УДК 517.432

О КОНСТРУКЦИИ НЕПРИВОДИМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБР НАД КВАТЕРНИОННЫМИ МОДУЛЯМИ

И.И. Карпенко

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского,
факультет математики и информатики
пр-т Вернадского, 4, г.Симферополь, Крым, Украина, 95007
e-mail: *karpenko@inbox.ru*

Abstract

This paper is devoted to study constructive possibilities for application of irreducible representations of complex algebras to the description of finite dimensional irreducible representations of real algebras on quaternionic modules.

Введение

Анализ последних достижений и публикаций свидетельствует о необходимости конструктивного построения неприводимых представлений вещественных алгебр над кватернионными модулями [1], [2], [3]. В то же время существует достаточно развитая теория неприводимых представлений комплексных алгебр над комплексными линейными пространствами (см.библ.в [4]). Естественно возникает вопрос о возможности использования имеющихся конструкций для описания представлений вещественных алгебр над кватернионными модулями, тем более, что такие задачи успешно решаются в теории представлений групп [5]. Кроме того, весьма существенно, насколько полную информацию о неприводимых представлениях таких алгебр мы получаем при использовании соответствующих алгоритмов.

Целью настоящей работы является исследование возможности конструктивного применения неприводимых представлений комплексных алгебр над комплексными пространствами для описания неприводимых представлений вещественных алгебр над конечномерными кватернионными модулями.

1. Связь между неприводимыми представлениями вещественной алгебры и ее комплексикации

Пусть g - вещественная алгебра, $L(H)$ - вещественная алгебра линейных операторов над конечномерным кватернионным модулем H, $\pi : g \to L(H)$ — представление этой алгебры над H.

Учитывая неоднозначность понятия подмодуля в кватернионном модуле H, остановимся подробнее на понятии неприводимого представления вещественной алгебры g над H.

Определение 1. Представление $\pi : g \to L[H]$ называется *неприводимым*, если не существует нетривиального правого кватернионного подмодуля в H, инвариантного относительно всех операторов $\pi(a), a \in g$.

Очевидно, что всякий кватернионный модуль H можно рассматривать как правый модуль $H^{\mathbb{C}}$ над полем комплексных чисел. Обозначим через $L(H^{\mathbb{C}})$ алгебру линейных операторов над $H^{\mathbb{C}}$. Теперь рассмотрим комплексификацию $g_{\mathbb{C}}$ данной вещественной алгебры g и представление $\pi_{\mathbb{C}} : g_{\mathbb{C}} \to L(H^{\mathbb{C}})$, определяемое следующим образом:

$$\pi_{\mathbb{C}}(a_1 + a_2 i) = \pi(a_1) + \pi(a_2) R_i,$$

где оператор $R_i \in L(H^{\mathbb{C}})$ и задается равенством $R_i x = xi$.

Предложение 1. Если представление π приводимо над решеткой правых кватернионных подмодулей ($\mathbb{H}$-подмодулей), то представление $\pi_{\mathbb{C}}$ приводимо над решеткой правых комплексных подмодулей ($\mathbb{C}$-подмодулей).

Доказательство. Пусть правый $\mathbb{H}$-подмодуль H_1 инвариантен относительно представления π. Тогда для любого $a \in g$ выполняется также включение $\pi(a)H_1^{\mathbb{C}} \subseteq H_1^{\mathbb{C}}$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что $R_i H_1^{\mathbb{C}} \subseteq H_1^{\mathbb{C}}$. $\square$

Рассмотрим неприводимое над решеткой правых $\mathbb{H}$-подмодулей представление π. Выясним, что в этом случае можно сказать о структуре представления $\pi_{\mathbb{C}}$.

Пусть $U \neq 0$ — минимальный правый $\mathbb{C}$-подмодуль, инвариантный относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$. Тогда для любого элемента $a = a_1 + a_2 i$ и его инволютивного образа $\bar{a} = a_1 - a_2 i$ имеем

$$\pi_{\mathbb{C}}(a_1 + a_2 i)x = \pi(a_1)x + \pi(a_2)R_i x \in U, \quad \pi_{\mathbb{C}}(a_1 - a_2 i)x = \pi(a_1)x - \pi(a_2)R_i x \in U$$

для всех $x \in U$, откуда $\pi(a_1)x \in U$, $\pi(a_2)R_i x \in U$ для любых $a_1, a_2 \in g$.

Рассмотрим правый $\mathbb{C}$-подмодуль $Uj = \{xj | x \in U\}$ и покажем, что он также инвариантен относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$. Действительно, $\pi_{\mathbb{C}}(a_1 + a_2 i)(xj) = \pi(a_1)(xj) + \pi(a_2)R_i(xj) = (\pi(a_1)x - \pi(a_2)R_i x)j \in Uj$.

Тогда подмодуль $U + Uj$ также является инвариантным относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$. Причем нетрудно показать, что $U + Uj$ — уже $\mathbb{H}$-подмодуль, поэтому мы можем говорить про его инвариантность относительно представления π. Следовательно, $U + Uj = H$ в силу неприводимости π.

Так как $\mathbb{C}$-подмодуль $U \cap Uj$ также инвариантен относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$, то возможны два случая:

$$(\mathrm{a})\, U \cap Uj = U; \quad (b)\, U \cap Uj = \{0\}.$$

В случае (a) $Uj = U$, т.е. U является $\mathbb{H}$-подмодулем и, вследствие его инвариантности относительно представления π, $U = H$. Поэтому в данном случае представление $\pi_{\mathbb{C}}$ неприводимо.

В случае (b) $\mathrm{H}^{\mathbb{C}} = U\dot{+}Uj$. Обозначим через π_1 и π_2 неприводимые представления, индуцированные представлением $\pi_{\mathbb{C}}$ на минимальных инвариантных подпространствах U и Uj соответственно. Покажем, что данные представления, вообще говоря, неизоморфны. Для этого сравним следы соответствующих операторов представлений.

Пусть $e_1, e_2, \dots e_n$ — базис в $\mathbb{C}$-подмодуле U. Тогда векторы $e_1 j$, $e_2 j$, $\dots e_n j$ образуют базис в $\mathbb{C}$-подмодуле Uj. Если а $= a_1 + a_2 i \in g_{\mathbb{C}}$, то из полученных выше результатов следует, что $\pi_1(s)e_k = \sum_{t=1}^n e_t p_{tk}^{(s)}$, где $p_{tk}^{(s)} \in \mathbb{C}$, $s = 1, 2$. Тогда в силу $\mathbb{H}$-линейности операторов $\pi_1(s)$ получим:

$$\pi_1(a)e_k = \pi(a_1)e_k + \pi(a_2)R_i e_k = \sum_{t=1}^n e_t\left(p_{tk}^{(1)} + p_{tk}^{(2)} i\right),$$
$$\pi_2(a)(e_k j) = \pi(a_1)(e_k j) + \pi(a_2)R_i(e_k j) = \sum_{t=1}^n e_t j\left(\overline{p_{tk}^{(1)}} + \overline{p_{tk}^{(2)}} i\right).$$

Следовательно,

$$tr\pi_1(a) = tr\pi(a_1) + tr\pi(a_2)i, \quad tr\pi_2(a) = \overline{tr\pi(a_1)} + \overline{tr\pi(a_2)}i.$$

Таким образом, если хотя бы один оператор представления π имеет невещественный след, то представления π_1 и π_2 неизоморфны.

Между представлениями π_1 и π_2 можно установить достаточно простую связь. Введем оператор R_j , действующий из $\mathbb{C}$-подмодуля U в $\mathbb{C}$-подмодуль Uj по следующему правилу: $R_j x = xj$.

Очевидно, оператор R_j является антилинейным над полем комплексных чисел, и для любого вектора $x \in U$ и $a = a_1 + a_2 i \in g_{\mathbb{C}}$

$$R_j\pi_1(a)x = (\pi(a_1)x + \pi(a_2)R_i x)j = \pi(a_1)(xj) - \pi(a_2)R_i(xj) = \pi_2(\bar{a})R_j x.$$

Следовательно, для любого $a = a_1 + a_2 i \in g_{\mathbb{C}}$

$$R_j\pi_1(a) = \pi_2(\bar{a})R_j.$$

Приведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть π—неприводимое представление вещественной алгебры g над конечномерным кватернионным модулем H. Тогда представление комплексной алгебры $g_{\mathbb{C}}$ либо неприводимо, либо раскладывается в сумму двух неприводимых представлений. Причем во втором случае пространство представления раскладывается в прямую сумму двух минимальных инвариантных $\mathbb{C}$-подмодулей: $\mathrm{H}^{\mathbb{C}} = U\dot{+}Uj$, и индуцированные на них представления π_1 и π_2 связаны равенством $R_j\pi_1(a) = \pi_2(\bar{a})R_j$.*

Если утверждение, обратное первому случаю, следует из предложения 1, то утверждение, обратное второму, требует специального обсуждения.

Теорема 2. *Пусть π — представление вещественной алгебры g над конечномерным кватернионным модулем H, и представление $\pi_{\mathbb{C}}$ комплексной алгебры $g_{\mathbb{C}}$ раскладывается в сумму двух неприводимых представлений так, что пространство представления есть прямая сумма двух минимальных инвариантных $\mathbb{C}$-подмодулей: $\mathrm{H}^{\mathbb{C}} = U \dot{+} Uj$. В этом случае представление π является неприводимым.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{H}$-подмодуль H_1 инвариантен относительно представления π. Тогда $\mathbb{C}$-подмодуль инвариантен относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$. Обозначим через $U_1 = P_U H_1^{\mathbb{C}}$, $U_2 = P_{Uj} H_1^{\mathbb{C}}$, где P_U (соответственно P_{Uj}) — проектор на $\mathbb{C}$-подмодуль U (соответственно Uj) параллельно подмодулю Uj (соответственно U). Между $\mathbb{C}$-подмодулями U_1, U_2 существует достаточно простая связь. Действительно, пусть $h = u_1 + u_2 j$, $u_1, u_2 \in U$ — произвольный вектор из $H_1^{\mathbb{C}}$. Тогда $P_{Uj} h = u_2 j = R_j u_2 = R_j(-P_U(hj)) = -R_j P_U R_j h$, откуда следует, что $U_2 = U_1 j$. Очевидно, $H_1^{\mathbb{C}} = U_1 \dot{+} U_2$.

$\mathbb{C}$-подмодули U_1, U_2 также инвариантны относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$. Действительно, пусть x $\in H_1^{\mathbb{C}}$. Тогда $x = x_1 + x_2 j$, где $x_i \in U_1$, $(i = 1, 2)$, и для любого элемента a $\in g$ $\pi_{\mathbb{C}}(a)x = \pi(\mathrm{a})x_1 + (\pi(a)x_2)j$. Как было отмечено при доказательстве теоремы 1, для любого вектора x_1 из $\mathbb{C}$-подмодуля U, инвариантного относительно представления $\pi_{\mathbb{C}}$, также $\pi(a)x_1 \in U$. Следовательно, $\pi(\mathrm{a})x_1 \in P_U H_1^{\mathbb{C}}$. Поэтому для любого элемента a $= a_1 + a_2 i \in g_{\mathbb{C}}$, $\pi_{\mathbb{C}}(a)x_1 = \pi(a_1)x_1 + \pi(a_2)(x_1 i) \in U_1$.

Так как $\mathbb{C}$-подмодуль $U_1 \subseteq U$, то в силу минимальности U возможны два случая: $(a)\, U_1 = U$; $(b)\, U_1 = \{0\}$. В случае $(a)\, U_2 = Uj$, $H_1^{\mathbb{C}} = H$, в случае $(b)\, U_2 = \{0\}$, $H_1^{\mathbb{C}} = \{0\}$. Следовательно, представление π неприводимо.□

2. Конструкция неприводимых конечномерных представлений вещественных алгебр над кватернионными модулями

Пусть $g_{\mathbb{C}}$ — комплексификация вещественной алгебры g, и для $g_{\mathbb{C}}$ имеется описание всех неприводимых комплексных представлений. Рассмотрим механизм восстановления неприводимых представлений алгебры g над кватернионными модулями. Для конструкции таких представлений воспользуемся результатами теорем 1, 2.

Пусть σ — неприводимое представление алгебры $g_{\mathbb{C}}$ с пространством представлений X (здесь X — правый комплексный модуль).

Если $\dim X = 2n + 1$, то такое представление нельзя рассматривать как комплексификацию некоторого неприводимого представления алгебры g над кватернионным модулем. Если же $\dim X = 2n$, то в X существует антиинволюция J, с помощью которой можно задать в X правое умножение на кватернион $q = q_1 + q_2 j,\ q_1, q_2 \in \mathbb{C}$:

$$xq := xq_1 + (Jx)q_2 \tag{1}$$

В результате получаем кватернионный модуль H размерности n, для которого $H^{\mathbb{C}} = X$.

Если для любого элемента $a \in g$ выполняется $\sigma(a)J = J\sigma(a)$, (или в матричном виде $\sigma(a)J = J\overline{\sigma(a)}$), то комплексно линейные операторы $\sigma(a)$ являются симплектическими образами кватернионно линейных операторов. В частности, как будет показано далее, в базисе $e_1, e_2, \ldots e_n, Je_1, Je_2, \ldots Je_n$ пространства $H^{\mathbb{C}}$ матрица такого оператора имеет вид $\begin{pmatrix} \mathcal{T} & -\mathcal{S} \\ \overline{\mathcal{S}} & \overline{\mathcal{T}} \end{pmatrix}$, где $\mathcal{T}, \mathcal{S} \in M(n, \mathbb{C})$. Тогда матрица оператора $\sigma(a)$ над H имеет вид $\sigma(a) = \mathcal{T} + \mathcal{S}j \in M(n, \mathbb{H})$. Таким образом, мы получили явный вид кватернионного представления алгебры g размерности n. Полученное представление является неприводимым. Действительно, если предположить, что H_1 — нетривиальный $\mathbb{H}$-подмодуль, инвариантный относительно представления σ алгебры g, то для любого $a \in g$ также имеет место включение $\sigma(a)H_1^{\mathbb{C}} \subseteq H_1^{\mathbb{C}}$. Тогда нетривиальный $\mathbb{C}-$ подмодуль $H_1^{\mathbb{C}}$ инвариантен относительно операторов $\sigma(a_1 + a_2 i) = \sigma(a_1) + \sigma(a_2)R_i$ представление алгебры $g_{\mathbb{C}}$. Противоречие.

Неприводимые кватернионные представления алгебры g размерности n можно получить и другим способом. Пусть также σ_1 — неприводимое представление алгебры $g_{\mathbb{C}}$ с пространством представления X_1 размерности n. Рассмотрим внешнюю прямую сумму $X = X_1 \dot{+} X_2$, и введем в комплексном пространстве X инволюцию J слудующим образом. Пусть $e_1, e_2, \ldots e_n$— базис в X_1, тогда $\langle e_s, 0\rangle, \langle 0, e_s\rangle,\ s = 1, 2, \ldots n$ — базис в X. На базисных векторах пространства X зададим оператор J равенствами $J\langle e_s, 0\rangle = \langle 0, e_s\rangle,\ J\langle 0, e_s\rangle = -\langle e_s, 0\rangle$ $(s = 1, 2, \ldots n)$, а далее продолжим его антилинейным образом. Тогда в соответствии с равенством (2) $\langle 0, e_s\rangle = \langle e_s, 0\rangle j$ $(s = 1, 2, \ldots n)$, и $X = X_1 \dot{+} X_1 j$. Таким образом, X можно рассматривать как кватернионный модуль.

Комплексное пространство X_j является пространством представления σ_2, которое определяется следующим образом:

$$\sigma_2(a) := -J\sigma_1(\overline{a})J \ (\forall a \in g_{\mathbb{C}}).$$

В комплексном пространстве X рассмотрим представление $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$. Так как для любого $a \in g$ выполняется равенство $a = \overline{a}$, то непосредственная проверка показывает, что в этом случае $J\sigma(a) = \sigma(a)J$. Следовательно, для $a \in g$ операторы $\sigma(a)$ принадлежат алгебре $L[H]$, и отображение $\pi : g \to L[H], \pi(a) := \sigma(a)$ можно рассматривать как линейное представление вещественной алгебры g над кватернионным модулем H.

Представление π находится в условиях теоремы 2, и, следовательно, неприводимо.

Теоретически полученные результаты позволяют использовать описание неприводимых представлений комплексных алгебр для конструкии *всех* неприводимых представлений вещественных алгебр над кватернионными модулями. Однако есть второй алгоритм позволяет довольно просто построить соответствующее кватернионное представление, то в первом алгоритме присутствует достаточно сложная проблема существования антиинволюции, коммутирующей со всеми операторами комплексного представления. И если в некоторых случаях эту проблему можно решить непосредственно (задача, вообще говоря, алгоритмизируема), то в общем случае этот вопрос остается открытым. Таким образом, на практике мы не можм утверждать, что у нас имеется информация о *всех* неприводимых представлениях данной вещественной алгебры, чем осуществлять процесс ее комплексификации и затем кватернионизации полученных представлений.

Отметим, что установленная связь между представлениями имеет и теоретическое приложение, в частности, позволяет получить аналог теоремы Бернсайда для вещественной алгебры линейных операторов над кватернионным модулем.

Как известно, всякое неприводимое семейство линейных операторов над комплексным пространством порождает асю алгебру операторов над этим пространством. Выясним, имеет ли место такое утверждение для неприводимого семейства линейных операторов над кватернионными модулями.

Пусть $A_1, A_2, \dots A_s$ — неприводимое семейство операторов в $L[H]$, $g = \mathbb{R}\langle A_1, A_2, \dots A_s\rangle = \{A_1 R_{\alpha_1} + A_2 R_{\alpha_2} + \dots + A_s R_{\alpha_s} \,|\, \alpha_t \in \mathbb{R}, t = 1, \dots s\}$.Тогда, очевидно,

$$g(\mathbb{C}) = \mathbb{C}\langle A_1, A_2, \dots A_s\rangle = \{A_1 R_{\alpha_1} + A_2 R_{\alpha_2} + \dots + A_s R_{\alpha_s} \,|\, \alpha_t \in \mathbb{C}, t = 1, \dots s\}.$$

(a)Пусть $A_1, A_2 \dots A_s$ являются неприводимым семейством также и над над $H^{\mathbb{C}}$. Тогда по теореме Бернсайда $g_{\mathbb{C}} = L[H^{\mathbb{C}}]$.Так как $L[H^{\mathbb{C}}] = L[H] + R_i L[H]$, то $L[H]$ является вещественной формой алгебры $L[H^{\mathbb{C}}]$. Для алгебры g имеем $g \subset L[H]$ и $\dim_{\mathbb{R}} g = \dim_{\mathbb{C}} g_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} L[H]$, поэтому $g = L[H]$.

(b) Пусть $A_1, A_2, \dots A_s$ является приводимым семейством над $H^{\mathbb{C}}$. Тогда по теореме 1 $H^{\mathbb{C}} = U \dotplus U_j$. Так как множество операторов $A_1, A_2, \dots A_s$ неприводимо над U и U_j, то $g_{\mathbb{C}} = L[U] \dotplus L[U_j]$, и, очевидно, $g_{\mathbb{C}} \neq L[H^{\mathbb{C}}]$. Следовательно, $g \neq L[H]$. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Семейство линейных операторов, неприводимых над конечномерным кватернионным модулем H, порождает вещественную алгебру всех линейных операторов над этим модулем тогда и только тогда, когда это же семейство операторов неприводимо над комплексным модулем $H^{\mathbb{C}}$.*

3. Матрицы операторов над кватернионными модулями

Для технического решения задачи о конструкции неприводимых представлений вещественных алгебр над кватернионными модулями по известному представлению коплексной алгебры необходимо знать, как связаны между собою матрицы линейных операторов над кватернионными и комплексными модулями. Ниже предлагается решение этой задачи для некоторых классов линейных операторов.

Пусть H — кватернионный модуль, $A \in L[H]$. Оператороp A, рассматриваемый над правым комплексным модулем (комплексным пространством) $H^{\mathbb{C}}$, называется *симплектическим образом* оператора A и обозначается A^s. Очевидно, что $A^s \in L[H]$.

В условиях конечномерности модуля H найдем связь между матрицами операторов A и A^s в соответствуюих модулях.

Пусть $\dim H = n$, и векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образуют базис в модуле H. Тогда векторы $e_1, e_2, \ldots, e_1 j, e_2 j, \ldots, e_n j$ образует базис в комплексном пространстве $H^{\mathbb{C}}$. (Заметим, что $\dim H^{\mathbb{C}}=$ 2n). В базисе $\{e_1\}_{t=1}^n$ оператору A соответствует матрица $A \in M_n(H)$, причем, $A = B + C_j$, где $B = \|b_{st}\|, C = \|c_{st}\| \in M_n(\mathbb{C})$. Найдем матрицу оператора A^s в базисе $\{e_t, e_t j\}_{t=1}^n$. Как показывают вычисления,

$$Ae_t = \sum e_s(b_{st} + c_{st}j) = \sum e_s b_{st} + \sum e_s j \overline{c_{st}};$$
$$A(e_t j) = (Ae_t)j = \sum e_s(b_{st} + c_{st}j)j = \sum e_s(-c_{st}) + \sum e_s j \overline{b_{st}}.$$

Следовательно, искомая матрица оператора имеет вид:

$$A^s = \begin{bmatrix} \mathcal{B} & -\mathcal{C} \\ \overline{\mathcal{C}} & \overline{\mathcal{B}} \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}). \tag{2}$$

Пусть теперь $A \in L[H^{\mathbb{C}}]$. Известно, что всякий комплексно линейный оператор $A \in L[H^{\mathbb{C}}]$ представим в виде $A = A_0 + A_1 R_i$, где $A_0, A_1 \in L[H], R_i x := xi$. Отметим, что оператор R_i коммутирует с любым комплексно линейным оператором.

Найдем связь между матрицами операторов A, A_0, A_1 над $H^{\mathbb{C}}$.

В базисе $\{e_t\}_{t=1}^n$ оператору A_r соответствует матрица $\mathcal{A}_r \in M_n(H), (r = 0, 1)$, причем, $\mathcal{A}_r = \mathcal{B}_r + \mathcal{C}_r j$, где $\mathcal{B}_r, \mathcal{C}_r \in M_n(\mathbb{C})$. Найдем матрицу оператора A в базисе $\{e_t, e_t j\}_{t=1}^n$. Очевидно, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1^s + \mathcal{A}_2^s i$, и с учетом раветства (2) искомая матрица имеет вид :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1 i & -\mathcal{C}_0 - \mathcal{C}_1 i \\ \overline{\mathcal{C}_\prime} + \overline{\mathcal{C}_\infty} i & \overline{\mathcal{B}_\prime} + \overline{\mathcal{B}_\infty} i \end{bmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Обратно, пусть известна матрица оператора $A = A_0 + A_1 R_i \in L[H^{\mathbb{C}}]$ в базисе $\{e_t, e_t j\}_{t=1}^n$: $\begin{pmatrix} \mathcal{T}_1 & \mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_2 & \mathcal{T}_2 \end{pmatrix}$. В этом случае матрицы оператора $A_0, A_1 \in L[H]$ восстанавливаются по формулам $\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_1 + \overline{\mathcal{T}}_2) - \frac{1}{2}(\mathcal{S}_1 - \overline{\mathcal{S}}_2), \mathcal{A}_1 = \frac{-i}{2}(\mathcal{T}_1 - \overline{\mathcal{T}}_2) + \frac{i}{2}(\mathcal{S}_1 + \overline{\mathcal{S}}_2)$.

Заключение

Таким образом, в работе изучена структура представлений комплексификации произвольной вещественной алгебры, порожденных неприводимыми представлениями данной алгебры. Доказана теоретическия и практическая (не всегда полная) возмодность использования неприводимых представлений комплексных алгебр для описания конечномерных неприводимых представлений вещечтвенных алгебр над кватернионными модулями.

Список литературы

1. *Adler S.L.* Quaternionic Quantum Mechanic and Quantum Fields.-Oxford University Press.-1955.-P.1-563.

2. *Soffer A.,Horwitz L.P* B*-algebra representations in quaternionic Helbert module//Journal of Math.Phisics.-1983.-Vol.24(12).-P.2780-2782.
3. *Kulkarni S.H.* Representation of real B*-algebra on a quaternionic Hilbert space//Proceed.Amer.Math.Soc.-1994.-Vol.121,N2.-P.505-509.
4. *Ostrovskyi V.,Samoilenko Yu.* Introduction to the Theory Of Representation of Finitely Presented*-Algebras.-Rev.Math.Math.Phys.- 1999. - Vol.11. - P.-1-261.
5. *Scolarici G.,Solombino L.* Quaternionic group Representation and their classifications//Second Meeting on Quaternionic Structures in Mathematic and Physics, Roma.-6-10Septeber 1999.-P.365-375.