УДК 519.8

ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ ГРАФАХ

Сапоженко А.А.

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова

Abstract New upper bounds of the independent set number in graphs with great minimal degree are obtained.

Введение

В работе[1] получены новые верхние оценки числа независимых множеств в графах. Такие оценки применяются при решении перечислительных задач теории групп и теории чисел (см., например, [3] и [4]). Подмножество A вершин графа G называется *независимым*, если в графе отсутствуют ребра, оба конца которых лежат в A. Семейство всех независимых множеств графа G обозначим через $\mathbf{I}(G)$ и положим $i(G) = |\mathbf{I}(G)|$. Граф с n вершинами, в котором минимальная степень вершины равна k, а максимальная не превосходит $k+\theta$, назовем *(n, k, θ)-графом.* Везде в дальнейшем предполагается, что n и k достаточно велики, а $\theta = o(k)$ при $k \to \infty$. При выполнении последнего условия (n, k, θ)-граф называется *почти регулярным.* Пусть $l \leq k-\theta \leq k+\theta \leq m$. Граф с n вершинами, в котором минимальная степень вершины равна l, максимальная степень вершины равна m, доля вершин, степень которых больше $k+\theta$, равна Δ, доля вершин, степень которых меньше $k-\theta$, равна δ, назовем *$(n, l, k, m, \delta, \Delta, \theta)$-графом.* Если $\theta = o(k)$ при $k \to \infty$ и $\delta \to 0$, $\Delta \to 0$ при $n \to \infty$, то $(n, l, k, m, \delta, \Delta, \theta)$ -граф назовем *квазирегулярным.* Пусть $G = (V; E)$ - граф с множеством вершин V и множеством ребер E , а $v \in V$. Назовем *границей* вершины v в графе G множество $\partial v = u : (u, v) \in E$. Ясно, что $\sigma(v) = |\partial v|$ есть степень вершины v. *Границу* подмножества A вершин графа G, определим как множество $\partial A = (\bigcup_{v\in A} \partial v)\ A$. Пусть $0 \leq \delta < 1$. Граф $G = (V; E)$ назовем ϵ - *расширителем*, если $|A| \leq |\partial A(1-\epsilon)|$ для всех $A \in \mathbf{I}(G)$. Целью статьи является получение верхней оценки для числа *квазирегулярных* графов.

[1]Поддержано грантом РФФИ No 04-01-00359

1. Некоторые результаты о числе независимых множеств

Получению оценок для числа независимых множеств в посвящен целый ряд статей различных авторов. Мы упоминаем здесь только результаты, наиболее близкие к основному утверждению данной работы. Именно, излагаются формулировки результатов, касающихся графов с достаточно большой минимальной степенью вершины. Для регулярных и почти регулярных графов известно следующее. Н. Алоном [6] доказана
.

Теорема 1. Для любого k-регулярного графа Γ на n вершинах
$$\mathrm{I}(\Gamma) \leq 2^{n(1/2+O(k^{-0.1}))}. \tag{1}$$

Граница (1) достижима на графе $H_{n,k}$, представляющем собой объединение $n/2k$ попарно непересекающихся полных двудольных графов степени k, каждый из которых имеет 2k вершин. Для такого графа
$$I(H_{n,k}) = (2^{k+1}-1)^{n/2k} = 2^{n(1/2+O(k^{-1}))} \tag{2}$$
А.А. Сапоженко [2]. доказал следующие три утверждения.

Теорема 2. *Для произвольного* (n,k,θ)*-графа* Γ
$$\mathrm{I}(\Gamma) \leq 2^{\frac{n}{2}(1+O(\theta/k+\sqrt{(logk)/k}))}. \tag{3}$$

Этот результат улучшает остаточный член в оценке Алона из [6] и обобщает ее на почти регулярные графы. Обозначим через $I_\beta(\Gamma)$ число подмножеств $A \in \mathbf{I}(\Gamma)$, таких, что $||A|-n/4| \geq \beta n/4$

Теорема 3. *Пусть Γ=(V;E) является* (n,k,θ)*-графом и* $0<\beta<1$.

Обозначим через $I_\beta(\Gamma)$ *число подмножеств* $A \in \mathbf{I}(\Gamma)$ *таких, что* $||A|-n/4| \geq \beta n/4$. *Тогда*
$$\mathrm{I}(\Gamma) \leq 2^{\frac{n}{2}(1-\frac{\beta}{2ln2}+O(\frac{\theta}{k}+\sqrt{\frac{logk}{k}}))}. \tag{4}$$

Теорема 4. *Пусть* (n,k,θ)*-граф* $\Gamma=(V;E)$ *является* δ*-расширителем для некоторого* $0 \leq \delta < 1$. *Тогда*[2]

[2]Здесь и далее $logn = log_2 n$

$$\mathrm{I}(\Gamma) \le 2^{\frac{n}{2}(1-\delta/7+O(\theta/k+\sqrt{(logk)/k}))}. \tag{5}$$

Приведем некоторые результаты о двудольных графах. Н.Алон [6] доказал следующую оценку.

Теорема 5. *Пусть Г - двудольный граф на n вершинах, такой, что* $|\sigma(\upsilon) - k| \le k^{5/8}$ *для всякой вершины* υ. *Тогда*

$$I(\Gamma) \le 2^{n(1/2+O(k^{-0.1}))}. \tag{6}$$

Двудольный граф $\Gamma = (X, Y; E)$ с долями вершин X и Y назовем *двудольным* (ϵ, δ)*-расширителем*, если $|A| \le |\partial A|(1-\delta)$ для всех $A \subseteq X$, таких, что $|A| \le \epsilon|X|$ для всех $A \subseteq Z$, таких, что $|A| \le \epsilon|Z|$. В [7] получен следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* (n, k, θ)*-граф* $\Gamma = (X, Y; E)$ *является двудольным* $(1/2, \delta)$*-расширителем, n и k достаточно велики. Кроме того пусть z-наибольшее из решений уравнения* $x = log(2ex/c\delta)$. *Тогда*

$$2^{|X|} + 2^{|Z|} - 1 \le I(\Gamma) \le (2^{|X|} + 2^{|Z|})(1 + 2^{-k\delta/z+O(\sqrt{k}logk+\theta)}). \tag{7}$$

Число независимости графа G есть максимальный размер его независимого множества. Оно обозначается через $\alpha(G)$. В. Е. Алексеев [1] доказал следующую верхнюю оценку.

Теорема 7. *Для всякого графа G на n вершинах, такого, что* $\alpha(G) = \mu$

$$i(G) \le \left(\frac{n}{\mu} + 1\right)^{\mu}. \tag{8}$$

2. Новые оценки числа независимых множеств

Здесь усиливаются утверждения о числе независимых множеств в графах, доказанные в [2].

Теорема 8. *Пусть граф G на n вершинах является регулярным степени k,* $\alpha(G) = \mu$. *Тогда*

$$i(G) \leq 2^{\mu log(1+\frac{n}{2\mu})+O(n\sqrt{k^{-1}logk})} \tag{9}$$

Доказательство. Идея доказательства основана на соображениях из статей автора [2] и [4] и результата В. Е. Алексеева [1]. Пусть $0 < \varphi \leq k$. Для произвольного независимого множества A графа G построим множество T с помощью следующей пошаговой процедуры. Шаг 1. Пусть u_1- произвольная вершина из A. Положим $T_1 = u_1$. Пусть сделано m шагов и построено множество $T_m = u_1, ..., u_m$. Шаг m+1. Если существует $u_{m+1} \in A$ такая, что $|\partial u_{m+1}\ \partial T_m| \geq \varphi$, то полагаем $T_{m+1} = T_m \cup u_{m+1}$. В противном случае процесс заканчивается и полагаем $T = T_m$. Заметим, что для так построенного T

$$|T| \leq |\partial A|/\varphi \leq n/\varphi \tag{10}$$

Определим для каждого $T \subseteq V$ множество

$$D = D(T,\varphi) = v \in V\ \partial T : |\partial v \setminus \partial T| < \varphi$$

Положим $i(G,T) = |\mathbf{I}(G,T)|$. Оценим сверху $|D(T,\varphi)|$. Заметим, что $|\partial v \cap \partial T| \geq k - \varphi$. Рассмотрим двудольный подграф графа G с долями вершин $D = D(T,\varphi)$ и ∂T. Степень каждой вершины из $D = D(T,\varphi)$ в этом двудольном подграфе не меньше $k - \varphi$, а степень каждой вершины из ∂T не больше k. Поэтому

$$|D|(k-\varphi) \leq |\partial T|k \leq (n - |D|)k$$

. Пусть $T \subseteq V, D = D(T,\varphi)$. Рассмотрим подграф $H(T) = (D, E')$ графа $G = (V,E)$, порожденный множеством D. Заметим, что $A \in \mathbf{I}(G,T)$ тогда и только тогда, когда $A \in \mathbf{I}(H(T),T)$. Из неравенства (8) следует, что

$$i(G,T) = i(H(T)) \leq \left(\frac{n\Big(0.5 + O(\varphi/k)\Big)}{\mu} + 1\right)^{\mu} \tag{11}$$

Из определений с учетом (10) и (11) следует, что

$$\begin{aligned} i(G) \le \sum_{T\subseteq V, |T|\le n/\varphi} i(G,T) \le \sum_{i\le n/\varphi} \binom{n}{0} \left(\frac{n\Big(0.5+O(\varphi/k)\Big)}{\mu} + 1 \right)^{\mu} \le \\ \le (e\varphi)^{n/\varphi} \left(\frac{n\Big(0.5+O(\varphi/k)\Big)}{\mu} + 1 \right)^{\mu}. \end{aligned} \tag{12}$$

Положив $\varphi = \sqrt{klogk}$ в (12), получаем (9). $\square$

Теорема 9. *Пусть G является $(n,l,k,m,\delta,\Delta,\theta)$-графом, $\alpha(G) = \mu$, а n и k - достаточно велики. Тогда*

$$i(G) \le 2^{\mu log(1+\frac{n}{2\mu}) + n(\delta(1-l/k)+\Delta(m/k-1)+O((\theta+\sqrt{klogk})/k))} \tag{13}$$

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 2 из [4] и доказательства теоремы 8. В [4] доказано, что для всякого $0 < \varphi < l$ и любого независимого множества A в $(n,l,k,m,\delta,\Delta,\theta)$-графе существует подмножество T, такое, что $|T| \le n/\varphi$ и такое, что $A \in D(T,\varphi)$, где $D(T,\varphi)$ определено как в теореме 8. При этом

$$|D| \le n\frac{k+\theta+\delta(k-\theta-l)+\Delta(m-k-\theta)}{2k-\varphi} \tag{14}$$

Дальнейший ход доказательства аналогичен заключительной части доказательства теоремы 8. $\square$

Как следствие отсюда вытекает

Теорема 10. *Пусть G является $(n,l,k,m,\delta,\Delta,\theta)$-графом и ϵ-расширителем, а n и k - достаточно велики. Тогда*

$$i(G) \le 2^{\frac{n}{2}(\frac{2-2\epsilon}{2-\epsilon} log\frac{4-3\epsilon}{2-2\epsilon} + \delta(1-l/k)+\Delta(m/k-1)+O((\theta+\sqrt{klogk})/k))} \tag{15}$$

Доказательство. По условию граф G является ϵ-расширителем. Пусть $\alpha(G) = \mu$. Тогда $\mu \le n(1-\epsilon)/(2-\epsilon)$. Теперь (15) вытекает из (13). $\square$

Основной результат статьи -получены новые верхние оценки для числа независимых множеств в графах большой минимальной степенью вершины.

Список литературы

1. Алексеев В. Е. О числе максимальных независимых множеств в графах из наследственных классов. Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации, Ниже городский университет, 1991, С. 5-8.
2. Сапоженко А. А. О числе независимых множеств в расширителях. Дискретная математика, Т. 13, вып. 1, 2001, С 56-62.
3. Сапоженко А. А. О некоторых перечислительных задачах теории графов и теории групп. Материалы конференции «Дискретный анализ и исследование операций» Ново сибирск, 24-28 июня 2002, С. 94-99.
4. Сапоженко А. А. Доказательство гипотезы Камерона-Эрдеша. В кн. Математические вопросы кибернетики вып., 12, 2003 г. С. 5-14.
5. Сапоженко А. А. О числе независимых множеств в графах. Сб. трудов XIII международной конференции, Казань, 27-31 мая 2002 г., Казань, Казанский гос. университет, 2004, С. 89-93
6. Alon N. Independent sets in regular graphs and Sum-Free Subsets of Finite Groups. Israel Journal of Math., 73 (1991), No 2, P.247-256.
7. 7. Sapozhenko A. A. On the Number of Independent Sets in Bipartite Graphs with Large Minimum Degree. DIMACS Technical Report 2000-25, P.l-7.