УДК 517.983

О РАЗЛОЖИМОСТИ ЛИНЕАЛОВ И ПОДПРОСТРАНСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Д.Л. Тышкевич

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского,4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *dtyshk@inbox.ru*

Abstract

In this work conditions of existing of orthogonal algebraic bases in lineals and complete orthogonal systems in (closed with respect to certain topology) subspaces of indefinite inner product spaces are investigated.

Введение

Как показывает *анализ* некоторых *последних исследований и публикаций*, посвященных различным вопросам, представляет интерес изучение ортогональных систем в *общих* пространствах с индефинитной метрикой (см. [13, 16, 19], а также ссылки в [13]).

Насколько можно судить по представленным относительно данной тематики источникам, критерии существования ортогонального алгебраического базиса у линеала и существования полной ортогональной системы в (замкнутом относительно определенной топологии) подпространстве *неизвестны* для пространств с индефинитной метрикой, и представляют собой (кроме некоторых частных случаев) *нерешенные проблемы.*

Целью данной работы является получение таких критериев для некоторых классов линеалов и подпространств. Рассмотрим более подробно *постановку проблемы* (понятия и определения, которые особо не оговариваются в данной статье, могут быть найдены в монографиях [1, 14]).

Введем для удобства следующий термин. Линеал $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ будем называть *каноническим*, если $\mathfrak{L}$ является линейной оболочкой некоторой ортогональной системы (т.е. у $\mathfrak{L}$ существует *ортогональный базис Гамеля*). Такое определение является в некотором роде распространением на линеалы термина для классического канонического разложения пространства Крейна (см. [1]). Действительно, пусть $\mathcal{G}$ — ортогональный базис Гамеля линеала $\mathfrak{L}$, и $\mathcal{G}_{\pm}$ — соответственно положительный и отрицательный линеалы. Нетрудно видеть, что произвольный канонический линеал *невырожден.*

Следующее утверждение является простой переформулировкой классического факта, являющегося прямым следствием теоремы о спектральном разложении самомопряженной матрицы (ср. далее предложения 11 — 13).

Предложение 1. Произвольный конечномерный невырожденный линеал является каноническим.

Бесконечномерный аналог данного предложения естественно рассматривать в следующих двух вариантах. Пусть $\mathfrak{L}$ — (бесконечномерный) *невырожденный* линеал в бесконечномерном пространстве с внутренним произведением (далее сокращенно ПВП).

(1) При каких условиях $\mathfrak{L}$ является каноническим?
(2) Если $\mathfrak{L}$ — *подпространство*, то при каких условиях существует полная *ортогональная* система в $\mathfrak{L}$ (т.е. $\mathfrak{L}$ является *замыканием* некоторого своего канонического подлинеала)? В случае положительного ответа будем называть $\mathfrak{L}$ *топологически разложимым.*

Вопрос 1. Следующим по простоте после конечномерного случая является случай линеала, у которого размерности его дефинитных подлинеалов какого-либо знака ограничены конечным числом. «Отщепляя» при помощи конечномерных методов (ортодополняемый) дефинитный линеал максимальной размерности, в качестве ортогонального дополнения будем иметь дефинитный линеал *противоположного* знака; таким образом получается каноническое разложение исходного линеала. В частности, все линеалы в пространстве Понтрягина обладают указанным свойством.

При переходе к локальной характеристике линеала $\mathcal{G}$ — к его алгебраическому базису $\mathcal{G}$, проблема существования ортогонального алгебраического базиса $\mathcal{H}$ может быть рассмотрена как *проблема ортогонализации* системы $\mathcal{G}$: действительно, вектора системы $\mathcal{H}$ будут линейными комбинациями векторов системы $\mathcal{G}$; построение коэффициентов этих линейных комбинаций и можно мыслить как «процесс ортогонализации» системы $\mathcal{G}$. Так что, по сути, вопрос о том, является ли данный (невырожденный) линеал каноническим, сводится к вопросу существования такого базиса Гамеля $\mathcal{G}$ линеала $\mathfrak{L}$, который можно «ортогонализировать». Последнее слово взято в кавычки по той причине, что «ортогонализировать» означает некий *конструктивный* алгоритмический процесс, т.е. некий набор *рекурсивных* процедур получения коэффициентов, и тот факт, что в случае счетной алгебраической размерности $\mathfrak{L}$, дана *последовательность* коэффициентов в линейных комбинациях, выражающих вектора ортогональной системы через вектора исходной, *не означает*, что эта последовательность может быть получена *конструктивным* образом. В работе [8], автором предложена *конструктивная* процедура ортогонализации последовательности векторов, удовлетворяющей определенным условиям.

Вопрос 2. применяя лемму Цорна к утверждению 2 предложения 7, получим следующий результат.

Предложение 2. Ортогональная система $\mathcal{G}$ в ПВП $\mathfrak{X}$ является максимальной тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}^{[\perp]}$ — нейтральное подпространство.

Таким образом, если ПВП $\mathfrak{X}$ — *дефинитно*, то предложение 2 обеспечивает существование в $\mathfrak{X}$ полной ортогональной системы, ибо единственным нейтральным подпространством в $\mathfrak{X}$ является $\{0\}$, поэтому система $\mathcal{G}$ является *полной*:

$$\mathrm{ClosLin}\mathcal{G} = \mathcal{G}^{[\perp][\perp]} = \{0\}^{[\perp]} = \mathfrak{X}.$$

В случае же *индефинитного* $\mathfrak{X}$ мы сталкиваемся со следующей трудностью: $\mathcal{G}^{[\perp]}$ может оказаться *нетривиальным* нейтральным подпространством, и в этом случае максимальность ортогональной системы $\mathcal{G}$ *не влечёт её полноту*. Обозначим $\mathfrak{X}_1 := \mathrm{ClosLin}\mathcal{G}$; если система $\mathcal{G}$ максимальна, то по предложению 2 $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1^{[\perp][\perp]} \supseteq \mathfrak{X}_1^{[\perp]}$. Таким образом, ортогональное дополнение пространства $\mathfrak{X}_1$ лежит в самом $\mathfrak{X}_1$: ситуация, парадоксальная с точки зрения дефинитных подпространств. Подпространство $\mathfrak{X}_1$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{X}_1^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{X}_1$, назовем *неорторасширяемым*; в дефинитном случае единственным неорторасширяемым подпространством является само $\mathfrak{X}$. в этих терминах предложению 2 можно придать следующую трактовку: ортогональная система $\mathcal{G}$, будучи «заключена» в неорторасширяемое подпространство $\mathfrak{X}_1$, уже не может «выйти за пределы» $\mathfrak{X}_1$, т.е. быть расширена до ортогональной системы векторами из $\mathfrak{X}\backslash\mathfrak{X}_1$.

Однако последнее отнюдь не означает, что не существует ортогональной системы $\mathcal{G}'$, которая «поглощает» $\mathcal{G}$ и некоторое нужное множество векторов $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{X}\backslash\mathfrak{X}_1$ (т.е. $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}'$, и линейная оболочка $\mathcal{G}'$ содержит линейную оболочку $\mathcal{G} \cup \mathcal{M}$). Напротив, как мы увидим далее, для произвольных не более чем счетных $\mathcal{G}$ и $\mathcal{M}$ такая система всегда существует.

В определенных случаях исследование неорторасширяемых подпространств эквивалентно исследованию максимальных ортогональных систем. Назовем ПВП $\mathfrak{X}$ *наследственно разложимым*, если само $\mathfrak{X}$ и все его подпространства топологически разложимы. Для наследственно разложимых ПВП описание всех максимальных ортогональных систем сводится к описанию всех неорторасширяемых подпространств. Отметим, что наследственно разложимым является любое сепарабельное ПВП и любое G-пространство.

Ясно, что в классе *всех* ПВП наследственная разложимость всех ПВП эквивалентна просто топологической разложимости каждого ПВП. Однако именно исследование топологической разложимости *несепарабельных* ПВП представляет собой значительную трудность, что видно далее из результатов п. 3.4. Из-за наличия неорторасширяемых подпространств и *несчетной* размерности пространства приходится налагать некоторые дополнительные условия на ПВП $\mathfrak{X}$. При этом не удается пока построить соответствующий контрпример, и вопрос о топологической разложимости произвольного *несепарабельного* ПВП остается открытым.

1. Необходимые определения и вспомогательные результаты

1.1. **Ординальные и кардинальные числа.** Ординальные числа в работе будут обозначаться малыми греческими буквами, кардинальные — малыми готическими. Через $\aleph_0$, как обычно, обозначается счетный кардинал.

Пусть $\zeta < \xi$. Через $[\zeta,\xi]$, $(\zeta,\xi]$, $[\zeta,\xi)$, (ζ,ξ) будут обозначаться совокупности ординальных чисел, лежащие между указанными границами, и содержащие или не содержащие границу в зависимости от того, является скобка квадратной или круглой соответственно.

Как известно, для кардинальных чисел имеет место следующий факт.

Предложение 3. Любое множество кардинальных чисел вполне упорядоченно.

Также нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 4. Для любого бесконечного кардинала $\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность континуума.

Предложение 5. Если $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, то $2^{\mathfrak{a}} < 2^{\mathfrak{b}}$.

Предложение 5 является более слабым, чем обобщенная континуум-гипотеза (и легко выводится из последней).

Счетный кардинал, как обычно, обозначается через $\aleph_0$.

1.2. **Алгебраический базис.** Пусть $\mathfrak{X}$ — линейное пространство, и $\mathfrak{M}$ — непустое множество $\mathfrak{X}$. Через $\operatorname{Lin}\mathfrak{M}$ обозначается *линейная оболочка* множества $\mathfrak{M}$. Для пустого множества полагаем: $\operatorname{Lin}\varnothing := \{0\}$.

Напомним, что *Базисом Гамеля* (или *алгебраическим базисом*) пространства $\mathfrak{X}$ называется произвольная линейно независимая система векторов $\mathfrak{X}$, линейная оболочка которой совпадает с $\mathfrak{X}$.

Алгебраической размерностью пространства $\mathfrak{X}$ называется наименьшая мощность базиса Гамеля $\mathfrak{X}$ (такое определение корректно в силу предложения 3). Алгебраическая размерность $\mathfrak{X}$ будет обозначаться через $\dim\mathfrak{X}$.

1.3. **Полные системы и топологическая размерность.** Пусть $\langle\mathfrak{X},\tau\rangle$ — топологическое пространство с топологией τ, и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$. Через $\operatorname{Clos}_\tau\mathfrak{M}$ обозначается *замыкание* множества $\mathfrak{M}$ в топологии τ (т.е. пересечение всех τ-замкнутых множеств, содержащих $\mathfrak{M}$).

Пусть теперь $\langle\mathfrak{X},\tau\rangle$ — *линейное* топологическое пространство. *Топологической размерностью* пространства $\mathfrak{X}$ назовем наименьшую мощность полной линейно независимой системы в $\mathfrak{X}$ (см. предложение 3). Топологическая размерность пространства $\mathfrak{X}$ с топологией τ будет обозначаться через $\tau.\dim\mathfrak{X}$. Пространство $\mathfrak{X}$ называется *сепарабельным*, если $\tau.\dim\mathfrak{X} = \aleph_0$.

1.4. **Топологии в пространствах с внутренним произведением.** Везде в этом пункте $\mathfrak{X}$ — линейное пространство с внутренним произведением.

Локально выпуклая топология на $\mathfrak{X}$, порождаемая семейством полунорм $\{p_x\}_{x\in\mathfrak{X}}$, $p_y(x) := |[x,y]_{\mathfrak{X}}|$, называется *слабой*, и будет обозначаться через $\tau^0_{\mathfrak{X}}$. Эквивалентным образом $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ может быть описана как слабейшая из топологий, в которых непрерывны все функционалы

$$\varphi_y, \varphi_y(x) := [x,y]_{\mathfrak{X}}, x, y \in \mathfrak{X}. \tag{1}$$

Слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ является хаусдорфовой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ — невырождено.

Локально выпуклая топология τ на $\mathfrak{X}$ называется *частичной мажорантой*, если τ-непрерывны все функционалы (1). Слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ является частичной мажорантой. Локально выпуклая топология τ является частичной мажорантой тогда и только тогда, когда $\tau^0_{\mathfrak{X}} \leqslant \tau$.

Топология τ на $\mathfrak{X}$ называется *допустимой*, если τ — частичная мажоранта, и для любого τ-непрерывного линейного функционала φ, определенного на $\mathfrak{X}$, существует такой вектор $y \in \mathfrak{X}$, что $\varphi(x) = [x,y]_{\mathfrak{X}}$, $x \in \mathfrak{X}$.

Предложение 6. Справедливы следующие утверждения.

(1) Слабая топология $\tau^0_{\mathfrak{X}}$ является допустимой.

(2) Если τ — допустимая топология в $\mathfrak{X}$, то для произвольного линеала $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ $\mathrm{Clos}_\tau \mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{[\perp][\perp]}$.

(3) Пусть τ — допустимая топология, и $\mathfrak{L}$ — линеал в пространстве $\mathfrak{X}$. Включение $\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq \mathrm{Is}\mathfrak{X}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{Clos}_\tau \mathfrak{L} = \mathfrak{X}$.

(4) Пусть τ — допустимая топология в $\mathfrak{X}$, и $\{\mathfrak{X}_i\}_{i\in I}$ — некоторое семейство подмножеств в $\mathfrak{X}$. Тогда

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{X}_i\right)^{[\perp]} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{X}_i^{[\perp]};$$

если все $\mathfrak{X}_i$ — подпространства, то

$$\left(\bigcap_{i\in I}\mathfrak{X}_i\right)^{[\perp]} = \mathrm{Clos}_\tau \mathrm{Lin}\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{X}_i^{[\perp]}\right).$$

Как показывает утверждение 2 предложения 6, замыкания линеалов в любой допустимой топологии *совпадают*, поэтому при записи оператора замыкания Clos мы, когда это не может вызвать недоразумений, будем опускать нижний индекс, соответствующий допустимой топологии. Запись $\tau.\mathrm{dim}\mathfrak{X}$, речь будет идти о ПВП $\mathfrak{X}$, и ничего специально не будет оговорено о топологии τ, будет означать топологическую размерность относительно (произвольной) *допустимой* топологии.

Далее, как правило, *подпространством* мы будем называть линеал, замкнутый в (некоторой) допустимой топологии.

Локально выпуклая топология τ на $\mathfrak{X}$ называется *мажорантной*, если внутреннее произведение $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}}$ τ-непрерывно *по совокупности* переменных (таким образом, произвольная мажоранта является частичной мажорантой). Стандартным примером ПВП с мажорантой является унитарное пространство со скалярным произведением, в частности, гильбертово пространство.

1.5. **Индуктивные множества.** . Напомним, что ч.у. множество A называется *индуктивно упорядоченным* (или просто, *индуктивным*), если каждая цепь множества A (т.е. линейно упорядоченное подмножество) имеет верхнюю грань. По широко известной и применяемой лемме Цорна множество A содержит максимальный элемент (заметим, однако, что далеко не всякое ч.у. множество, содержащее максимальные элементы, является индуктивным).

Отметим в виде утверждения некоторые примеры индуктивных множеств, возникающих при исследовании ПВП.

Предложение 7. Следующие множества в заданном ПВП индуктивны (по отдельности).

(1) Множества всех отрицательных, нейтральных, положительных; неположительных, неотрицательных линеалов. Множества всех неположительных, нейтральных, неотрицательных подпространств. Все эти же множества подпространств, содержащих фиксированное соответствующее подпространство.
(2) Множество всех ортогональных систем. Множество всех ортогональных систем, содержащих заданную ортогональную систему.

1.6. **Некоторые свойства ортогональных систем.** Из утверждения 2 предложения 7 применением леммы Цорна получаем

Предложение 8. В дефинитном ПВП $\mathfrak{X}$ существует полная ортогональная система.

Ортогональные системы обладают «почти полно» топологической свободой:

Предложение 9. Пусть $\mathcal{G} = \{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — ортогональная система в ПВП $\mathfrak{X}$. Тогда для произвольного непустого $B \subset A$, для которого подпространство $\operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\{g_\beta \mid \beta \in B\}$ — невырождено,

$$\operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\{g_\beta \mid \beta \in B\} \cap \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\{g_\alpha \mid \alpha \in A\backslash B\} = \{0\}.$$

В частности, система $\mathcal{G}$ топологически свободна (минимальна):

$$\forall\alpha \in A \quad g_\alpha \in \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\{g_\beta \mid \beta \in A\backslash\{\alpha\}\}.$$

Используя простейшие свойства кардинальных чисел, из предложения 9 можно вывести следующее утверждение.

Предложение 10. Для любой ортогональной системы $\mathcal{G}$ в невырожденном ПВП $\mathfrak{X}$ $|\mathcal{G}| \leqslant \tau.\dim\mathfrak{X}$.

1.7. **Матрица Грама конечной системы векторов в ПВП..** Пусть $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — некоторая система векторов ПВП $\mathfrak{X}$. *Матрицей Грама* системы $\mathcal{G}$ называется (самосопряженная) матрица

$$\Gamma(\mathcal{G}) := \begin{pmatrix} [g_1, g_1] & [g_1, g_2] & \dots & [g_1, g_n] \\ [g_2, g_1] & [g_2, g_2] & \dots & [g_2, g_n] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [g_n, g_1] & [g_n, g_2] & \dots & [g_n, g_n] \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама обладает вполне очевидными свойствами, которые мы перечислим в следующих трех утверждениях (через $\mathbb{R}_-$ и $\mathbb{R}_+$ будем обозначать соответственно множества *отрицательных* и *положительных* вещественных чисел).

Предложение 11. Пусть $n \in \mathbb{N}$, и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — некоторая система. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

(a): $0 \in \sigma(\Gamma(\mathcal{G}))$

(b): Система $\mathcal{G}$ — линейно независима, и линеал $\operatorname{Lin}\mathcal{G}$ — невырожден.

Предложение 12. Пусть $n \in \mathbb{N}$, и система $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — линейно независима. Следующие утверждения эквивалентны.

(a): Матрица $\Gamma(\mathcal{G})$ — положительна (неположительна, отрицательна, неотрицательна)

(b): $\sigma(\Gamma(\mathcal{G})) \subseteq \mathbb{R}_+ (\sigma(\Gamma(\mathcal{G})) \subseteq \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad \sigma(\Gamma(\mathcal{G})) \subseteq \mathbb{R}_-$, $\sigma(\Gamma(\mathcal{G})) \subseteq \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ соответственно).

Предложение 13. Пусть $n \in \mathbb{N}$, и система $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — линейно независима. Тогда

$$\dim \operatorname{Is} \operatorname{Lin}\mathcal{G} = \operatorname{dimnull}(\Gamma(\mathcal{G})), \tag{2}$$

где $\operatorname{null}(A)$ — нуль-множество матрица A. В частности, линеал $\operatorname{Lin}\mathcal{G}$ невырожден тогда и только тогда, когда невырождена матрица Грама системы $\mathcal{G}$.

2. Линеалы с конечным индексом максимальности

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый линеал. Рассмотрим следующие характеристики линеала $\mathfrak{L}$:

$\nu_-(\mathfrak{L}) := \sup\{\dim \mathfrak{N} | \mathfrak{N}$ – конечномерный *отрицательный* линеал$\}$,

$\nu_0(\mathfrak{L}) := \sup\{\dim \mathfrak{N} | \mathfrak{N}$ – конечномерный *нейтральный* линеал$\}$,

$\nu_+(\mathfrak{L}) := \sup\{\dim \mathfrak{N} | \mathfrak{N}$ – конечномерный *положительный* линеал$\}$.

Из самого определения чисел $\nu_\pm(\cdot)$, $\nu_0(\cdot)$ следует

Предложение 14. Если для линеалов выполняется включение $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}$, то $\nu_\pm(\mathfrak{L}) \leqslant \nu_\pm(\mathfrak{N})$, $\nu_0(\mathfrak{L}) \leqslant \nu_0(\mathfrak{N})$.

Кардинальное число $\nu(\mathfrak{L}) := \min\{\nu_-(\mathfrak{L}), \nu_+(\mathfrak{L})\}$ $(\leqslant \aleph_0)$ назовем *индексом максимальности* линеала $\mathfrak{L}$. Чуть позже мы покажем, что, на самом деле, $\nu(\mathfrak{L}) = \nu_0(\mathfrak{L})$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_-[\dot{+}]\mathfrak{L}_+$ — каноническое разложение $\mathfrak{L}$, и $\mathfrak{N}_\pm \subseteq \mathfrak{L}$ — некоторый, соответственно, неотрицательный или положительный линеал. Тогда*

$$\dim \mathfrak{N}_\pm \leqslant \dim \mathfrak{L}_\pm. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $P_\pm$ — проектор в $\mathfrak{L}$ на $\mathfrak{L}_\pm$. Рассмотрим отображение $\varphi_\pm : \mathfrak{N}_\pm \to \mathfrak{L}_\pm$, $\varphi_\pm(x) := P_\pm x$, $x \in \mathfrak{N}_\pm$. $\varphi_\pm$ — линейное *инъективное* отображение. Действительно, если $\varphi_\pm x = 0$, то $x \in \mathfrak{L}_\mp \cap \mathfrak{N}_\pm$, т.е. x — нейтральный вектор; так как $\mathfrak{L}_-$, $\mathfrak{L}_+$ — дефинитные линеалы, то $x = 0$. Из инъективности $\varphi_\pm$ и следует (3). $\square$

Следствие 1. *Для любого канонического разложения $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_-[\dot{+}]\mathfrak{L}_+$ линеала $\mathfrak{L}$*

$$\nu_\pm(\mathfrak{L}) \leqslant \dim \mathfrak{L}_\pm.$$

Лемма 2. *Для произвольных ортогональных линеалов $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ с нулевым пересечением*

$$\nu_\pm(\mathfrak{L}_1[\dot{+}]\mathfrak{L}_2) \geqslant \nu_\pm(\mathfrak{L}_1) + \nu_\pm(\mathfrak{L}_2),$$
$$\nu_0(\mathfrak{L}_1[\dot{+}]\mathfrak{L}_2) \geqslant \nu_0(\mathfrak{L}_1) + \nu_0(\mathfrak{L}_2).$$

Доказательство. Вытекает из того очевидного факта, что если $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — положительные, отрицательные или нейтральные линеалы соответственно в $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, то $\mathfrak{N}_1[\dot{+}]\mathfrak{N}_2$ — положительный, отрицательный или нейтральный линеал в $\mathfrak{L}_1[\dot{+}]\mathfrak{L}_2$. $\square$

Следующая теорема, наряду с констатацией некоторых простых свойств чисел $\nu_\pm(\mathfrak{L})$, $\nu_0(\mathfrak{L})$, показывает, что произвольный линеал с конечным индексом максимальности *является каноническим.*

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения для произвольного ПВП $\mathfrak{X}$.*

(1) *Пусть $\nu_\pm(\mathfrak{L})$ конечно, и $\mathfrak{N}_\pm$ — такой, соответственно, положительный или отрицательный линеал в $\mathfrak{L}$, что*

$$\dim \mathfrak{N}_\pm = \nu_\pm(\mathfrak{L}); \tag{4}$$

$\mathfrak{L} = \mathfrak{N}_\pm[\dot{+}](\mathfrak{L}[-]\mathfrak{N}_\pm)$ — разложение невырожденного линеала $\mathfrak{L}$, Тогда $\mathfrak{L}[-]\mathfrak{N}_\pm$ — отрицательный или положительный линеал (соответственно). Таким образом, любой линеал с конечным индексом максимальности является каноническим.

(2) *Для произвольных линейно независимых ортогональных линеалов $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$ в $\mathfrak{X}$ $\nu_\pm(\mathfrak{L}_1[\dot{+}]\mathfrak{L}_2) = \nu_\pm(\mathfrak{L}_1) + \nu_\pm(\mathfrak{L}_2)$.*

(3) *Для любого линеала $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ $\nu(\mathfrak{L}) = \nu_0(\mathfrak{L})$.*

(4) *Если* $\dim\mathfrak{L} \leqslant \aleph_0$, *то* $\nu_-(\mathfrak{L}) + \nu_+(\mathfrak{L}) = \dim\mathfrak{L}$.

(5) *Пусть τ — мажоранта в $\mathfrak{X}$. Тогда для произвольного линеала $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ справедлива импликация*

$$\nu_{\pm}(\mathfrak{L}) < \aleph_0 \Rightarrow \nu_{\pm}(\mathrm{Clos}_{\tau}\,\mathfrak{L}) < \aleph_0.$$

Доказательство. 1. Если бы, например, $\mathfrak{L}[-]\mathfrak{N}_+$ содержал положительный вектор x (очевидно, $\mathfrak{L}[-]\mathfrak{N}_+$ не может содержать нейтральных векторов в силу невырожденности $\mathfrak{L}$), то линеал $\mathfrak{N}_+[\dot{+}]\mathrm{Lin}\{x\}$ был бы, положительным, и его размерность равнялась бы $\dim\mathfrak{N}_+ + 1$, что противоречит (4).
2. Рассмотрим для определенности случай $<< + >>$. Если хотя бы одно из кардинальных чисел $\nu_+(\mathfrak{L}_1)$, $\nu_+(\mathfrak{L}_2)$ *бесконечно*, то равенство тривиальным образом вытекает из леммы 2. Допустим, оба числа $\nu_+(\mathfrak{L}_1)$, $\nu_+(\mathfrak{L}_2)$ *конечны*, и $\mathfrak{L}_i = \mathfrak{L}_i^-[\dot{+}]\mathfrak{L}_i^+$ — каноническое разложение $\mathfrak{L}_i$ ($i \in \overline{1,2}$), существующее согласно утверждению 1. Тогда $\mathfrak{L} = (\mathfrak{L}_1^-[\dot{+}]\mathfrak{L}_2^-)[\dot{+}](\mathfrak{L}_1^+[\dot{+}]\mathfrak{L}_2^+)$ — каноническое разложение $\mathfrak{L}$, и для произвольного линеала $\mathfrak{N}_+ \subseteq \mathfrak{L}$ согласно лемме 3

$$\dim\mathfrak{N}_+ \leqslant \dim(\mathfrak{L}_1^+[\dot{+}]\mathfrak{L}_2^+) = \nu_+(\mathfrak{L}_1) + \nu_+(\mathfrak{L}_2).$$

Далее применяем лемму 2 и определение $\nu_+(\cdot)$.
3. Положим $n_{\pm} := \nu_{\pm}(\mathfrak{L})$, и для определенности рассмотрим случай

$$n_- \leqslant n_+. \tag{5}$$

(a) n_- — *конечно.* Пусть, согласно утверждению 1,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_-[\dot{+}]\mathfrak{L}_+ \tag{6}$$

— каноническое разложение $\mathfrak{L}$, и $\dim\mathfrak{L}_- = n_-$. Пусть $\{g_i^-\}_{i\in\overline{1,n_-}}$ — ортонормированный *базис* в $\mathfrak{L}_-$, а $\{g_i^+\}_{i\in\overline{1,n_-}}$ — некоторая ортонормированная система в $\mathfrak{L}_+$ (см. (5)). Положим

$$e_i := g_i^- + g_i^+, i \in \overline{1,n_-}.$$

Тогда, очевидно, $\mathfrak{E} := \mathrm{Lin}\{e_i \,|\, i \in \overline{1,n_-}\}$ — *нейтральный* линеал, следовательно, $\nu_0(\mathfrak{L}) \geqslant n_-$. Обратное неравенство получим, применяя к (6) лемму 3. Таким образом, $\nu_0(\mathfrak{L}) = n_- = \nu(\mathfrak{L})$.
(b) n_- — *бесконечно.* Пусть $n \in \mathbb{N}$ — произвольное фиксированное число, и $\mathfrak{L}_-$ — такой конечномерный отрицательный линеал, что $\dim\mathfrak{L}_- \geqslant n$. Тогда, воспользовавшись утверждением 2, примененным к разложению $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_-[\dot{+}](\mathfrak{L}[-]\mathfrak{L}_-)$, существующему согласно утверждению 1, получим:

$$\aleph_0 = \nu_+(\mathfrak{L}_-) + \nu_+(\mathfrak{L}[-]\mathfrak{L}_-) = \nu_+(\mathfrak{L}[-]\mathfrak{L}_-),$$

следовательно, $\mathfrak{L}[-]\mathfrak{L}_-$ содержит такой конечномерный *положительный* линеал $\mathfrak{L}_+$, что $\dim\mathfrak{L}_+ \geqslant \dim\mathfrak{L}_- \geqslant n$. Далее строим нейтральный линеал $\mathfrak{E}$ аналогично пункту (a). Итак, для произвольного $n \in \mathbb{N}$ мы нашли такой *нейтральный* линеал $\mathfrak{E}$, что $\dim\mathfrak{E} \geqslant n$, следовательно $\nu_0(\mathfrak{L}) = \aleph_0 = \nu(\mathfrak{L})$.
4. Элементарно следует из утверждений 1, 2.

5. Для определенности рассмотрим случай << + >>. Пусть $n \in \mathbb{N}$ — произвольное фиксированное число, $\mathfrak{M}$ — некоторый *положительный* линеал из $\mathrm{Clos}_\tau \mathfrak{L}$, для которого $\dim \mathfrak{M} = m \geqslant n$, и $\mathcal{H} = \{h_k\}_{k \in \overline{1,m}}$ — некоторый базис в $\mathfrak{M}$. тогда, в силу того, что τ — *мажоранта*, для любого $\varepsilon > 0$ существует такая система $\mathcal{H}_\varepsilon = \{h_{\varepsilon k}\}_{k \in \overline{1,m}}$ из $\mathfrak{L}$, что $|[h_i, h_j] - [h_{\varepsilon i}, h_{\varepsilon j}]| < \varepsilon$ для $i, j \in \overline{1,m}$. Так как $\sigma(\Gamma(\mathcal{H})) \subseteq \mathbb{R}_+$ (линеал $\mathfrak{M}$ *положителен*, и система $\mathcal{H}$ *линейно независима* — см. предложение 12), и собственные числа непрерывным образом зависят от коэффициентов матрицы, то при некотором достаточно малом ε_0 $\sigma(\Gamma(\mathcal{H}_{\varepsilon_0})) \subseteq \mathbb{R}_+$. Поэтому, в силу предложений 11 и 12 линеал $\mathrm{Lin}\,\mathcal{H}_{\varepsilon_0} \subseteq \mathfrak{L}$ — *положителен*, и $\mathrm{dimLin}\,\mathcal{H}_{\varepsilon_0} = m \geqslant n$. Таким образом, мы показали, что если $\nu_+(\mathrm{Clos}_\tau \mathfrak{L}) = \aleph_0$, то и $\nu_+(\mathfrak{L}) = \aleph_0$. □

3. Топологическая разложимость

3.1. **О расширениях ортогональных систем.**

Лемма 3. Пусть y — нейтральный, но неизотропный вектор в ППВ $\mathfrak{Y}$. Тогда существует ортогональная система $\{e_1, e_2\}$:

$$y \in Lin\{e_1, e_2\}.$$

Доказательство. Так как $y \notin \mathrm{Is}\,\mathfrak{Y}$, то существует такой вектор $x \in \mathfrak{Y}$, что $[y, x] \neq 0$. Следовательно, линеал $\mathrm{Lin}\{x, y\}$ – невырожден, так как матрица Грама системы $\{x, y\}$ невырождена:

$$\det \begin{pmatrix} [\mathrm{x,x}] & [\mathrm{x,y}] \\ [\mathrm{y,x}] & [\mathrm{y,y}] \end{pmatrix} = -|[x, y]|^2 \neq 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Lin}\{x, y\}$ – двумерный канонический линеал. Выбирая в качестве $\{e_1, e_2\}$ произвольный ортогональный базис линеала $\mathrm{Lin}\{x, y\}$, получим утверждение леммы. □

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{E}$ – ортогональная система, $g \notin \mathrm{Lin}\,\mathcal{E}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Существует ортогональная система $\mathcal{E}' : \mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$*

$$\mathrm{Lin}(\mathcal{E} \cup \{g\}) \subseteq \mathrm{Lin}\,\mathcal{E}'. \tag{7}$$

(2) *(a) Множество $\mathcal{N}_g := \{e \in \mathcal{E} \mid [g, e] \neq 0\}$ – конечно, и*
(b) $\mathrm{Lin}(\mathcal{E} \cup \{g\}) \cap \mathrm{Is}\,\mathcal{E}^{[\perp]} = \{0\}$.

Доказательство. $(1) \Rightarrow (b)$. Допустим противное, существует *ненулевой* вектор:

$$\hat{e} \in \mathrm{Lin}(\mathcal{E} \cup \{g\}) \cap \mathrm{Is}\,\mathcal{E}^{\perp}. \tag{8}$$

Тогда из (7) следует, что $\hat{e} \in \mathrm{Lin}\,\mathcal{E}'$, а в силу того, что $\hat{e} \in \mathcal{E}^{[\perp]}$, и линеал $\mathrm{Lin}\,\mathcal{E}$ – невырожденный, существует такая система векторов $\{\hat{e}_i\}_{i \in \overline{1,k}}$ из $\mathcal{E}' \backslash \mathcal{E}$, и ненулевой набор комплексных чисел $\{\alpha_i\}_{i \in \overline{1,k}}$, что $\hat{e} = \sum\limits_{i \in \overline{1,k}} \alpha_i \hat{e}_i \quad (k \in \mathbb{N})$.

Положим $\mathfrak{N} := \mathrm{Lin}\{\hat{e}_i \,|\, i \in \overline{1,k}\}$. Тогда $\hat{e} \in \mathfrak{N}$. В то же время, так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathcal{E}^{[\perp]}$, вектор $\hat{e}$ лежит в $\mathfrak{N}^{[\perp]}$:

$$\hat{e} \in \mathrm{Is}\,\mathcal{E}^{[\perp]} \subseteq \mathcal{E}^{[\perp][\perp]} \subseteq \mathfrak{N}^{[\perp]}.$$

Таким образом, $0 \neq \hat{e} \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}^{[\perp]}$. Но линеал $\mathfrak{N}$ – (конечномерный) канонический, следовательно, невырожденный. Таким образом, (8) приводит к противоречию.

(1) $\Rightarrow$ (a). Существует такая система векторов $\{e_i^{'}\}_{i\in\overline{1,m}}$ из $\mathcal{E}^{'}$, что $g = \sum\limits_{i\in\overline{1,m}} \gamma_i e_i^{'}$ $(m \in \mathbb{N})$ для некоторой системы чисел $\{\gamma_i\}_{i\in\overline{1,m}}$. Тогда, как нетрудно видеть, $\bigcap\limits_{i\in\overline{1,m}} \overline{\mathcal{N}_{e_i^{'}}} \subseteq \overline{\mathcal{N}_g}$, откуда $\mathcal{N}_g \subseteq \bigcup\limits_{i\in\overline{1,m}} \mathcal{N}_{e_i^{'}}$, следовательно ,
$|\mathcal{N}_g| \leqslant \sum\limits_{i\in\overline{1,m}} |\mathcal{N}_{e_i^{'}}| \leqslant m$. Последнее неравенство в этой цепочке вытекает из очевидного соотношения: $\mathcal{N}_{e_i^{'}} = \begin{cases} \{e_i^{'}\}, & e_i^{'} \in \mathcal{E} \\ \varnothing, & e_i^{'} \notin \mathcal{E} \end{cases}$.

(2)$\Rightarrow$(1). В случае если множество $\mathcal{N}_g$ пусто (т.е. когда вектор g ортогонален всем векторам системы $\mathcal{E}$), и вектор g не является нейтральным, тривиально полагаем $\mathcal{E}^{'} := \mathcal{E} \bigcup \{g\}$.

Пусть теперь множество $\mathcal{N}_g$ непусто, и $\mathcal{N}_g = \{e_i\}_{i\in\overline{1,n}}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $y := g - \sum\limits_{i\in\overline{1,m}} \frac{[g,e_i]}{[e_i,e_i]} e_i$. Тогда, очевидно, $y \in \mathcal{N}_g^{[\perp]}$ и $y \in (\mathcal{E} \backslash \mathcal{N}_g)^{[\perp]}$, а, следовательно, $y \in \mathcal{E}^{[\perp]}$. Здесь возможны два варианта.

I. *y не является нейтральным.* Тогда полагаем $\mathcal{E}^{'} := \mathcal{E} \bigcup \{y\}$, и (7), очевидно, выполняется.

II. y – *нейтральный* вектор. Така как

$$y \in \mathrm{Lin}(\mathcal{E} \cup \{y\}) = \mathrm{Lin}(\mathcal{E} \cup \{g\}), \tag{9}$$

то в силу условия (b) теоремы $y \notin \mathrm{Is}\,\mathcal{E}^{[\perp]}$. Применяя лемму **??** к вектору y и пространству $\mathfrak{Y} := \mathcal{E}^{[\perp]}$, получим ортогональную систему

$$\{e_1, e_2\} \subseteq \mathcal{E}^{[\perp]}, \tag{10}$$

что

$$y \in \mathrm{Lin}\{e_1, e_2\}. \tag{11}$$

Определим

$$\mathcal{E}^{'} := \mathcal{E} \cup \{e_1, e_2\}.$$

Из (9), (10) и (11) следует, что $\mathcal{E}^{'}$ – ортогональная система, для которой выполняется включение (7).

Если же множество $\mathcal{N}_g$ пусто, то и вектор g нейтрален, то полагаем $y := g$ и строим систему $\mathcal{E}^{'}$ аналогично пункту II. $\square$

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{G}$– счетная система векторов в невырожденном ПВП $\mathfrak{X}$. Существует ортогональная система $\mathcal{E}$ в $\mathfrak{X}$, поглощающая $\mathcal{G}$:*

$$\operatorname{Lin}\mathcal{G} \subseteq \operatorname{Lin}\mathcal{E}.$$

Доказательство. Непосредственным образом получается из теоремы 2 применением индукции. $\square$

3.2. **О топологической разложимости вырожденных ПВП..**

Предложение 15. Пусть

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \dotplus \operatorname{Is}\mathfrak{X}, \tag{12}$$

$\mathfrak{X}_1$– невырождено; $\tau^0_{\mathfrak{X}_1}$– слабая топология, порожденная внутренним произведением $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}_1}$– служением $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{X}}$ на $\mathfrak{X}_1$. Тогда для произвольного подмножества $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}_1$

$$\operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}_1}}\mathfrak{M} \subseteq \operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}}\mathfrak{M}.$$

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}_1}}\mathfrak{M}$. Тогда существует сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из $\mathfrak{M}$, сходящаяся к $x : \tau^0_{\mathfrak{X}_1}\cdot\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha = x$, т.е для любого $y \in \mathfrak{X}_1$ $\lim\limits_{\alpha\in A}[x_\alpha, y]_{\mathfrak{X}_1} = [x,y]_{\mathfrak{X}_1}$. При этом, очевидно, для любого $z \in \operatorname{Is}\mathfrak{X}$

$$\lim_{\alpha\in A}[x_\alpha, y+z]_{\mathfrak{X}} = \lim_{\alpha\in A}[x_\alpha, y]_{\mathfrak{X}_1} = [x,y]_{\mathfrak{X}_1} = [x, y+z]_{\mathfrak{X}}$$

и, согласно (12), последнее означает, что $\tau^0_{\mathfrak{X}}\cdot\lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha = x$, т.е. $x \in \operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}}\mathfrak{M}$. $\square$

Предложение 16. Пусть $\mathfrak{X}$ разлагается в прямую сумму (12) предложения 15. Тогда

(a): $\operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}}\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$;
(b): $\tau.\dim\mathfrak{X}_1 = \tau.\dim\mathfrak{X}$.
(c): Если линеал $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}_1$ удовлетворяет условию: $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{L}^{[\perp]} = 0$, то $\operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}_1}}\mathfrak{L} = \mathfrak{X}_1$.

Доказательство. (a) Из утверждения теоремы 4 предложения 6, разложения (12) и определения изотропного подпространства следует цепочка:

$$\mathfrak{X}^{[\perp]} = (\mathfrak{X}_1 \dotplus \operatorname{Is}\mathfrak{X})^{[\perp]} = \mathfrak{X}_1^{[\perp]} \cap (\operatorname{Is}\mathfrak{X})^{[\perp]} = \mathfrak{X}_1^{[\perp]} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1^{[\perp]},$$

откуда

$$\operatorname{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}}\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1^{[\perp][\perp]} = \mathfrak{X}^{[\perp][\perp]} = \mathfrak{X}.$$

(b) Следует из (a).
(c) Следует из утверждения 3 предложения 6. $\square$

Предложение 17. Пусть $\mathfrak{X}$ разлагается в прямую сумму (12) предложения 15. Тогда $\mathfrak{X}$ топологически разложимо одновременно с $\mathfrak{X}_1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L}-$ канонический линеал, плотный в $\mathfrak{X}_1$: $\mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}_1}} \mathfrak{L} = \mathfrak{X}_1$. Тогда в силу предложений 15 и 16:

$$\mathfrak{X} = \mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{X}_1 = \mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}} \mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}_1}} \mathfrak{L} \subseteq \mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}} \mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{L} = \mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{L}.$$

При этом, очевидно, $\mathfrak{L}$ является каноническим линеалом и в $\mathfrak{X}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{L}'-$ канонический линеал, $\tau^0_{\mathfrak{X}}$-плотный в $\mathfrak{X}$. Тогда существует такое подпространство $\mathfrak{X}_1{}'$: $\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X} = \mathfrak{X}'_1 \dotplus \mathrm{Is}\,\mathfrak{X}$, и такой унитарный оператор U в $\mathfrak{X}$, что $U\mathfrak{X}'_1 = \mathfrak{X}_1$. Положим $\mathfrak{L} = U\mathfrak{L}'$. Очевидно, $\mathfrak{L}-$ канонический линеал в $\mathfrak{X}_1$. В силу утверждения 3 предложения 6, $\mathfrak{X}'_1 \cap (\mathfrak{L}')^{[\perp]} = \{0\}$, поэтому $\mathfrak{X}_1 \cap \mathfrak{L}^{[\perp]} = U\mathfrak{X}'_1 \cap U(\mathfrak{L}')^{[\perp]} = U(\mathfrak{X}'_1 \cap (\mathfrak{L}')^{[\perp]}) = \{0\}$. Применяя (c) предложения 16, получим: $\mathrm{Clos}_{\tau^0_{\mathfrak{X}_1}} \mathfrak{L} = \mathfrak{X}_1$. $\square$

3.3. **О топологической разложимости сепарабельных ПВП..** Следствием предложений 16, 17 и теоремы 3 является следующий результат.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{X}-$ сепарабельное пространство (вырожденное или невырожденное). Тогда $\mathfrak{X}$ топологически разложимо.*

3.4. **О топологической разложимости несепарабельных ПВП..** Пусть $\zeta > 0-$ некоторый ординал, и $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)} -$ трансфинитная последовательность подпространств ПВП $\mathfrak{X}$. Рассмотрим трансфинитную последовательность подпространств $\{\mathfrak{G}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$, образованную из последовательности $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ при помощи трансфинитной индукции:

$$\mathfrak{G}_0 := \mathfrak{X}_0;$$

$$\mathfrak{G}_\nu := \mathrm{Clos}\Big(\mathrm{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{G}_\lambda\Big)[+]\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{G}^{[\perp]}_\lambda\Big),\ \nu \in (0,\zeta). \tag{13}$$

Теорема 5. *Пусть последовательность подпространств $\{\mathfrak{G}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$, образована из последовательности $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ по схеме* (13)*, причем последовательность $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ удовлетворяет соотношению:*

$$\mathfrak{X}_\nu \subseteq \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{X}^{[\perp]}_\lambda,\ \nu \in (0,\zeta). \tag{14}$$

Тогда

$$\mathfrak{G}_\nu = \mathrm{Clos}\ \mathrm{Lim}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu]} \mathfrak{X}_\lambda\Big),\ \nu \in (0,\zeta). \tag{15}$$

Доказательство. Применяем трансфинитную индукцию. Для $\nu = 0$ равенство (15) тривиально. Пусть $\nu \in (0,\zeta)$, и (15) справедливо для всех $\lambda \in (0,\nu)$. Тогда, применяя условие (14) и предложение индукции, получим:

$$\mathfrak{G}_\nu = \operatorname{Clos}\Big(\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{G}_\lambda\Big)[+]\,\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{G}_\lambda^{[\perp]}\Big) =$$

$$= \operatorname{Clos}\Big(\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{\varphi\in[0,\lambda]} \mathfrak{X}_\varphi\Big)\Big)[+]$$

$$[+]\,\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \bigcap_{\varphi\in[0,\lambda]} \mathfrak{X}_\varphi^{[\perp]}\Big) =$$

$$= \operatorname{Clos}\Big(\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{X}_\lambda\Big)[+]\,\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{X}_\lambda^{[\perp]}\Big) = \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu]} \mathfrak{X}_\lambda\Big). \quad \square$$

Определение 1. Пусть задана последовательность подпространств $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ ПВП $\mathfrak{X}$. Последовательность линеалов $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ пространства $\mathfrak{X}$ будем называть *производной* от $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$, если эта последовательность линеалов удовлетворяет соотношениям:

$$\mathfrak{N}_0 \subseteq \mathfrak{X}_0;$$
$$\mathfrak{N}_\nu \subseteq \operatorname{Clos}\Big(\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda\Big)[+]\,\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}\Big),\ \nu\in(0,\zeta) \tag{16}$$

Теорема 6. *Пусть последовательность линеалов $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ является производной от последовательности $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$, причём топологическая размерность каждого из подпространств $\mathfrak{X}_\lambda$, $\lambda\in[0,\zeta)$, не более чем счётна. Тогда существует такая неубывающая последовательность ортогональных систем $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ что*

$$\mathfrak{N}_\lambda \subseteq \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\mathcal{E}_\lambda,\ \lambda\in[0,\zeta). \tag{17}$$

Доказательство. Построение последовательности $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ проведём при помощи трансфинитной индукции. Пусть $\mathcal{E}_0$ – такая ортогональная система в $\mathfrak{X}_0$, что $\mathfrak{N}_0 \subseteq \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\mathcal{E}_0$ (например, $\mathcal{E}_0$– полная ортогональная система в $\mathfrak{X}_0$). Пусть $\nu\in(0,\zeta)$, и уже построена неубывающая последовательность ортогональных систем $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\nu)}$, удовлетворяющая условию (17) для каждого $\lambda\in[0,\nu.)$ Построим систему $\mathcal{E}_\nu$. Пусть $\hat{\mathcal{E}}_\nu$– некоторая ортогональная система в $\mathfrak{X}_\nu$, такая, что

$$\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]} \subseteq \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\hat{\mathcal{E}}_\nu.$$

Положим

$$\mathcal{E}_\nu := \bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathcal{E}_\lambda \cup \hat{\mathcal{E}}_\nu. \tag{18}$$

Тогда, очевидно, $\mathcal{E}_\lambda \subseteq \mathcal{E}_\nu$ для каждого $\lambda \in [0,\nu]$, и по идуктивному построению,

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_\nu \subseteq \mathrm{Clos}\Big(\mathrm{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)}\mathfrak{N}_\lambda\Big)[+]\,\mathfrak{X}_\nu \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\nu)}\mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}\Big) \subseteq \\ \subseteq \mathrm{Clos}\Big(\mathrm{Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)}\mathrm{Clos\ Lin}\,\mathcal{E}_\lambda\Big)[+]\mathrm{Clos\ Lin}\,\hat{\mathcal{E}}_\nu\Big) = \\ = \mathrm{Clos\ Lin}\Big(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)}\mathcal{E}_\lambda \cup \hat{\mathcal{E}}_\nu\Big) = \mathrm{Clos\ Lin}\,\mathcal{E}_\nu. \quad \Box\end{aligned}$$

Теорема 7. *Следующие утверждения эквивалентны.*

(a): *Пространство $\mathfrak{X}$ топологически разложимо.*

(b): *Для некоторого ординала ζ, $card\zeta \leqslant \tau.dim\mathfrak{X}$, существует последовательность подпространств $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ не более чем счётной*

Доказательство. . $(a) \Rightarrow (b)$. Пусть $\mathcal{G} = \{g_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ - полная ортогональная система, где ζ - некоторый ординал: $\mathrm{card}\zeta = \tau.\dim\mathfrak{X}$. Положим $\mathfrak{X}_\lambda := \mathrm{Lin}\{g_\lambda\}$, $\lambda \in [0,\zeta)$. В силу ортогональности системы $\mathcal{G}$ последовательность одномерных пространств $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ удовлетворяет соотношению (14) . Образуем по ней последовательность подпространств $\{\mathfrak{d}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ согласно схеме (13) . Тогда, в силу равенств (15) теоремы (5)

$$\begin{aligned}\mathrm{ClosLin}\left(\bigcup_{\nu\in[0,\zeta)}\mathfrak{G}_\nu\right) = \mathrm{ClosLin}\left(\bigcup_{\nu\in[0,\zeta)}\bigcup_{\lambda\in[0,\nu]}\mathfrak{X}_\lambda\right) = \\ = \mathrm{ClosLin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\zeta)}\mathfrak{X}_\lambda\right) = \mathrm{ClosLin}\mathcal{G} = \mathfrak{X}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\{\mathfrak{G}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ - производная от $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ последовательность (подпространств), полная в $\mathfrak{X}$.

$(b) \Rightarrow (a)$.Пусть $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ - последовательность подпространств в $\mathfrak{X}$ не более чем счетной топологической размерности, и $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ - некоторая полная в $\mathfrak{X}$ последовательность линеалов, производная от $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$. Согласно теореме 6 существует такая неубывающая последовательность ортогональных систем $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$, что выполняется (17) . Положим $\mathcal{E} := \bigcup\limits_{\lambda\in[0,\zeta)} \mathcal{E}_\lambda$. Так как $\{\mathcal{E}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ — неубывающая последовательность, то $\mathcal{E}$ - ортогональная система. Система $\mathcal{E}$ является полной в $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{X} = \mathrm{ClosLin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda\right) \subseteq$$

$$\subseteq \mathrm{ClosLin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathrm{ClosLin}\mathcal{E}_\lambda\right) = \mathrm{ClosLin}\mathcal{E}.$$

Теорема 8. *Пусть $\mathfrak{X}$ - банахово ПВП с допустимой мажорантой. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- **(a):** *: $\mathfrak{X}$ топологически разложимо.*
- **(b):** *: Для некоторого ординала ζ, $\mathrm{card}\zeta \leqslant \tau.\dim\mathfrak{X}$, существует такая полная в $\mathfrak{X}$ последовательность линеалов $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$, что $\dim\mathfrak{N}_\lambda \leqslant \aleph_0$, $\lambda\in[0,\zeta)$, и*

$$\mathfrak{N}_\nu \subseteq \mathrm{Clos}\left(\mathrm{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]\bigcap_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}\right), \quad \nu\in(0,\zeta) \tag{19}$$

Доказательство. $(a)\Rightarrow(b)$. Пусть $\mathcal{G} = \{g_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ - полная ортогональная система в пространстве$\mathfrak{X}$, где ζ - некоторый ординал: $\mathrm{card}\zeta = \tau.\dim\mathfrak{X}$. Положим $\mathfrak{N}_\lambda := \mathrm{Lin}\{g_\lambda\}$, $\lambda\in[0,\zeta)$. Так как система $\mathcal{G}$ - ортогональна, то $\mathfrak{N}_\nu \subseteq \bigcap\limits_{\lambda\in[0,\nu)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}$, $\nu\in(0,\zeta)$, и, очевидно, последовательность $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ удовлетворяет (19) .

$(b)\Rightarrow(a)$. Построим, применяя трансфинитную индукцию, последовательность подпространств $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ пространства $\mathfrak{X}$, производной от которой является последовательность линеалов $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$. Положим $\mathfrak{X}_0 := \mathrm{Clos}\mathfrak{N}_0$. Пусть $\xi\in(0,\zeta)$, и уже построена соответствующая последовательность подпространств $\{\mathfrak{X}_\nu\}_{\nu\in[0,\xi)}$Удовлетворяющая условию (19) для каждого $\nu\in(0,\xi)$. Построим подпространство $\mathfrak{X}_\xi$. Рассмотрим произвольный фиксированный вектор

$$y\in\mathrm{Clos}\left(\mathrm{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]\bigcap_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}\right). \tag{20}$$

В силу метризуемости пространства $\mathfrak{X}$ существуют такие последовательности векторов: $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\mathrm{Lin}(\bigcup\limits_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda)$ и $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ из $\bigcap\limits_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}$, что $y = \tau.\lim\limits_{n\in\mathbb{N}}(\nu_n+\omega_n)$. Тем самым, существует отображение F, сопоставляющее каждому элементу y из (20) такое не более чем счетное множество $F(y)$ из $\bigcap\limits_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}$, что

$$y \in \operatorname{Clos}\left(\operatorname{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]F(y)\right) \tag{21}$$

(отметим, что последние рассуждения требуют использование аксиомы выбора). Пусть $\mathfrak{Y}_\xi$ - некоторое (не более чем счетное) множество, полное в Clos $\mathfrak{Y}_\xi$. Положим $\mathfrak{X}_\xi := \operatorname{ClosLin}\left(\bigcup\limits_{y\in\mathfrak{Y}_\xi} F(y)\right)$. Такое определение корректно в силу (20) , определения $\mathfrak{Y}_\xi$ и предложения индукции относительно (19) . Так как $|\mathfrak{Y}_\xi| \leqslant \aleph_0$ и $|F(y)| \leqslant \aleph_0$, $y \in \mathfrak{Y}_\zeta$, то $|\bigcup\limits_{y\in\mathfrak{Y}_\xi} F(y)| \leqslant \aleph_0$; следовательно, $\tau.\dim \mathfrak{X}_\xi \leqslant \aleph_0$. Далее, используя (21) , определим $\mathfrak{X}_\xi$, индуктивное предположение и элементарные теоретико-множественные и топологические рассуждения, получим следующую цепочку:

$$\mathfrak{Y}_\xi = \operatorname{ClosLin}\mathfrak{Y}_\xi = \operatorname{ClosLin}\left(\bigcup_{y\in\mathfrak{Y}_\xi}\{y\}\right) \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{ClosLin}\left(\bigcup_{y\in\mathfrak{Y}_\xi} \operatorname{Clos}\left(\operatorname{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]F(y)\right)\right) \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname{Clos}\left(\operatorname{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]\operatorname{ClosLin}\left(\bigcup_{y\in\mathfrak{Y}_\xi} F(y)\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Clos}\left(\operatorname{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]\mathfrak{X}_\xi\right) =$$

$$= \operatorname{Clos}\left(\operatorname{Lin}\left(\bigcup_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda\right)[+]\mathfrak{X}_\xi \cap \bigcap_{\lambda\in[0,\xi)} \mathfrak{N}_\lambda^{[\perp]}\right).$$

Таким образом, построенна последовательность пространств $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ не более чем счетной топологической размерности, и показано, что последовательность линеалов $\{\mathfrak{N}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$ является производной от последовательности $\{\mathfrak{X}_\lambda\}_{\lambda\in[0,\zeta)}$. Согласно теореме 7 пространство $\mathfrak{X}$ топологически разрешимо.

4. Неорторасширяемые подпространства

Предложение 18. Пусть $\mathfrak{X}_1$ - неорторасширяемое подпространство в ПВП $\mathfrak{X}$. Тогда

(a): Если $\mathfrak{X}_1^{[\perp]} \subset \mathfrak{X}_1$, то $\mathfrak{X}_1$ не является нейтральным.

(b): Подпространство $\mathfrak{X}_1^{[\perp]}$- нейтрально.

(c): Любой нейтральное расширение пространства $\mathfrak{X}_1^{[\perp]}$ лежит в $\mathfrak{X}_1$.

Доказательство. (a) Допустим, $\mathfrak{X}_1$ - нейтрально. Тогда $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_1^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{X}_1$ т.е.$\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1^{[\perp]}$.

(b) Пусть $\mathfrak{Y} := \mathfrak{X}_1^{[\perp]}$.Тогда $\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}_1^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_1^{[\perp]} = \mathfrak{Y}^{[\perp]}$.

(c) Пусть $\mathfrak{X}_1^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{Y}$, где $\mathfrak{Y}$ - нейтрально. Тогда

$$\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{Y}^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{X}^{[\perp]} = \mathfrak{X}_1.$$

Следствие 2. *Любое неорторасширяемое подпространство невырожденного пространства содержит максимальное нейтральное подпространство.*

Доказательство. Следует из п.(b) предложения 18 и утверждения 1 предложения 7.

Предложение 19. Справедливы следующие утверждения.

(a): Произвольное подпространство, содержащее неорторасширяемое подпространство, само является неорторасширяемым.

(b): Если $\{\mathfrak{X}_i\}_{i\in I}$ - такое семейство неорторасширяемых подпространств ПВП $\mathfrak{X}$, что $\bigcap\limits_{i\in I} \mathfrak{X}_i \subseteq \mathrm{Is}\mathfrak{X}$, то

$$\mathrm{ClosLin}\bigcup_{i\in I}\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}. \tag{22}$$

Доказательство. (a) Пусть $\mathfrak{X}_1$ - неорторасширяемо, и $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{Y}$. Тогда $\mathfrak{Y}^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{X}_1^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{Y}$.

(b) По утверждению 4 предложения 6

$$\left(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{X}_i\right)^{[\perp]} = \bigcap_{i\in I}\mathfrak{X}_i^{[\perp]} \subseteq \bigcap_{i\in I}\mathfrak{X}_i \subseteq \mathrm{Is}\mathfrak{X},$$

откуда, в силу утверждения 3 того же предложения, и следует (22) . □

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{X}$ - бесконечномерное ПВП, $\mathfrak{d}$ - подпространство в $\mathfrak{X}$, причем*

$$\tau.\dim\mathfrak{G} < \tau.\dim\mathfrak{X} \tag{23}$$

Тогда

$$\mathfrak{G}^{[\perp]}\mathfrak{G} \neq \varnothing.$$

Доказательство. (a) $\mathfrak{G}$ - *конечномерно.* Пусть $n = \dim\mathfrak{G}$ и $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ - базис пространства $\mathfrak{G}$. Пусть $\mathcal{Q} = \{g_i\}_{i\in\overline{1,n}}$, $m > n$, - некоторая линейно независимая система, такая, что, $\mathrm{Lin}\mathcal{Q}\bigcap\mathrm{Lin}\mathcal{G} = \{0\}$ (существующая в силу бесконечномерности $\mathfrak{X}$).

Тогда, как нетрудно видеть, существует вектор $x \in \mathrm{Lin}\mathcal{Q} \setminus \{0\}$, ортогональный каждому из g_i, $i \in \overline{1,n}$; действительно, последнее вытекает из существования решения однородной системы из n линейных уравнений с m неизвестными, $n < m$, в которой матрицей коэффициентов является матрица

$$\begin{pmatrix} [g_1, q_1] & \dots & [g_1, q_m \\ \dots & \dots & \dots \\ [g_n, q_1] & \dots & [g_n, q_m] \end{pmatrix}.$$

(*b*) $\mathfrak{G}$ - *бесконечномерно.* Пусть $\mathcal{G} = \{g_\alpha\}_{\alpha \in A}$ - полная линейно независимая система в $\mathfrak{F}$, и $\mathcal{Q} = \{q_\beta\}_{\beta \in B}$ - такая линейно независимая сисмета в $\mathfrak{X}$, что

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{G} \dotplus \mathrm{Lin}\mathcal{Q} \tag{24}$$

(существование такой системы известным образом доказывается при помощи леммы Цорна.)

Пусть $a :=\mid A \mid$, $b :=\mid B \mid$. Из (23) и (24) вытекает равенство

$$a < b \tag{25}$$

Действительно, из противоположного неравенства $a \geq b$ следовало бы, в силу (24) , неравенство

$$\tau.\dim \mathfrak{X} \leq 2a = a = \tau.\dim \mathfrak{G},$$

что противоречит условию (23) теоремы. Определим теперь отображение $\Phi : \mathrm{Lin}\mathcal{Q} \to \mathbb{C}^{\mathcal{A}}$:

$$(\Phi(x))(\alpha) := [g_\alpha, x], \quad \alpha \in A, x \in \mathrm{Lin}\mathcal{Q}.$$

Тогда (см. предложение 4):

$$|\mathrm{Lin}\mathcal{Q}| = |\mathbb{C}^{\mathcal{P}_{fin}(B)}| = \mathfrak{c}^{|\mathcal{P}_{fin}(B)|} = \mathfrak{c}^{|B|} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}};$$

При этом $|\mathbb{C}^A| = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}} = 2^{\mathfrak{a}}$. Из (25) согласно предложению 5 следует неравенство $2^{\mathfrak{a}} < 2^{\mathfrak{b}}$. Значит, отображение Φ*не может быть инъективным*, и существуют такие $x_1,\ x_2 \in \mathrm{Lin}\mathcal{Q},\ x_1 \neq x_2$, что $\Phi(x_1) = \Phi(x_2)$, т.е. для любого $\alpha \in A$ $[g_\alpha, x_1] = [g_\alpha, x_2]$, откуда следует, что $x_1 - x_2 \in \mathfrak{G}^{[\perp]}$; при этом $x_1 - x_2 \in \mathrm{Lin}\mathcal{Q}\setminus\{0\}$, таким образом, $x_1 - x_2 \in \mathfrak{G}^{[\perp]}\setminus\mathfrak{G}$.

Следствие 3. *Топологическая размерность любого неорторасширяемого подпространства бесконечномерного ПВП совпадает с топологической размерностью всего пространства*

Следствие 4. *Мощность любой максимальной отртогональной системы в бесконечномерном ПВП* $\mathfrak{X}$ равна $\tau.\mathrm{dim}\mathfrak{X}$.

Доказательство. Следует из предложения 10 и теоремы 9.

Замечание 1. Для *конечномерных* ПВП следствия 3, 4 *не верны.*

5. Комментарий

Предложение 3 является классическим (см., например, [11, п. 1.1.1]). Предложение 4 может быть выведено из утверждений (a) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_0$ и (b) *для произвольных кардинальных чисел* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ *таких, что* $1 < \mathfrak{a} \leqslant \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \geqslant \aleph_0 \quad 2^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$. Утверждения (a) и (b) не найдены нами в книгах Н. Бурбаки [2] и К. Куратовского, А. Мостовского [6], но содержаться, например в задачнике [7] (см. [7, упр. I.6.15], [7, упр. I.6.21] соответственно). Отметим, что доказательство утверждения (b) требует использования *аксиомы выбора* (см. [6, §VIII.6], [7, с. 179, 180]).

Что касается предложения 5, то оно в классической литературе по теории множеств обнаружено нами не было. Это предложение интересно тем, что оно легко может быть выведено из *обобщенной гипотезы континуума*, гласящей о том, что *иерархия алефов и степенная иерархия совпадают*; иными словами, *для любого кардинального числа* $\mathfrak{n}$ *не существует кардинальных чисел между* $\mathfrak{n}$ *и* $2^{\mathfrak{n}}$ (см. [6, §IX.6]). Действительно, допустим для некоторых кардиналов $\mathfrak{a}$, $\quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, но $2^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{b}}$. Тогда $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} < 2^{\mathfrak{b}} = 2^{\mathfrak{a}}$, что противоречит обобщённой гипотезе континуума. Вывести обобщённую гипотезу континуума из утверждения предложения 5 нам не удаётся, и «сила» этого утверждения нам остается неизвестной. Предложение 5 существенно используется при доказательстве теоремы 9.

Определение и свойства базисов Гамеля (в частности, равномощность всех базисов Гамеля линейного пространства) являются классическими и содержатся, например, в [5].

Отметим, что определение *топологической размерности* не являются общепринятым. В теории банаховых пространств более употребительной характеристикой является *вес*, определяемый как наименьшая мощность всюду плотного множества (см., например, [4]). В случае (линейно) *бесконечномерных* банаховых пространств эти понятия (вес и топологическая размерность) совпадают. Однако введённое название показалось нам удобным при работе с ортогональными системами.

Свойства слабой топологии описаны в [14, Ch. III] и [3]. Термины «слабая топология», «допустимая топология», «частичная мажоранта» являются буквальным переводом терминов «weak topology», «admissible topology», «partial majorant» из [14] (см. также [17, 18]). В работе [3] частичная мажоранта называется *подчиняющей топологией*, а допустимая топология — *согласующейся* (с метрикой). Первые три утверждения предложения 6 есть соответственно [14, Th. III.5.1], [14, Th. III.6.1], [14, Th. III.6.4]. Первое равенство четвёртого утверждения доказывается элементарно, а второе равенство следует из первого применением второго утверждения. См. также утверждения [1, I.7.2°] — [1, I.7.4°].

Утверждения, входящие в первую часть предложения 7, с той или иной степенью подробности обсуждаются в [1, 14]. Доказательство второй части (также, как и первой) элементарно.

Достаточно полное исследование ортогональных систем в G–пространствах проведено в работах [9, 10]. В частности, в [10] приводится свойство минимальности для G–ортонормиронанных систем ([10, 1.1°]). См. также [1, I.10.6°]. Предложение 9 является незначительным обобщением рассуждений из указанных источников.

Результаты раздела 2 служат обобщением известного факта об ортогонализуемости произвольной счётной системы в пространстве Понтрягина ([15]), так как последнее является частным случаем пространств с конечным индексом максимальности (см. [1, § I.9]).

Теоремы 2, 3 являются (сильно) развёрнутым вариантом теоремы [14, Th. IV.3.2]. Объясним, в чём состоит цель такой «развёртки». Теорема 2 («извлечённая» из рассуждений при доказательстве теоремы [14, Th. IV.3.2] и обобщённая до критерия), наглядно показывает, какие трудности встают в случае, когда ортогонализуется при помощи «последовательных поглощений» *несчётная* система векторов (условие (a) утверждения 2). Сама теорема [14, Th. IV.3.2] (она же теорема 3) становится простым следствием теоремы 2.

В подразделе 3.2 известные результаты о топологической разложимости сепарабельных *невырожденных* ПВП (см. [14, § IV.3]) обобщаются на случай *вырожденных* пространств. Это существенно используется затем в подразделе 3.4.

Что касается подраздела 3.4, то, как показывают некоторые последние работы по топологии банаховых пространств (см. [12, 13, 20]), представляет интерес исследование структуры нулей симметрических (в особенности, квадратичных) полиномов в (несепарабельных) банаховых пространствах (грубо говоря, *симметрические полиномы* — это суммы симметрических полилинейных форм, в которых отождествлены все переменные). Если полином *квадратичный*, то это напрямую связано с исследованием *множества нейтральных векторов* относительно соответствующей полуторалинейной формы (в комплексных пространствах); при этом решающую роль играет существование полных ортогональных (относительно исследуемой формы, порождающей квадратичный функционал) систем [13]. В работе [13] приведено одно достаточное условие, гарантирующее существование полной ортогональной системы, однако мы здесь не исследуем связь этого учловия с условием (b) теоремы 8, предполагая сделать это в дальнейшем.

Заключение

Для произвольных линеалов с конечным индексом максимальности показана разрешимость проблемы существования ортогонального алгебраического базиса.

Исследована структура неорторасширяемых подпространств пространств с внутренним произведением и показана их роль при исследовании ортогональных систем.

Получено необходимое и достаточное условие ортогонализуемости произвольной счётной системы векторов в произвольном пространстве с внутренним произведением в терминах ступенчатой невырожденности. Получен критерий ортогонализуемости счётной системы векторов методом Грама – Шмидта в терминах полной ступенчатой невырожденности.

Доказана полезная для приложений теорема об ортогонализуемости, достаточные условия которой поддаются обозримой конструктивной проверке.

Получен критерий существования полной ортогональной системы в несепарабельном пространстве с внутренним произведением.

Представляется перспективным применение полученных результатов для исследования ортогональных базисов (как линейных, так и топологических) в *общих* пространствах с индефинитной метрикой.

Список литературы

1. *Азизов Т.Я., Йохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986. — 352 с.
2. *Бурбаки Н.* Теория множеств. — М.: Мир, 1965. — 455 с.
3. *Гинзбург Ю.П., Йохвидов И.С.* Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой// Успехи мат. наук. — 1962. — Т.17, Вып. 4. — С. 3–56
4. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространствя: Избранные главы. — Киев; Вища школа, 1980. — 216 с.
5. *Дей М.* Нормированные линейные пространства. — М: ИЛ., 1961. — 232 с.
6. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. — М.: Мир, 1970. — 416 с.
7. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. — М.: Наука, 1975. — 239 с.
8. *Тышкевич Д.Л.* Об ортогонализации счётной системы векторов в пространствах с индефинитной метрикой// Учёные записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика.» — 2005. - Т. 18 (57). - 1. - С. 105-127
9. *Штраус В.А* Оператор Грама и G-ортонормированные системы в гильбертовом пространстве// Сб. трудов асписантов сатем. ф-та, Вып. 1. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1971. — С. 85–90
10. *Штраус В.А* G-ортонормированные системы и базисы в гильбертовом пространстве// Изв. вузов, Математика. — 1973. — Вып.9. — С. 108–117
11. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
12. *Aron R., Rueda M.A.* A problem concerning zero-subspaces of homogeneous polynomials// Linear Topol. Spaces, Complex Anal. — 1997. — Vol. 3. — P. 20–23
13. *Banakh T.O., Plichko A.N.* Zeros of quadratic functionals on non-separable spaces// Collog. Math. — 2004. — Vol. 100. — P. 141–147
14. *Bognar J.* Indefinite inner product spaces. — Berlin: Springer, 1974. — 225 p.
15. *Krein M.G., Langer H.* On some extension problem which are closely connected with the theory of hermitian operators in a space Π_k. III. Indefinite analogues of the Hamburger and Stiltjes moment problems, Part I// Beiträge Anal. — 1979. — Vol. 14. — P. 25–40 ,16Leites2000
16. *Leites D., Sergeev A.* Orthogonal polynomials of discrete variable and Lie algebra of complex size matrices// Theor. Math. Phys. — 2000. — Vol. 123. — P. 582–609
17. *McEnnis B.W.* Shifts on indefinite inner product spaces// Pacific J. Math. — 1979. — Vol. 81. — P. 113–130

18. *McEnnis B.W.* Shifts on indefinite inner product spaces. II.// Pacific J. Math. — 1982. — Vol. 100. — P. 177–183
19. *Shereshevskii I.A.* Orthogonalization of Graded Sets of Vectors// Journal of Nonlinear Mathematical Physics. — 2001. — Vol. 8, № 1. — P. 54–58
20. *Zagorodnyuk A.V.* The zero–subspaces of symmetric polynomials// Nonlinear Boundary Problems. — 2001. — Vol. 11. — P. 224–229