УДК 519

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПТИМИЗАЦИИ МНОЖЕСТВА КУСОЧНО—ЛИНЕЙНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

Махина Г.А.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007

Abstract

The problem of piecewise-linear constraints reconstruction arising in optimization problems with incomplete data is considered in the paper. To reconstruct unknown constraints a perceptron is used. The lexicographical method is proposed to optimize obtained solution. A square matrix is built on the base of initial data and perceptron outputs, which is optimized due to the extraction of comparable row vector pairs and crossing out matrix rows and columns, corresponding to the lower vectors. The corresponding perceptron outputs are deleted too.

Введение

В работе [1] В.И. Донской определяет основные типы задач оптимизации с неполными данными. К одному из указанных типов относится случай, когда целевая функция f задана точно, а множество ограничений Ω указано частично перечислением точек x (прецедентов) из двух конечных множеств W_1 и W_2, для которых заведомо выполняется $W_1 \in \Omega$; $W_2 \in X^n \backslash \Omega$; $I(f, \Omega) = l\{f, W_1, W_2\}$. Для такого типа задач основной проблемой является восстановление ограничений задачи по имеющимся прецедентам и, возможно, некоторой дополнительной информации о множестве Ω.

Далее будем предполагать, что в качестве дополнительной информации известно, что исходная модель является линейной, т.е. ограничения задачи образуют в пространстве X^n кусочно-линейную поверхность, ограниченную гиперплоскостями $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq b_i, i = 1, ..., m$ и отделяющую множество допустимых альтернатив Ω от недопустимых решений $X^n \backslash \Omega$. Одним из существующих подходов к решению задачи восстановления линейных ограничений является перцептронный подход.

1. ПЕРЦЕПТРОННЫЙ АЛГОРИТМ ОТДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ И НЕДОПУСТИМЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Идея, на которой базируется перцептронный подход к решению задачи восстановления кусочно-линейной поверхности, описана в работе [2] и заключается в том, что для каждой точки $\overline{x}^k$ из множества недопустимых решений $W_2 \in X^n \backslash \Omega$ строится перцептрон, который находит линейную гиперплоскость в пространстве X^n, отделяющую точку $\overline{x}^k$ от всех точек множества допустимых решений $W_1 \in \Omega$.

Будем строить перцептрон по следующему правилу:

1. Во входной слой перцептрона помещаем $n+1$ распределительных нейронов, где n—размерность исходных образов. Дополнительный нейрон отвечает за смещение, который соответствует свободному слагаемому в линейном уравнении, восстанавливаемом с помощью перцептрона. На этот дополнительный нейрон всегда подается единичный сигнал.
2. В выходной слой перцептрона помещаем m выходных нейронов с пороговой функцией активации. Здесь m—это количество прецедентов из множества недопустимых решений.
3. Весовые коэффициенты для каждого выходного нейрона обучаются по отдельной обучающей выборке, содержащей одну точку множества W2 и все точки множества W_2. При этом выходной нейрон учится выдавать единичное значение для всех точек множества W_1 и нулевое значение для той точки множества W_1, которой он соответствует.

Построенный и обученный таким образом перцептрон для всех точек множества допустимых решений будет выдавать все единичные значения на выходе. Это значит, что все выходные нейроны умеют правильно классифицировать все точки из множества допустимых решений. Если среди значений выходных нейронов будет содержаться хотя бы одно нулевое, то подаваемый на вход вектор зачисляется в множество недопустимых значений.

Отметим, что каждый выходной нейрон y_k задает в пространстве X^n гиперплоскость

$$y_k = \omega_1^k\, x_1 + \omega_2^k\, x_2 + \ldots + \omega_n^k\, x_n + \omega_{n+1}^k = \bar{\omega}^k\, \bar{x},$$

где $\bar{\omega}^k = \left(\omega_1^k, \omega_2^k, \ldots, \omega_{n+1}^k\right)$ — вектор весовых коэффициентов.

2. ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКАЯ ПРОЦЕДУРА ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛУЧЕННОГО ПЕРЦЕПТРОНА

Имеется перцептрон с $n+1$ входами и m выходными нейронами. Каждый выходной нейрон поставлен в соответствие одному прецеденту из множества W_2, т.е. между множеством выходных нейронов и множеством недопустимых точек существует взаимно однозначное соответствие. Перцептрон настроен таким образом, что для любой точки из допустимого множества W_1, все выходные нейроны принимают единичное значение. Если же на вход подается точка из множества недопустимых значений $\bar{x}^k \in W_2$, которой поставлен в соответствие выходной нейрон y_k, то на выходе перцептрона получаем $y_k = 0$. При этом y_k может принимать нулевые значения также на других наборах из множества W_2.

Поставим в соответствие каждому примеру $\bar{x}^k$ из множества W_2 бинарный вектор $\bar{y}^k$, составленный из всех значений выходных нейронов, получаемых при подаче на вход перцептрона образа $\bar{x}^k$. В результате получим квадратную матрицу размерности $m \times m$, строки которой содержат вектора значений выходных нейронов.

Утверждение 2.1. Если два вектора $\overline{y}^l$ и $\overline{y}^u$ связаны отношением предшествования $\overline{y}^l \prec \overline{y}^u$, то удаление из перцептрона выходного нейрона y_l не приводит к ошибке классификации точек x из множеств W_1 и W_2.

Утверждение 2.2. Поскольку при подаче на вход перцептрона любого вектора из допустимого множества все выходные нейроны выдают единичное значение, удаление l-го выходного нейрона не изменит классификацию множества W_1.

Рассмотрим случай классификации точек из множества W_2. По построению вектора $\overline{y}^l$ и $\overline{y}^u$ получаются на выходе перцептрони подаче на вход векторов $\overline{x}^l \in W_2$ и $\overline{x}^u \in W_2$ соответственно. При этом вектор $\overline{y}^l$ имеет нулевую l-ую координату, а вектор $\overline{y}^u$ имеет нулевую u-ю координату. Из отношения предшествования векторов $\overline{y}^l \prec \overline{y}^u$ следует, что вектор $\overline{y}^l$ также имеет нулевую u-ю координату $\overline{y}^l_u = \overline{y}^u_u$=0. Это значит, что данная координата может выступать как критерий классификации образа $\overline{x}^l$, т.е. значение u-го выходного нейрона относит l-й вектор в недопустимое множество. Следовательно, исключение l-го выходного нейрона не влияет на качество классификации элементов из множества W_2. Утверждение доказана.

Замечание 2.1. Утверждение можно обобщить на случай цепочки векторов, связанных отношением предшествования $\overline{y}^l_1 \prec \overline{y}^l_2 \prec ... \prec \overline{y}^l_s \prec \overline{y}^u$. Для этого случая $\overline{y}^u$ является верхней границей и из перцептрона можно удалить s нейронов, соответствующих векторам $\overline{y}^l_1, \overline{y}^l_2, ..., \overline{y}^l_s$.

Замечание 2.2. Процедуру поиска сравнимых цепочек и удаления выходных нейронов можно осуществлять в преобразованном перцептроне меньшей размерности.

На основании сформулированного выше утверждения можно определить следующую процедуру оптимизации перцептрона.

Шаг 1.: Составляется квадратная матрица T размера $m \times m$(m- количество образов из множества W_2), состоящая из 0 и 1. k-я строка матрицы содержит бинарный вектор, составленный из откликов выходных нейронов при подаче на вход перцептрона вектора $\overline{x}^k \in W_2$. Столбцы матрицы соответствуют выходным нейронам перцептрона.

Шаг 2.: Строится цепочка векторов (соответствующих строкам матрицы), связанных отношением предшествования. Если сравнимых векторов нет, то выход из процедуры.

Шаг 3.: Удаляются из перцептрона выходные нейроны, соответствующие векторам, которые содержатся в построенной цепочке и предшествуют верхней границе; вычеркиваются из матрицы T строки и столбцы с номерами, соответствующими удаленным выходным нейронам.

Шаг 4.: Переход к шагу 2.

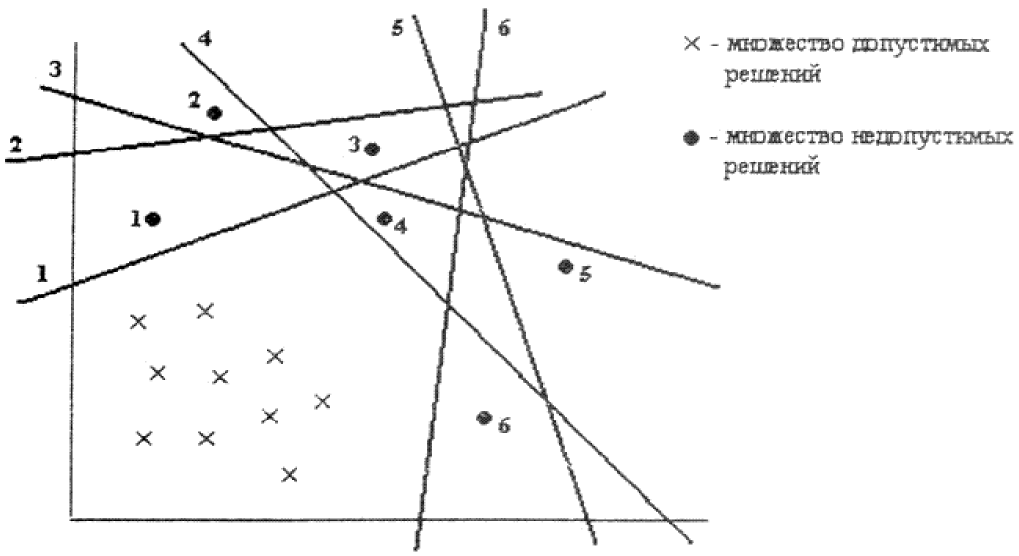

Рис. 1

3. ПРИМЕР

Рассмотрим пример применения описанной процедуры. Пусть исходное множество ограничений Ω задано набором точек из двух множеств W_1 и W_2, изображенными на рисунке.

Множеству W_2 принадлежат 6 точек. Для построения кусочно-линейной границы строится перцептрон с 3-мя входными и 6-ю выходными нейронами. Пусть в результате обучения данного перцептрона каждый выходной нейрон определил прямую, отделяющую соответствующую ему точку из W_2 от всех точек множества W_1, как это показано на рисунке. Каждая прямая помечена номером соответствующей ей точки из множества W_2.

Составляем матрицу T размерности 6x6 значений выходных нейронов, получаемых при подаче на вход перцептрона шести точек множества недопустимых решений.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1-я и 2-я строки матрицы T являются сравнимыми. Поскольку 2-й вектор предшествует первому, удаляем из перцептрона 2-й выходной нейрон и вычеркиваем соответствующие ему 2-ю строку и 2-й столбец из матрицы T. Получаем преобразованную матрицу T_1, для которой повторяем процедуру.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Удаляем из перцептрона 3-й выходной нейрон и вычеркиваем соответствующие ему 2-ю строку и 2-й столбец матрицы T_1. Получаем матрицу T_2.

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Удаляем из перцептрона 5-й выходной нейрон и вычеркиваем соответствующие ему 3-ю строку и 3-й столбец матрицы T_2.

$$T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Все вектора матрицы T_3 являются несравнимыми. Останавливаем работу алгоритма.

В результате работы алгоритма в перцептроне остались 1-й, 4-й и 6-й выходные нейроны, соответствующие на рисунке 1-й, 4-й и 6-Й прямым, которые определяют оптимальную границу для данного примера.

Заключение

Основным результатом данной статьи является лексикографическая процедура оптимизации множества кусочно-линейных ограничений, полученных с помощью перцентрона. Процедура заключается в построении специальной квадратной матрицы, которая приводится к оптимальному виду за счет выделения сравнимых пар векторов-строк и вычеркивания из матрицы строк и столбцов, соответствующих нижнему вектору. Параллельно оптимизируется перцептрон за счет удаления избыточных выходных нейронов. Также доказывается утверждение о том, что удаление таких выходных нейронов не приводит к ошибке классификации.

Список литературы

1. Донской В.И., Башта А.И. Дискретные модели принятия решений при неполной инфор мации - Симферополь: Таврия, 1992. - 166 с.
2. Донской В.И. Частично определенные задачи оптимизации: подход к решению на основе теории распознавания образов Динамические системы.- Киев: Вища школа, - 1989. - Вып.8.