \in \vec{J}_0(\Gamma; h), \tag{5.44}$$

т.е. $\widetilde{B}_{11} = \widetilde{B}_{21} = 0$.

Далее, пусть $\vec{w} = h^{1/2}\nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma; h)$. Тогда $\widehat{h}\vec{w} = h^{-1/2}\nabla\varphi^0$ и

$$\widetilde{B}\vec{w} = (B\widehat{h})\vec{w} = -ih^{-1/2}(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = h^{-1/2}\vec{u}, \quad \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma). \tag{5.45}$$

Действительно, свойство $-i(\nabla\varphi^0 \times \vec{e}_3) = \vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma)$ установлено при доказательстве п. 2 теоремы 4 (см. (5.22)). Отсюда имеем свойства $\widetilde{B}_{23} = \widetilde{B}_{22} = 0$.

Из доказанных соотношений и связей (5.42) между матричными элементами матриц $\widetilde{B}$ и B получаем, что для матрицы B из (5.40) выполнены свойства

$$B_{11} = B_{21} = B_{23} = B_{33} = 0. \tag{5.46}$$

Так как матрица B является самосопряженным оператором, то отсюда имеем также свойства

$$B_{12}(= B_{21}^*) = B_{32}(= B_{23}^*) = 0, \tag{5.47}$$

т.е. B действительно имеет антидиагональный вид (5.18) и при переменной глубине жидкости.

Убедимся теперь, что последнее утверждение теоремы 4 имеет место и при $h(x_1,x_2)\not\equiv h_0>0$.

Пусть $\vec{v}=h^{1/2}\nabla\varphi^1\in\vec{G}_1(\Gamma;h)$. Тогда задача $B_{22}\vec{v}=\lambda\vec{v}$ приводит к соотношению

$$-ih^{1/2}\nabla\varphi^1\times\vec{e}_3=\lambda h^{1/2}\nabla\varphi^1\Longleftrightarrow -i\nabla\varphi^1\times\vec{e}_3=\lambda\nabla\varphi^1. \tag{5.48}$$

Однако вторая задача (5.48) уже разобрана в п. 4^0 доказательства теоремы 4 (см. (5.27)), и там установлено, что числа $\lambda=\pm1$ являются бесконечнократными собственными значениями.

Аналогичное рассмотрение задачи

$$B_{31}\vec{v}=\lambda\vec{w},\quad B_{13}\vec{w}=\lambda\vec{v},\quad \vec{v}=h^{-1/2}\vec{u}\in\vec{J}_0(\Gamma;h),\quad \vec{w}=h^{1/2}\nabla\varphi^0\in\vec{G}_0(\Gamma;h), \tag{5.49}$$

приводит к уравнениям

$$-ih^{-1/2}\vec{u}\times\vec{e}_3=\lambda h^{1/2}\nabla\varphi^0,\quad -ih^{1/2}\nabla\varphi^0\times\vec{e}_3=\lambda h^{-1/2}\vec{u}, \tag{5.50}$$

из которых следует, что

$$h^{1/2}(\nabla\varphi^0\times\vec{e}_3)=\lambda^2h^{1/2}(\nabla\varphi^0\times\vec{e}_3),\quad \nabla\varphi^0\in\vec{G}_0(\Gamma), \tag{5.51}$$

а потому числа $\lambda=\pm1$ являются бесконечнократными собственными значениями, а собственные элементы имеют соответственно вид

$$\begin{pmatrix} h^{-1/2}\vec{u} \\ \mp ih^{-1/2}\vec{u}\times\vec{e}_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mp ih^{1/2}\nabla\varphi^0\times\vec{e}_3 \\ h^{1/2}\nabla\varphi^0 \end{pmatrix},\quad \forall\,\vec{u}\in\vec{J}_0(\Gamma)\Longleftrightarrow\forall\,\nabla\varphi^0\in\vec{G}_0(\Gamma). \tag{5.52}$$

Теорема доказана. □

Следствием из теорем 4 и 5 является такой выжный для дальнейшего факт: как при постоянной, так и при переменной глубине жидкости $h(x_1,x_2)$ матричное представление оператора $B=-iA$ в ортогональном разложении

$$\vec{L}_2(\Gamma)=\vec{H}_0\oplus\vec{H}_1=\vec{J}_0(\Gamma;h)\oplus\vec{G}(\Gamma;h),\quad \vec{H}_0\in\operatorname{Ker}C, \tag{5.53}$$

имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} 0 & B_{01} \\ B_{10} & B_1 \end{pmatrix}, \tag{5.54}$$

$$B_{01}=(0;B_{13}),\quad B_{10}=B_{01}^*,\quad B_1=\operatorname{diag}(B_{22};0), \tag{5.55}$$

где B_{13}, B_{31} и B_{22} — элементы антидиагональной матрицы (5.18), отвечающей как случаю $h\equiv h_0$, так и случаю $h\not\equiv h_0$.

Такая структура операторной матрицы B ниже будет существенно использована при рассмотрении свойств решений изучаемой спектральной задачи.

6. Основная теорема о спектре

Вернемся к изучению спектральной задачи (5.11) при $\omega \neq 0$ и учтем (5.54). Возникает проблема

$$\begin{pmatrix} f\begin{pmatrix} 0 & B_{01} \\ B_{10} & B_1 \end{pmatrix} & g^{1/2}\begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{1/2} \end{pmatrix} \\ g^{1/2}\begin{pmatrix} 0 & C_1^{1/2} \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$\vec{v}_0 = h^{-1/2}\vec{u} \in \vec{J}_0(\Gamma; h), \quad \vec{v}_1 = h^{1/2}\nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma; h); \quad \vec{v}_2 = h^{1/2}\nabla\varphi^0 \in \vec{G}_0(\Gamma; h), \tag{6.2}$$

которая приводит к системе уравнений

$$fB_{01}\vec{v}_1 = \omega\vec{v}_0, \quad fB_{10}\vec{v}_0 + fB_1\vec{v}_1 + g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_2 = \omega\vec{v}_1, \quad g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_1 = \omega\vec{v}_2. \tag{6.3}$$

Исключая из этой системы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_2$, приходим к спектральной задаче для нахождения элементов $\vec{v}_1 = h^{1/2}\nabla\varphi^1 \in \vec{G}_1(\Gamma; h)$:

$$gC_1\vec{v}_1 + \omega fB_1\vec{v}_1 + f^2B_{10}B_{01}\vec{v}_1 - \omega^2\vec{v}_1 = 0. \tag{6.4}$$

Здесь C_1 — неограниченный положительно определенный оператор, имеющий компактный обратный оператор и степенную асимптотику собственных значений (см. (5.5)–(5.7)), а операторы B_1 и B_{01}, $B_{10} = B_{01}^*$ ограничены.

Осуществим в (6.4) замену искомых элементов по формуле

$$g^{1/2}C_1^{1/2}\vec{v}_1 = \vec{\eta}\ (= \omega\vec{v}_2) \tag{6.5}$$

и подействуем слева (ограниченным) оператором $g^{-1/2}C_1^{-1/2}$. Тогда возникает задача

$$\left(I + f^2g^{-1}T + \omega fg^{-1}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2} - \omega^2g^{-1}C_1^{-1}\right)\vec{\eta} = \vec{0}, \quad T := C_1^{-1/2}B_{10}B_{01}C_1^{-1/2}, \tag{6.6}$$

где все операторные коэффициенты, кроме единичного, компактные и самосопряженные операторы, а потому квадратный (относительно ω) операторный пучок также самосопряженный.

Линеаризуем задачу (6.6) по параметру ω, введя еще одну замену

$$\vec{\xi} = \omega g^{-1/2}C_1^{-1/2}\vec{\eta}. \tag{6.7}$$

Это приводит к уравнению

$$\begin{pmatrix} I + f^2g^{-1}T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} - \omega\begin{pmatrix} -fg^{-1}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2} & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

в пространстве $(\vec{G}_1(\Gamma; h))^2$.

Теорема 6. *Задача* (6.8) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей положительных и отрицательных собственных значений* $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельными точками* $\pm\infty$ *и асимптотическим поведением*

$$\omega_k^{\pm} = \pm g^{1/2}\lambda_k(C_1^{1/2})[1 + o(1)] =$$

$$= \pm[g(4\pi)^{-1}\int\limits_{\Gamma} h^{-1}(x)\,d\Gamma]^{-1}k^{1/2}[1+o(1)], \quad k \longrightarrow \infty. \tag{6.9}$$

Доказательство. Оно основано на теореме А.С. Маркуса и В.И. Мацаева из [7], [8]. Действительно, так как C_1^{-1} имеет степенную асимптотику собственных значений, то вторая операторная матрица из (6.8), допускающая представление

$$\begin{pmatrix} -fg^{-1}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2} & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -fg^{-1/2}C_1^{-1/2}B_1 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.10}$$

является слабым возмущением самосопряженного оператора

$$\begin{pmatrix} 0 & g^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.11}$$

поскольку $C_1^{-1/2}B_1$ — компактный оператор. Далее, оператор (6.11) имеет две ветви собственных значений $\{\pm g^{-1/2}\lambda_k(C_1^{-1/2})\}_{k=1}^{\infty}$, которые также имеют степенную асимптотику, как это следует из (5.5)–(5.7). Поэтому по теореме А.С. Маркуса и В.И. Мацаева оператор (6.10) имеет две ветви собственных значений, а эти ветви — ту же асимптотику при $k \longrightarrow \infty$. Наконец, задача (6.8) в силу компактности оператора T опять-таки по теореме А.С. Маркуса и В.И. Мацаева имеет две ветви собственных значений с той же асимптотикой, что и у оператора (6.11). □

Теорема 7. *Собственные элементы* $\{(\vec{\eta}_k^{\pm};\vec{\xi}_k^{\pm})\}_{k=1}^{\infty}$ *задачи* (6.8), *отвечающие собственным значениям* $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$, *образуют базис, ортогональный по квадратичным формам операторных матриц из* (6.8).

Доказательство. Осуществим в (6.8) замену искомого элемента, пользуясь свойством неотрицательности оператора T:

$$(I + f^2g^{-1}T)^{1/2}\vec{\eta} =: \vec{\psi}. \tag{6.12}$$

Тогда взамен (6.8) приходим к задаче

$$\begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} - \omega\mathcal{N}\begin{pmatrix} \vec{\psi} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \tag{6.13}$$

$$\mathcal{N} = \begin{pmatrix} -(I+f^2g^{-1}T)^{-1/2}C_1^{-1/2}B_1C_1^{-1/2}(I+f^2g^{-1}T)^{-1/2} & g^{-1/2}(I+f^2g^{-1}T)^{-1/2}C_1^{-1/2} \\ g^{-1/2}C_1^{-1/2}(I+f^2g^{-1}T)^{-1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

т.е. к проблеме отыскания характеристических чисел операторной матрицы, являющейся компактным самосопряженным оператором в пространстве $\left(\vec{G}_1(\Gamma;h)\right)^2$, причем этот оператор имеет нулевое ядро.

Поэтому по теореме Гильберта – Шмидта совокупность собственных элементов $\left\{(\vec{\psi}^{\pm};\vec{\xi}^{\pm})_{k=1}^{\infty}\right\}$ задачи (6.13), отвечающая собственным значениям $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$, образует базис, ортогональный как в пространстве $\left(\vec{G}_1(\Gamma;h)\right)^2$, так и по форме операторной матрицы (6.13). Отсюда, возвращаясь от (6.13) к задаче (6.8) путем обратной замены (6.12), приходим к утверждению теоремы. □

Слкдствием доказанных теорем является такой важный вывод.

Теорема 8 (Основная теорема о спектре)**.** *Спектральная задача* (3.43) *имеет чисто точечный спектр, состоящий из бесконечнократного собственного значения* $\omega = 0$, *которому отвечает собственное подпространство* $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ *из* (4.16), *и двух ветвей* $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ *ненулевых конечнократных собственных значений с предельными точками* $\omega = \pm\infty$. *Этому спектру отвечает совокупность собственных элементов, образующая базис, ортогональный в пространстве* $\vec{L}_2(\Gamma) \oplus H$ *и по форме оператора* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Свойство ортогональности собственных элементов, отвечающих различным собственным значениям, очевидно, так как $\mathcal{B}$ — самосопряженный оператор. Далее, по теореме 3 точка $\omega = 0$ является бесконечнократным собственным значением задачи (3.43), которому отвечает собственное подпространство $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$ из (4.16). Наконец, ненулевой спектр задачи (3.43), как доказано выше, дискретен и состоит из двух ветвей конечнократных собственных значений $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ с предельными точками $\omega = \pm\infty$ (при $k \longrightarrow \infty$).

Из этих свойств и общих фактов спектральной теории самосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве (см., например, [9], п.190, а также [10], с.268), приходим к выводу, что спектр задачи (3.43) чисто точечный и потому совокупность всех собственных элементов, отвечающая всем собственным значениям (в том числе и ортонормированная последовательность элементов базиса из $\mathrm{Ker}\,\mathcal{B}$), образует ортогональный базис в $\vec{L}_2(\Gamma) \oplus H$ и по форме оператора $\mathcal{B}$. □

В качестве замечания к этой теореме отметим, что для собственных значений $\{\omega_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.43) можно получить двусторонние оценки по той же самой схеме, по которой в ([2], с. 222 – 225) устанавливались аналогичные оценки для операторной матрицы из ([2], с. 217, уравн. (5.6)). Не приводя подробных выводов, сформулируем лишь окончательный результат, который аналогичен формулам (5.46) и (6.8) из [2] и имеет вид

$$\sqrt{f^2 + 4g\lambda_k(C_1)} - f \leqslant 2|\omega_k^{\pm}| \leqslant \sqrt{f^2 + 4g\lambda_k(C_1)} + f, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{6.14}$$

Отсюда, в частности, также следуют асимптотические формулы (6.9).

7. О приближенном вычислении собственных значений и собственных функций спектральной задачи

Переходя к рассмотрению этого вопроса, осуществим в системе уравнений (1.15)–(1.17) замену искомой функции по формуле

$$h^{1/2}\vec{v}\ (= \rho^{1/2}h\vec{u}) = \vec{w}. \tag{7.1}$$

Приходим к задаче

$$i\omega\vec{w} - f(\vec{w} \times \vec{e}_3) + g^{1/2}h^{1/2}\nabla\zeta = 0, \quad i\omega\zeta + g^{1/2}\mathrm{div}\vec{w} = 0. \tag{7.2}$$

Как уже доказано выше, эта задача имеет вещественный спектр, состоящий из бесконечнократного собственного значения $\omega = 0$ и дискретного спектра $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений с предельными точками $\pm\infty$.

Будем считать, что $|\omega| \neq f > 0$. Тогда векторное поле $\vec{w}$ из (7.2) можно выразить из первого уравнения (7.2) через $\nabla\zeta$:

$$\vec{w} = g^{1/2}h(\omega^2 - f^2)^{-1}[i\omega\nabla\zeta + f(\nabla\zeta \times \vec{e}_3)]. \tag{7.3}$$

(Здесь функция ζ, пропорциональная (см. (1.6)) вертикальному смещению свободной поверхности, играет роль функции состояния С.Л. Соболева, см., например, [11], с. 298 – 304, используемой для вращающейся идеальной жидкости взамен потенциала скорости или потенциала смещения.)

Подставляя (7.3) во второе уравнение (7.2), приходим к уравнению

$$g\omega\Delta_h\zeta + \omega(\omega^2 - f^2)\zeta - igf\,\mathrm{div}[h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3)] = 0, \quad \Delta_h\zeta := \mathrm{div}(h\nabla\zeta) \quad (\text{в } \Gamma). \tag{7.4}$$

Краевое условие $w_n = 0$ (на $\partial\Gamma$) приводит к связи

$$i\omega\frac{\partial\zeta}{\partial n} + f\frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma). \tag{7.5}$$

Таким образом, для функции $\zeta = \zeta(x_1, x_2)$ возникает спектральная задача (7.4)–(7.5), причем спектральный параметр ω входит в уравнение (7.4) в наибольшей третьей степени, а в краевое условие (7.5) — в первой.

Заметим, что если рассматривается случай невращающейся жидкости, т.е. $f = 0$, то задача (7.4)–(7.5) переходит при $\omega \neq 0$ в задачу

$$\Delta_h\zeta + \omega^2\zeta = 0 \quad (\text{в } \Gamma), \quad \frac{\partial\zeta}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma), \quad \int\limits_\Gamma \zeta\, d\Gamma = 0, \tag{7.6}$$

которая ранее исследовалась, например, в [3], т.1, с. 259 – 261.

Определим далее обобщенное решение задачи (7.4)–(7.5). Пусть $H^1(\Gamma)$ — гильбертово пространство с квадратом нормы

$$\|\zeta\|^2_{H^1(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma h|\nabla\zeta|^2 d\Gamma + \left(\int\limits_\Gamma \zeta\, d\Gamma\right)^2, \tag{7.7}$$

эквивалентной стандартной норме, а H^1_Γ — его подпространство (коразмерности 1) тех эоементов, для которых выполнено последнее условие (7.6). Тогда

$$\|\zeta\|^2_{H^1_\Gamma} = \int\limits_\Gamma h|\nabla\zeta|^2\, d\Gamma, \quad \forall\, \zeta \in H^1_\Gamma. \tag{7.8}$$

Пусть $\eta = \eta(x_1, x_2) \in H^1_\Gamma$ — произвольный элемент. Тогда, умножая обе части уравнения (7.4) на η, интегрируя по Γ и используя формулу Грина и условие (7.5), для решений $\zeta = \zeta(x)$ задачи (7.4) приходим к тождеству

$$\omega g(\zeta, \eta)_{H^1_\Gamma} - \omega(\omega^2 - f^2)(\zeta, \eta)_{L_2(\Gamma)} - ifg\int\limits_\Gamma h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3) \cdot \overline{\nabla\eta}\, d\Gamma = 0. \tag{7.9}$$

Будем говорить, что пара $\{\omega; \zeta(x_1, x_2)\}$ является обобщенным решением задачи (7.4), (7.5) из пространства H^1_Γ, если выполнено тождество (7.9) при любом $\eta \in H^1_\Gamma$.

Нетрудно видеть, что (7.9) представляет собой равенство нулю первой вариации (кубического по ω) квадратичного функционала

$$F(\zeta;\omega) := \omega g\|\zeta\|^2_{H^1_\Gamma} - \omega(\omega^2 - f^2)\|\zeta\|^2_{L_2(\Gamma)} - ifg\int\limits_\Gamma h(\nabla\zeta \times \vec{e}_3)\cdot \overline{\nabla\zeta}d\Gamma, \tag{7.10}$$

который обращается в нуль на решениях задачи (7.4) — (7.5).

Теорема 9. *Стационарным значениям функционала* (7.10) *отвечают обощенные решения* $\{\omega; \zeta(x_1, x_2)\}$ *задачи* (7.4)–(7.5) *из пространства* H^1_Γ. *Они могут быть найдены по методу Ритца – Галеркина, причем для точных решений не только уравнение задачи* (7.4), *но и краевое условие* (7.5) *в пределе при возрастании числа координатных функций будут выполнены автоматически, так как они являеются естественными.* □

Доказательство этой теоремы не приводим, оно следует из предыдущих рассуждений и из формул Грина (в частности, из формулы Грина для оператора Δ_h в случае липшицевой границы $\partial\Gamma$).

Пусть $\{\eta_k(x_1, x_2)^\infty_{k=1}\}$ — полная система элементов в H^1_Γ. Представляя приближенное решение $\zeta = \zeta(x_1, x_2)$ в виде

$$\zeta^{(n)}(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^n a_k\eta_k(x_1, x_2) \tag{7.11}$$

с неизвестными коэффициентами $\{a_k\}^n_{k=1}$, для приближенного нахождения собственных значений ω задачи (7.10) приходим к характеристическому уравнению

$$\det\left(\omega g\alpha_{kj} - \omega(\omega^2 - f^2)\beta_{kj} - ifg\gamma_{kj}\right)^n_{k,j=1} = 0, \tag{7.12}$$

$$\alpha_{kj} := \int\limits_\Gamma h\nabla\eta_k\cdot\overline{\nabla\eta_j}\,d\Gamma, \quad \beta_{kj} := \int\limits_\Gamma \eta_k\overline{\eta_j}\,d\Gamma, \quad \gamma_{kj} := \int\limits_\Gamma h(\nabla\eta_k \times \vec{e}_3)\cdot\overline{\nabla\eta_j}\,d\Gamma. \tag{7.13}$$

Такая схема вычислений реализована в работах Ю.Б. Иванова (см. [12], [13]).

Заключение

Подводя итоги исследования спектральной задачи (1.12)–(1.14) о собственных колебаниях идеальной вращающейся жидкости в приближении мелкой воды, сформулируем окончательные выводы.

1^0. Задача (1.12)–(1.14) имеет точечный вещественный спектр, состоящий из бесконечнократного нулевого собственного значения и двух ветвей $\{\omega_k^\pm\}^\infty_{k=1}$ конечнократных собственных значений с предельными точками $\omega = \pm\infty$.

2^0. Собственные элементы задачи (3.43) образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\vec{J}_0(\Gamma)\oplus H$.

3^0. Уравнения мелкой воды (1.12)–(1.14), по-видимому, адэкватно описывают процесс собственных колебаний тонкого слоя вращающейся жидкости при изучении поверхностных волн и даже качественно не описывают внутренние инерционные волны, обусловленные действием кориолисовых сил. В самом деле, здесь спектр внутренних волн вместо отрезка $[-f, f]$ (см. [2], с. 226 – 233) вырождается в точку нуль, т.е. предельный спектр $[-f, f]$ заменяется на $\{0\}$.

4^0. Все результаты в данной работе получены в предположении (1.5). Если это условие не выполнено и $h(x_1, x_2)$ может обращаться в нуль в некоторых точках, то структура спектра задачи (1.12)–(1.14) может быть иной. Так, в круговом цилиндрическом сосуде с параболическим дном (см. [6], с.365–367) дополнительно появляется ветвь собственных значений с предельной точкой $\omega = 0$.

5^0. Приближенно собственные значения $\{\omega_k^\pm\}_{k=1}^\infty$ задачи (1.15)–(1.17) и соответствующие собственные функции $\{\zeta_k^\pm(x_1, x_2)\}_{k=1}^\infty$ можно находить, применяя метод Ритца – Галеркина к функционалу (7.10).

Автор благодарит Ю.Б. Иванова за внимание к работе и полезные дискуссии.

Список литературы

1. *Ю.Б. Иванов, Н.Д. Копачевский.* О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях вращающегося слоя идеальной жидкости // Таврический вестник информатики и математики. Симферополь.: ТНУ им. В.И. Вернадского, 2003, № 1. – С. 61–77.
2. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
3. *Kopachevsky N.D., Krein S.G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Volume 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhauser Verlag. – Basel, Boston, Berlin, – 2001. (Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 128). – 377 pp.; Volume 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. Birkhauser Verlag. – Basel, Boston, Berlin. – 2003. (Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 146). – 444 pp.
4. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. 1. – М.: Мир, 1981. — 480 с.
5. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
6. *Ламб Г. Гидродинамика.* – М.: ГИТТЛ, 1965. – 928 с.
7. *Маркус А.С., Мацаев В.И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики // Труды Московского матем. об-ва, 45, 1982. – С. 133–181.
8. *Маркус А.С., Мацаев В.И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики для пучков Келдыша // Матем. сборник, 123 (165), № 3, 1984. – С. 391– 406.
9. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т.5. – М.: ГИТТЛ, 1960. – 656 с.
10. *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. – М.: Наука, 1986. – 352 с.
11. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д.* Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
12. *Иванов Ю.Б.* Моделирование баротропных сейш в Черном море // Доповіді НАН України. – 1999. – № 7, С. 117 – 120.
13. *Иванов Ю.Б.* Обобщенные решения спектральной задачи для системы уравнений теории мелкой воды // Ученые записки Таврич. нац. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика.