

УДК 658.012.011.56

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ФЛУКТУАЦИИ НА ТРАНСФОРМАЦИЮ ПРОСТРАНСТВА БЕЗОПАСНОСТИ

Атоев К. Л., Пепеляев В. А.

ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ ИМ. В. М. ГЛУШКОВА НАН УКРАИНЫ,  
ОТДЕЛ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ОПЕРАЦИЙ,  
ОТДЕЛ МЕТОДОВ СИСТЕМНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ,  
УЛ. АКАДЕМИКА В.М. ГЛУШКОВА, КИЕВ-187, 03187,  
E-MAIL: *ATOEV@ISOFTS.KIEV.UA, PEPELAEV@YAHOO.COM*

### Abstract

The mathematical model is proposed for investigation of various fluctuations impact c-i transformation of fields of technogenic, social, economic and environmental risks with the help of catastrophes theory, theory of chaos and bifurcation. It permits to investigate the catastrophes; nonlinear dynamics and to estimate the levels of technogenic and environmental vulnerability efficacy of politics in the field of social and economic security.

### ВВЕДЕНИЕ

Статистика редких катастрофических событий последних лет, показывает что они происходят гораздо чаще, чем это предсказывает теория. Выделяют следующие причины снижения эффективности прогнозов традиционными методами:

- 1) большое количество новых рисков, - чем выше степень новизны рисков, тем ниже качество принимаемых решений, поскольку уникальность (новизна) явления связана с отсутствием или неполнотой статистических данных [1];
- 2) системный характер риска, обусловленный большим количеством системных связей между многочисленными видами различных систем современной техносферы человека, когда одни риски порождают либо сами по себе, либо путем сложных связей, другие - гораздо более разрушительные, причем совершенно иного типа, неожиданные и непрогнозируемые [2];
- 3) степенной характер распределения плотности вероятности катастроф, заставляющий рассматривать сценарии, маловероятные при использовании гауссовой зависимости, поскольку степенная функция убывает гораздо медленнее гауссовой [3].

Кризис современных систем управления приводит к тому, что современное общество все более подчиняется законам поведения в неустойчивой и неравновесной среде все больше походит на систему, находящуюся вдали от состояния глобального равновесия, сильно зависящую от начальных условий, в которой возможны хаотические режимы, когда малые воздействия могут существенно изменять траектории развития системы, т.е. на диссипативную систему [4].

В этой связи, исследование влияния малых флуктуации на трансформацию пространства безопасности превращается в актуальную задачу, решение которой может существенно расширить горизонт прогнозирования, существенно сузившийся, из-за неадекватности традиционных методов управления, принципиально новым особенностям глобального мира, не имевшим места в прошлом. К их числу относятся:

- 1) резкое удлинение причинно-следственных связей и усиление роли синергетических рисков;
- 2) наличие нескольких путей развития и нескольких «окон уязвимости»;
- 3) исчезновение упущенных возможностей, когда невозможно вернуться к траектории развития, имевшей место до неправильного решения, приведшего к катастрофе;
- 4) ограниченное время принятия стратегических решений;
- 5) быстро меняющиеся ключевые переменные (параметры порядка), влияющие на безопасность человека [2], [3].

Все это требует создания принципиально новых информационных технологий для оценки уязвимости общества, динамики риска и эффективности политики в сфере безопасности, базирующихся как на традиционно используемых математических методах, так и на методах теории катастроф, теории бифуркаций и хаоса.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТРАНСФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА БЕЗОПАСНОСТИ

После Чернобыльской катастрофы, гибели «Шатла», событий 11 сентября 2001 года в центре особого внимания оказались задачи определения и ранжирования критических факторов, связанных с наступлением маловероятных событий [5]. При изучении подобных событий возникают трудности принципиального характера, связанные с выбором адекватного математического аппарата для их исследования, поскольку применение теории вероятности не совсем корректно, из-за уникальности самого события. Действительно, в тех случаях, когда накоплены репрезентативные выборки, аппарат теории вероятности дает удовлетворительные результаты. Однако картина меняется, в условиях неполноты данных, связанной либо с уникальностью исследуемого явления, либо с недостоверностью имеющихся данных, либо с сильной зависимостью системы в зоне бифуркации от начальных условий. Слабые воздействия могут за ограниченное время вызывать сильные расхождения траектории развития систем, которые вначале были бесконечно близки друг к другу, переводя систему в совершенно непредвиденную область значений [3].

Одним из эффективных подходов к решению данной проблемы является применение метода комплексной оценки риска, базирующегося на использовании теории

катастроф. Теория катастроф является математическим формализмом для моделирования нелинейных систем, скачкообразное поведение которых определяется гладкими изменениями ограниченного количества параметров порядка системы. Теория катастроф применяется для исследования широкого круга систем из разнообразных областей исследований (физика, биология, психология, социология). Характерной особенностью этих систем является то, что в поведении каждой из них возникают внезапные скачкообразные изменения или фазовые трансформации, как результат малых непрерывных изменений параметров системы [6].

Мерой риска в этом случае может выступать степень приближенности параметров системы к их бифуркационным значениям, достижение которых вызывает скачкообразное изменение траектории развития. Например, когда стационарное состояние, характеризующее норму, теряет устойчивость, система скачкообразно переходит в другое стационарное состояние (предкризисное или кризисное).

Главным преимуществом данного подхода является то, что он позволяет ввести понятие динамического риска как функции переменных, описывающих процесс.

Кроме того, приближение точки, характеризующей текущее состояние системы на фазовом портрете, к бифуркационным значениям параметров может служить индикатором для раннего распознавания рисков. Ценность этой возможности обусловлена усилением роли особенностей глобальных изменений, снижающих скорость принятия решений и эффективность применяемых мер в условиях быстро меняющихся ситуаций, даже при идеально налаженной системе мониторинга. Каков бы ни был горизонт прогноза, только через значительный период времени (месяцы, а иногда и годы) становится ясно насколько оправданными были принятые решения, а за это время ситуация может либо стать полностью неуправляемой, либо могут произойти необратимые изменения, когда общество перейдет на иную траекторию своего развития. Использование теории оптимального управления позволяет находить такие воздействия на систему, которые минимизируют риск.

Основываясь на положениях, сформулированных в [7] будем считать, что рассматриваемая система удовлетворяет основным свойствам потенциальных систем и описывается некоторой потенциальной функцией  $U(x, a)$  переменной  $X$ , характеризующей пространство безопасности (уровень уязвимости), и пространства управления  $a$ . Функция  $U(x)$  является непрерывной и имеет локальные экстремумы, в которых производная по времени переменной  $x$  обращается в ноль, т.е. определенное количество стационарных состояний. Часть из них является устойчивыми, а часть неустойчивыми.

Управление системой состоит в определении траекторий таких воздействий, которые переводили бы систему из начального состояния в желаемую точку на поверхности  $U$ , например, в стационарное состояние, которое соответствует норме. При этом

объектом управления могут быть как параметры, характеризующие движение изображающей точки системы относительно поверхности  $U$ , так и параметры, характеризующие трансформацию самой поверхности  $U$ , т.е. изменение числа экстремумов или характера устойчивости.

Для простоты рассмотрения будем считать, что существует три стационарных состояния, характеризующих систему. Первое  $x^{(1)}$  - норма, когда уровень уязвимости достаточно низок, а экологические, техногенные, социальные и экономические резервы достаточно высоки, для своевременного эффективного предотвращения чрезвычайных ситуаций. Второе  $x^{(2)}$  - предкризисное, когда уровень уязвимости повысился, но еще не достиг кризисного порога, а резервы системы и ее адаптационные возможности резко сократились. Третье  $x^{(3)}$  - кризисное, определяемое уровнем уязвимости, характерным для природных, техногенных, социальных катаклизмов. Данному случаю в формализме теории катастроф соответствует катастрофа типа «бабочка», для которой потенциальная функция  $U(x, a)$  описывается полиномом шестой степени относительно переменной  $x$  [6]. Замена переменной  $x = X - a_1/6$  позволяет рассмотреть поведение системы в пространстве четырех параметров управления  $A_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), каждый из которых является функцией параметров управления  $-a_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ). В этом случае имеем:

$$dX/dt = -\partial U(X, A)/\partial X = X^5 + A_1X^3 + A_2X^2 + A_3X + A_4 \quad (1)$$

Параметры управления  $A_i$  характеризуют влияние факторов, связанных с различными угрозами: техногенными ( $i = 1$ ), природными ( $i = 2$ ), экономическими ( $i = 3$ ), социальными ( $i = 4$ ). Каждый из указанных параметров является обобщенным, т.е. для его расчета необходимы данные о широком спектре динамических переменных, описывающих изучаемую систему.

*Индекс техногенных угроз*  $A_1$  определяется на основании данных о потенциально опасных объектах (количество шахт, карьеров, магистральных трубопроводов, пожаро-, радиационно-, взрыво- химически- и биологически опасных предприятий, гидротехнических сооружений, предприятий атомной промышленности), о потенциально опасных территориях, на которых возможно действие поражающих факторов, и числе людей, проживающих на этих территориях. Для его оценки используется комплексный показатель оценки опасности, предложенный в [8]:

$$W_k = \sum \beta_k W_k, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (\sum \beta_k = 1),$$

где  $W_k$  -  $k$ -ый показатель опасности, а  $\beta_k$  - взвешивающий коэффициент.

$$W_{1j} = q_j/q_{max},$$

где  $q_j$  - средний индекс смертности в  $j$ -ом регионе,  $q_{max}$  - максимальное значение  $q$  по сравниваемым регионам.  $W_2 = \alpha_{чс}$  - величина, равная доле ущерба чрезвычайной

ситуации в бюджете региона. В качестве  $W_2$  можно использовать нормированный относительный ущерб  $C_{NM_j}$ .

$$C_{NM_j} = C_{M_j} / C_{M_{max}} W_2.$$

$W_3 = \alpha_{ПФ}$  - величина, равная доле территории региона, подвергшейся действию поражающих факторов, либо доле пострадавшего населения.

*Индекс природных угроз*  $A_2$  определяется на основании данных о числе чрезвычайных ситуаций природного характера в год, о величине площади потенциально опасных территорий, на которых возможно действие смерчей, наводнений, землетрясений, ураганов и прочих стихийных бедствий, о числе людей, проживающих на этих территориях. Кроме того, может использоваться информация об уровне загрязнения окружающей среды, степени дисбаланса экосистемы и факторах, влияющими на глобальное изменение климата.

*Индекс экономических угроз*  $A_3$  определяется на основании данных о ВВП его ежегодном приросте, ВВП на душу населения, а также по уровням безработицы, экспорта высоко технологичных товаров и внедрения новых технологий по индексам человеческого развития и глобализации, по наличию передовые технологических центров, по характеристикам денежно-финансового регулирования и др.

*Индекс социальных угроз*  $A_4$  определяется на основании данных об уровне социальной защищенности населения, доходов населения, неравенства по доходам, проценте населения живущем ниже черты бедности, качестве и доступности здравоохранения, уровне грамотности взрослого населения и др.

*Содержательная постановка задачи* состоит в следующем: провести ранжирование рисков эскалации уязвимости общества для техногенных, природных, экономических и социальных угроз, провести ретроспективный анализ з долговременный прогноз вклада различных составляющих  $A_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) в формирование уязвимости общества с целью выявления узких мест, динамики их трансформации и определения оптимальной стратегии предотвращения чрезвычайных ситуаций.

Математическая постановка задачи формулируется следующим образом. Даны параметры, позволяющие оценить индексы  $A_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ), даны математические модели, позволяющие описать динамику некоторых из указанных выше параметров. Требуется определить динамику изменения риска. Для оценки риска предлагается следующая методология.

На основании статистических данных либо с помощью математических моделей рассчитываются указанные выше индексы  $A_i$ , их критические значения, степень приближенности индексов к этим значениям и динамика их изменений.

Ранжирование индексов по степени их приближенности к бифуркационным значениям, позволяет определить слабые звенья системы, воздействие на которые, приводит к нарушению баланса безопасности в первую очередь.

Для каждого региона в результате такого ранжирования выявляется круг основных угроз, определяется приоритетность мер по их предотвращению и перераспределению потоков финансовой и материальной помощи организациям, ответственным за минимизацию негативных последствий экстремальных событий. При более детализированном исследовании, параметры  $A_i$  также могут быть рассмотрены как  $n$ -мерные функции  $A_i (F_1, \dots, F_j)$  ( $j = \overline{1, n}$ ), являющиеся аргументами некоторых потенциальных функций  $U_{A_i}$  [9]. Переменные  $F_j$  более детально описывают каждый из индексов. Такой итеративный процесс ведет к следующему подуровню бифуркационных множеств, определяемых выражением

$$dA_i/dt = -\partial U_{A_i}/\partial A_i, A_i^M + B_{i1}A_i^{M-2} + \dots + B_{i(M-3)}A_i^2 + B_{i(M-2)}A_i + B_{i(M-1)} = 0.$$

Таким образом может быть построена своеобразная «фрактальная пирамида», бифуркационных множеств, на основе которой может быть вычислена иерархическая матрица рисков переходов системы с одного подуровня безопасности на другой.

Например, экономический компонент угроз, задаваемый индексом ( $A_3$ ), определяется на основании интегральных индексов политических обязательств ( $B_{31}$ ), технологического развития ( $B_{32}$ ), персональных контактов ( $B_{33}$ ) и экономической интеграции ( $B_{34}$ ). Уровень политических обязательств ( $B_{31}$ ), в свою очередь определяется на основании числа участий миротворческих контингентов рассматриваемой страны в миссиях Совета Безопасности ООН, количеству посольств, и представительств, содержащихся страной за рубежом и уровню ВВП ( $C_{311}$ ), индексу человеческого развития ( $C_{312}$ ), уровню безработицы ( $C_{313}$ ), показателю участия страны в различных международных организациях ( $C_{314}$ ). Уровень технологического развития ( $B_{32}$ ) определяется на основании числа пользователей Интернетом ( $C_{321}$ ), числом Интернет-хостов ( $C_{322}$ ), и серверов ( $C_{323}$ ). Уровень персональных контактов ( $B_{33}$ ) определяется на основании интенсивности международных поездок и туризма ( $C_{331}$ ), международных телефонных переговоров ( $C_{332}$ ), международных переводов ( $C_{333}$ ). Уровень экономической интеграции ( $B_{34}$ ) определяется на основании параметров, характеризующих торговлю ( $C_{341}$ ), прямые иностранные инвестиции и портфель движения капитала ( $C_{342}$ ), входные платежи и выплаты доходов по ценным бумагам и поступлениям ( $C_{343}$ )

## 2. ПРИМЕР РАСЧЕТА РИСКА

Расчет риска проводился с помощью программного комплекса, предназначенного для исследования роли неопределенности, обусловленной системным характером современных рисков, степенным распределением плотности вероятности ущерба от катастроф, математического моделирования динамики изменения полей природных, техногенных, экономических и социальных рисков ранжирования угроз и интегральной оценки рисков, разработанного в Институте кибернетики им. В. М. Глушкова НАН Украины [10].



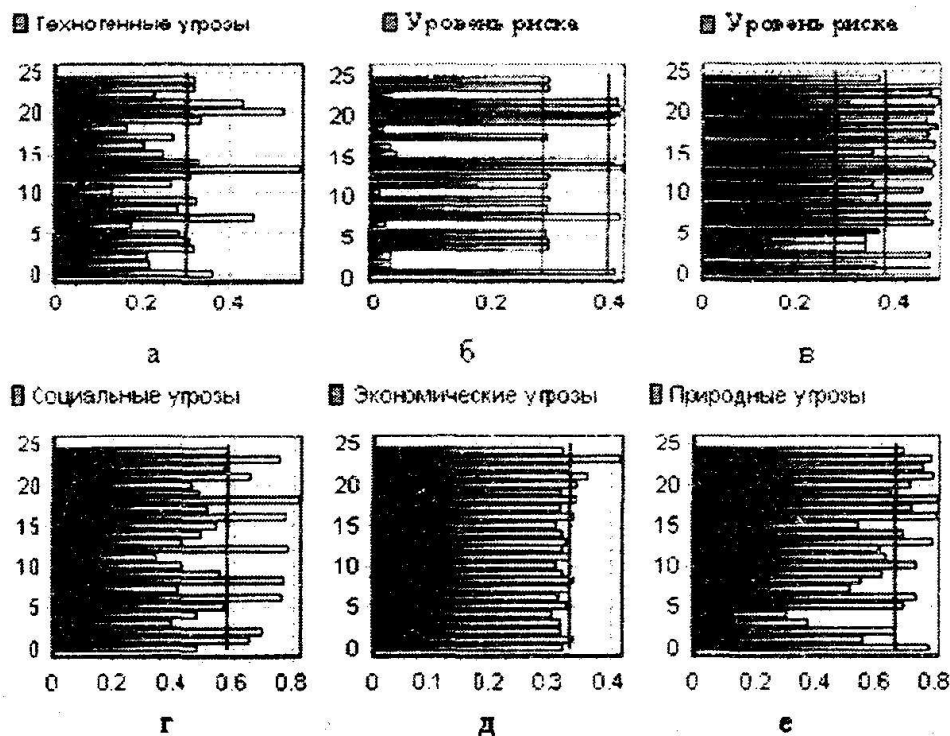


Рис. 1. Ранжирование областей Украины по уровню уязвимости (относительные единицы): 1 - АР Крым и г. Севастополь, 2 - Винницкая обл., 3 - Волынская обл., 4 - Днепропетровская обл., 5 - Донецкая обл., 6 - Житомирская обл., 7 - Закарпатская обл., 8 - Запорожская обл., 9 - Ивано-Франковская обл., 10 - Киевская обл. и г. Киев, 11 - Кировоградская обл., 12 - Луганская обл., 13 - Львовская обл., 14 - Николаевская обл., 15 - Одесская обл., 16 - Полтавская обл., 17 - Ровненская обл., 18 - Сумская обл., 19 - Тернопольская обл., 20 - Харьковская обл., 21 - Херсонская обл., 22 - Хмельницкая обл., 23 - Черкасская обл., 24 - Черновицкая обл., 25 - Черниговская обл.

Результаты модельных расчетов, представленные на рис. 1б, показывают распределение интегрального риска, учитывающего техногенную, природную, экономическую и социальную составляющие. Светлая вертикаль соответствует переходу от низкого уровня угроз к умеренному, темная - от умеренного к высокому. Как показывают результаты моделирования, учет дополнительных составляющих риска существенно меняет картину. В область неблагоприятных регионов переходит часть областей, имевших показатели техногенной опасности близкие к среднему (рис. 1а). Это Харьковская, Одесская, а также Автономная республика Крым.

На рис. 1в представлены результаты модельных экспериментов, имитирующих с помощью аттрактора Лоренца [12] ухудшение экономико-социальной ситуации. Для



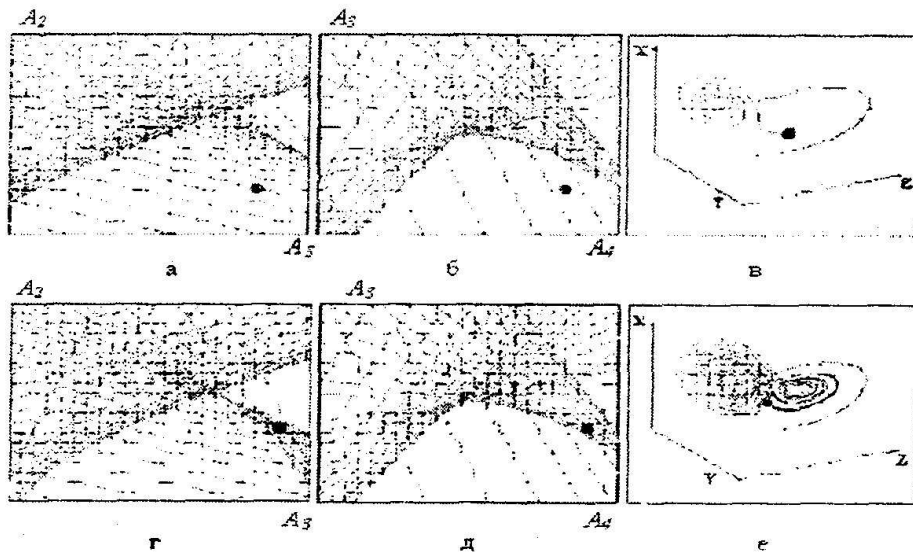


Рис. 2. Динамика проекций бифуркационных поверхностей и фазовых портретов модели Лоренца

временного среза, соответствующего рис. 1в характерен переход большинства областей в зону высоких угроз. В наиболее благоприятной ситуации оказывается Донецкая и Днепропетровская области. Расчеты по ранжированию социальной, экономической и природной уязвимости регионов представлены на рис. 1г-е.

На рис. 2 представлены проекции бифуркационных поверхностей для двух временных срезов  $t_1$  (рис.2а – в) и  $t_2$  (рис.2г – е): на плоскости  $A_2A_3$  - природных-экономических рисков (рис. 2а,г), на плоскости  $A_3A_4$  - экономических-социальных рисков (рис. 2б,д) для АР Крым, а также соответствующие этим моментам фазовые портреты модели Лоренца [11], описывающей взаимосвязь между уровнем глобальных изменений  $X$ , уровнем энергоресурсов  $Y$ , и уровнем сбоя в системах управления  $Z$  для последовательных моментов времени (рис. 2в,е).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты численных экспериментов, представленные на рис. 2 позволяют сделать вывод о том, что в случае АР Крым наиболее уязвимой мишенью для флуктуации различного происхождения является социально-экономическая сфера. Сравнение рис. 2б и 2д показывает, что изображающая точка (темный кружок), характеризующая текущее состояние системы пересекла проекцию бифуркационной поверхности. Таким образом, система перешла в новое стационарное состояние с более высоким уровнем угроз. Далее по уязвимости идет природно-экономическая сфера (рис. 2а и 2г). Система находится на грани перехода в зону повышенного риска.

При моделировании влияния малых флуктуаций остро встает вопрос о точности используемых данных и их достоверности. Следует признать, что применение теории катастроф к зашумленным данным сталкивается с серьезными ограничениями, поскольку эта теория была разработана для детерминистических систем. Л.Кобб [14] разработал стохастическую версию теории катастроф, основывающуюся на стохастических дифференциальных уравнениях. В этой теории устойчивые и неустойчивые состояния равновесия соответствуют модам и антимодам эмпирической функции плотности вероятности  $f(x)$ . В работе [15] метод Кобба был усовершенствован с помощью правила преобразования Ито, что позволило сохранить инвариантность (1) к гладким преобразованиям, нарушающуюся в методе Кобба. Было показано, что в отличие от  $f(x)$ , функция  $I(x) = f(x)\sigma(x)$ , остается инвариантной по отношению к нелинейным диффеоморфным преобразованиям ( $\sigma(x)$  - диффузионная функция стохастического процесса). Таким образом, снимаются ограничения для применения теории катастроф к зашумленным данным.

На следующем этапе исследований планируется применить подходы [15] для усовершенствования разработанной модели. Это позволит существенно повысить эффективность оценок и приступить к решению оптимизационных задач, без решения которых невозможно реальное управление устойчивым развитием.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Repp O.* Typology of risks. Journal of risk research - 2003. - 6 (4-6). P. 519-524.
2. *Цветкова Л. И., Миняев М. Р.* Принципы исследования системных рисков. Управление риском. - 2005.- №2. -С. 28-34.
3. *Малинецкий Г.Г., Курдюмов С.П.* Нелинейная динамика и проблемы прогноза. Вестник РАН, т.71, №3, 2001, с.210-224.
4. *Ласло Э.* Век бифуркации. Постигание меняющегося мира. Путь. 1995.17, С.3-129
5. *Махутов Н. А.* Фундаментальные исследования в области регулирования техногенных рисков. Проблемы безопасности при чрезвычайных ситуациях, 2005.-№3.-С.35-48.
6. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. - М.: Мир, 1980.- 607 с.
7. *Atoyev K.L.* Risk Assessment in Ukraine: New Approaches and Strategy of Development. Assessment and management of environmental risks: methods and applications in Eastern European and developing countries, Kluwer, 2001 - P. 195-202.
8. *Качинський А. Б.* Безпека, загрози і ризик: наукові концепції та математичні методи. -К.: ІПНБ, 2004. - 472 с.
9. *Atoyev K.L.* Mathematical modelling of metabolic and hormonal regulation: risk assessment of environmental and radiation influence on various links of endocrine system. HAIT Journal of Science and Engineering, В-2005. - 2.-№1-2. - P.31-53.
10. *Атоев К.Л., Пепеляев В.А., Томин А.А.* Нелинейная динамическая модель для интегральной оценки системных рисков в техногенной сфере. Компьютерная математика. - 2006.- № 1.- С.29-40.
11. *Lorenz E.* Deterministic nonperiodic flow. Journal of Atoms. Sci. - 1963.- V.20.- P.130-141

12. *Atoyev K.L.* The challenges to safety in East Mediterranean: mathematical modeling and risk management of marine ecosystem.- In: Proth, J.-M., E. Levner, eds. «Strategic Management of Marine Ecosystems». Amsterdam: Kluwer, 2005.- P. 179-197
13. Національна доповідь про стан техногенної та природної безпеки в Україні у 2003 році *Рева ГЛ., Поляков СВ., Патон Б.Е. та інші.* - К: Чорнобиль Інтершформ, 2004.- 435 с.
14. *Cobb L.* Stochastic catastrophe models and multimodal distributions. *Behav. Sci.*-1978.-23. P. 360-374.
15. *Wagenmakers E.J., Peter C.M. Molenaar P.C.M., Grasman R.P.P., Hartelman P.A.I., van der Maas H.J.L.* Transformation invariant stochastic catastrophe theory. *Physica, D*-2005.- 211. - P.263-276.