УДК 519.8

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И АППРОКСИМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ АФФИННОМ РАЗДЕЛЯЮЩЕМ КОМИТЕТЕ

Хачай М.Ю.

Институт математики и механики УрО РАН,
ул.С.Ковалевской,16, г.Екаткринбург, Россия, 620219
e-mail: mkhachay@.uran.ru

Abstract

Two combinatorial problems, Three-elements affine separating committee (3-ASC) and Minimal affine separating committee (MASC), which are closely connected with a training problem in the special case of perceptrons, are considered. It is proven that the former problem is NP-complete and the later is NP-hard and does not belong to Apx. Also some approximation algorithm for the MASC problem is discussed.

Введение

Вычислительная сложность задачи обучения оптимальной по тому или иному критерию нейронной сети интересует исследователей с конца 80-х гг. прошлого столетия. Особый интерес вызывают результаты, касающиеся оценок вычислительной сложности задачи обучения простейших сетей – классических персептронов, представляющих собой 2-слойную сеть без скрытых слоев с q входными нейронами и одним выходным. Функция активации i-го нейрона имеет классическую форму:

$$f^i(a) = \begin{cases} 1, & (\beta^i, a) + \gamma^i > 0, \\ -1, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Таким образом, персептрон реализует решающее правило

$$F(z|(\beta^1, \gamma^1), \ldots, (\beta^{q+1}, \gamma^{q+1})) : \mathbb{Q}^n \to \{-1, 1\}.$$

Задавшись выборкой $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$, в которой $a_i \in A$, $b_j \in B$, и конечные множества $A, B \in \mathbb{Q}^n$ составлены из представителей, соответственно, 1-го и 2-го классов, можно поставить задачу обучения персептрона, т.е. подбора значений параметров β и γ так, чтобы

$$\begin{array}{rcl} F(a_i) = & 1 & (i \in \{1, 2, \ldots, m_1\} = \mathbb{N}_{m_1}) \\ F(b_j) = & -1 & (j \in \mathbb{N}_{m_2}). \end{array}$$

«Обученный» персептрон, параметры которого настроены в результате успешного решения задачи обучения, принято называть *корректным*.С процедурой обучения связаны постановки двух комбинаторных задач.

ЗАДАЧА «ОБУЧАЕМОСТЬ» [1]
Заданы натуральное число q и выборка $(a_1, a_2, \dots, a_{m_1}, b_1, b_2, \dots, b_{m_2})$. Существует ли корректный персептрон с не более чем q входными нейронами?
ЗАДАЧА «ОПТИМАЛЬНЫЙ КОРРЕКТНЫЙ ПЕРСЕПТРОН» [2]
Задана выборка $(a_1, a_2, \dots, a_{m_1}, b_1, b_2, \dots, b_{m_2})$. Требуется определить параметры корректного персептрона с наименьшим возможным числом q.

Известно [3], что задача ОБУЧАЕМОСТЬ в общем случае NP-полна и остается такой при q=2 (в то время как при q=1 задача полиномиально разрешима), а задача ОПТИМАЛЬНЫЙ КОРРЕКТНЫЙ ПЕРСЕПТРОН NP-трудна [2]. Доказательство труднорешаемости обеих задач было в свое время получено в качестве следствия теоремы об NP-полноте задачи «Quadrant» [3]. Известны [2] аналогичные результаты, обосновывающие труднорешаемость задач обучения нейронных сетей с более сложной архитектурой, также опирающиеся на этот результат.

В данной работе показывается, что задача обучения персептрона остается труднорешаемой даже при наложении достаточно сильных дополнительных ограничений на его архитектуру. Рассматривается задача обучения в классе персептронов, у которых q–нечетно, а параметры выходного нейрона–фиксированы: $\beta = [1, 1, \dots, 1]^T$ и $\gamma = 0$ что соответствует голосованию согласно правилу простого большинства. Вопросы обучения таких сетей удобно формулировать в терминах т.н. *аффинных разделяющих комитетов и комитетных решений* подходящих систем линейных неравенств.
Определение 1. [4] Аффинным разделяющим комитетом для множеств$A, B \subset \mathbb{Q}^n$ называется конечная последовательность $Q = (f^1, \dots, f^q)$ функций $f^i(z) = sign((\beta^i, z) + \gamma^i))$ такая что

$$\sum_{i=1}^{q} f^i(a) \geq 1, \qquad (a \in A)$$
$$\sum_{i=1}^{q} f^i(b) \leq -1, \quad (b \in B).$$

Понятие аффинного разделяющего комитета тесно связано с понятием комитетного решения системы линейных неравенств.
Определение 2. [5] Последовательность $Q' = (x^1, \dots, x^q)$, $x^i \in \mathbb{Q}^n$ называется комитетным решением системы линейных неравенств

$$(a_j, x) > b_j \qquad (i \in \mathbb{N}_m), \tag{1}$$

если справедливо условие

$$|\{i \in \mathbb{N}_q | (a_j, x^i) > b_j\}| > \frac{q}{2} \qquad (j \in \mathbb{N}_m)$$

Видно, что последовательность $Q = (f^1, \dots, f^q)$ является аффинным разделяющим комитетом множеств A и B тогда и только тогда, когда последовательность

$Q' = ((\beta^1, \gamma^1), \ldots, (\beta^q, \gamma^q))$ является комитетным решением системы неравенств

$$\begin{cases} (\beta, a) + \gamma > 0, & (a \in A), \\ (\beta, b) + \gamma < 0, & (b \in B). \end{cases}$$

и определяет веса входного слоя соответствующего корректного персептрона. Известно [6], что задача MCLE поиска комитетного решения системы (1) с наименьшим возможным числом элементов (минимального комитета) NP-трудна.

Ниже показывается, что

- задача проверки, существует ли для заданных множеств A и B аффинный разделяющий комитет из 3-х элементов (3-ASC) NP-полна;
- задача построения минимального по числу элементов аффинного разде ляющего комитета для множеств A и B (MASC) NP-трудна и не принадлежит классу Apx.

Завершает работу обсуждение приближенного полиномиального алгоритма для задачи MASC.

1. Афинный разделяющий комитет из трех элементов

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.
ЗАДАЧА «АФФИННЫЙ РАЗДЕЛЯЮЩИЙ КОМИТЕТ ИЗ 3-Х ЭЛЕМЕНТОВ» (3-ASC) Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$. Существует ли аффинный разделяющий комитет из 3-х элементов для этих множеств?

Теорема 1. *Задача 3-ASC NP-полна*
Доказательство
1. Задача 3-ASC, очевидно, принадлежит классу NP, поскольку проверка того, что заданная последовательность функций $Q = (f^1, f^2, f^3)$ является аффинным разделяющим комитетом множеств A b B может быть произведена за полиномиальное время от размера записи условия задачи.
2. Для обоснования NP-полноты докажем полиномиальную сводимость к задаче 3-ASC известной NP-полной задачи о раскраске графа в 3 цвета (3- COLORABILITY).

ЗАДАЧА «РАСКРАСКА ГРАФА В 3 ЦВЕТА» (3-COLORABILITY) Задан конечный граф $G = (V, E)$. Раскрашиваем ли он в 3 цвета, другими словами, существует ли функция $\varphi : V \to 1, 2, 3$ такая, что для произвольных $u, v \in V, (\{u, v\} \in E) \Rightarrow (\varphi(u) \neq \varphi(v))$?

В самом деле, пусть задан граф $G = (V, E)$ определяющий условие задачи 3-COLORABILITY. Без ограничения общности, можем полагать, что $V = \mathbb{N}_n$. Сопоставим графу G множества A и B в $\mathbb{Q}^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &A = \{2e^i\}_{i=1}^n \qquad\qquad \text{где } e^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ &B = \{e^i + e^j |\ \{i, j\} \in E\}. \end{aligned} \tag{2}$$

и покажем, что граф раскрашиваем в 3 цвета тогда и только тогда, когда для множеств A и B существует аффинный разделяющий комитет из 3-х элементов, т.е. найдутся пары $(x^1, y^1), (x^2, y^2)$ и (x^3, y^3) такие, что последовательность $Q = ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ - комитетное решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_i + y < 0, & (i \in V) \\ x_i + x_j + y > 0, & (\{i, j\} \in E) \end{cases} \tag{3}$$

Пусть разбиение $V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup V_3$ задает раскраску графа G в три цвета. Легко проверить, что последовательность $((x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0))$ в которой

$$x^i_k = \begin{cases} 2, & k \in V_i \\ -1, & k \notin V_i \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N}_3)$$

является комитетным решением системы (3).

С другой стороны, пусть $Q = ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ - произвольное комитетное решение системы (3). Введем обозначения:

$$V_k = \{i \in V |\ 2x^p_i + y^p < 0 (p \in \mathbb{N}_3) \backslash \{k\})\} \quad (k \in \mathbb{N}_3).$$

Так как Q комитетное решение системы (3), справедливо равенство $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$. Без ограничения общности, можем полагать, что $V_k \neq \emptyset$ и $V_{k_1} \cap V_{k_2} = \emptyset$ для произвольных k и $k_1 \neq k_2$ из $\mathbb{N}_3$ Построенное разбиение задает искомую раскраску графа G. В самом деле, допустим, от противного, что ребро $\{i, j\} \subset V_1$ (случаи с V_2 и V_3 могут быть рассмотрены по аналогии). По построению множества V_1, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 2x^2_i + y^2 < 0, \quad 2x^3_i + y^3 < 0, \\ 2x^2_j + y^2 < 0, \quad 2x^3_j + y^3 < 0, \end{aligned}$$

следовательно, и

$$x^2_i + x^2_j + y^2 < 0 \quad \text{и} \quad x^3_i + x^3_j + y^3 < 0,$$

в то время как с необходимостью, в силу того, что Q комитетное решение системы (3), справедливо хотя одно из неравенств:

$$x^2_i + x^2_j + y^2 > 0 \quad \text{или} \quad x^3_i + x^3_j + y^3 > 0,$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечание 1. Нетрудно убедиться в том, что задача 3-ASC остается NP-полной, если ограничиться рассмотрением множеств$A \cup B \subset \{z \in \{0, 1, 2\}^n : |z| \leq 2\}$.

2. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете

Перейдем к рассмотрению задачи об обучении в классе аффинных разделяющих комитетов, заданную в оптимизационной постановке.

«ЗАДАЧА МИНИМАЛЬНЫЙ ПО ЧИСЛУ ЭЛЕМЕНТОВ АФФИННЫЙ РАЗДЕЛЯЮЩИЙ КОМИТЕТ»(MASC).
Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$, причем $A \cap B = \emptyset$. Требуется построить аффинный разделяющий комитет для множеств A и B с наименьшим числом элементов.

Теорема 2. *Задача MASC NP-трудна.*

Доказательство Справедливость утверждения теоремы следует из теоремы 1 ввиду легко проверяемой полиномиальной сводимости (по Тьюрингу) задачи 3-ASC к задаче MASC.

Традиционный подход к исследованию NP-трудных задач предполагает рассмотрение полиномиально разрешимых подклассов NP-трудной задачи, анализ аппроксимационный свойств задачи и разработку приближенных алгоритмов. Как обычно, приближенным алгоритмом (с точностью аппроксимации r) для задачи комбинаторной минимизации назовем алгоритм, позволяющий для каждой ее конкретной постановки

$$f^* = \min\{f(x) | x \in M\}$$

за полиномиальное время находить допустимое решение $x_{app} \in M$ с условием

$$\frac{f(x_{app})}{f^*} \leq r$$

Класс Apx составляют задачи комбинаторной оптимизации, обладающие приближенным алгоритмом с фиксированной точностью r. Многие NP-трудные задачи, например, задача коммивояжера (TSP), принадлежат этому классу. К сожалению, известны и примеры задач, не принадлежащих этому классу. Вероятно, наиболее известной среди таких задач является задача о наибольшей клике (CLIQUE), для которой показано [7], что для произвольного $\varepsilon > 0$ не существует полиномиального приближенного алгоритма с точностью аппроксимации $n^{1-\varepsilon}$. Убедимся, что описанная выше задача MASC также не может быть решена приближенно ни с какой фиксированной точностью.

Теорема 3. *Задача MASC не принадлежит классу Apx.*

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу комбинаторной оптимизации
ЗАДАЧА «РАСКРАСКА 3-ОДНОРОДНОГО 2-ЦВЕТНОГО ГИПЕРГРАФА В k ЦВЕТОВ»$>$ (3-UHC)

Заданы конечный однородный гиперграф $\Gamma = (V, H), |h| = 3, h \in H$ и натуральное число $k \geq 3$. Известно, что Γ раскрашиваем в 2 цвета. Требуется указать раскраску гиперграфа Γ в k цветов, т.е. такую функцию $\varphi : V \to \mathbb{N}_k$, что

$$(\{u, v, w\} \in H) \Rightarrow (|\{\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)\}| > 1).$$

Известно [8], что задача 3-UHC NP-трудна, и остается NP-трудной при произвольном фиксированном $k \geq 3$. Покажем, что задача 3-UHC при $k = \binom{2s+1}{s+1}$ для произвольного натурального s сводится по Тьюрингу к задаче поиска аффинного разделяющего комитета из$2s + 1$ элемента для подходящих множеств. В самом деле, пусть заданы однородный гиперграф $\Gamma = (V, H)$, в котором $V = \mathbb{N}_n, H \neq \emptyset$ и $|h| = 3$ для каждого ребра $h \in H$ и число $s \in N$. Пусть разбиение $V_1 \dot\cup V_2 = V$ определяет раскраску Γ в 2 цвета. Требуется указать раскраску Γ в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов. Аналогично доказательству теоремы 1, сопоставим гиперграфу Γ такие подмножества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, что

$$\begin{array}{ll} A = \{3e^i\}_{i=1}^n, & \text{где } e_j^i = \delta_{ij}, \\ B = \{e^i + e^j + e^k | \{i, j, k\} \in H\} & \end{array}$$

и систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{rl} 3x_i + y < 0 & (i \in V) \\ x_i + x_j + x_k + y > 0 & (\{i, j, k\} \in H) \end{array} \right. \tag{4}$$

Очевидно, эти построения могут быть проведены за полиномиальное время от размера записи Γ. Убедимся в справедливости следующих предложений.

a) Система (4) несовместна и обладает комитетным решением из 3-х элементов.
b) Произвольное комитетное решение $Q = ((x^1, y^1), \ldots, (x^{2s+1}, y^{2s+1}))$ системы 4 индуцирует раскраску гиперграфа Γ в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов.

a). Поскольку $H \neq \emptyset$, система (4) несовместна, по теореме Карвера. Далее, нетрудно убедиться, что последовательность $((x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0))$, в которой

$$x_i^1 = \left\{ \begin{array}{rl} -1, & i \in V_1 \\ 3, & i \in V_2 \end{array} \right. \quad x_i^2 = \left\{ \begin{array}{rl} 3, & i \in V_1 \\ -1, & i \in V_2 \end{array} \right. \quad \text{и} \quad x^3 = [-1, -1, \ldots, -1]^T,$$

является ее комитетным решением. В самом деле, неравенству $3x_i + y < 0$ при произвольном $i \in V_1$ (случаи V_2 и V_3 могут быть рассмотрены по аналогии)удовлетворяют $(x^1, 0)$ и $(x^3, 0)$, а произвольному неравенству $x_i + x_j + x_k + y > 0$ удовлетворяют $(x^1, 0)$ и $(x^2, 0)$.

b). Пусть $Q = ((x^1, y^1), \ldots, (x^{2s+1}, y^{2s+1}))$ - комитетное решение системы (4). Каждому подмножеству $P \subset \mathbb{N}_{2s+1}, |P| = s + 1$ сопоставим множество

$$V_P = \{i \in V | \ 3x_i^p + y^p < 0 \ (p \in P)\}.$$

Через P обозначим множество $\{P \subset \mathbb{N}_{2s|1} |P| = 2s + 1\}$ По построению, $|P| = \binom{2s+1}{s+1}$ и $\bigcup_{P \in \ P} V_P = V$. Без ограничения общности, полагаем, что $V_P \neq \emptyset$ для каждого $P \in P$

и $(P_1 \neq P_2) \Rightarrow (V_{P_1} \cap V_{P_2} = \emptyset)$. Разбиение

$$V_{P_1} \dot{\cup} V_{P_2} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_{P_{\binom{2s+1}{s+1}}} = V$$

задает искомую раскраску гиперграфа Г. В самом деле, предположим, от противного, что ребро $\{i, j, k\} \subset V_P$ для некоторого $P \in P$. По выбору ребра, справедливы неравенства:

$$\begin{cases} 3x_i^p + y^p < 0 \\ 3x_j^p + y^p < 0 \qquad (p \in P), \\ 3x_k^p + y^p < 0 \end{cases}$$

следовательно,

$$x_i^p + x_j^p + x_k^p + y^p < 0 \quad (p \in P)$$

С другой стороны, поскольку Q–комитетное решение системы (4), с необходимостью найдется номер $p_0 \in P$ такой, что $x_i^{p_0} + x_j^{p_0} + x_k^{p_0} + y^{p_0} > 0$. Найденное противоречие подтверждает корректность раскраски.

Предположим, от противного, что задача MASC принадлежит классу Apx, и существует полиномиальный приближенный алгоритм с фиксированной оценкой точности r. Тогда, учитывая п. a), алгоритм построит комитетное решение системы (4), соответствующей гиперграфу Г, состоящее из $2s + 1$ элемента, где $2s + 1 \leq 3r$, указав тем самым (согласно п. b)) раскраску гиперграфа в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов. Найденное противоречие завершает доказательство теоремы.

3. Приближенный алгоритм для задачи MASC

Рассмотрим следующий приближенный полиномиальный алгоритм для задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC). Согласно проведенным выше рассуждениям, для того, чтобы построить для обучающих множеств $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$ аффинный разделяющий комитет необходимо и достаточно найти комитетное решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} (a_i, x) + y > 0, & (i \in \mathbb{N}_{m_1}) \\ (-b_j, x) - y > 0, & (j \in \mathbb{N}_{m_2}) \end{cases}$$

или (в более краткой форме)

$$(c_k, z) > 0 \quad (k \in \mathbb{N}_m) \tag{5}$$

Введем некоторые дополнительные ограничения на систему (5)

1) $m > n + 1 > 2$,и каждая подсистема из $n + 1$ неравенства совместна;
2) $|\ c_k| = 1$ для каждого $k \in \mathbb{N}_m$;
3) $m = 2t + n$ для некоторого натурального t.

Последнее ограничение не является принципиальным и введено только для удобства дальнейших построений. Сопоставим вектору $z \in \mathbb{Q}^{n+1}$ следующие конечные множества:

$$\begin{array}{rcl} K_>(z) &=& \{k \in \mathbb{N}_m\} \;:\; (c_k, z) > 0\}, \\ K_<(z) &=& \{k \in \mathbb{N}_m\} \;:\; (c_k, z) < 0\}, \\ K_=(z) &=& \{k \in \mathbb{N}_m\} \;:\; (c_k, z) = 0\}. \end{array}$$

Алгоритм.
Шаг 1. Найти произвольное нетривиальное решение ζ^1 подсистемы

$$(c_k, z) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}_m)$$

и множества $K_>(\zeta^1)$,$K_<(\zeta^1)$ и $K_=(\zeta^1)$. В качестве z^1 выбрать произвольное решение подсистемы K_1 системы (5), где

$$K_1 = \begin{cases} K_>(\zeta^1) \cup K_=(\zeta^1), & \text{if } |K_>(\zeta^1)| \geq |K_<(\zeta^1)| \\ K_<(\zeta^1) \cup K_=(\zeta^1), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положить $K = \mathbb{N}_m \setminus K_1$ и $i = 1$.
Шаг 2. Если $K = \emptyset$, завершить процедуру, последовательность $(z^1, z^2, \ldots, z^i)$ – искомое комитетное решение системы (5).
Шаг 3. Выбрать произвольное подмножество

$$L' \subseteq K : \quad |L'| = \min\{|K|, n\},$$

найти нетривиальное решение подсистемы

$$(c_k, z) = 0 \qquad (k \in L').$$

Положить $L = K_=(\zeta^{i=1})$ и найти решения z^{i+1}, z^{i+2} подсистем системы(5) с индексами $K_>(\zeta^{i+1}) \cup L$ и, $K_<(\zeta^{i+1}) \cup L$ соответственно.
Шаг 4. Переопределить $K = K \setminus L,\ i = i + 2$ и вернуться на Шаг 2.

Договоримся называть итерацией приведенного выше алгоритма последовательность шагов 2-4 (при этом первая итерация включает также Шаг 1) и сформулируем теорему, доказательство которой приведено в [9]

Теорема 4. *1. Описанный выше алгоритм корректен и имеет не более чем*

$$\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil$$

итераций.
2. Пусть мощность наибольшей по числу неравенств максимальной совместной подсистемы системы (5) не превосходит числа $t+n+p$ для некоторого натурального p. Тогда точность r аппроксимации алгоритма удовлетворяет соотношению

$$1 \leq r \leq \frac{2 + \left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil + 1}{2\left\lceil \frac{t-p}{2p+n} \right\rceil + 1} \approx 1 + \frac{2p}{n}.$$

Замечание 2. Если система (5) равномерно распределена по Гейлу [10], то алгоритм найдет ее минимальное комитетное решение, т.е. задача MASC при этом условии полиномиально разрешима.

Заключение

В работе обоснована труднорешаемость двух комбинаторных задач, 3-ASC и MASC, тесно связанных с задачей линейного дискриминантного анализа. Показано, что задача 3-ASC NP-полна, а задача MASC NP-трудна и не принадлежит классу Apx. Далее, предложен приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи MASC, указаны оценки его точности и вычислительной сложности, а также подкласс задачи MASC, для которого он является точным. Интерес вызывает исследование вычислительной сложности задач при фиксированной размерности n. Известно, что при этом предположении задача 3-ASC становится полиномиально разрешимой. Вопрос же оценки вычислительной сложности (и порога эффективной аппроксимируемости) задачи MASC в настоящее время остается открытым. Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ НШ-5595.2006.1 и МД-6768.2006.1 и РФФИ 04-01-00108-а.

Список литературы

1. *Judd J.S.* Neural Network Design and Complexity of Learning. - MIT Press, 1990.
2. *Lin J.H., Vitter J.S.* Complexity Results on Learning by Neural Nets. Machine Learning. 1991, vol 6., pp. 211-230.
3. *Blum A.L., Rivest R.L.* Training a 3-node Neural Network is NP-complete. Neural Networks. 1992. vol.5, pp. 117-127.
4. *Мазуров Вл.Д.* Комитеты систем неравенств и задача распознавания. Кибернетика. 1971. №3. С. 140-146.
5. *Ablow C.M., Kaylor D.J.* Inconsistent Homogeneous Linear Inequalities. Bull. Amer. Math. Soc., 1965, vol. 71, no. 5, p. 724.
6. *Khachai M.Yu.* Computational complexity of the Minimum committee problem and related problems. Doklady Mathematics. 2006, Vol. 73, no. 1, pp. 138-141.
7. *Hastad J.* Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$. Acta Mathematica. Vol. 182, 1999, 105-142. 13
8. *Dinur I., Regev 0. and Smyth C.* The hardness of 3-uniform hypergraph coloring. In: Proc. of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, November 2002.
9. *Khachay M.Yu.* On Approximate Algorithm of a Minimal Committee of a Linear Inequalities System// Pattern Recognition and Image Analysis. 2003, vol. 13, no 3. pp. 459-464.
10. *Gale D.* Neighboring vertices on a convex polyhedron. In: Linear inequalities and related systems, edited by H.W.Kuhn and A.W.Tucker, Princeton, 1956 pp. 255-263.